arXiv:2304.00807v1 [math.AP] 3 Apr 2023

退化局部感知与消耗趋化模型的大时间收敛

菲利普·洛朗科

Abstract. 对于运动性函数在 $[0,\infty)$上为 C^1-光滑、在零点处为零且在$(0,\infty)$上为正的情形，证明了具有退化局部感知与消耗的趋化模型的全局弱解收敛至稳态。此外，还给出了排除大时间极限为空间均匀状态的条件。这些结果推广了此前针对在零点处按代数规律趋于零的运动性函数所得的结论，并采用了截然不同的方法。

1. Introduction

具有局部感知与消耗的趋化系统

$$\partial_t u = \Delta(u\gamma(v)) \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times\Omega\,, \tag{1.1a}$$
$$\partial_t v = \Delta v - uv \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times\Omega\,, \tag{1.1b}$$
$$\nabla(u\gamma(v))\cdot\mathbf{n} = \nabla v\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega\,, \tag{1.1c}$$
$$(u,v)(0) = (u^{in},v^{in}) \quad \text{in} \quad \Omega\,, \tag{1.1d}$$

描述了密度为 $u\geq 0$ 、生活在浓度为 $v\geq 0$ 的营养物上的细胞群体的动力学；在营养物依赖型扩散和营养物诱导的趋化偏向 [12]的共同作用下，该群体在空间中移动。其中，Ω是 $\mathbb{R}^n$的有界区域，$n\geq 1$，且运动性 γ 是一个在$(0,\infty)$上为正的光滑函数。不同于具有局部感知的经典Keller-Segel系统

$$\partial_t u = \Delta(u\gamma(v)) \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times\Omega\,, \tag{1.2a}$$
$$\partial_t v = \Delta v - v + u \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times\Omega\,, \tag{1.2b}$$
$$\nabla(u\gamma(v))\cdot\mathbf{n} = \nabla v\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega\,, \tag{1.2c}$$
$$(u,v)(0) = (u^{in},v^{in}) \quad \text{in} \quad \Omega\,, \tag{1.2d}$$

日期：2023年4月4日。2020年数学主题分类。35B40 - 35K65 - 35K51 - 35Q92。关键词与短语。收敛 - 李雅普诺夫泛函 - 趋化-消耗模型 - 局部感知。

在该模型中，变量 v 表示由细胞产生的信号化学物质的浓度，如(1.2b)所述； [11], 而在模型(1.1)中，营养物则按照(1.1b)中的非线性吸收项 $-uv$ 被细胞消耗。因此，两个模型的动力学预计会有显著差异。一方面，方程(1.2)的解的长期行为尚未得到全面理解。当 $\gamma'(s) \le 0 \le s\gamma'(s) + \gamma(s)$时，定理1.5] 在 [3, 中证明了$(u,v)$收敛到空间齐次稳态$(\|u^{in}\|_1/|\Omega|, \|u^{in}\|_1/|\Omega|)$， $s \ge 0$；当 $\gamma' \ge 0$ 时，类似结果也可能成立。然而，这种简单的动力学不太可能是普遍情形，因为在某些区域中，方程(1.2)存在非恒定平稳解，见 $[18, 20]$。此外，尽管对于一大类运动性函数 γ [1–5, 7, 9, 17, 19, 25, 26],，方程(1.2)的解是全局且有界的，但无界解确实存在 $[6, 8, 10]$。

对于方程 (1.1)，情况相对简单一些，因为其定常解集合很容易确定，并且可以看出它在很大程度上取决于 $\gamma(0)$ [16,24] 的取值。事实上，如果 $\gamma(0) > 0$，那么方程 (1.1) 的唯一稳态是空间均匀解 $(M, 0)$、 $M \ge 0$，并且它们吸引动力学 [13,16]。相比之下，当 $\gamma(0) = 0$ 时，方程 (1.1) 的定常解集合要大得多，因为对于任意（足够光滑的）函数 $\bar{u}$，$(\bar{u}, 0)$ 都是方程 (1.1) 的一个定常解。尽管存在如此丰富的定常解，Winkler 在 [22,24] 中证明，方程 (1.1) 的动力学在大时间极限下只选择唯一的一个稳态：更准确地说，给定

$$\gamma \in C^1([0,\infty)), \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma > 0 \quad \text{on} \quad (0,\infty), \tag{1.3}$$

满足

$$\gamma \in C^3((0,\infty)) \quad \text{and} \quad \liminf_{s\to 0} \left\{ \frac{\gamma(s)}{s^\alpha} \right\} > 0 \tag{1.4}$$

对于某个 $\alpha \ge 1$，以及适当构造的方程 (1.1) 的全局弱解 (u,v) [21, 23],，存在一个非负可测函数 u_∞，使得

$$(u(t), v(t)) \quad \text{converges to} \quad (u_\infty, 0) \quad \text{in a suitable topology}$$

若满足以下附加假设之一：

(I)： $n \in \{1, 2\}$ 且 $\gamma'(0) > 0$，见 [22, 定理 1.4],

(II)： $n \ge 3$ 且存在 $\alpha' \in (1, 2]$ 使得

$$\limsup_{s\to 0} \left\{ s^{2-\alpha'} |\gamma''(s)| \right\} < \infty, \tag{1.5}$$

见 [24,定理 1.2]。

注意，对于 $\alpha \ge 1$，函数 $\gamma(s) = s^\alpha$、 $s \ge 0$满足 (1.3)、(1.4) 和 (1.5)，其中 $\alpha' = \min\{\alpha, 2\}$。

此外，还对 γ、 u^{in} 和 v^{in} 给出了条件，以保证 u_∞ 不是常数，见 [22,定理 1.5]和 [24, 推论 1.4]。

本文旨在证明，只需对 γ 作出假设 (1.3)，这些结果便依然成立，而无须假设 γ 在零附近具有代数行为。然而，下文所确立的 u 分量的收敛所采用的拓扑，比 [22, 24] 中所得结果所采用的拓扑更弱。在

此外，本文采用了不同的方法，从而为 (1.1) 的稳定性问题提供了另一种视角。我们首先陈述收敛结果。

定理 1.1. 假设 γ 满足 (1.3)，并考虑 $(u^{in}, v^{in}) \in L^\infty_+(\Omega\ \mathbb{R}^2)$，其中 E_+ 表示巴拿赫格 E的正锥。若 (u, v) 是 (1.1) 的全局弱解，且其含义见下文定义 2.1，则

$$A_\infty(x) := \int_0^\infty (u\gamma(v))(s,x)\ \mathrm{d}s \in H^1_+(\Omega)\,, \qquad x \in \Omega\,,$$

and

$$u(t) \rightharpoonup u_\infty := \Delta A_\infty + u^{in} \quad in \quad H^1(\Omega)' \quad as \quad t \to \infty\,, \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|v(t)\|_p = 0\,, \qquad p \in [1,\infty)\,. \tag{1.7}$$

此外，$\langle u_\infty,\ \vartheta\rangle_{(H^1)',\ H^1} \geq 0$ 对所有 $\vartheta \in H^1_+(\Omega)$ 以及 $\langle u_\infty,\ 1\rangle_{(H^1)',\ H^1} = \langle u^{in},\ 1\rangle_{(H^1)',\ H^1}$均成立。

我们研究 (1.1) 的整体弱解的长期行为时所采用方法的基石，是观察到系统 (1.1) 的动力学在某种程度上编码于辅助函数的动力学之中

$$A(t,x) := \int_0^t (u\gamma(v))(s,x)\ \mathrm{d}s\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega\,,$$

该辅助函数具有若干有趣的性质，这些性质汇总于引理 2.3 中。其中，$t \mapsto A(t,x)$ 对几乎处处的 $x \in \Omega$ 均为非递减函数，且轨迹 $\{A(t):\ t \geq 0\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中有界；这两个性质尤其保证了定理 1.1 中引入的函数 A_∞ 定义良好，并且属于 $H^1(\Omega)$。此外，对于所有 $t \geq 0$，函数 $A(t)$ 是椭圆方程的一个变分解

$$-\Delta A(t) = u^{in} - u(t) \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad \nabla A(t)\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega\,,$$

因此，$u(t)$的大时间行为由 $A(t)$的行为所驱动。

本文的第二项贡献秉承了 [24, 定理 1.3] 的思路，并对式 (1.1) 中 u 分量的初始条件 u^{in} 与最终状态 u_∞ 在 $H^1(\Omega)'$ 中的距离给出了估计。定理陈述需要引入额外的符号，现定义如下：对于 $z \in H^1(\Omega)'$，我们设$\langle z\rangle := \langle z,1\rangle_{(H^1)',H^1}/|\Omega|$，并注意到

$$\langle z\rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega z(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{for} \quad z \in H^1(\Omega)' \cap L^1(\Omega).$$

现在，对于 $z \in H^1(\Omega)'$，我 们定义 $\mathcal{K}[z] \in H^1(\Omega)$ 为满足以下条件的唯一（变分）解 t，其中 $\langle z\rangle = 0$ o

$$-\Delta\mathcal{K}[z] = z \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad \nabla\mathcal{K}[z]\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega\,, \tag{1.8a}$$

满足

$$\langle\mathcal{K}[z]\rangle = 0\,. \tag{1.8b}$$

然后我们在 $H^1(\Omega)'$ 上选取如下范数$\|\cdot\|_{(H^1)'}$：

$$\|z\|_{(H^1)'} := \|\nabla\mathcal{K}[z-\langle z\rangle]\|_2 + |\langle z\rangle|\,, \qquad z \in (H^1)(\Omega)'.$$

命题 1.2. 假设 γ 满足 (1.3)，并考虑 $(u^{in}, v^{in}) \in L^\infty_+(\Omega\ \mathbb{R}^2)$。若 (u,v) 是下文定义 2.1 意义下的 (1.1) 的全局弱解，且 u_∞ 表示由定理 1.1 给出的 $u(t)$ 在$H^1(\Omega)'$ 中的弱极限，其中 $t \to \infty$，则

$$\|u_\infty - u^{in}\|^2_{(H^1)'} \le \|u^{in}\|_\infty \|v^{in}\|_1 \|\gamma'\|_{L^\infty(0,\|v^{in}\|_\infty)}\,. \tag{1.9}$$

特别是，如果

$$\|u^{in}\|_\infty \|v^{in}\|_1 \|\gamma'\|_{L^\infty(0,\|v^{in}\|_\infty)} < \|u^{in} - \langle u^{in}\rangle\|^2_{(H^1)'}\,, \tag{1.10}$$

那么 u_∞ 不是常数。

命题 1.2 的一个直接推论是：给定 $u^{in} \in L^\infty_+(\Omega)$，满足 $u^{in} \not\equiv \langle u^{in}\rangle$，且 $v^{in} \in L^\infty_+(\Omega)$ 足够小，则相应的方程 (1.1) 的全局弱解 (u,v) 的第一分量具有一个非恒定极限。关于 $L^\infty(\Omega)$ 中 v^{in} 所需小量的定量估计由 (1.10) 给出，具体为

$$\|v^{in}\|_\infty \|\gamma'\|_{L^\infty(0,\|v^{in}\|_\infty)} < \frac{\|u^{in} - \langle u^{in}\rangle\|^2_{(H^1)'}}{|\Omega| \|u^{in}\|_\infty}\,.$$

这一结果显然与如下事实有关：具有初始条件 $(u^{in}, 0)$ 的方程 (1.1) 的解 (u,v) 是平稳解 $(u,v) = (u^{in}, 0)$，如前所述。

2. 证明

首先，我们明确本文所采用的方程 (1.1) 的全局弱解的概念。这里强调，由于 $\gamma(0) = 0$，方程 (1.1a) 是退化的，因此我们不能期待 u 具有很高的正则性。

定义 2.1. 假设 γ 满足 (1.3)，并考虑 $(u^{in}, v^{in}) \in L^\infty_+(\Omega\ \mathbb{R}^2)$。方程组 (1.1) 的全局弱解是一对非负函数 (u,v)，满足

$$\begin{aligned} &u \in C_w([0,\infty), H^1(\Omega)') \cap L^\infty((0,\infty), L^1_+(\Omega))\,,\\ &v \in C([0,\infty), L^1_+(\Omega)) \cap L^\infty((0,\infty)\times\Omega) \cap L^2_{\rm loc}([0,\infty), H^1(\Omega))\,,\\ &u\sqrt{\gamma(v)} \in L^2_{\rm loc}([0,\infty), L^2(\Omega))\,, \end{aligned}$$

其满足

$$\begin{aligned} \langle u(t), \vartheta(t)\rangle_{(H^1)',H^1} - \int_\Omega u^{in}\vartheta(0)\ {\rm d}x &= \int_0^t \int_\Omega u(s)\gamma(v(s))\Delta\vartheta(s)\ {\rm d}x{\rm d}s\\ &\quad + \int_0^t \langle u(s), \partial_t\vartheta(s)\rangle_{(H^1)',H^1}\ {\rm d}s \end{aligned}$$

对于 $\vartheta \in L^2((0,t)\ H^2_N(\Omega)) \cap W^{1,\,2}((0,t)\ H^1(\Omega))$ 以及 $t \ge 0$，其中

$$H^2_N(\Omega) := \{z \in H^2(\Omega)\ :\ \nabla z \cdot \mathbf{n} = 0 \quad on\ \ \partial\Omega\}\,,$$

以及

$$\int_\Omega (v(t)\vartheta(t) - v^{in}\vartheta(0))\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega \nabla v(s)\cdot\nabla\vartheta(s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_0^t\int_\Omega (uv)(s)\vartheta(s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s = \int_0^t\int_\Omega v(s)\partial_t\vartheta(s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

对于 $\vartheta \in L^2((0,t)\ H^1(\Omega)) \cap L^\infty((0,t)\ \times\Omega)$ 和 $t \geq 0$。

此处我们不讨论存在性问题，相关结果请参见 [21–23]，其中主要假设是 γ 在零点以代数方式趋于零。在非退化情形下，$\gamma > 0$ 在 $[0,\infty)$ 上成立，特别是这意味着 $\gamma(0) > 0$，此时也有存在性结果，参见 [14–16]。

现在固定满足 (1.3) 的 γ，并考虑 $(u^{in}, v^{in}) \in L^\infty_+(\Omega\ \mathbb{R}^2)$，以及 (1.1) 的一个全局弱解 (u,v)，其意义见定义 2.1。为识别 (u,v) 的大时间极限，我们首先汇集 (1.1)、u 和 v的非负性以及比较原理所显然推出的结论。

引理 2.2。对于 $t \geq 0$,

$$\langle u(t)\rangle = M := \langle u^{in}\rangle \quad and \quad \|v(t)\|_\infty \leq V := \|v^{in}\|_\infty\,. \tag{2.1}$$

此外,

$$\int_0^\infty \|(uv)(t)\|_1\,\mathrm{d}t \leq \|v^{in}\|_1\,. \tag{2.2}$$

证明。我们对 (1.1a) 关于空间和时间积分，并利用无通量边界条件 (1.1c)，得到 (2.1) 中的第一个恒等式。类似地，由 (1.1b) 和 (1.1c) 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v(t)\|_1 + \int_0^t \|(uv)(s)\|_1\,\mathrm{d}s = \|v^{in}\|_1\,, \qquad t \geq 0\,, \tag{2.3}$$

由此可直接推出 (2.2)。最后，我们利用比较原理，由 (1.1b)、¯(1.1c) 以及 uv 的非负性推得 $v(t,x) \leq V$ 对于 $(t,x) \in [0,\infty)\ \times\Omega$ 成立，从而完成 (2.1) 的证明。□

现在我们定义辅助函数

$$A(t,x) := \int_0^t (u\gamma(v))(s,x)\,\mathrm{d}s\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega\,,$$

并在接下来的引理中讨论其性质。

引理 2.3. 函数 A 属于 $L^\infty((0,\infty)\ H^1(\Omega))$，并且

$$\|A(t)\|_1 \leq \|v^{in}\|_1\|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}\,, \qquad t \geq 0\,, \tag{2.4a}$$

$$\|\nabla A(t)\|_2^2 \leq \|u^{in}\|_\infty\|v^{in}\|_1\|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}\,, \qquad t \geq 0\,. \tag{2.4b}$$

此外，对于几乎处处的 $x \in \Omega$，$t \mapsto A(t,x)$ 是非递减函数，并且

$$A_\infty(x) := \sup_{t\ge 0}\{A(t,x)\} = \int_0^\infty (u\gamma(v))(s,x)\,\mathrm{d}s\,, \qquad x\in\Omega\,, \tag{2.5}$$

定义良好，且属于 $H^1_+(\Omega)$。此外，对于任意 $\vartheta \in H^1(\Omega)$，

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t)-A_\infty\|_2 = \lim_{t\to\infty} \int_\Omega \nabla\vartheta\cdot\nabla(A(t)-A_\infty)\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{2.6}$$

证明。由于 u 和 γ 均非负，

$$A(t_1,x)\le A(t_2,x)\,, \qquad 0\le t_1\le t_2\,,\ x\in\Omega\,,$$

而对于 $t\ge 0$，由 (1.3)、(2.1) 和 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}\|A(t)\|_1 &= \int_0^t\int_\Omega (u\gamma(v))(s,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s \le \|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}\int_0^t\int_\Omega (uv)(s,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\le \|v^{in}\|_1\|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}\,,\end{aligned}$$

这就证明了 (2.4a)。此外，由单调收敛定理，按 (2.5) 定义的函数 A_∞ 属于 $L^1_+(\Omega)$，且

$$\lim_{t\to\infty}\|A(t)-A_\infty\|_1 = 0\,. \tag{2.7}$$

接下来，由 (1.1a)、(1.1c) 以及 A 的定义可推得，对于 $t\ge 0$，

$$u(t)-\Delta A(t) = u^{in} \quad \text{in} \quad H^1(\Omega)'\,. \tag{2.8}$$

特别地，$A(t)-\langle A(t)\rangle = \mathcal{K}[u^{in}-u(t)]$ 属于 $H^1(\Omega)$，并且由 (2.8) 以及 $u(t)$ 和 $A(t)$ 的非负性可推得

$$\begin{aligned}\|\nabla A(t)\|_2^2 &= \langle -\Delta A(t), A(t)\rangle_{(H^1)',H^1}\\ &\le \langle u(t)-\Delta A(t), A(t)\rangle_{(H^1)',H^1} = \int_\Omega u^{in}A(t)\,\mathrm{d}x\\ &\le \|u^{in}\|_\infty\|A(t)\|_1\,.\end{aligned}$$

因此，由 (2.4a)，

$$\|\nabla A(t)\|_2^2 \le \|u^{in}\|_\infty\|v^{in}\|_1\|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}\,,$$

由此可得 (2.4b)。最后，通过弱紧性论证，我们由 (2.4b) 推得 A_∞ 的 H^1-正则性，而收敛 (2.6) 则由 (2.4a)、(2.4b) 和 (2.7) 立即得到。□

接下来，我们转而讨论 v 的收敛，并从一个经典的能量估计开始。由于 (1.1b) 右端非负，这里可以使用该估计。

引理 2.4. 对于 $t\ge 0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_2^2 + 2\|\nabla v\|_2^2 + 2\|v\sqrt{u}\|_2^2 = 0\,.$$

引理 2.5. 对于每个 $p \in [1, \infty)$,

$$\lim_{t\to\infty} \|v(t)\|_p = 0\,.$$

证明。引入 P : $= \mathcal{K}[u - M]$和 $P^{in} := \mathcal{K}[u^{in} - M]$, 我们观察到 $P = P^{in} - A$, 因此 t

$$\|\nabla P\|_2 \le \|\nabla P^{in}\|_2 + \|\nabla A\|_2 \le c_1 := \|u^{in}\|_2 + \sqrt{\|u^{in}\|_\infty \|v^{in}\|_1 \|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}}\,. \tag{2.9}$$

接下来，由 (1.8a) 和 (2.3) 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_1 = -\int_\Omega uv \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (M - \Delta P)v \,\mathrm{d}x = -M\|v\|_1 + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla P \,\mathrm{d}x\,.$$

因此，利用 (2.9) 和 H¨lder 不等式,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_1 + M\|v\|_1 \le \|\nabla v\|_2 \|\nabla P\|_2 \le c_1 \|\nabla v\|_2\,.$$

对时间积分后，我们得到

$$\|v(t)\|_1 \le \|v^{in}\|_1 e^{-Mt} + c_1 \int_0^t e^{M(s-t)} \|\nabla v(s)\|_2 \,\mathrm{d}s\,, \qquad t \ge 0\,. \tag{2.10}$$

现在，根据 H¨lder 不等式,

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{M(s-t)} \|\nabla v(s)\|_2 \,\mathrm{d}s &\le \left(\int_0^t e^{M(s-t)} \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \left(\int_0^t e^{M(s-t)} \|\nabla v(s)\|_2^2 \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\int_0^t e^{M(s-t)} \|\nabla v(s)\|_2^2 \,\mathrm{d}s\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

由于

$$2\int_0^\infty \|\nabla v(s)\|_2^2 \,\mathrm{d}s \le \|v^{in}\|_2^2$$

根据引理 2.4，我们由勒贝格控制收敛定理得出 t

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{M(s-t)} \|\nabla v(s)\|_2^2 \,\mathrm{d}s = 0\,.$$

因此,

$$\int_0^t e^{M(s-t)} \|\nabla v(s)\|_2 \,\mathrm{d}s = 0 \tag{2.11}$$

并且 (2.10) 和 (2.11) 推出

$$\lim_{t\to\infty} \|v(t)\|_1 = 0\,,$$

由此证明了引理 2.5 对 $p = 1$ 成立。为完成证明，我们结合上述收敛结果、(2.1) 和 H¨older 不等式。 □

得益于上述内容，a 经过分析，我们现在可以证明定理 1.1 和命题 1.2 .

定理 1.1 的证明。根据引理 2.3，定理 1.1 中引入的函数 A_∞ 定义良好，且属于 $H^1_+(\Omega)$。令 $u_\infty = u^{in} + \Delta A_\infty \in H^1(\Omega)'$，由 (2.8) 可知，对于 $t \ge 0$ 和 $\vartheta \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle u(t) - u_\infty, \vartheta\rangle_{(H^1)',H^1} &= \langle u(t) - u^{in} + u^{in} - u_\infty, \vartheta\rangle_{(H^1)',H^1} \\ &= \langle \Delta(A(t) - A_\infty), \vartheta\rangle_{(H^1)',H^1} \\ &= -\int_\Omega \nabla(A(t) - A_\infty)\cdot\nabla\vartheta \,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

并且，由于 (2.6)，上述恒等式的右端在 $t \to \infty$ 时趋于零。因此，我们证明了收敛 (1.6)，而收敛 (1.7) 已在引理 2.5 中得到证明。至于定理 1.1 末尾所述的 u_∞ 的性质，它们可由 (2.1)、非负性以及收敛 (1.6) 直接推出 □

命题 1.2 的证明。出发点是估计式 (2.4b) 和收敛 (2.6)，它们推出

$$\|\nabla A_\infty\|_2^2 \le \|u^{in}\|_\infty \|v^{in}\|_1 \|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}\,, \tag{2.12}$$

回忆 $V = \|v^{in}\|_\infty$ 由于根据定理 1.1 有 $\langle u_\infty\rangle = \langle u^{in}\rangle$，由 (2.12) 及 u_∞ 的定义可得

$$\|u_\infty - u^{in}\|_{(H^1)'}^2 = \|\nabla\mathcal{K}[u_\infty - u^{in}]\|_2^2 = \|\nabla A_\infty\|_2^2 \le \|u^{in}\|_\infty \|v^{in}\|_1 \|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}\,,$$

如 (1.9) 所述。

现在假设 (u^{in}, v^{in}) 满足 (1.10)。由 (1.9) 和 (1.10) 可得

$$\begin{aligned}\|u_\infty - \langle u^{in}\rangle\|_{(H^1)'} &= \|u_\infty - u^{in} + u^{in} - \langle u^{in}\rangle\|_{(H^1)'} \\ &\ge \|u^{in} - \langle u^{in}\rangle\|_{(H^1)'} - \|u_\infty - u^{in}\rangle\|_{(H^1)'} \\ &> \left[\|u^{in}\|_\infty \|v^{in}\|_1 \|\gamma'\|_{L^\infty(0,V)}\right]^{1/2} - \|u_\infty - u^{in}\rangle\|_{(H^1)'} > 0\,.\end{aligned}$$

因此，$u_\infty \ne \langle u^{in}\rangle$；注意到定理 1.1 中确立的性质 $\langle u_\infty\rangle = \langle u^{in}\rangle$ 排除了 u_∞ 与任何其他常数相同的可能性后，证明即告完成。□

ACKNOWLEDGMENTS

谨此感谢 Michael Winkler 就本文研究主题所进行的启发性（电子）讨论。本文部分工作是在印度理工学院鲁尔基分校数学系热情友好的接待期间完成的。

REFERENCES

[1] M. BURGER, PH. LAURENÇOT, AND A. TRESCASES, 《具有局部感知的趋化模型中的延迟爆破解》，伦敦数学会杂志（第2辑），103（2021年），第1596–1617页。[2] L. DESVILLETTES, Y.-J. KIM, A. TRESCASES, AND C. YOON, 《兼具整体存在性与聚集现象的对数趋化模型》，《非线性分析：现实世界应用》，50（2019年），第562–582页。

[3] L. Desvillettes, Ph. Laurençot, A. Trescases, and M. Winkler, 《描述具有局部感知的趋化过程的三角交叉扩散系统的弱解》, 《非线性分析》, 226（2023年）, 论文编号113153, 共26页。
[4] K. Fujie and J. Jiang, 《具有信号依赖型运动性的退化 Keller-Segel 型模型的经典解有界性》, 《应用数学学报》, 176（2021年）, 论文编号3, 共36页。[5] K. Fujie and J. Jiang, 《密度抑制型运动性斑图形成的 Keller-Segel 型模型的比较方法》, 《微积分与偏微分方程》, 60（2021年）, 论文编号92, 共37页。
[6] K. Fujie and J. Jiang, 《关于构造可诱导某些二维 Keller-Segel 系统无界解的非负初始数据的注记》, 《数学工程》, 4（2022年）, 论文编号045, 共12页。[7] K. Fujie and T. Senba, 《高维中具有局部感知的抛物-抛物型趋化系统解的整体有界性》, 《非线性》, 35（2022年）, 第3777–3811页。[8] ——, 高维局部感知趋化系统经典解的整体存在性与无限时间爆破, 《非线性分析》, 222（2022年）, 论文编号112987, 共7页。[9] J. Jiang, Ph. Laurençot, and Y. Zhang, 《具有密度抑制型运动性和营养物质消耗的趋化系统中的整体存在性、一致有界性与稳定化》, 《偏微分方程通讯》, 47（2022年）, 第1024–1069页。[10] H.-Y. Jin and Z.-A. Wang, 《具有信号依赖型运动性的 Keller-Segel 系统中的临界质量》, 《美国数学会会刊》, 148（2020年）, 第4855–4873页。
[11] E. F. Keller and L. A. Segel, 《从不稳定性角度看黏菌聚集的起始过程》, 《理论生物学杂志》, 26（1970年）, 第399–415页。[12] ——, 趋化性细菌的行波带：理论分析, 《理论生物学杂志》, 30（1971年）, 第235–248页。[13] Ph. Laurençot具有局部感知和消耗的趋化模型的大时间空间均匀性。预印本, 2023年。
[14] D. Li and J. Zhao具有信号依赖型运动性的趋化-消耗系统解的整体有界性与大时间行为, 《应用数学与物理杂志》, 72（2021年）, 第21页, 编号57。[15] G. Li and M. Winkler涉及信号依赖型运动性的 Keller-Segel-消耗系统的精细正则性分析。arXiv: 2206.13327, 拟发表于《应用分析》, 2022年。[16] ——, 涉及信号依赖型运动性的 Keller-Segel-消耗系统中的松弛, 《数学科学通讯》, 21（2023年）, 第299–322页。
[17] H. Li and J. Jiang局部感知趋化性的信号依赖型 Keller-Segel 模型弱解的整体存在性, 《非线性分析：现实世界应用》, 61（2021年）, 第14页, 编号103338。[18] C.-S. Lin, W.-M. Ni, and I. Takagi趋化系统的大振幅定常解, 《微分方程杂志》, 72（1988年）, 第1–27页。[19] Y. Tao and M. Winkler信号依赖型运动性对 Keller-Segel 型反应-扩散系统的影响, 《数学模型与方法及其应用科学》, 27（2017年）, 第1645–1683页。
[20] Z.-A. Wang and X. Xu密度抑制型运动性模型的稳态与斑图形成, 《工业与应用数学学会应用数学杂志》, 86（2021年）, 第577–603页。[21] M. Winkler在构造强退化迁移模型整体解中的 Moser-Trudinger 不等式应用, 《数学科学通报》, （2022年）, 第16页, 编号2250012。[22] ——,定量强抛物型最大值原理及其在涉及信号依赖型退化扩散的趋性型迁移-消耗模型中的应用。arXiv: 2209.12724, 拟发表于《亨利·庞加莱研究所分析非线性年刊》, 2022年。[23] ——, 描述迁移-消耗相互作用的强退化趋性型抛物系统的整体广义可解性, 《应用数学与物理杂志》, 74（2023年）, 第20页, 编号32。[24] ——, 迁移-消耗相互作用非线性扩散模型中普遍存在强交叉退化仍能实现稳定化。预印本, 2023年。[25] Y. Xiao and J. Jiang具有非单调信号依赖型运动性的全抛物型 Keller-Segel 系统中的整体存在性与一致有界性, 《微分方程杂志》, 354（2023年）, 第403–429页。

[26] C. YOON AND Y.-J. KIM,《福克-普朗克扩散作用下凯勒-西格尔模型的整体存在性与聚集》，《应用数学学报》，149（2017年），第101–123页。

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES (LAMA) UMR 5127, UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC, CNRS, F–73000CHAMBÉRY, FRANCE电子邮箱：philippe.laurencot@univ-smb.fr