超图与多复形上的霍普夫代数结构

Loïc Foissy

Univ. Littoral Côte d'Opale，UR 2597 LMPA，Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville，法国加莱 F-62100。电子邮箱：foissy@univ-littoral.fr

arXiv:2304.00810v1 [math.CO] 3 Apr 2023

摘要

利用物种与扭曲对象的形式体系，我们在超图上引入了两种共相互作用双代数结构，它们由两种诱导子超图的概念所诱导。我们研究了从超图到单变量多项式代数的相关唯一共相互作用双代数态射：在第一种情形下，这给出了与所考虑超图相关联的图的色多项式；在第二种情形下，我们得到了 Helgason 对超图色多项式的定义。借助特征标幺半群的作用，我们给出了关于该色多项式在 -1 处取值或其系数的结果的霍普夫代数证明。这使我们能够利用超图无环定向的各种概念，为这些对象的对极给出无重数公式。

混合两种诱导子超图的概念，我们得到第三种霍普夫代数，该代数最早由 Aguiar 和 Ardila 描述。我们得到否定性结果，表明不存在使其成为共相互作用双代数的第二个余积。尽管如此，仍可从这一结构得到一个多项式不变量，即 Aval、Kharagbossian 和 Tanasa 所描述的色多项式。

最后，我们研究 Iovanov 和 Jaiung 的多复形霍普夫代数，并使其成为一种共相互作用双代数；其商是前述超图共相互作用双代数之一。

关键词。双双代数；超图；色多项式；无环定向；多复形

AMS 分类。16T05 16T30 05C15 05C25

目录

1 超图的扭曲双代数 5

1.1 定义.5 1.2 超图的扭曲双代数.6 1.3 收缩-提取余乘积.8

2 多项式不变量 多项式不变量 1 **4**

2.1 色多项式.14 2.2 齐次多项式不变量.16 2.3 无环定向.19 2.4 反元.22 2.5 色多项式的系数.24 2.6 到准混洗代数的态射.26

3 多复形 **27**

3.1 定义.27 3.2 多复形上的霍普夫代数结构.28

引言

超图（这一名称由 Claude Berge 于六十年代提出）是图的推广，其中边可以包含任意数量的顶点。许多关于图的经典概念都可以推广到超图：子超图、着色、定向等，参见例如 [5, 7, 8, 18, 25, 26]。我们在此关注超图的霍普夫代数方面，并按照 [13] 中关于图所得结果的思路，将其应用于着色和定向。

我们首先构造四种分次连通的超图霍普夫代数，它们都基于由超图同构类生成的空间 $\mathcal{F}[\mathrm{H}]$。为方便起见，我们选择在物种 [20, 21], 的框架下开展研究，而不采用“经典”霍普夫代数；后者可通过应用 Aguiar 和 Mahajan 定义的玻色福克函子 [2]得到。请注意，应用着色福克函子[16]也可以得到这些霍普夫代数的着色版本。对于所有这些霍普夫代数，乘积都是超图的不交并。余积基于两种不同的诱导子超图概念：若 G 是一个超图，且 I 是 G的顶点集的一个子集，则诱导子超图 $G_{|_{\subset}I}$ 的边是包含于 I中的G 的边，而诱导子超图 $G_{|_{\cap}I}$ 的边则是 G 的边与 I的交集。由此可定义四种余积：对于 $(\curlywedge, \curlyvee) \in \{\subset, \cap\}^2$，余积$\Delta^{(\curlywedge,\ \curlyvee)}$ 对任意超图 G 的定义如下：

$$\Delta^{(\curlywedge,\curlyvee)}(G) = \sum_{I\subset V(G)} G_{|_{\curlywedge}I} \otimes G_{|_{\curlyvee}V(G)\setminus I},$$

其中 $V(G)$ 是 G的顶点集。例如，将具有 n个顶点且有一条包含所有顶点的唯一超边的超图记作 T_n，

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\subset,\subset)}(T_n) &= T_n \otimes 1 + 1 \otimes T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_1^k \otimes T_1^{n-k},\\
\Delta^{(\cap,\cap)}(T_n) &= T_n \otimes 1 + 1 \otimes T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_k \otimes T_{n-k},\\
\Delta^{(\cap,\subset)}(T_n) &= T_n \otimes 1 + 1 \otimes T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_k \otimes T_1^{n-k},\\
\Delta^{(\subset,\cap)}(T_n) &= T_n \otimes 1 + 1 \otimes T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_1^k \otimes T_{n-k}.
\end{aligned}$$

这两个余积 $\Delta^{(\subset,\ \subset)}$ 和 $\Delta^{(\cap,\ \cap)}$ 是余交换的，而 $\Delta^{(\cap,\ \subset)}$ 与 $\Delta^{(\subset,\ \cap)}$ 互为相反结构。所有这些霍普夫代数都包含 [13]的图的霍普夫代数。取商后，$\Delta^{(\subset,\ \subset)}$ 和 $\Delta^{(\subset,\ \cap)}$ 以 Δ 和Δ'的记号出现在近期论文 [10], 中。余积 $\Delta^{(\subset,\ \cap)}$ 在 [1] 中引入，并在 [4]中加以研究。

接下来，我们定义另外两个由收缩和提取构成的余积 $\delta^{(\subset)}$ 和 $\delta^{(\cap)}$。这是通过 [16]中介绍的收缩-提取余乘形式体系完成的。若 G是一个超图，且 $\sim$ 是 $V(G)$上的一个等价关系，我们用 $G/\sim$ 表示这样一个超图：其顶点集为$V(G)/\sim$，其边为 G的每条 e 边所对应的非平凡 $\pi_{\sim}(e)$，其中 $\pi_{\sim}:\ V(G) \longrightarrow V(G)/\sim$是典范满射。对于 $\curlywedge \in \{\subset, \cap\}$，我们用 $G\,|_{\curlywedge}\sim$ 表示由 $C \in V(G)/\sim$诱导的子图 $G_{|_{\curlywedge}C}$ 的不交并。最后，若每个 $G_{|_{\curlywedge}C}$ 都是连通超图，我们记作 $\sim\in \mathcal{E}_{\curlywedge}[G]$。于是我们可以定义

$$\delta^{(\curlywedge)}(G) = \sum_{\sim\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G]} G/\sim \otimes G\,|_{\curlywedge}\sim .$$

例如，若 $n \geqslant 2$,

$$\delta^{(\subset)}(T_n) = T_n \otimes T_1^n + T_1 \otimes T_n,$$
$$\delta^{(\cap)}(T_n) = \sum_{n=1k_1+\ldots+nk_n} \frac{n!}{1!^{k_1}\ldots n!^{k_n}k_1!\ldots k_n!} T_{k_1+\ldots+k_n} \otimes T_1^{k_1}\ldots T_n^{k_n}.$$

于是我们得到一个双双代数 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge,\ \curlywedge)}, \delta^{(\curlywedge)})$，也就是说：

- $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \delta^{(\curlywedge)})$ 是一个双代数。
- $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge,\ \curlywedge)})$ 是双代数$(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \delta^{(\curlywedge)})$上的右余模范畴中的一个双代数，其余作用为 $\delta^{(\curlywedge)}$。

特别地，这意味着相容性

$$(\Delta^{(\curlywedge,\curlywedge)} \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta^{(\curlywedge)} = m_{1,3,24} \circ (\delta^{(\curlywedge)} \otimes \delta^{(\curlywedge)}) \circ \Delta^{(\curlywedge,\curlywedge)},$$

其中

$$m_{1,3,24} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{F}[\mathbf{H}]^{\otimes 4} & \longrightarrow & \mathcal{F}[\mathbf{H}]^{\otimes 3} \\ a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4 & \longmapsto & a_1 \otimes a_3 \otimes a_2 a_4. \end{array} \right.$$

余积 $\delta^{(\subset)}$ 不同于 [10], 的余积 δ，这种差异源于收缩处理方式的不同：这里将收缩视为顶点集上的等价关系，而在 [10]中则将其视为边的收缩。我们没有为 $\Delta^{(\subset,\ \cap)}$找到合适的第二个余积，但我们对此得到了否定性结果（命题 2.7 和推论 2.8）。

这些结果带来了有趣的推论。令 $\curlywedge \in \{\subset, \cap\}$ 固定。 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$ 的多项式不变量是指从 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge,\ \curlywedge)})$ 到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta)$ 的任意霍普夫代数态射，其中 Δ 是如下定义的余积：

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X.$$

以下结果已在 [13, 11, 14]中证明：

1. 存在唯一的多项式不变量 $P_\curlywedge$，也就是说，存在一个从 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$ 到 $\mathbb{K}[X]$ 的映射，它同时兼容两种双代数结构，其中 $\mathbb{K}[X]$ 的第二个余积定义为 $\delta(X) = X \otimes X$。

2. 此外，任意多项式不变量都可以通过双代数 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \delta^{(\curlywedge)})$ 的特征所成幺半群 $\mathbf{Char}(\mathcal{F}[\mathbf{H}])$ 的作用 $\leftsquigarrow$ 从 $P_\curlywedge$ 得到。记 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge,\ \curlywedge)})$ 的多项式不变量集合为 $\mathcal{P}_\curlywedge$，则以下映射互为逆映射，构成两个双射：

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Char}(\mathcal{F}[\mathbf{H}]) & \longrightarrow & \mathcal{P}_\curlywedge \\ \lambda & \longmapsto & P_\curlywedge \leftsquigarrow_\curlywedge \lambda = (P_\curlywedge \otimes \lambda) \circ \delta^{(\curlywedge)}, \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_\curlywedge & \longrightarrow & \mathrm{Char}(\mathcal{F}[\mathbf{H}]) \\ \phi & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{F}[\mathbf{H}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ G & \longmapsto & \phi(G)(1). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3. $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge,\curlywedge)})$ 的对极记作 $S_\curlywedge$，其表达式为

$$S_\curlywedge = (P_{\curlywedge|X=-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta^{(\curlywedge)}.$$

我们在命题 2.1 中证明，若 $\curlywedge = \subset$，则对任意超图 G， $P_\subset(G)$ 是一个多项式，使得对任意 $N \geqslant 0$, $P_\subset(G)(N)$ 等于 G的 N-着色的数量；也就是说，它是满足以下条件的映射f: $V(G) \longrightarrow \{1, \ldots, N\}$: f 在 G的任何非平凡边上都不是常值；若 $\curlywedge = \cap$，则对任意超图 G， $P_\cap(G)$ 是一个多项式，使得对任意 $N \geqslant 0$, $P_\cap(G)(N)$ 等于

G 的 N-着色的数量，并且满足 f 在 G的每条超边上都是单射。多项式 $P_{\cap}(G)$ 实际上是图 $\Gamma(G)$ 的色多项式；该图由将 G的每条超边替换为具有相同顶点集的完全图得到。多项式 $P_{\subset}(G)$ 通常不是任何图的色多项式。它似乎最早见于 [18], , 另见[6, 9, 25, 27]。在 [10]中，它记作 $\chi_{E,\ V}$。由于缺少第二个余积，此方法无法应用于 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}],\ m,\ \Delta^{(\cap,\ \subset)})$。不过，仍可定义一个色多项式不变量 $P_{\cap,\ \subset}$，它在如下意义上起到 $P_{\curlywedge}$ 的作用：对任意超图 G,

$$P_{\cap,\subset}(G)(1) = P_{\subset}(G)(1) = P_{\cap}(G)(1) = \begin{cases} 1 \text{ if } G \text{ has no non trivial edge,} \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

我们在命题 2.1 中证明，该不变量计数的是满足以下条件的着色数量：对于 G 的任意超边， f 的最大值恰好取得一次。这就是 [3, 4] 的色多项式。

为了求出对极，我们需要考察 $P_{\curlywedge}$ 在 -1 处的取值。与图的情形（Stanley 定理）一样，这与无环定向有关。这里，无环定向是顶点上的一种偏拟序，并满足某些条件，详见定义 2.9。由此，我们得到 $P_{\subset}(G)(-1)$ 和 $P_{\cap}(G)(-1)$ 关于这些定向的解释（定理2.11），并据此给出 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}], m, \Delta^{(\cap,\ \cap)})$ 和 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}], m, \Delta^{(\subset,\ \subset)})$ 的对极的显式公式，详见推论 2.14。定理2.11 还给出了 $P_{\cap,\ \subset}(G)(-1)$ 的组合解释；借助 Takeuchi 公式，命题 2.16 描述了 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}], m, \Delta^{(\cap,\ \subset)})$ 的对极。

利用某个特征的逆元，我们为色多项式 $P_{\subset}(G)$ 的系数公式给出了新的证明，该公式见 [25, 27], 参见命题 2.18。我们还给出了关于 $\mathcal{F}[\mathrm{H}]$ 装饰版本的一些结果，其中装饰空间取值于一个交换且余交换双代数。这使得可以用拟混合代数替代 $\mathbb{K}[X]$ ，而替代色多项式的唯一双双代数态射见命题 2.20 和 2.21。它们同样基于图的着色。

本文最后一节 посвящ于多复形。这些对象在[19], 中引入，是图、多重图、超图、 Δ-复形和单纯复形的推广。我们证明， [19] 的双代数结构可以扩展为双双代数结构，并且 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}], m, \Delta^{(\subset,\subset)}, \delta^{(\subset)})$ 是该结构的一个商。因此，与两个余积都相容的多复形唯一多项式不变量，可通过底层超图的色多项式 $P_{\subset}$ 分解，从而可以给出多复形的对极和欧拉投影算子的公式。

致谢。作者感谢资助项目 ANR-20-CE40-0007代数组合学、重现、自由概率与歌剧代数。

记号0.1。 1. 我们用 $\mathbb{K}$ 表示一个零特征交换域。在该域上的任意向量空间均视为定义在 $\mathbb{K}$ 上。

2. 对任意 $N \in \mathbb{N}$，我们用 $[N]$ 表示集合 $\{1, \ldots, N\}$。特别地， $[0] = \varnothing$。

3. 若 (C, Δ) 是一个（余结合但不一定含幺的）余代数，我们用 $\Delta^{(n)}$ 表示 C 的第 n 次迭代余积： $\Delta^{(1)} = \Delta$ ，且若 $n \geqslant 2$,

$$\Delta^{(n)} = \left(\Delta \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(n-1)}\right) \circ \Delta^{(n-1)} : C \longrightarrow C^{\otimes(n+1)}.$$

4. 若 (B, m, Δ) 是单位元为 1_B、余单位为 ε_B的双代数，记其增广理想为 $B_+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon_B)$。我们在 B_+ 上定义余积如下：

$$\forall x \in B_+, \qquad \tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) - x \otimes 1_B - 1_B \otimes x.$$

˜那么 (B_+, Δ) 是一个余结合（不一定含幺）的余代数。

5. 设 P 是一个物种。对于任意有限集 X，由 P 与 X 相关联的向量空间记作 $\mathrm{P}[X]$。对于两个有限集之间的任意双射 $\sigma : X \longrightarrow Y$，由 P 与 σ 相关联的线性映射记作 $\mathrm{P}[\sigma] : \mathrm{P}[X] \longrightarrow \mathrm{P}[Y]$。物种的柯西张量积记作 $\otimes$：若 P 和 Q 是两个物种，则对于任意有限集 X，

$$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}[X] = \bigoplus_{X = Y \sqcup Z} \mathbf{P}[Y] \otimes \mathbf{Q}[Z].$$

若 $\sigma : X \longrightarrow Y$ 是两个有限集之间的双射，则

$$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}[\sigma] = \bigoplus_{X = Y \sqcup Z} \mathbf{P}[\sigma_{|Y}] \otimes \mathbf{Q}[\sigma_{|Z}].$$

扭曲代数（分别地，余代数、双代数）是对称幺半范畴中物种的一个代数（分别地，余代数、双代数），其张量积为柯西张量积。关于物种范畴中代数、余代数和双代数的详细内容及记号，参见[12, 16] 。

6. 设 V 是一个向量空间。在 [16, 定义 3.2],中定义的 V-着色 Fock 函子 $\mathcal{F}_V$，将任意物种 P 映为

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_V[\mathbf{P}] &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{coInv}(V^{\otimes n} \otimes \mathbf{P}[n]) \\
&= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{V^{\otimes n} \otimes \mathbf{P}[n]}{\mathrm{Vect}(v_1 \dots v_n \otimes \mathbf{P}[\sigma](p) - v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)} \otimes p \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n,\, p \in \mathbf{P}[n],\, v_1, \dots, v_n \in V)} \\
&= V^{\otimes n} \otimes_{\mathfrak{S}_n} \mathbf{P}[n].
\end{aligned}$$

当 $V = \mathbb{K}$ 时，我们得到 [2] 的玻色福克函子：

$$\mathcal{F}[\mathbf{P}] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{coInv}(\mathbf{P}[n]) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}[n]}{\mathrm{Vect}(\mathbf{P}[\sigma](p) - p \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n,\, p \in \mathbf{P}[n])}.$$

1 超图的扭曲双代数

1.1 定义

定义 1.1. 超图是一个族 $G = (V(G), E(G))$，其中 $V(G)$ 是一个有限集，称为 G 的顶点集，而 $E(G)$ 是 $\mathcal{P}(V(G))$ 的一个子集，称为 G 的边集。为简便起见，对于本文中讨论的任意超图 G，我们均假设：

- $\varnothing \in E(G)$。
- 对于任意 $x \in V(G)$，$\{x\} \in E(G)$。

若 G 是一个超图，我们将用以下符号表示其非平凡边的集合：

$$E^+(G) = \{e \in E(G) \mid |e| \geqslant 2\}.$$

在我们的假设下，

$$E(G) = E^+(G) \sqcup \{\varnothing\} \sqcup \{\{x\},\, x \in V(G)\}.$$

若 I 是一个有限集，我们将满足 $V(G) = I$ 的超图 G 所构成的集合记为 $\mathcal{H}[I]$ 。这定义了一个集合物种 $\mathcal{H}$。该集合物种的线性化记为 $\mathbf{H}$：对于任意有限集 I，

$$\mathbf{H}[I] = \mathrm{Vect}(\mathcal{H}[I]).$$

注 1.1. 1. 一个（简单）图是满足以下条件的超图 G：对于任意 $e \in E^+(G)$, $|e| = 2$。这定义了 $\mathcal{H}$ 的一个集合子种，记为 $\mathscr{G}_s$；也定义了 H 的一个子物种，记为 G_s。图的这一物种及其双代数结构见 [14, 16, 17]。

2. 如果 I 是一个基数为 n 的有限集，那么

$$|\mathcal{H}[I]| = 2^{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}} = 2^{2^n - n - 1}.$$

这是 de Bruijn 序列，在 OEIS [22] 中编号为 A016031。

$\lvert I\rvert$	1	2	3	4	5	6
$\lvert\mathcal{H}[I]\rvert$	1	2	16	2048	67108864	144115188075855872

以下是按顶点数 n 分类的超图同构类数量 h_n：

n	1	2	3	4	5	6
h_n	1	2	8	180	612032	200253854316544

这是 OEIS [22] 中的序列 A317794。

1.2 超图的扭曲双代数

现在，我们借助两种不同的诱导子超图概念，在 H 上定义四种扭双代数结构。

记号1.1. 1. 设 $G \in \mathcal{H}[X]$ 和 $I \subseteq X$。

(a) $G_{|\subset I}$ 是满足以下条件的超图：

$$V(G_{|\subset I}) = I, \qquad E(G_{|\subset I}) = \{e \in E(G) \mid e \subset I\}.$$

(b) $G_{|\cap I}$ 是满足以下条件的超图：

$$V(G_{|\cap I}) = I, \qquad E(G_{|\cap I}) = \{e \cap I \mid e \in E(G)\}.$$

Tha由于我们对超图施加的条件，$G_{|\subset I}$ 和 $G_{|\cap I}$ 都属于 $\mathcal{H}[I$].

2. 设 X 和 Y 是两个不相交集合，$G \in \mathcal{H}[X]$ 和 $G' \in \mathcal{H}[Y]$。那么 GG' 是满足以下条件的超图：

$$V(GG') = X \sqcup Y, \qquad E(GG') = E(G) \sqcup E(G').$$

这定义了 $\mathcal{H}[X \sqcup Y]$ 的一个元素。

引理 1.2。设 $\diagdown$, $\prec \in \{\cap, \subset\}$。

1. 设 G 为一个超图，且 $X \subseteq Y \subseteq G$。那么

$$(G_{|\diagdown Y})_{|\diagdown X} = G_{|\diagdown X}.$$

2. 设 G 是一个超图，且 I, J, $K \subseteq V(G)$ 满足 $V(G) = I \sqcup J \sqcup K$。那么

$$(G_{|\diagdown J \sqcup K})_{|\prec J} = (G_{|\prec I \sqcup J})_{|\diagdown J}.$$

证明。 1. 我们首先考虑 $\succ = \cap$ 的情形。那么

$$\begin{aligned} E((G_{|_\cap Y})_{|_\cap X}) &= \{e \cap X \mid e \in E(G_{|_\cap Y})\} \\ &= \{e \cap Y \cap X \mid e \in E(G)\} \\ &= \{e \cap X \mid e \in E(G)\} \\ &= E(G_{|_\cap X}). \end{aligned}$$

所以 $(G_{|_\cap Y})_{|_\cap X} = G_{|_\cap X}$。现在来考虑 $\succ = \subset$ 的情形。

$$\begin{aligned} E((G_{|_\subset Y})_{|_\subset X}) &= \{e \in E(G_{|_\subset Y}) \mid e \subset X\} \\ &= \{e \in E(G) \mid e \subset X,\, e \subset Y\} \\ &= \{e \in E(G) \mid e \subset X\} \\ &= E(G_{|_\subset X}). \end{aligned}$$

所以 $(G_{|_\subset Y})_{|_\subset X} = G_{|_\subset X}$。

2. 根据第一点，若 $\succ = \prec$，则 $(G_{|_\succ J \sqcup K})_{|_\prec J}$ 和 $(G_{|_\prec I \sqcup J})_{|_\succ J}$ 均等于 $G_{|_\succ J}$。现在来考虑 $\succ = \cap$ 和 $\prec = \subset$ 的情形。

$$\begin{aligned} E((G_{|_\cap J \sqcup K})_{|_\subset J}) &= \{e \in E(G_{|_\cap J \sqcup K}) \mid e \subseteq J\} \\ &= \{e \cap (J \sqcup K) \mid e \in E(G),\, e \cap (J \sqcup K) \subseteq J\} \\ &= \{e \cap J \mid e \in E(G),\, e \cap K = \varnothing\}. \\ E((G_{|_\subset I \sqcup J})_{|_\cap J}) &= \{e \cap J \mid e \in E(G_{|_\subset I \sqcup J})\} \\ &= \{e \cap J \mid e \in E(G),\, e \subseteq I \sqcup J\} \\ &= \{e \cap J \mid e \in E(G),\, e \cap K = \varnothing\}. \end{aligned}$$

因此，$(G_{|_\cap J \sqcup K})_{|_\subset J} = (G_{|_\subset I \sqcup J})_{|_\cap J}$。由 I 和 K 的对称性，同样可得出 $\succ = \subset$ 和 $\prec = \cap$ 的证明。 □

命题 1.3. 令 $\succ$，$\prec \in \{\cap, \subset\}$。我们在$\mathbf{H}$上定义扭双代数结构 $(\mathbf{H}\ m,\ \Delta^{(\succ,\ \prec)})$ 如下：

- 对于任意 $G \in \mathcal{H}[X]$，以及任意 $G' \in \mathcal{H}[Y]$，$m_{X,\ Y}(G \otimes G') = GG'$。
- 对任意 $G \in \mathcal{H}[I \sqcup J]$，$\Delta^{(\succ,\ \prec)}_{I,\ J}(G) = G_{|_\succ I} \otimes G_{|_\prec J}$。

$\Delta^{(\succ,\ \prec)}$ 的余反余积为 $\Delta^{(\prec,\ \succ)}$。因此，$\Delta^{(\subset,\ \subset)}$ 和 $\Delta^{(\cap,\ \cap)}$ 是余交换的。

证明。 m 的乘积显然是结合的，其单位元为空超图 .

设 I、J、I'、J'为满足 $I' \sqcup J' = I \sqcup J$ 的有限集，并设 $G \in \mathcal{H}[I']$和 $G' \in \mathcal{H}[J']$。由于 GG' 的边包含于 I 或 J 中，

$$\begin{aligned} \Delta^{(\succ,\prec)}_{I,J} \circ m_{I',J'}(G \otimes G') &= (GG')_{|_\succ I} \otimes (GG')_{|TJ} \\ &= G_{|_\succ I \cap I'} G'_{|_\succ I \cap J'} \otimes G_{|_\prec J \cap I'} G'_{|_\prec J \cap J'} \\ &= (m_{I\cap I', I' \cap J'} \otimes m_{J \cap I', J \cap J'}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{H}[I\cap I']} \otimes c_{\mathbf{H}[J\cap I'],\mathbf{H}[I\cap J']} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{H}[J\cap J']}) \\ &\circ (\Delta^{(\succ,\prec)}_{I\cap I', J\cap I'} \otimes \Delta^{(\succ,\prec)}_{I\cap J', J\cap J'})(G \otimes G'), \end{aligned}$$

因此，$\Delta^{(\succ,\ \prec)}$ 是一个代数态射。

现在我们来证明 $\Delta^{(\diagdown,\ \diagup)}$ 的余结合性。如果 $G\in\mathcal{H}[I\sqcup J\sqcup K]$，根据引理 1.2 的第一项，

$$\begin{aligned}(\Delta^{(\diagdown,\diagup)}_{I,J}\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta^{(\diagdown,\diagup)}_{I\sqcup J,K}(G)&=(G_{|_\diagdown I\sqcup J})_{|_\diagdown I}\otimes(G_{|_\diagdown I\sqcup J})_{|_\diagup J}\otimes G_{|_\diagup K}\\&=G_{|_\diagdown I}\otimes(G_{|_\diagdown I\sqcup J})_{|_\diagup J}\otimes G_{|_\diagup K},\\(\mathrm{Id}\otimes\Delta^{(\diagdown,\diagup)}_{J,K})\circ\Delta^{(\diagdown,\diagup)}_{I,J\sqcup K}(G)&=G_{|_\diagdown I}\otimes(G_{|_\diagup J\sqcup K})_{|_\diagdown J}\otimes(G_{|_\diagup J\sqcup K})_{|_\diagup K}\\&=G_{|_\diagdown I}\otimes(G_{|_\diagup J\sqcup K})_{|_\diagdown J}\otimes G_{|_\diagup K}.\end{aligned}$$

根据引理 1.2 的第二项，$(G_{|_\diagdown I\sqcup J})_{|_\diagup J}=(G_{|_\diagup J\sqcup K})_{|_\diagdown J}$，因此 $\Delta^{(\diagdown,\ \diagup)}$ 是余结合的。这四个余积具有相同的余单位，定义为 $\varepsilon(\varnothing)=1$。 □

例 1.1。 对于任意至少含有两个元素的有限集 X，记顶点集为 X、且以 X 为唯一非平凡超边的超图为 T_X。对于任意非空且不相交的有限集 I 和 J，

$$\begin{aligned}&\Delta^{(\subset,\subset)}_{I,J}(T_{I\sqcup J})=\prod_{x\in I}T_{\{x\}}\otimes\prod_{y\in J}T_{\{y\}},&&\Delta^{(\cap,\cap)}_{I,J}(T_{I\sqcup J})=T_I\otimes T_J,\\&\Delta^{(\cap,\subset)}_{I,J}(T_{I\sqcup J})=T_I\otimes\prod_{y\in J}T_{\{y\}},&&\Delta^{(\subset,\cap)}_{I,J}(T_{I\sqcup J})=\prod_{x\in I}T_{\{x\}}\otimes T_J.\end{aligned}$$

注 1.2。 1. 如注 1.1 所示，图是超图，因此 H 包含图的一个子物种，它是一个扭曲子双代数。此外，如果 G 是一个图，

$$\Delta^{(\subset,\subset)}(G)=\Delta^{(\cap,\subset)}(G)=\Delta^{(\subset,\cap)}(G)=\Delta^{(\cap,\cap)}(G).$$

我们便得到 [14, 16, 17] 的图的扭双代数。

2. 设 $I_1,\dots,I_n$ 是不相交集合。对于任意超图 $G\in\mathcal{H}[I_1\sqcup\ldots\sqcup I_n]$，

$$\Delta^{(\diagdown,\diagdown)}_{I_1,\dots,I_n}(G)=G_{|_\diagdown I_1}\otimes\ldots\otimes G_{|_\diagdown I_n},$$

而

$$\Delta^{(\subset,\cap)}_{I_1,\dots,I_n}(G)=G_{|^{(1)}I_1}\otimes\ldots\otimes G_{|^{(n)}I_n},$$

其中对任意 $p\in[n]$，

$$V(G_{|^{(p)}I_p})=I_p,\qquad E(G_{|^{(p)}I_p})=\{e\cap I_p\mid e\in E(G),\ e\subseteq I_1\sqcup\ldots\sqcup I_p\}.$$

换言之，$G_{|^{(p)}I_p}$ 的非空超边是集合 $e\cap I_p$，其中 e 遍历 G中满足以下条件的超边

$$\max\{i\in[n]\mid e\cap I_i\neq\varnothing\}=p.$$

记号 1.2. 下文中，我们将简写 $\Delta^{(\diagdown)}$ 为 $\Delta^{(\diagdown,\ \diagdown)}$ 为 $\diagdown\in\{\subset,\ \cap\}$。

1.3 收缩-提取余乘

为定义图的双双代数，我们将在此采用 [16]的收缩-提取余乘形式体系。为此，我们引入带有连通性约束的超图收缩。

定义 1.4. 设 G 为一个超图。在 G 中的一条路径是顶点序列 $(x_0,\dots,x_k)$，其中每个顶点都属于G，且对任意 $i\in[k]$，都存在一条包含 x_{i-1} 和 x_i的超边 $e\in E(G)$。若对于任意 $x,y\in V(G)$，G 中都存在一条从 X 到 Y的路径，则称 G 是连通的。任意超图 G 都可以唯一地写成若干连通超图的乘积，这些连通超图称为 G的连通分支。

记号 1.3. 对于等价关系，我们采用 [16, 记号 2.1] 中的记号。对于任意有限集 X， $\mathcal{E}[X]$ 是 X上的等价关系集合。它按细化序构成偏序：若 $\sim,\sim'\in\mathcal{E}[X]$，则

$$\sim\leqslant\sim'\Longleftrightarrow(\forall x,y\in X,\ x\sim' y\Longrightarrow x\sim y).$$

若 $\sim'\in\mathcal{E}[X]$，则 $\{\sim\in\mathcal{E}[X]\mid\sim\leqslant\sim'\}$ 和 $\mathcal{E}[X/\sim']$ 之间存在双射，该映射将 $\sim$ 映至 $\eqcirc$，定义如下：

$$\overline{x\eqcirc y}\Longleftrightarrow x\sim y.$$

我们由此将 $\{\sim\in\mathcal{E}[X]\mid\sim\leqslant\sim'\}$ 和 $\mathcal{E}[X/\sim']$视为相同。

定义 1.5. 设 $G\in\mathcal{H}[X]$， $\sim\in\mathcal{E}[X]$ 并设 $\diagdown\in\{\subset,\ \cap\}$。

- 我们将超图 $G/\sim\in\mathcal{H}[X/\sim]$ 定义为

$$V(G/\sim)=X/\sim,\qquad\qquad E(G/\sim)=\{\pi_\sim(e)\mid e\in E(G)\},$$

其中 $\pi_\sim:\ X\longrightarrow X/\sim$ 是典范满射。根据我们在定义 ***1.1*** 中对超图施加的条件，这确实是一个超图。

- 我们将超图 $G\mid_\diagdown\sim\in\mathcal{H}[X]$ 定义为

$$G\mid_\diagdown\sim=\prod_{C\in X/\sim}G_{\mid_\diagdown C}.$$

- 我们称 $\sim\in\mathcal{E}_\diagdown[G]$，若对于 $\sim$的任意等价类 C， $G_{\mid_\diagdown C}$ 是连通的。

备注 1.3. 对于任意超图 G 和 $\sim\in\mathcal{E}[V(G)]$， $V(G\mid_\cap\sim)=V(G\mid_\subset\sim)=V(G)$，以及

$$E(G\mid_\cap\sim)=\{e\cap C\mid e\in E(G),\,C\in V(G)/\sim\},$$
$$E(G\mid_\subset\sim)=\{e\in E(G)\mid|\pi_\sim(e)|\leqslant 1\}.$$

根据定义，若 $\sim\in\mathcal{E}_\diagdown[G]$，则 $G_{\mid_\diagdown C}$ 的连通分支就是 $\sim$的等价类。

定理 1.6。 设 $\diagdown\in\{\cap,\ \subset\}$。对于任意超图 $G\in\mathcal{H}[X]$ 以及任意 $\sim\in\mathcal{E}[X]$，我们令 t

$$\delta_\sim^{(\diagdown)}(G)=\begin{cases}G/\sim\otimes G\mid_\diagdown\sim & if\ \ \sim\in\mathcal{E}_\diagdown[G],\\ 0\ otherwise.\end{cases}$$

这在 *[16],* 的意义下，在 $\mathbf{H}$ 上定义了一个与 m 和 $\Delta^{(\diagdown)}$ 相容的收缩-提取余乘。

我们先用一个组合引理来证明这个定理。

引理 1.7. 设 $G\in[\mathbf{X}]$ 且 $\diagdown\in\{\subset,\ \cap\}$。

1. 若 $\sim\leqslant\sim'\in\mathcal{E}[X]$，则超图 $(G/\sim')/\eqcirc$ 与 $G/\sim$ 相等。

2. 设 $\sim\in\mathcal{E}[X]$。则

$$\sim\in\mathcal{E}_\diagdown[G]\Longleftrightarrow the\ connected\ components\ of\ G\mid_\diagdown\sim\ are\ the\ classes\ of\ \sim.$$

3. 设 $\sim\in\mathcal{E}_\diagdown[G]$。 $G/\sim$ 的连通分支是 G 的连通分支在 $\pi_\sim$ 下的像。

4. 设 $\sim\leqslant\sim'\in\mathcal{E}[X]$。则

$$\sim'\in\mathcal{E}_\diagdown[G]\ and\ \eqcirc\in\mathcal{E}_\diagdown[G/\sim']\Longleftrightarrow\sim\in\mathcal{E}_\diagdown[G]\ and\ \sim'\in\mathcal{E}_\diagdown[G\mid_\diagdown\sim].$$

如果这一点成立， $(G/\sim')\mid_\diagdown\eqcirc=(G\mid_\diagdown\sim)/\sim'$。

证明。 1. 首先， $V((G/\sim')/\eqcirc) = V(G)/\sim = V(G/\sim)$ 其次，

$$E((G/\sim')/\eqcirc) = \{\pi_{\eqcirc} \circ \pi_{\sim'}(e) \mid e \in E(G)\} = \{\pi_{\sim}(e) \mid e \in E(G)\} = E(G/\sim).$$

因此，$(G/\sim')/\eqcirc = G/\sim$。

2. 根据 $\mathcal{E}_{\diagdown}[G]$的定义，立即可得$\pi_{\sim} = \pi_{\eqcirc} \circ \pi_{\sim'}$。

3. 根据连通性的定义，若 H 是连通超图且 $\sim \in \mathcal{E}[V(H)]$，则$H/\sim$ 是连通的。因此，若 H 是 G的一个连通分支，则 $\pi_{\sim}(H)$ 是连通的，因而包含在 $G/\sim$的某个连通分支中：我们证明了，$G/\sim$ 的连通分支是 G的连通分支在 $\pi_{\sim}$ 下的像的并集。

考虑定义在 $V(G)$ 上的等价关系 $\sim_G$：

$$x \sim_G y \text{ if there exists a path in } G \text{ from } x \text{ to } y.$$

根据定义， G 的等价类是 G的连通分支，且 $\sim_G \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G]$。由于 $\sim \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G]$，其等价类是连通的，因此包含在 G的单个连通分支中： $\sim_G \leqslant \sim$。因此，若 x 和 y 位于 G的两个不同连通分支中，则 $\pi_{\sim}(x) \neq \pi_{\sim}(y)$ ，并且 $G/\sim$中不存在同时包含这两个元素的超边： $G/\sim$ 的任何连通分支都包含在单个 $\pi_{\sim}(H)$中，其中 H 是 G的一个连通分支。

4. $\Longrightarrow$。设 C 是 $\sim'$的一个等价类。由于 $\sim \leqslant \sim'$， $(G\mid_{\diagdown}\sim)_{\mid_{\diagdown}C} = G_{\mid_{\diagdown}C}$也是连通的。因此，$\sim' \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G\mid_{\diagdown}\sim]$。

设 C 是 $\sim$ 的一个等价类，并设 x， $y \in C$。由于 $\eqcirc \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G/\sim']$, , 在$(G/\sim')\mid_{\diagdown} \eqcirc$中存在一条从 $\pi_{\sim'}(x)$到 $\pi_{\sim'}(y)$ 的路径。我们将这条路径记为 $(\pi_{\sim'}(x_0)$， ……， $\pi_{\sim'}(x_k))$。注意，所有元素 $\pi_{\sim'}(x_p)$ 都彼此 $\eqcirc$等价，因此所有元素x_p 都彼此 $\sim$等价。根据$G/\sim'$, 的定义，我们可以假设，对于任意 p，存在y_p 使得 $x_p \sim' y_p$，并且 G中有一条超边同时包含y_p 和x_{p+1}。由于 $\sim' \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G]$，对于任意 p ，存在一条从x_p 到y_p的路径，其中所有顶点都彼此 $\sim'$等价，因此也彼此 $\sim \leqslant \sim'$等价。因此，在 G 中存在一条从 x 到 y 的路径，其所有顶点都彼此 $\sim$等价： C 是连通的，这就证明了 $\sim \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G]$。

$\Longleftarrow$。设 $G \in$ [X] 和 $\sim \leqslant \sim' \in \mathcal{E}[X]$。我们来证明，若 $\sim \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G]$ 和 $\sim' \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G\mid_{\diagdown}\sim]$，则 $\sim' \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G]$ 和 $\eqcirc \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G/\sim']$。

设 C 是 $\sim'$的一个等价类。它在 $G\mid_{\diagdown}\sim$中是连通的，因此在 G中也连通：我们已证明 $\sim' \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G]$。设 $\pi_{\sim'}(C)$ 是 $\eqcirc$的一个等价类：由于 $\sim \leqslant \sim'$，我们可以假设 C 是 $\sim$的一个等价类。由于 $\sim \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G]$， C 是连通的。根据引理 1.7 的第三条， $\pi_{\sim'}(C)$ 在 $G/\sim'$, 中是连通的，因此 $\eqcirc \in \mathcal{E}_{\diagdown}[G/\sim']$。

现在来证明等价关系 $(G/\sim')\mid_{\subset} \eqcirc = (G\mid_{\subset}\sim)/\sim'$。由于 $\sim \leqslant \sim'$，

$$\begin{aligned} E((G/\sim')\mid_{\subset} \eqcirc) &= \{\pi_{\sim'}(e) \mid e \in E(G), \text{ all the elements of } \pi_{\sim'}(e) \text{ are } \eqcirc\text{-equivalent}\} \\ &= \{\pi_{\sim'}(e) \mid e \in E(G), \text{ all the elements of } e \text{ are } \sim\text{-equivalent}\} \\ &= E((G\mid_{\subset}\sim)/\sim'). \end{aligned}$$

最后，让我们证明等价关系 $(G/\sim')\mid_{\cap} \eqcirc = (G\mid_{\cap}\sim)/\sim'$。

$$\begin{aligned} E((G/\sim')\mid_{\cap} \eqcirc) &= \{\pi_{\sim'}(e) \cap C \mid e \in E(G),\ C \in V(G/\sim')/\eqcirc\} \\ &= \{\pi_{\sim'}(e) \cap \pi_{\sim'}(C) \mid e \in E(G),\ C \in V(G)/\sim\}, \\ E((G\mid_{\cap}\sim)/\sim') &= \{\pi_{\sim'}(e \cap C) \mid e \in E(G),\ C \in V(G)/\sim\}. \end{aligned}$$

设 $e \in E(G)$ 和 $C \in V(G)/\sim$。显然， $\pi_{\sim'}(e \cap C) \subseteq \pi_{\sim'}(e) \cap \pi_{\sim'}(C)$。设 $\overline{y} \in \pi_{\sim'}(e) \cap \pi_{\sim'}(C)$。存在 $y' \in e$ 和 $y'' \in C$，使得 $y \sim' y' \sim' y''$。由于 $\sim \leqslant \sim'$， $y \sim y' \sim y''$，因此 $y' \in C$和 $\overline{y} = \overline{y'} \in \pi_{\sim'}(e \cap C)$。我们证明了 $\pi_{\sim'}(e \cap C) = \pi_{\sim'}(e) \cap \pi_{\sim'}(C)$，这意味着$(G/\sim')\mid_{\cap} \eqcirc = (G\mid_{\cap}\sim)/\sim'$。

□

证明。（定理 1.6）。我们先证明 $\delta^{(\curlywedge)}$的余结合性，见 [16, 定义 2.2 的第三项]。设 $G\in$ [X] 和 $\sim\leqslant\sim'\in\mathcal{E}[X]$。那么，根据引理 1.7 的第一项，

$$(\delta^{(\curlywedge)}_{\sim}\otimes\mathrm{Id})\circ\delta^{(\curlywedge)}_{\sim'}(G)=\begin{cases}(G/\sim')/\backsimeq\otimes(G/\sim')\mid_{\curlywedge}\backsimeq\otimes G\mid_{\curlywedge}\sim' & \text{if } \sim'\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G] \text{ and } \backsimeq\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G/\sim']\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}G/\sim\otimes(G/\sim')\mid_{\curlywedge}\backsimeq\otimes G\mid_{\curlywedge}\sim' & \text{if } \sim'\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G] \text{ and } \backsimeq\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G/\sim']\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

$$(\mathrm{Id}\otimes\delta^{(\curlywedge)}_{\sim'})\circ\delta^{(\curlywedge)}_{\sim}(G)=\begin{cases}G/\sim\otimes(G\mid_{\curlywedge}\sim)/\sim'\otimes(G\mid_{\curlywedge}\sim)\mid_{\curlywedge}\sim' & \text{if } \sim\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G] \text{ and } \sim'\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G\mid_{\curlywedge}\sim],\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}G/\sim\otimes(G\mid_{\curlywedge}\sim)/\sim'\otimes G\mid_{\curlywedge}\sim' & \text{if } \sim\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G] \text{ and } \sim'\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G\mid_{\curlywedge}\sim],\\ 0 \text{ otherwise.}\end{cases}$$

根据引理 1.7 的第四项，

$$(\delta^{(\curlywedge)}_{\sim}\otimes\mathrm{Id})\circ\delta^{(\curlywedge)}_{\sim'}(G)=(\mathrm{Id}\otimes\delta^{(\curlywedge)}_{\sim'})\circ\delta^{(\curlywedge)}_{\sim}(G).$$

现在证明 $\delta^{(\curlywedge)}$的乘法性，见 [16, 命题 2.4]。设 $G\in\mathrm{H}[X]$ 和 $G'\in\mathrm{H}[Y]$，并且 $\sim\in\mathcal{E}[X\sqcup Y]$。若 $\sim\neq\sim_X\sqcup\sim_Y$，由于连通性条件，$\sim\notin\mathcal{E}_{\curlywedge}[GG']$，因此 $\delta^{(\curlywedge)}_{\sim}(GG')=0$。否则，$\sim\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[GG']$ 当且仅当 $\sim_X\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G]$ 和 $\sim_Y\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G']$，且若此条件成立：

$$(GG')/\sim=(G/\sim_X)(G'/\sim_Y),\qquad\qquad (GG')\mid_{\curlywedge}\sim=(G\mid_{\curlywedge}\sim_X)(G'\mid_{\curlywedge}\sim_Y).$$

这意味着 $\delta^{(\curlywedge)}_{\sim}(GG')=\delta^{(\curlywedge)}_{\sim_X}(G)\delta^{(\curlywedge)}_{\sim_Y}(G')$。

证明 $\delta^{(\curlywedge)}$ 与 $\Delta^{(\curlywedge)}$的相容性，见 [16, 命题 2.5]。设 $G\in\mathcal{H}[X\sqcup Y]$,$\sim_X\in\mathcal{E}[X]$ 和 $\sim_Y\in\mathcal{E}[Y]$。令 $\sim=\sim_X\sqcup\sim_Y\in\mathcal{E}[X\sqcup Y]$。

$$(\Delta^{(\curlywedge)}_{X/\sim_X,Y/\sim_Y}\otimes\mathrm{Id})\circ\delta^{(\curlywedge)}_{\sim}(G)$$

$$=\begin{cases}(G/\sim)_{|_{\curlywedge}X/\sim_X}\otimes(G/\sim)_{|_{\curlywedge}Y/\sim_Y}\otimes G\mid_{\curlywedge}\sim & \text{if } \sim\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G],\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(G_{|_{\curlywedge}X})/\sim_X\otimes(G_{|_{\curlywedge}Y})/\sim_Y\otimes(G\mid_{\curlywedge}\sim)_{|_{\curlywedge}X}(G\mid_{\curlywedge}\sim)_{|_{\curlywedge}Y} \text{ if } \sim_X\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G_{|_{\curlywedge}X}] \text{ and } \sim_Y\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G_{|_{\curlywedge}Y}]\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

$$=m_{1,3,24}\circ(\delta^{(\curlywedge)}_{\sim_X}\otimes\delta^{(\curlywedge)}_{\sim_Y})\circ\Delta^{(\curlywedge)}_{X,Y}(G).$$

最后，我们来证明 $\delta^{(\curlywedge)}$ 具有余单位，见 [16, 定义 2.2 的第四项]。对于任意超图 $G\in\mathcal{H}[X]$，我们令

$$\epsilon_\delta[X](G)=\begin{cases}1 \text{ if } E^+(G)=\varnothing,\\ 0 \text{ otherwise.}\end{cases}$$

若 $G\in\mathcal{H}[X]$，我们将 $\sim_0$ 记为 X 上的等价关系，其等价类是 G的连通分支。根据定义，$\sim_0\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G]$、$G\mid_{\sim_0}=G$ 和 $G/\sim_0$ 是不含非平凡边的超图。此外，若 $\sim\in\mathcal{E}_{\curlywedge}[G]$ 与 $\sim_0$不同，根据引理 1.7 的第二项，$G/\sim$ 至少有一个连通分支不止一个顶点，因此含有一条非平凡边：$\epsilon_\delta[X/\sim](G/\sim)=0$。因此，

$$(\epsilon_\delta\otimes\mathrm{Id})\circ\delta^{(\curlywedge)}(G)=G\mid_{\sim_0}+0=G.$$

设 $\sim_1$ 是 X上的等价关系。那么 $\sim_1 \in \mathcal{E}_{\curlywedge}[G]$、$G|_{\sim_1}$ 是不含非平凡边的超图，并且 $G/\sim_1 = G$。此外，若 $\sim \in \mathcal{E}_{\curlywedge}[G]$ 与 $\sim_1$不同，则其至少有一个等价类不止一个顶点，因此，由于该等价类是连通的，它含有一条非平凡边：$\epsilon_\delta[X](G|_\sim) = 0$。因此，

$$(\mathrm{Id} \otimes \epsilon_\delta) \circ \delta^{(\curlywedge)}(G) = G/\sim_1 + 0 = G.$$

因此，ϵ_δ 是 δ的余单位。 □

例 1.2。沿用例 1.1 中的记号，

$$\begin{aligned}
\delta^{(\subset)}(T_{\{x\}}) &= T_{\{x\}} \otimes T_{\{x\}},\\
\delta^{(\cap)}(T_{\{x\}}) &= T_{\{x\}} \otimes T_{\{x\}},\\
\delta^{(\subset)}(T_{\{x,y\}}) &= T_{\{x,y\}} \otimes T_{\{x\}}T_{\{y\}} + T_{\{\{x,y\}\}} \otimes T_{\{x,y\}},\\
\delta^{(\cap)}(T_{\{x,y\}}) &= T_{\{x,y\}} \otimes T_{\{x\}}T_{\{y\}} + T_{\{\{x,y\}\}} \otimes T_{\{x,y\}},\\
\delta^{(\subset)}(T_{\{x,y,z\}}) &= T_{\{x,y,z\}} \otimes T_{\{x\}}T_{\{y\}}T_{\{z\}} + T_{\{\{x,y,z\}\}} \otimes T_{\{x,y,z\}},\\
\delta^{(\cap)}(T_{\{x,y,z\}}) &= T_{\{x,y,z\}} \otimes T_{\{x\}}T_{\{y\}}T_{\{z\}} + T_{\{\{x,y,z\}\}} \otimes T_{\{x,y,z\}}\\
&\quad + T_{\{\{x,y\},\{z\}\}} \otimes T_{\{x,y\}}T_{\{z\}} + T_{\{\{x,y\},\{z\}\}} \otimes T_{\{x,z\}}T_{\{y\}} + T_{\{\{x,y\},\{z\}\}} \otimes T_{\{y,z\}}T_{\{x\}}.
\end{aligned}$$

因此，若 V 是一个向量空间，则可在 $\mathcal{F}_V[\mathrm{H}]$上得到四种双代数结构。作为向量空间，它们由线性 V-装饰超图的同构类生成，即由对 $(H、d_H)$的同构类生成，其中 H 是一个超图，$d_H\colon V(G) \longrightarrow V$是一个映射，所满足的关系使得这些装饰在任一顶点处均为线性的。乘积由不交并给出。余乘积在任意 V-装饰超图 G 上由下式给出

$$\Delta^{(\curlywedge,\curlyvee)}(G) = \sum_{I \subseteq V(G)} G_{|_\curlywedge I} \otimes G_{|_\curlyvee V(G)\setminus I},$$

其中 $(\curlywedge、\curlyvee) \in \{\subset、\cap\}^2$。此外，若 $(V、\cdot、\delta_V)$ 是一个不一定含单位元的交换且余交换双代数，则可得到两个双代数 $(\mathcal{F}_V[\mathcal{H}]、m、\Delta^{(\curlywedge)}、\delta^{(\curlywedge)})$，其中 $\curlywedge \in \{\subset\cap\}$。余积 $\delta^{(\curlywedge)}$ 在任意 V-装饰超图 G 上由下式定义

$$\delta^{(\curlywedge)}(G) = \sum_{\sim \in \mathcal{E}_\curlywedge[G]} G/\sim \otimes G|_\curlywedge{\sim},$$

其中，$G/\sim \otimes G|_\curlywedge{\sim}$ 的顶点按如下方式装饰：记顶点 $x \in V(G)$ 的装饰为 $d_G(x)$，则 $G/\sim$ 中任意顶点 $\mathrm{cl}_\sim(x)$ 都以元素 $d_G(y)'$ 的乘积进行装饰，其中 $y \in \mathrm{cl}_\sim(x)$；而顶点 $x \in V(G|_\sim) = V(G)$ 则以$d_G(x)''$装饰，并将每种装饰按多线性方式扩展。余单位 ϵ_δ 对任意混合图 G 的定义为

$$\epsilon_\delta(G) = \begin{cases} \prod_{x \in V(G)} \epsilon_V \circ d_G(x) \text{ if } E^+(G) = \varnothing, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

这一构造关于 V 具有函子性。

在 $V = \mathbb{K}$ 的特殊情形下，我们得到玻色福克函子 $\mathcal{F}[\mathrm{H}]$。作为一个向量空间，其一组基由超图的同构等价类给出。它具有四种双代数结构 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}], m, \Delta^{(\curlywedge,\ \curlyvee)})$ 以及两种双双代数结构 $(\mathcal{F}[\mathcal{H}], m, \Delta^{(\curlywedge)}, \delta^{(\curlywedge)})$，其中$\curlywedge, \curlyvee \in \{\subset, \cap\}$。

例 1.3。例如，若 T_n 是一个具有 n 个顶点且有一条包含所有顶点的唯一非平凡边的超图，则对于 $n \geqslant 2$，我们得到：

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\subset,\subset)}(T_n) &= T_n \otimes 1 + 1 \otimes T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_1^k \otimes T_1^{n-k}, \\
\Delta^{(\cap,\cap)}(T_n) &= T_n \otimes 1 + 1 \otimes T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_k \otimes T_{n-k}, \\
\Delta^{(\cap,\subset)}(T_n) &= T_n \otimes 1 + 1 \otimes T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_k \otimes T_1^{n-k}, \\
\Delta^{(\subset,\cap)}(T_n) &= T_n \otimes 1 + 1 \otimes T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} T_1^k \otimes T_{n-k}; \\
\delta^{(\subset)}(T_n) &= T_n \otimes T_1^n + T_1 \otimes T_n, \\
\delta^{(\cap)}(T_n) &= \sum_{n=1k_1+\ldots+nk_n} \frac{n!}{1!^{k_1} \ldots n!^{k_n} k_1! \ldots k_n!} T_{k_1+\ldots+k_n} \otimes T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n}.
\end{aligned}$$

注记 1.4. 在 [10], 中介绍了超图上的十二种余积。那里考虑的超图比我们的更一般，因为没有要求边的基数 $\leqslant 1$ 满足我们对边所施加的条件。我们将 $\mathbf{H}'$ 记为 [10] 的超图集合，将 $\mathcal{H}'$ 记为由同构类生成的空间。我们定义映射 θ，将 $\mathbf{H}'$ 映到 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$，方法是将任意 $G \in \mathcal{H}'$ 映为：

- 0 如果 G 含有空边或基数为 1 的边。
- 唯一满足 $E^+(\theta(G)) = E^+(G)$ 的超图 $\theta(G) \in \mathcal{H}$ （也就是说，我们将空集和所有单元素集添加为边）。

随后不难证明，θ 是从 $(\mathcal{H}'、\ m、\ \Delta)$ 到 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}]、\ m、\ \Delta^{(\subset,\subset)})$的双代数态射，也是从 $(\mathcal{H}'、\ m、\ \Delta')$ 到 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}]、\ m、\ \Delta^{(\subset,\cap)})$的双代数态射。利用对偶和补集运算得到的其他余积 Δ^d、Δ^c dans Δ^{cd} [10],，不太适用于我们的语境，因为我们对超图施加了限制。[10] 的余积 δ 不是 $\delta^{(\subset)}$，如 [10, 例 4.3]所示。

注记 1.5。我们假设，对于任意超图 G，$\varnothing$ 及单元素集 $\{v\}$，当 $v \in V(G)$ 时，都属于 $E(G)$。我们可以放宽这一假设，只要求 $\varnothing \in E(G)$。以这种方式得到的对象称为广义超图。广义超图可视为由集合 $\{0,\ 1\}$ 装饰的超图：对于任意广义超图 G，若其顶点 $v \in V(G)$ 满足 $\{v\} \in E(G)$，则将其装饰为 1，否则装饰为 0。因此，任取一个基为 $(e_0,\ e_1)$ 的二维交换且余交换双代数，便可在广义超图上得到两种双双代数结构。例如，选取如下定义的乘积和余乘积

$$\begin{aligned}
&e_0 \cdot e_0 = e_0, && e_0 \cdot e_1 = e_1, && \delta_V(e_0) = e_0 \otimes e_0, \\
&e_1 \cdot e_0 = e_1 && e_1 \cdot e_1 = e_1, && \delta_V(e_1) = e_1 \otimes e_1,
\end{aligned}$$

我们通过对子超图作归纳法，得到余积 $\Delta^{(\subset)}$ 和 $\Delta^{(\cap)}$；它们与收缩和提取的余积 $\delta^{(\subset)}$ 和 $\Delta^{(\cap)}$ 相互作用。对于收缩部分，当且仅当 X 中至少有一个元素属于某条基数为 1 的超边 G 时，将 $V(G)$ 的子集 X 识别后得到的顶点才属于一条基数为 1 的超边。

命题1.8。设 V 是一个（不一定含单位元的）交换且余交换的双代数。对于任意线性 V 装饰超图 $(G,\ d_G)$。下列映射是一个双双代数态射：

$$\Theta_V : \begin{cases} \mathcal{F}_V[\mathbf{H}] & \longrightarrow & \mathcal{F}[\mathbf{H}] \\ (G, d_G) & \longmapsto & \left(\prod_{x \in V(G)} \epsilon_V \circ d_G(x) \right) G. \end{cases}$$

证明。 余单位 $\epsilon_V\colon V \longrightarrow \mathbb{K}$ 是一个双代数态射。由函子性， Θ_V 是一个双双代数态射。

□

2 多项式不变量

2.1 色多项式

由 [14, 定理 3.9], 可知，若 $\curlywedge \in \{\cap, \subset\}$，则存在唯一的双双代数态射 $P_{\curlywedge}$ ，从双双代数 $(\mathcal{F}_V[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge)}, \delta^{(\curlywedge)})$ 映射到双双代数 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta, \delta)$，满足

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \qquad \delta(X) = X \otimes X.$$

我们来确定 $P_{\curlywedge}$。设 $G \in \mathcal{H}[X]$ 是一个非空超图。那么，同样由 [14, 定理 3.9],

$$P_{\curlywedge}(G) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\epsilon_{\delta}^{\otimes(k-1)} \circ \left(\tilde{\Delta}^{(\curlywedge)} \right)^{(k-1)} (G) \right) H_k(X),$$

其中 H_k 是第 k个希尔伯特多项式:

$$H_k(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

命题 2.1. 设 $\curlywedge \in \{\cap, \subset\}$。唯一的双双代数态射 $P_{\curlywedge}$ 从 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge)}, \delta^{(\curlywedge)})$ 映射到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta, \delta)$，将任意超图 G 映射为多项式 $P_{\curlywedge}(G)$，使得对任意$N \in \mathbb{N}_{>0}$:

- $P_{\cap}(G)(N)$ 是映射 $f\colon V(G) \longrightarrow [N]$ 的数量，满足：若 x 和 y 是超边 $e \in E(G)$中的两个不同元素，则 $f(x) \neq f(y)$。
- $P_{\subset}(G)(N)$ 是映射 $f\colon V(G) \longrightarrow [N]$ 的数量，满足对于任意非平凡边$e \in E(G)$, f 在 e上至少取两个不同的值。

证明。 我们得到

$$\begin{aligned} P_{\curlywedge}(G) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k \\ I_1,\dots,I_k \neq \varnothing}} \epsilon'_{\delta}(G_{|_{\curlywedge} I_1}) \dots \epsilon'_{\delta}(G_{|_{\curlywedge} I_k}) H_k(X) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{f:V(G)\longrightarrow[k] \\ f \text{ surjective} \\ \forall i \in [k],\, E^+(G_{|_{\curlywedge} f^{-1}(i)}) = \varnothing}} H_k(X). \end{aligned}$$

因此，对于任意 $N \in \mathbb{N}_{>0}$， $P_{\curlywedge}(G)(N)$ 是映射 $f\colon V(G) \longrightarrow [N]$ 的数量，满足对于任意$i \in [N]$, $E^+(G_{|_{\curlywedge} f^{-1}(i)}) = \varnothing$。

若 $S = \cap$，这等价于 $f^{-1}(i)$ 至多包含任意$e \in E^+(G)$的一个顶点，由此得到该命题的解释。若 $S = \subset$，这等价于任意 $f^{-1}(i)$ 都不包含任何 $e \in E^+(G)$，由此得到该命题的解释。

□

注记 2.1。 若 G 是一个图，则 $P_{\cap}(G)$ 和 $P_{\subset}(G)$ 都等于G的色多项式。

即使没有余积 δ，使 $(\mathcal{F}_V[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\subset,\ \cap)})$ 成为双双代数（见命题 2.7），我们仍可以定义一个霍普夫代数态射，从而恢复 [3, 4]的色多项式:

命题 2.2。 对于任意超图 G，存在一个多项式 $P_{\subset,\ \cap}(G)$ 使得对于任意$N \in \mathbb{N}_{>0}$，$P_{\subset,\ \cap}(G)(N)$ 等于映射 $f\colon\ V(G) \longrightarrow [N]$ 的数量，其中对于任意 $e \in E^+(G)$，最大值$\{f(x) \mid x \in e\}$恰好在 e的一个元素上取得。于是 $P_{\subset,\ \cap}\colon\ (\mathcal{F}[\mathbf{H}],\ m,\ \Delta^{(\subset,\ \cap)}) \longrightarrow (\mathbb{K}[X],\ m,\ \Delta)$ 是一个霍普夫代数态射。

证明。 映射 ϵ_δ 是 $\mathcal{F}_V[\mathbf{H}]$的特征。因此，我们得到一个双代数映射

$$P_{\subset,\cap}(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k \\ I_1,\ldots,I_k \neq \varnothing}} \epsilon_\delta(G_{|^{(1)}I_1}) \ldots \epsilon_\delta(G_{|^{(k)}I_k}) H_k(X).$$

换句话说，

$$P_{\subset,\cap}(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{f:V(G)\longrightarrow[k] \\ f \text{ surjective} \\ \forall i \in [k],\ E^+(G_{|^{(i)}f^{-1}(i)}) = \varnothing}} H_k(X).$$

根据构造，对于任意 $N \in \mathbb{N}_{>0}$、 $P_{\subset,\ \cap}(G)(N)$ 是满足对于任意 $i \in [N]$、 $E^+(G_{|^{(i)}f^{-1}(i)}) = \varnothing$的映射 $f\colon V(G) \longrightarrow [N]$ 的数量。这等价于：对于任意超边 e，$f^{-1}(\mathrm{max}(f_{|e})) \cap e$ 不包含 G的任何非平凡边，也就是说，它被约化为单个顶点。这给出了该命题的解释。

□

例 2.1。 我们使用例 1.3 中的记号。如果 $n \geqslant 2$,

$$P_\cap(T_n) = X(X-1)\ldots(X-n+1), \qquad P_\subset(T_n) = X^n - X.$$

以下是 $P_{\subset,\ \cap}(T_n)$的例子：

$$\begin{aligned}
P_{\subset,\cap}(T_1) &= X \\
&= H_1(X), \\
P_{\subset,\cap}(T_2) &= X(X-1) \\
&= 2H_2(X), \\
P_{\subset,\cap}(T_3) &= \frac{X(X-1)(2X-1)}{2} \\
&= 3H_2(X) + 6H_3(X), \\
P_{\subset,\cap}(T_4) &= X^2(X-1)^2 \\
&= 4H_2(X) + 24H_3(X) + 24H_4(X), \\
P_{\subset,\cap}(T_5) &= \frac{X(X-1)(2X-1)(3X^2-3X-1)}{6} \\
&= 5H_2(X) + 70H_3(X) + 180H_4(X) + 120H_5(X), \\
P_{\subset,\cap}(T_6) &= \frac{X^2(X-1)^2(2X^2-2X-1)}{2} \\
&= 6H_2(X) + 180H_3(X) + 900H_4(X) + 1440H_5(X) + 720H_6(X), \\
P_{\subset,\cap}(T_7) &= \frac{X(X-1)(2X-1)(3X^4-6X^3+3X+1)}{6} \\
&= 7H_2(X) + 434H_3(X) + 3780H_4(X) + 10920H_5(X) + 12600H_6(X) + 5040H_7(X).
\end{aligned}$$

$H_k(X)$ 在 $P_{\subset,\cap}(T_n)$ 中的系数见 OEIS [22] 的条目 A282507。

2.2 齐次多项式不变量

在本段中，我们固定 $\curlywedge \in \{\subset, \cap\}$。

命题 2.3。 下述映射是一个双代数映射，从 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge)})$ 到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta)$:

$$P_0 : \begin{cases} \mathcal{F}[\mathbf{H}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ G & \longmapsto & X^{|V(G)|}. \end{cases}$$

证明。 借助 [14, 命题 3.10 和 5.2], ，我们利用元素 $\mu \in \mathcal{F}[\mathbf{H}]_1^*$定义一个齐次态射$P_0$： $\mathcal{F}[\mathbf{H}] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$，其中该元素定义如下:

$$\mu(\bullet) = 1,$$

其中，是唯一一个只有一个顶点的超图。对于任意具有 n 个顶点的非空超图 G ，

$$\begin{aligned} P_0(G) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \circ \left(\Delta^{(\curlywedge)}\right)^{(k-1)}(G) \frac{X^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k} \mu(G_{|_{\curlywedge} I_1}) \ldots \mu(G_{|_{\curlywedge} I_k}) \frac{X^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k \\ |I_1|=\ldots=|I_k|=1}} \frac{X^k}{k!} \\ &= n! \frac{X^n}{n!} + 0 \\ &= X^n. \end{aligned}$$

□

注 2.2。 映射 P_0 也是一个霍普夫代数态射，从 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\subset,\cap)})$ 以及从$(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\cap,\subset)})$ 到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta)$。

我们用 $\leftsquigarrow_{\curlywedge}$ 表示由 $\delta^{(\curlywedge)}$ 诱导的幺半群 $\mathsf{Char}(\mathcal{F}[\mathbf{H}])$（即 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \delta^{(\curlywedge)})$ 的特征组成的幺半群）在从 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m\Delta^{(\curlywedge)})$ 到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta)$ 的霍普夫代数态射集合上的作用，其定义见 [14]: 对于任意 $\lambda \in \mathsf{Char}(\mathcal{F}[\mathbf{H}])$, 以及任意霍普夫代数态射 ϕ： $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge)}) \longrightarrow (\mathbb{K}[X], m, \Delta)$,

$$\phi \leftsquigarrow_{\curlywedge} \lambda = (\phi \otimes \lambda) \circ \delta^{(\curlywedge)}.$$

令 λ_0 为 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$ 的特征 $\epsilon_\delta \circ P_0$： 对任意超图 H,

$$\lambda_0(H) = P_0(H)(1) = 1.$$

由 [14, 推论 3.11],

$$P_0 = P_{\curlywedge} \leftsquigarrow_{\curlywedge} \lambda_0.$$

为了“反转”这个公式，我们来研究 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$ 的特征的逆元。

命题 2.4. 我们用 $\star_{\curlywedge}$ 表示由 $\delta^{(\curlywedge)}$ 在$\mathcal{F}[\mathbf{H}]$的特征集合上诱导的卷积。设 ζ是 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$的一个特征。

1. 当且仅当 $\zeta(\bullet) \neq 0$ 时， ζ 对 $\star$ 可逆。
2. 若 $\zeta(\bullet) = \pm 1$ 且对于任意超图 G, $\zeta(G) \in \mathbb{Z}$, 则对于任意超图 G, $\zeta^{\star_{\curlywedge}^{-1}}(G) \in \mathbb{Z}$。

证明。 1. 对于任意超图 G，记其连通分支数为 $\mathrm{cc}(G)$。令 $\mathbf{deg}(G) = |V(G)| - \mathrm{cc}(G)$。对于任意超图 G，对于任意 $\sim \in \mathcal{E}_c[G]$,

$$\mathrm{cc}(G/\sim) = \mathrm{cc}(G), \qquad |V(G/\sim)| = \mathrm{cl}(\sim),$$
$$\mathrm{cc}(G\,|\sim) = \mathrm{cl}(\sim), \qquad |V(G\,|\sim)| = |V(G)|,$$

其中，$\mathrm{cl}(\sim)$ 是 $\sim$的等价类数量。因此，$\mathbf{deg}$ 在双代数 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}], m, \delta^{(\diamond)})$ 上诱导出一个分次。该结果直接由引理 3 得出，其中类群元族缩减为 $\bullet$。

2. 我们对 $\mathbf{deg}(G)$ 使用归纳法。若 $\mathbf{deg}(G) = 0$，则 $\delta^{(\diamond)}(G) = G \otimes G$，由此可得

$$\zeta^{\star_\diamond -1}(G) = \frac{1}{\zeta(G)} = \pm 1.$$

假设该结果对任意度为 $< \mathbf{deg}(G)$ 的图 H 都成立。那么

$$\delta^{(\diamond)}(G) = G \otimes \bullet^{|V(G)|} + \bullet^{|\mathrm{cc}(G)|} \otimes G + \sum G' \otimes G'',$$

其中 G' 和 G'' 是超图，且 $\mathbf{deg}(G')$,$\mathbf{deg}(G'') < n$。由于 $\mathbf{deg}(G) > 0$，G 至少有一条超边，且 $\epsilon_\delta(G) = 0$。因此，我们令

$$\zeta^{\star_\diamond -1}(G) = -\frac{1}{\zeta(\bullet)^{|V(G)|}} \left(\frac{1}{\zeta(\bullet)^{\mathrm{cc}(G)}} \zeta(G) + \sum \zeta^{\star_\diamond -1}(G') \zeta(G'') \right) \in \mathbb{Z},$$

因为 $\zeta(\bullet) = \pm 1$ 和 $\zeta(G'')$，$\zeta^{\star_\diamond -1}(G') \in \mathbb{Z}$。 □

这可以应用于 λ_0:

定义 2.5。 我们将与 $\delta^{(\diamond)}$相关的卷积乘积$\star_\diamond$ 中 λ_0 的逆元记为 $\lambda_\diamond$。它存在，并且对于任意超图 G，$\lambda_\diamond(G) \in \mathbb{Z}$。

命题 2.6。 设 $\diamond \in \{\subset, \cap\}$。对于任意超图 G，$P_\diamond(G) \in \mathbb{Z}[X]$，且是一个度为 $|V(G)|$ 的首一多项式。此外，$P_\diamond(G)$ 中 $X^{|V(G)|-1}$ 的系数的相反数为:

- 当 $\diamond = \subset$ 时，G 中基数为 *2* 的超边数量。
- $\sum_{e \in E^+(G)} \binom{|e|}{2}$ *if* $\diamond = \cap$.

此外，对于任意超图 G,

$$P_\diamond(G) = \sum_{\sim \in \mathcal{E}_\diamond[G]} \lambda_\diamond(G\,|\sim) X^{\mathrm{cl}(\sim)}. \tag{1}$$

证明。 根据命题 2.4,

$$P_\diamond = P_0 \leftrightsquigarrow_\diamond \lambda_\diamond.$$

这就得到 **(1)**。对于任意超图 H，$\lambda_\diamond(H) \in \mathbb{Z}$，由此可得 $P_\diamond(G)$ 的系数为整数。此外，$\phi_\diamond(G)$ 的度小于 $|V(G)|$。唯一以度为 $|V(G)|$ 的项作贡献的 $\sim$，是 $V(G)$ 的等价关系；对于该等价关系，$G(|\sim) \backsimeq^{|V(G)|}$，因此 $\lambda_\diamond(G\,|_\diamond \sim) = 1$: P 是度为 $|V(G)|$ 的幺元。

对项 $X^{|V(G)|-1}$ 作出贡献的等价关系 $\sim \in \mathcal{E}_\diamond[G]$ 恰有一个基数为 2 的等价类 $\{x, y\}$，其余等价类均为单元素集合。连通性条件意味着 $G_{|_\diamond \{x,\ y\}}$ 应当是图。对于这样的等价关系 $\sim$,

$$\lambda_\diamond(G\,|_\diamond \sim) = \lambda_\diamond(\vdots \bullet^{|V(G)|-2}) = \lambda_\diamond(\vdots) = -1.$$

因此，$X^{|V(G)|-1}$ 的系数等于这类等价关系 $\sim$数量的相反数，也就是说，G 中满足 $G_{|_\diamond \{x,\ y\}} = \vdots$ 的对 $\{x, y\}$ 的数量。由此可直接得出结论。 □

关于 $P_{\curlywedge}(G)$ 的系数，更多结果见命题 2.18。

注记 2.3。 一般来说，$P_{\subset,\ \cap}(H) \notin \mathbb{Z}[X]$，例如，

$$P_{\subset,\cap}(T_3) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

命题 2.7。 不存在余积 $\delta^{(\subset,\ \cap)}$ 定义在 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$ 上，使得：

1. $(\mathcal{F}[\mathbf{H}],\ m,\ \Delta^{(\subset,\ \cap)},\ \delta^{(\subset,\ \cap)})$ 是一个双双代数。

2. $\delta^{(\subset,\ \cap)}$ 的余单位是 ϵ_δ。

3. 特征 λ_0 关于与 $\delta^{(\subset,\ \cap)}$ 相关联的卷积 $\star$ 可逆，并且对任意超图 G，$\lambda_0^{\star -1}(G) \in \mathbb{Z}$，

4. 对任意超图 G，我们可以写作

$$\delta^{(\subset,\cap)}(G) = \sum_{G_1,G_2\ hypergraphs} a_{G_1,G_2}(G) G_1 \otimes G_2,$$

其中 $a_{G_1,\ G_2}(G) \in \mathbb{Z}$ 对任意 $G_1,\ G_2$。

证明。设这样的 $\delta^{(\subset,\cap)}$ 存在。从 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\subset,\cap)}, \delta^{(\subset,\cap)})$ 到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta, \delta)$ 的唯一双双代数态射 ϕ，是满足 $\epsilon_\delta \circ \phi = \epsilon_\delta$ 的从$(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\subset,\cap)})$ 到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta)$ 的唯一双代数态射 ϕ：它是 $P_{(\subset,\cap)}$。态射 P_0 也是从 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\subset,\cap)})$ 到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta)$的双代数态射。记由 $\delta^{(\subset,\cap)}$诱导的作用为 $\leftsquigarrow$，

$$P_0 = P_{(\subset,\cap)} \leftsquigarrow \lambda_0.$$

由于 λ_0 可逆，$P_{(\subset,\ \cap)} = P_0 \leftsquigarrow \lambda_0^{\star -1}$。因此，对于任意超图 G，

$$P_{(\subset,\cap)}(G) = \sum_{G_1,G_2\ \text{hypergraphs}} a_{G_1,G_2}(G) \lambda_0^{\star -1}(G_2) X^{|V(G_1)|} \in \mathbb{Z}[X],$$

这对 $G = T_3$ 并非如此。 □

推论 2.8。 不存在余积 δ，使得 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}],\ m,\ \Delta^{(\subset,\ \cap)},\ \delta)$ 成为如下形式的双双代数

$$\delta(G) = \sum_{\sim \in \mathcal{E}'[G]} G/\sim \otimes G_{|_{\curlywedge}\sim},$$

其中 $\mathcal{E}'[G]$ 是 $V(G)$ 上的等价关系集合，且 $\curlywedge \in \{\cap,\ \subset\}$。

证明。 事实上，对于这样的余积：

- 与乘积的相容性意味着，若 $\sim \in \mathcal{E}'[G]$，则 $\sim$ 的任一等价类都包含于 G 的某个连通分支中。

- 余单位的存在性进而意味着，$V(G)$ 的等价关系属于 $\mathcal{E}'[G]$，其等价类为 G 的连通分支的等价关系也属于其中。因此，余单位为 ϵ_δ。

- 通过调整命题 2.4 的证明，我们得到关于 $\lambda_0^{\star -1}$ 的条件。 □

2.3 无环定向

若 G 是一个图，Stanley 定理 [23] 给出

$$P_{chr}(G)(-1) = (-1)^{|V(G)|}\sharp\{\text{acyclic orientations of } G\}.$$

我们在此将这一结果推广到 $P_{\subset}(G)$ 和 $P_{\cap}(G)$，其中 G 是超图。

记号 2.1. 设 X 为一个集合。回顾一下，X 上的拟序是 X上的一个传递且自反的关系$\leqslant$。若对任意 x、$y \in X$、$x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$（注意，$x \leqslant y$、$y \leqslant x$ 和 $x \neq y$可能成立），则称其为全序。若 $\leqslant$ 是 X上的一个拟序，我们在 X 上定义一个等价关系如下:

$$\forall x, y \in X, \qquad x \sim y \Longleftrightarrow x \leqslant y \text{ and } y \leqslant x.$$

$\sim$ 的等价类数记为cl($\leqslant$)。集合 $X/\sim$ 赋予一个序 b y

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in X/\sim, \qquad \overline{x} \preceq \overline{y} \Longleftrightarrow x \leqslant y.$$

定义 2.9. 设 G 为一个超图。

1. G 的一个无环定向是 $V(G)$ 上的一个拟序 $\leqslant$，满足:
   - 对于任意 $e \in E^+(G)$，$\leqslant_{|e}$ 都是 e上的全非平凡拟序。
   - 对于任意 x，$y \in V(G)$，若 $x < y$，则在 G 中存在一条路径 $(x_0, \ldots\ldots, x_k)$，满足 $x = x_0$、$y = x_k$ 和 $x_0 < \ldots < x_k$。
   - 对于任意 x，$y \in V(G)$，若 $x \leqslant y$且 $y \leqslant x$，则 x，y属于 G的同一条超边。
2. 设 $\leqslant$ 是 G的无环定向。
   - 我们称 $\leqslant$ 为全的，如果对于任意超边 e，$\leqslant_{|e}$ 都是一种序（因而是全序）。
   - 我们称 $\leqslant$ 为 *1*-极大，如果对于任意超边 e，$\leqslant_{|e}$ 的极大类都是单元素集合。

注记 2.4。设 G 是一个图，将其视为超图，并设 $\leqslant$ 是 G的一个无环定向。由第一点可知，对于 G 的任意超边 $\{x, y\}$，$x < y$ 或 $y < x$: 按照 $<$为任意超边 e 定向，即可得到 G 的一个定向。由于 G 的有向路径上的顶点按照 $<$严格递增，因此该定向中不存在环: 由此可得到通常意义下 G 的一个无环定向。反过来，若 G' 是通常意义下 G 的一个无环定向，我们就在 $V(G)$ 上定义偏序: 若在 G'中存在一条从 x 到 y 的有向路径，则 $x \leqslant y$。不难看出，这是超图 G的一个无环定向。因此，图 G 的无环定向（将其视为超图时）就是通常意义下的无环定向。

引理 2.10. 对于任意超图 G，对于任意 $\diagdown \in \{\subset, \cap\}$,

$$P_{\diagdown}(G)(-1) = \sum_{n=1}^{|V(G)|} \sum_{\substack{V(G)=I_1\sqcup\ldots\sqcup I_n \\ I_1,\ldots,I_n\neq\varnothing, \\ \forall p\in[n],\, E^+(G_{|_{\diagdown} I_p})=\varnothing}} (-1)^n,$$

and

$$P_{(\subset,\cap)}(G)(-1) = \sum_{n=1}^{|V(G)|} \sum_{\substack{V(G)=I_1\sqcup\ldots\sqcup I_n \\ I_1,\ldots,I_n\neq\varnothing, \\ \forall p\in[n],\, E^+(G_{|^{(p)}\, I_p})=\varnothing}} (-1)^n.$$

证明. 回忆一下， $P_{\diagdown}$：$(\mathcal{F}[\mathrm{H}], m, \Delta^{(\diagdown)}) \longrightarrow (\mathbb{K}[X], m, \Delta)$ 是一个双代数态射，因此也是一个霍普夫代数态射。设 G为一个超图。

$$P_{\diagdown}(G)(-X) = S \circ P_{\diagdown}(G) = P_{\diagdown} \circ S_{\diagdown}(G),$$

其中， $S_{\diagdown}(G)$ 是霍普夫代数 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}]$ 的对极， m、 $\Delta^{(\diagdown)})$ 以及 S 是 $(\mathbb{K}[X]$、 m、 $\Delta)$ 的对极。此外，根据 Takeuchi 公式 [24],

$$S_{\diagdown}(G) = \sum_{n=1}^{|V(G)|} \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n \\ I_1,\ldots,I_n \neq \varnothing}} (-1)^n G_{|_{\diagdown} I_1} \ldots G_{|_{\diagdown} I_n}.$$

因此,

$$\begin{aligned} P_{\diagdown}(G)(-1) &= \sum_{n=1}^{|V(G)|} \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n \\ I_1,\ldots,I_n \neq \varnothing}} (-1)^n P_{\diagdown}(G_{|_{\diagdown} I_1})(1) \ldots P_{\diagdown}(G_{|_{\diagdown} I_n})(1) \\ &= \sum_{n=1}^{|V(G)|} \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n \\ I_1,\ldots,I_n \neq \varnothing}} (-1)^n \epsilon_{\delta}(G_{|_{\diagdown} I_1}) \ldots \epsilon_{\delta}(G_{|_{\diagdown} I_n}) \\ &= \sum_{n=1}^{|V(G)|} \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n \\ I_1,\ldots,I_n \neq \varnothing, \\ \forall p \in [n],\, E^+(G_{|_{\diagdown} I_p}) = \varnothing}} (-1)^n. \end{aligned}$$

证明对于$P_{(\subset,\ \cap)}$是类似的。 □

定理2.11。 设 G 是一个超图。

$$\begin{aligned} P_{\subset}(G)(-1) &= \sum_{\leqslant \ acyclic\ orientation\ of\ G} (-1)^{\mathrm{cl}(\leqslant)}, \\ P_{\cap}(G)(-1) &= (-1)^{|V(G)|} |\{total\ acyclic\ orientations\ of\ G\}|, \\ P_{\subset,\cap}(G)(-1) &= \sum_{\leqslant \ 1\text{-}max\ acyclic\ orientation\ of\ G} (-1)^{\mathrm{cl}(\leqslant)}. \end{aligned}$$

证明。 设 $\leqslant$ 是超图 G 的一个无环定向，并设 $\leqslant'$ 是$\leqslant$的一个线性扩张： $\leqslant'$ 是 $V(G)$ 上的一个全拟序，满足

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V(G), \qquad & x \leqslant y \Longrightarrow x \leqslant' y, \\ & x \leqslant y \text{ and } y \leqslant x \Longleftrightarrow x \leqslant' y \text{ and } y \leqslant' x. \end{aligned}$$

设 I_1、.....、 I_k 是 $\sim'$ 的等价类，并以如下方式编号：对于任意 $(x_1$、.....、 $x_k) \in I_1 \times \ldots \times I_k$, $x_1 \leqslant' \ldots \leqslant' x_k$。对于任意非平凡超边 $e \in E(G)$， $\leqslant_{|e}$ 是一个非平凡的全拟序，因此等于 $\leqslant'_{|e}$ ，而后者又是非平凡的。由此可知，没有任何非平凡超边包含于 $\sim'$ 的单个等价类中：对于任意 $p \in [k]$, $E^+(G_{|_{\subset} I_k}) = \varnothing$。

若 $\leqslant$ 是集合 X上的拟序，则 $\leqslant$ 的一个线性扩张是定义在同一集合 X上的全拟序 $\leqslant'$ ，满足

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X, \qquad & x \leqslant y \text{ and } y \leqslant x \Longleftrightarrow x \leqslant' y \text{ and } y \leqslant' x, \\ & x \leqslant y \Longrightarrow x \leqslant' y. \end{aligned}$$

我们定义

$$\begin{aligned} A = \{(\leqslant,\ \leqslant') \mid \leqslant\ & G\text{的无环定向 } \leqslant' \ \leqslant\}\text{的线性扩张} B = \{(I_1,\ \ldots\ldots, \\ & I_k) \mid V(G) = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n\ I_1,\ \ldots\ldots,\ I_n \neq \varnothing\ \forall p \in [n]\ E^+(G_{|_{\subset} I_p}) = \varnothing\}, \end{aligned}$$

并且，沿用前述记号，我们得到一个映射

$$\iota : \begin{cases} A & \longrightarrow & B \\ (\leqslant, \leqslant') & \longrightarrow & (I_1, \ldots, I_k). \end{cases}$$

我们来证明 ι 是单射。若 $\iota(\leqslant, \leqslant') = \iota(\preceq, \preceq')$，则 $\leqslant'$ 和 $\preceq'$ 的等价类相同，且序也相同：$\leqslant'=\preceq'$。假设 $x < y$。由于 $\leqslant$ 是 G 的无环定向，存在一条路径 $(x = x_0, \ldots\ldots, x_k = y)$，位于 G 中，且满足 $x_0 < \ldots < x_k$。于是 $x_0 <' \ldots <' x_k$，所以 $x_0 \prec' \ldots \prec' x_k$。令 $p \in [k]$。x_{p-1} 和 x_p 属于同一条超边 $e \in E(G)$。由于 $\preceq_{|e}$ 是全拟序，$\preceq_{|e}=\preceq'_{|e}$，所以 $x_{p-1} \prec x_p$。由传递性，$x \prec y$。由对称性，$\prec=<$，所以 $\preceq=\leqslant$。

让我们证明 ι 是满射。令 $(I_1, \ldots, I_n) \in B$。我们在$V(G)$ 上定义全拟序 $\leqslant'$：若 $x \in I_p$ 且 $y \in I_q$，则 $x \leqslant' y$，其中 $p \leqslant q$。接着，我们在 $V(G)$上定义偏拟序 $\leqslant$：若存在路径 $(x = x_0, \ldots, x_k = y)$，且该路径位于 G 中，并且对任意 $p \in [k]$，$x_{p-1} <' x_p$，则 $x \leqslant y$。于是$\leqslant'$ 是 $\leqslant$ 的线性扩张，并且不难证明 $\leqslant$ 是G的无环定向。此外，$\iota(\leqslant, \leqslant') = (I_1, \ldots, I_k)$。

因此，

$$\begin{aligned} P_{\subset}(G)(-1) &= \sum_{(I_1,\ldots,I_n)\in B} (-1)^k = \sum_{(\leqslant,\leqslant')\in A} (-1)^{\mathrm{cl}(\leqslant)} \\ &= \sum_{\leq \text{ acyclic orientation of } G} \left(\sum_{\leq' \text{ linear extension of } \leq} (-1)^{|V(G)/\sim|} \right). \end{aligned}$$

令 $V(G)/\sim$ 上的偏序为由 $\leqslant$ 诱导的偏序，并令$(\preceq)$ 的哈斯图为其哈斯图。于是，根据对偶原理 [17, 推论 4.7], ，对于 G的任意无环定向 $\leqslant$，

$$\sum_{\leq' \text{ linear extension of } \leq} (-1)^{|V(G)/\sim|} = \mathrm{Ehr}_{Str}(\mathrm{Hasse}(\preceq))(-1) = (-1)^{\mathrm{cl}(\leqslant)},$$

其中 Ehr_{Str} 是严格 Ehrhart 多项式 [17, 命题 4.4]。因此，

$$P_{\subset}(G)(-1) = \sum_{\leqslant \text{ acyclic orientation of } G} (-1)^{\mathrm{cl}(\leqslant)}.$$

现在考虑 $P_{\cap}$。令

$$B_{\cap} = \{(I_1, \ldots, I_n) \mid V(G) = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n,\ I_1, \ldots, I_n \neq \varnothing,\ \forall p \in [n],\ E^+(G_{|_{\cap} I_p}) = \varnothing\}.$$

若 $(I_1, \ldots, I_k) \in B_{\cap}$，则对任意 I，$E^+(G_{|_{\cap} I_p}) \subset E^+(G_{|_{\subset} I_p}) = \varnothing$，都有 $(I_1, \ldots, I_k) \in B$。我们已证明 $B_{\cap} \subseteq B$。令 $A_{\cap} = \iota^{-1}(B_{\cap})$。若 $(\preceq, \preceq') \in A_{\cap}$，则对 G 的任意超边 e，以及 $\preceq'$ 的任意等价类 C，$C \cap e$ 是 $\varnothing$ 或为单元素集合。因此，$\preceq_{|e}=\preceq'_{|e}$（因为 $\preceq_{|e}$ 是全序），所以 $\preceq_{|e}$ 是一个全序：$\preceq$ 是 G 的全序无环定向。反过来，设 $\preceq$ 是 G 的全序无环定向，且 $\preceq'$ 是 $\preceq$ 的线性扩张。若 $x \sim'_y$，则 x 和 y 属于 G 的同一条超边，于是$x \sim'_{|e} y$，并且由于 $\sim_{|e}=\sim'_{|e}$ 是全序，$x = y$，最终 $\preceq'$ 是一个全序。因此，$I_1, \ldots, I_n$ 都是单元素集。显然，因此 $(I_1, \ldots, I_n) \in B_{\cap}$。我们得到

$$P_{\cap}(G) = \sum_{\leqslant \text{ total acyclic orientation of } G} (-1)^{\mathrm{cl}(\leqslant)}.$$

设 $\leqslant$ 是 G的全序无环定向。若 $x \sim y$，则 x 和 y 属于G的一个公共超边 e。由于 $\leqslant_{|e}$ 是一个全序，$x = y$，因此 $\leqslant$ 的等价类都是单元素集合，且 $\mathrm{cl}(\leqslant) = |V(G)|$，由此得证。

最后，我们来考虑 $P_{\cap,\subset}$。

$$B_{\cap,\subset}=\{(I_1,\ldots,I_n)\mid V(G)=I_1\sqcup\ldots\sqcup I_n,\ I_1,\ldots,I_n\neq\varnothing,\ \forall p\in[n],\ E^+(G_{|_\cap^{(p)}I_p})=\varnothing\}.$$

如果 $(I_1,\ldots,I_k)\in B_{\cap,\subset}$，那么对于任意的 I，$E^+(G_{|I_p})\subset E^+(G_{|^{(i)}I_p})=\varnothing$，都有 $(I_1,\ldots,I_k)\in B$。我们证明了 $B_{\cap,\subset}\subseteq B$。我们记 $A_{\cap,\subset}=\iota^{-1}(B_{\cap,\subset})$。如果 $(\preceq,\preceq')\in A_{\cap,\subset}$，那么对于任意的 p，对于包含在 $I_1\sqcup\ldots\sqcup I_p$ 中的任意超边 e，$e\cap I_p$ 要么为空，要么是一个单元素集合。因此，对于任意超边 e，e 的极大类（对于 $\preceq$ 或对于 $\preceq'$，因为它们在 e 上相同）是一个单元素集合，所以 $\preceq$ 是 1-极大的。反过来，设 $\preceq$ 是 G 的一个 1-极大无环定向，且 $\preceq'$ 是 $\preceq$ 的一个线性扩张。设 $1\leqslant p\leqslant n$，且 e 是 $G_{|_\cap^{(p)}I_p}$ 的一条非空超边。存在一条超边 f，使得 $f\subseteq I_1\sqcup\ldots\sqcup I_p$ 且 $e=f\cap I_p$。由于 $\preceq$ 是 1-极大的，f 的极大类是一个单元素集合，因此 $f\cap I_p$ 是一个单元素集合：由此可得 e 是平凡的，因此 $G_{|^{(p)}I_p}$ 没有非平凡边。因此，$(\preceq,\preceq')\in A_{\subset,\cap}$。最后得到

$$P_{\subset,\cap}(G)(-1)=\sum_{\preceqslant\text{ acyclic 1-max orientation of }G}(-1)^{\mathrm{cl}(\preceqslant)}.$$ □

我们再给出一种对 $P_\cap$ 的解释。

记号 2.2。设 G 是一个超图。我们将一个图 $\Gamma(G)$ 与 G 关联起来，其中 $V(\Gamma(G))=V(G)$，而 $E(\Gamma(G))$ 是满足以下条件的对 $\{x,y\}$ 的集合：存在 $e\in E(G)$，$\{x,y\}\subseteq e$。特别地，若 G 是一个图，则 $\Gamma(G)=G$。这定义了从 **H** 到简单图物种 $\mathbf{G}_s$ 的一个物种态射。

命题 2.12。映射 $\Gamma\colon\ (\mathbf{H},\ m,\ \Delta^{(\cap,\cap)},\ \delta^{(\cap)})\longrightarrow(\mathbf{G}_s,\ m,\ \Delta,\ \delta)$ 是带有收缩-提取余乘的扭双代数态射。此外，$P_\cap=P_{chr}\circ\mathcal{F}[\Gamma]$。

证明。显然，Γ 是一个代数态射。设 $G\in\mathcal{H}[X]$ 是一个超图，且 $I\subset X$。于是 $\Gamma(G_{|_\cap I})=\Gamma(G)_{|I}$。若 $\sim\in\mathcal{E}[X]$，则 $\sim\in\mathcal{E}_\cap[G]$ 当且仅当 $\sim\in\mathcal{E}_c[\Gamma(G)]$。此外，若此条件成立，

$$\Gamma(G/\sim)=\Gamma(G)/\sim,\qquad\qquad\Gamma(G\,|_\cap\sim)=\Gamma(G)\,|_\cap\sim\,.$$

这意味着 Γ 是一个余代数态射。因此，对于任意非幺交换双代数 V，映射 $\mathcal{F}_V[\Gamma]\colon\ \mathcal{F}_V[\mathbf{H}]\longrightarrow\mathcal{F}_V[\mathbf{G}]$ 是一个双双代数态射。特别地，在 $V=\mathbb{K}$ 的情形下，由于从 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$ 到 $\mathbb{K}[X]$ 的双双代数态射唯一，

$$P_\cap=P_{chr}\circ\mathcal{F}[\Gamma].$$ □

因此，根据 Stanley 定理：

命题 2.13。对于任意超图 G，

$$P_\cap(G)(-1)=(-1)^{|V(G)|}\sharp\{\textit{acyclic orientations of }\Gamma(G)\}.$$

注记 2.5. 对于任意超图 G，$P_\cap(G)$ 都是某个图的色多项式。对于 $P_\subset(G)$，通常并非如此。由例 2.1 可知，$P_\subset(T_n)=X^n-X$：若 $n\geqslant 3$，则它不是某个图的色多项式，因为这类多项式的非零系数组成一个连通序列。类似地，$P_{\subset,\ \cap}(G)$ 通常也不是某个图的色多项式，因为它们通常不具有整数系数。

2.4 反元

根据 [14,推论 2.3]:

推论 2.14. 对于 $\diagdown \in \{\cap,\ \subset\}$，记 $S_{\diagdown}$ 为 $(\mathcal{F}[\mathbf{H}],\ m,\ \Delta^{(\diagdown,\ \diagdown)})$ 的对极。对于任意超图 G,

$$S_{\subset}(G) = \sum_{\sim \in \mathcal{E}_{\subset}[G]} \left(\sum_{\leqslant\ acyclic\ orientation\ of\ G/\sim} (-1)^{\mathrm{cl}(\leqslant)} \right) G\mid_{\subset} \sim,$$
$$S_{\subset}(G) = \sum_{\sim \in \mathcal{E}_{\cap}[G]} (-1)^{\mathrm{cl}(\sim)} \sharp\{\leqslant\ acyclic\ orientation\ of\ G/\sim\} G\mid_{\cap} \sim .$$

对于 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}], m, \Delta^{(\subset,\cap)})$ 的对极，我们无法使用双双代数的形式体系，简记为 S。我们将使用 Takeuchi 公式 [24]: 对于任意非空超图G,

$$S(G) = \sum_{k=1}^{|V(G)|} (-1)^k \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k, \\ I_1,\ldots,I_k \neq \varnothing}} G_{\mid^{(1)} I_1} \ldots G_{\mid^{(k)} I_k}. \tag{2}$$

我们来考察这个和式中出现的超图。对于这样的超图 $H, V(H) = V(G),\ H$ 的非空超边是形如 $e \cap I_{\theta(e)}$的集合，其中 e 是 G的非空超边，且 $\theta(e) \in [k]$。由此得到以下定义:

定义 2.15. 设 G 是一个非空超图，$\sim \in \mathcal{E}[V(G)]$ 和 θ： $E(G)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow V(G)/\sim$ 是一个映射，使得对于 G 的任意非空超边 e，都有 $e \cap \theta(e) \neq \varnothing$。

1. 我们将满足以下条件的图记为 $G\mid_{\theta}\sim$:

$$V(G\mid_{\theta}\sim) = V(G), \qquad E(G\mid_{\theta}\sim) = \{e \cap \theta(e) \mid e \in E(G)\backslash\{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing\}.$$

2. 我们将满足 $V(G/_{\theta}\sim) = V(G)/\sim$ 、且弧集按如下方式定义的有向图记为 $G/_{\theta}\sim$: 对于任意超边 $e \in E(G)$，以及任意满足 $\pi \cap e \in \varnothing$ 和 $\pi \neq \theta(e)$ 的 $\pi \in V(G)/\sim$，在 $G/_{\theta}\sim$ 中都有一条从 π 到 $\theta(e)$ 的弧。

3. 我们记作 $(\sim,\ \theta) \in \mathcal{E}_{\subset,\ \cap}[G]$，如果 $G\mid_{\theta}\sim$ 的连通分支是 $\sim$ 的等价类，且有向图 $G/_{\theta}\sim$ 是无环的。

命题 2.16. 对于任意非空超图 G,

$$S(G) = \sum_{(\sim,\theta) \in \mathcal{E}_{\subset,\cap}[G]} (-1)^{\mathrm{cl}(\sim)} G\mid_{\theta}\sim .$$

证明. 我们将满足以下条件的对 $(\sim、\ \theta)$ 的集合记为 $\mathcal{E}'_{\subset,\ \cap}[G]$: $G\mid_{\theta}\sim$ 的连通分支是 $\sim$的等价类。重写 (2)，得到

$$S(G) = \sum_{(\sim,\theta) \in \mathcal{E}'_{\subset,\cap}[G]} \left(\sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k, \\ I_1,\ldots,I_k \neq \varnothing, \\ G_{\mid_{I_1}^{(1)}} \ldots G_{\mid_{I_k}^{(k)}} = G\mid_{\theta}\sim}} (-1)^k \right) G\mid_{\theta}\sim .$$

对于任意的 $(\sim、\ \theta) \in \mathcal{E}'_{\subset,\ \cap}[G]$，我们定义

$$P(\sim,\theta)(X) = \sum_{\substack{V(G)=I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k, \\ I_1,\ldots,I_k \neq \varnothing, \\ G_{\mid_{I_1}^{(1)}} \ldots G_{\mid_{I_k}^{(k)}} = G\mid_{\theta}\sim}} H_k(X) \in \mathbb{K}[X],$$

使得 (2) 可改写为

$$S(G)=\sum_{(\sim,\theta)\in\mathcal{E}'_{\subset,\cap}[G]}P(\sim,\theta)(-1)G\mid_{\theta}\sim .$$

根据定义，对于任意的 $N\in\mathbb{N}$, $P(G,\sim)(N)$，满足下列条件的映射 $f\colon V(G)\longrightarrow[N]$ 的数量为

$$G_{\mid^{(1)}_{f^{-1}(1)}}\ldots G_{\mid^{(N)}_{f^{-1}(N)}}=G\mid_{\theta}\sim .$$

我们将这类映射 f 构成的集合记为 $\mathcal{A}_N$，并将满足以下条件的映射 $g\colon V(G)/\sim\longrightarrow[N]$ 构成的集合记为 $\mathcal{B}_N$：若 (π_1,π_2) 是 $G/_{\theta}\sim$, 的一条弧，则 $g(\pi_1)<g(\pi_2)$。

现在定义 $\mathcal{A}_N$与 $\mathcal{B}_N$之间的一个双射。设 $f\in\mathcal{A}_N$。若 $x\sim y$，则根据 $\mathcal{E}_{\subset}$的定义，$\cap[G]$, x 和 y 属于 $G\mid_{\theta}\sim$的同一个连通分支，因此它们必然属于同一个 $f^{-1}(i)$，最终有 $f(x)=f(y)$。因此，f诱导出一个映射 $\overline{f}\colon V(G)/\sim\longrightarrow[N]$，使得对于任意 $x\in V(G)$，$\overline{f}(\overline{x})=f(x)$。下面证明 $\overline{f}\in\mathcal{B}_N$。若 (π_1,π_2)是$G/_{\theta}\sim$,的一条弧，则存在 G的一条超边 e，使得 $e\cap\pi_1\neq\varnothing$, $e\cap\pi_2\neq\varnothing$, $\pi_1\neq\pi_2=\theta(e)$。由于 $e\cap\pi_2$是 $G\mid_{\theta}\sim=G_{\mid^{(1)}_{f^{-1}(1)}}\ldots G_{\mid^{(N)}_{f^{-1}(N)}}$ 的一条超边，必然有

$$\overline{f}(\pi_2)=\max f_{|e},$$

且$\overline{f}(\pi_1)<\overline{f}(\pi_2)$，因此 $\overline{f}\in\mathcal{B}_N$。我们定义了一个映射

$$\begin{cases}\mathcal{A}_N&\longrightarrow&\mathcal{B}_N\\ f&\longmapsto&\overline{f}.\end{cases}$$

显然它是单射。设 $\overline{f}\in\mathcal{B}_N$，并设 $f\colon\ V(G)\longrightarrow[N]$ 是满足对任意 $x\in V(G)$, $f(x)=\overline{f}(\overline{x})$的唯一映射。设 e 是 G的一个非空超边。根据 $G/_{\theta}\sim$,的构造，f 在 e 上的最大值在 $e\cap\theta(e)$处取得，因此 e 对$G_{\mid^{(1)}_{f^{-1}(1)}}\ldots G_{\mid^{(N)}_{f^{-1}(N)}}$ 的边的贡献为 $e\cap\theta(e)$：我们得到$G_{\mid^{(1)}_{f^{-1}(1)}}\ldots G_{\mid^{(N)}_{f^{-1}(N)}}=G\mid_{\theta}\sim$。综上，$f\in\mathcal{A}_N$、$\mathcal{A}_N$ 和 $\mathcal{B}_N$ 之间存在双射。

综上，$P(\sim、\theta)(X)$ 是有向图 $G\mid_{\theta}\sim$的严格 Ehrhart 多项式 $\mathrm{Ehr}_{str}(G/_{\theta}\sim)$。如果该有向图无环，根据对偶原理，[17, 推论 4.7]，则

$$P(\sim,\theta)(-X)=(-1)^{|V(G)/\sim|}\mathrm{Ehr}(G/_{\theta}\sim)(X),$$

其中 $\mathrm{Ehr}(G/_{\theta}\sim)$是 $G/_{\theta}\sim$的 Ehrhart 多项式。特别地，$\mathrm{Ehr}(G/_{\theta}\sim)(1)$ 是映射 $f\colon V(G)/\sim\longrightarrow[1]$ 的数量，使得对于 $G/_{\theta}\sim$, $f(\pi_1)\leqslant f(\pi_2)$的任意弧 (π_1,π_2)：该数量显然为 1。因此，若 $(\sim,\theta)\in\mathcal{E}'_{\subset,\cap}[G]$，则 $P(\sim,\theta)(-1)=(-1)^{\mathrm{cl}(\sim)}$。否则，$G/_{\theta}\sim$不是无环的，因此 $\mathrm{Ehr}_{str}(\sim,\theta)(X)=0$，这意味着 $P(G/_{\theta}\sim)(-1)=0$。结果立即得出。 □

注 2.6。由于 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}],m,\Delta^{(\cap,\ \subset)})$是 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}],m,\Delta^{(\subset,\ \cap)})$的余反，其对极为 S^{-1}。此外，由于 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}],m)$是交换的，$S$是对合的，因此 $S^{-1}=S$，且$(\mathcal{F}[\mathrm{H}],m,\Delta^{(\cap,\ \subset)})$与 $(\mathcal{F}[\mathrm{H}],m,\Delta^{(\subset,\ \cap)})$的对极相同。

2.5 色多项式的系数

记号 2.3。设 G为一个超图。对于任意的 $i,j\geqslant 1$，我们用 $\mathcal{N}_G(i,j)$表示满足以下条件的 G 的超图集合 G'

$$V(G')=V(G),\qquad E^+(G')\subset E^+(G),\qquad \mathrm{cc}(G')=i,\qquad |E^+(G')|=j.$$

我们用 $N_G(i,j)$ 表示 $\mathcal{N}_G(i,j)$的基数。

引理 2.17. 回顾一下， $\lambda_{\subset}$ 是由 $\delta^{(\subset)}$诱导的卷积乘积 $\star_{\subset}$ 下的 λ_0 的逆元。对于任意超图 G,

$$\lambda_{\subset}(G) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j N_G(\mathrm{cc}(G), j).$$

证明。 我们定义 $\mu \in \mathcal{F}[\mathrm{H}]^*$ 为

$$\mu(G) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j N_G(\mathrm{cc}(G), j),$$

对任意超图 G。下面证明，对任意超图 G， $\lambda_0 \star_{\subset} \mu(G) = \epsilon_\delta(G$).

$$\begin{aligned}\lambda_0 \star_{\subset} \mu(G) &= \sum_{\sim\in\mathcal{E}_{\subset}[G]} \mu(G\mid_{\subset}\sim) \\ &= \sum_{\sim\in\mathcal{E}_{\subset}[G]}\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j N_G(\mathrm{cl}(\sim), j).\end{aligned}$$

存在一个显然的双射

$$\{F \subset E^+(G) \mid [F| = j\} \longrightarrow \bigsqcup_{\sim\in\mathcal{E}_{\subset}[G]} \mathcal{N}_{G|_{\subset}\sim}(\mathrm{cl}(\sim), j)$$

它将 $F \subset E^+(G)$ 映射到超图 $(V(G),\ F)$, 属于 $\mathcal{N}_{G|_{\subset}\sim}(\mathrm{cl}'\ \sim),\ j)$，其中 $\sim$ 是 $V(G)$ 上的等价关系，其等价类是超图 $(V(G),\ F)$ 的连通分支。因此,

$$\begin{aligned}\lambda_0 \star_{\subset} \mu(G) &= \sum_{F\subseteq E^+(G)} (-1)^{|F|} \\ &= \begin{cases}1 \text{ if } |E^+(G)| = \varnothing, \\ 0 \text{ otherwise}\end{cases} \\ &= \epsilon_\delta(G).\end{aligned}$$

□

由此可得 $P_{\subset}(G)$ 的系数的如下描述，可见于 [6, 25]:

命题 2.18。 对于任意 $i \geqslant 1$, a_i 是 X^i 在 $P_{\subset}(G)$ 中的系数

$$a_i = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j N_G(i, j).$$

证明。 由命题 2.6,

$$P_{\subset}(G) = \sum_{\sim\in\mathcal{E}_{\subset}[G]} \lambda_{\subset}(G\mid\sim) X^{\mathrm{cl}(\sim)}. \tag{3}$$

因此，结合引理 2.17，对于任意 $i \geqslant 1$,

$$a_i = \sum_{\substack{\sim\in\mathcal{E}_{\subset}[G],\\ \mathrm{cl}(\sim)=i}}\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j N_{G|\sim}(i, j).$$

此外，存在一个显然的双射

$$\mathcal{N}_G(i, j) \longrightarrow \bigsqcup_{\substack{\sim\in\mathcal{E}_{\subset}[G],\\ \mathrm{cl}(\sim)=i}} \mathcal{N}_{G|_{\subset}\sim}(i, j),$$

将 G' 映射到自身，并视为 $\mathcal{N}_{G|_{\subset}\sim}(i、\ j)$ 的一个元素，其中 $\sim$ 是一种等价关系，其等价类就是 G' 的连通分支。因此,

$$a_i = \sum_{j\geqslant 0} N_G(i, j).$$

□

注记 2.7。 如果 G 是一个具有 n 个顶点的超图，那么 $N_G(n-1,$ 当 $j\neq 1$ 时为 $j)=0$，而 $N_G(n-1,\ 1)$ 是 G 中基数为 2 的边数。由此可得命题 2.6 的结果。

Pro位置 2.19。我们按如下方式定义映射 ϖ ：在 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$ 上，对任意超图 G ，

$$\varpi(G)=\sum_{\sim\in\mathcal{E}_{\subset}[G]}\left(\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j N_{G/\sim}(1,j)\right)G\mid_{\subset}\sim .$$

于是， ϖ 是从 $\mathcal{F}[\mathbf{H}]$ 的原始元空间 $\mathrm{Prim}(\mathcal{F}[\mathbf{H}])$ 上的投影算子，在 $(1)\oplus\mathrm{Ker}(\varepsilon)^2$ （欧拉幂等元）上取零。因此，$\mathrm{Prim}(\mathcal{F}[\mathbf{H}])$ 的一组基由以下元素给出：$(\varpi(G))_{G\text{ 连通超图}}$。

证明。根据 [14, 命题 4.1], ，无穷小特征标 $\ln(\epsilon_\delta)$ 在任意超图 G 上由下式给出

$$\ln(\epsilon_\delta)(G)=\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j N_G(1,j).$$

最后给出 [14,推论 4.5]。 □

2.6 拟混洗代数之间的态射

本段中，我们假设 $(V,\cdot,\delta_V)$ 是一个非幺、交换且余交换的双代数。根据 [16, 命题 3.9]， $\mathcal{F}_V[\mathbf{H}]$ 是定义在 V 上的双代数，其余作用 ρ 描述如下：若 G 是一个带有 V 装饰、具有 n 个顶点的超图，我们任意给这些顶点编号，并将以下超图记为 $G(v_1,\ldots,v_n)$：对任意 i， G 的第 i 个顶点由v_i装饰。于是

$$\rho(G(v_1,\ldots,v_n))=G(v_1',\ldots,v_n')\otimes v_1''\cdot\ldots\cdot v_n''.$$

记号 2.4。 映射 $\pi_V\colon T(V)\longrightarrow\mathbb{K}[X]$ 定义为

$$\forall v_1,\ldots,v_n\in V,\qquad \pi_V(v_1\ldots v_n)=\epsilon_V(v_1)\ldots\epsilon_V(v_n)\frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}.$$

它是一个双双代数态射。

由 [15,定理 2.7]:

命题 2.20。 设 $(V,\ \cdot,\ \delta_V)$ 是一个交换的、未必含单位元的双代数。

1. 对任意超图 G，我们用 $\mathrm{VC}_\cap(G)$ 表示满足以下条件的满射 $f\colon V(G)\longrightarrow[k]$的集合：若超边 $e\in E(G)$中有两个不同元素 x 和 y，则 $f(x)\neq f(y)$。从 $(\mathcal{F}_V[\mathbf{H}],\ m,\ \Delta^{(\cap,\ \cap)},\ \delta^{(\cap)})$ 到 $(T(V),\ \sqcup\!\!\sqcup,\ \Delta,\ \delta)$上唯一的、覆盖 V的双双代数态射，将任意 V 装饰超图 G 映为

$$\Phi_\cap(G)=\sum_{f\in\mathrm{VC}_\cap[G]}\left(\prod_{f(i)=1}^{\cdot}v_i\right)\ldots\left(\prod_{f(i)=\max(f)}^{\cdot}v_i\right).$$

此外， $P_\cap\circ\Theta_V=\pi_V\circ\Phi_\cap$。

2. 对于任意超图 G，记 $\mathrm{VC}_\subset(G)$ 为满足以下条件的满射映射 $f\colon V(G)\longrightarrow[k]$：若 e 是 G 的非平凡边，则 f 在 e上至少取两个不同的值。从 $(\mathcal{F}_V[\mathbf{H}],m,\Delta^{(\subset,\subset)},\delta^{(\subset)})$ 到 $(T(V),\sqcup\!\!\sqcup,\Delta,\delta)$上关于 V的唯一双双代数态射，将任意 V 装饰超图 G 映为

$$\Phi_\subset(G)=\sum_{f\in\mathrm{VC}_\subset[G]}\left(\prod_{f(i)=1}^{\cdot}v_i\right)\ldots\left(\prod_{f(i)=\max(f)}^{\cdot}v_i\right).$$

此外， $P_\subset\circ\Theta_V=\pi_V\circ\Phi_\subset$。

证明。设 $\curlywedge \in \{\cap, \subset\}$。映射 $P_{\curlywedge} \circ \Theta_V$和 $\pi_V \circ \Phi_{\curlywedge}$ 都是从$(\mathcal{F}_V[\mathbf{H}], m, \Delta^{(\curlywedge)}, \delta^{(\curlywedge)})$ 到 $(\mathbb{K}[X], m, \Delta, \delta)$的双双代数态射。由此类态射的唯一性可知，它们相等。 □

即使没有双双代数结构，我们仍可根据$\Delta^{(\cap,\ \subset)}$和 [15,定理 2.3]定义一个霍普夫代数态射：

命题 2.21。设 $(V,\ \cdot)$ 是一个交换的、不一定含幺的代数。对于任意超图 G，我们将满足以下条件的满射 $f\colon V(G) \longrightarrow [k]$ 的集合记为 $\mathrm{VC}_{\cap,\ \subset}(G)$：若 e是 G的一条非平凡边，则 $\max\{f(x) \mid x \in e\}$ 恰好在 e的一个元素上取到。如下定义了从 $(\mathcal{F}_V[\mathbf{H}],\ m,\ \Delta^{(\cap,\ \subset)})$ 到 $(T(V),\ \sqcup,\ \Delta)$的一个霍普夫代数态射：对于任意V装饰超图 G，

$$\Phi_{\cap,\subset}(G) = \sum_{f \in \mathrm{VC}_{\cap,\subset}[G]} \left(\prod_{f(i)=1}^{\cdot} v_i \right) \cdots \left(\prod_{f(i)=\max(f)}^{\cdot} v_i \right).$$

此外，$P_{\cap,\ \subset} \circ \Theta_V = \pi_V \circ \Phi_{\cap,\ \subset}$。

3 多复形

3.1 定义

回顾一下，多重集是一个映射 $X\colon S \longrightarrow \mathbb{N}\backslash\{0\}$，其中 S 是一个集合，称为 X 的支撑，记作 $\mathsf{supp}(X)$。对于任意 $x \in \mathsf{supp}(X)$，$X(x)$ 是 x 在 X中的重数。多重集通常被看作“元素可重复的集合”：例如，多重集

$$X : \begin{cases} \{a,b,c\} & \longrightarrow & \mathbb{N}\backslash\{0\} \\ a & \longmapsto & 1 \\ b & \longmapsto & 3 \\ c & \longmapsto & 2 \end{cases}$$

表示为 $\{a,b,b,b,c,c\}$。若 X和 Y是两个多重集，则当 $\mathsf{supp}(X) \subseteq \mathsf{supp}(Y)$且对任意 $x \in \mathsf{supp}(X)$ 均有 $X(x) \leqslant Y(x)$时，$X \subseteq Y$。例如，$\{a,a,b,b,b,c\} \subseteq \{a,a,a,b,b,b,c,c,c,d\}$。

多复形的概念在 [19]中引入。下面给出一个略作修改、适用于我们情形的定义：

定义 3.1. 多重复形是一个三元组 $C = (V(C), E(C), \leqslant_C)$，其中：

- $V(C)$ 是一个有限集，称为 C 的顶点集。
- $E(C)$是一个多重集的多重集，满足：

  – 对于任意 $e \in E(C)$，e 的支撑 $\mathrm{supp}(e)$ 是 $V(C)$ 的子集。– 对于任意 $x \in V(C)$，$\{x\}$ 是多重集 $E(C)$ 中重数为 1 的元素。– $\varnothing$ 是多重集 $E(C)$ 中重数为 *1* 的元素。

  $E(C)$ 的元素称为 C 的边。
- $\leqslant_C$ 是多重集 $E(C)$ 上的偏序，满足：

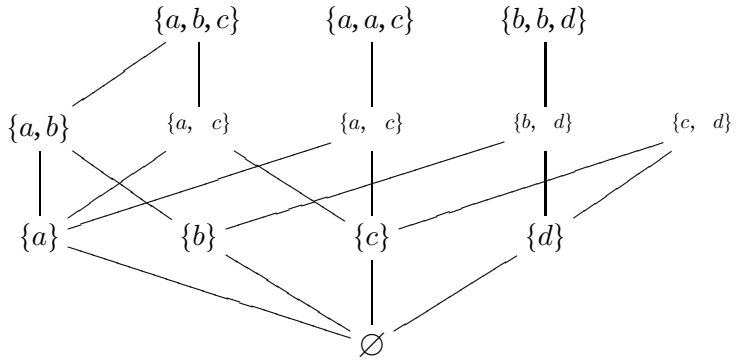
  – 对于任意 $x \in E(C)$，对于任意 $e \in E(C)$，$\{x\} \leqslant_C e$ 当且仅当 $x \in \mathrm{supp}(e)$。– 对于任意 $e \in E(C)$，$\varnothing \leqslant_C e$。– 对于任意 $e, f \in E(C)$，若 $e \leqslant_C f$，则 $e \subset f$。

对于任意有限集 X，由 $V(C) = X$ 构成的多复形 C 的集合记作 $\mathcal{MC}[X]$，而由 $\mathcal{MC}[X]$ 生成的向量空间记作 $\mathbf{MC}[X]$。那么 $\mathcal{MC}$ 是一个集合物种，而 $\mathbf{MC}$ 是一个物种。

例 3.1. 下面是一个多重复形 C。我们令 $V(C) = \{a、b、c、d\}$，以及

$$E(C) = \left\{ \begin{array}{c} \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,a,c\}, \{b,b,d\} \end{array} \right\},$$

其偏序由其哈斯图给出：



超图是多复形，其中 $\leqslant$ 由包含关系给出；请注意，在这种情况下，C 的边是集合，而边的多重集也是一个集合。单纯复形和 Δ-复形也是多复形，参见 [19]。

3.2 多复形的霍普夫代数结构

文献 [19]中引入了多复形的霍普夫代数。现在让我们将其提升到扭曲层面。设 X和 Y是两个不相交集合。若 $C \in \mathcal{MC}[X]$ 和 $D \in \mathcal{MC}[Y]$，则多重复形 $CD \in \mathcal{MC}[X \sqcup Y]$定义为

$$V(CD) = X \sqcup Y, \qquad E(CD) = E(C) \sqcup E(Y),$$

且对于任意 $e, f \in E(CD)$,

$$e \leqslant_{CD} f \text{ if } (e, f \in E(C) \text{ and } e \leqslant_C f) \text{ or } (e, f \in E(D) \text{ and } e \leqslant_D f).$$

这在 MC 上定义了一个结合的、交换的乘积 m ，其单位元是空多复形。

对于任意有限集 $X \subset Y$ 以及任意多重复形 $C \in \mathcal{MC}[Y]$，我们定义 $C_{|X}$ 为

$$V(C_{|X}) = X, \qquad E(C_{|X}) = \{e \in E(C) \mid \mathrm{supp}(C) \subset X\}, \qquad \leqslant_{C_{|X}} = (\leqslant_C)_{|E(C_{|X})}.$$

这确实是一个多重复形。接着，我们在 MC 上定义余积 Δ 如下：对于任意有限集 X 和 Y，以及任意 $C \in \mathcal{MC}[X \sqcup Y]$,

$$\Delta_{X,Y}(X) = C_{|X} \otimes C_{|Y}.$$

命题 3.2。 $(\mathbf{MC}\ m,\ \Delta)$ 是一个扭双代数。此外， $\mathcal{F}[\mathbf{MC}]$ 是 *[19]*的多复形的霍普夫代数。

证明。 与命题 1.3 的证明类似。 □

现在我们在 MC 上定义一个抽取-收缩余乘积。

设 C 是一个多重复形，且 x、 $y \in V(C)$。从 x 到 y 的一条路径是 C 的顶点序列 $(x_0$、……、 $x_k)$，满足：

- $x_0 = x$ 和 $x_k = y$。
- 对于任意 $i \in [k]$，都存在 $e \in E(C)$ ，使得 x_{i-1}、 $x_i \in e$。

我们将 称 C 为连通的，如果对于任意 x、 $y \in V(C)$，在……中都存在一条从 x 到 y 的路径 C.

设 X 是一个有限集， $\sim \in \mathcal{E}[X]$ 和 $C \in \mathcal{MC}[X]$。

1. 我们称 $\sim \in \mathcal{E}_c[C]$ ，如果对于任意 $\varpi \in X/\sim, C_{|\varpi}$ ，它都是连通的。

2. 我们用 $X\,|\sim$ 表示由下式定义的多重复形

$$\begin{aligned} V(C\,|\sim) &= V(C), \\ E(C\,|\sim) &= \{e \in E(C) \mid \forall x, y \in \mathrm{supp}(e),\ x \sim y\}, \\ \leqslant_{C|\sim} &= (\leqslant_C)_{|E(C|\sim)}. \end{aligned}$$

换言之，

$$C\,|\sim = \prod_{\varpi \in X/\sim} C_{|\varpi}.$$

3. 我们用 $X/\sim$ 表示由下式定义的多重复形

$$\begin{aligned} V(C/\sim) &= V(V)/\sim, \\ E(C/\sim) &= \{\pi(e) \mid e \in E(C)\}, \end{aligned}$$

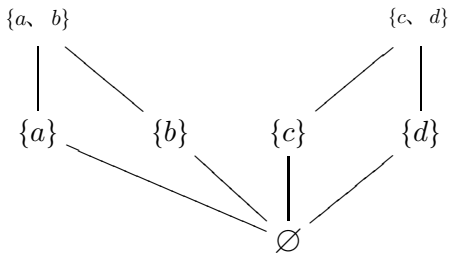
其中 $\pi_\sim :\ V(C) \longrightarrow V(C)/\sim$ 是典范满射。值得注意的是， $E(C/\sim)$ 是一个多重集，也就是说，除了平凡边（即……）和单元素集（其重数保持为 1）之外，我们区分 $E(C/\sim)$, 中的所有 $\pi(e)$、 $e \in E(C)$。换言之，如果 $\overline{e}$ 是一个支撑包含于 $V(C)/\sim$, 的多重集，那么它在 $E(C/\sim)$ 中的重数等于满足 $\pi(e) = \overline{e}$ 的边 $e \in E(C/\sim)$ 的重数之和。 $E(C/\sim)$ 上的偏序定义如下：

$$\pi_\sim(e) \leqslant_{C/\sim} \pi_\sim(f) \Longleftrightarrow e \leqslant_C f.$$

例 3.2. 我们再次考虑例 3.1 中的多重复形 C。令 $\sim$ 为一个等价关系，其等价类为 $\{a$、 $b\}$ 和 $\{c$、 $d\}$。由于其等价类是 C、 $\sim \in \mathcal{E}_c[C]$ 的边。此外， $V(C\,|\sim) = \{a$、 b、 c、 $d\}$, 以及

$$E(C\,|\sim) = \left\{ \begin{array}{c} \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ \{a,b\}, \{b,d\} \end{array} \right\},$$

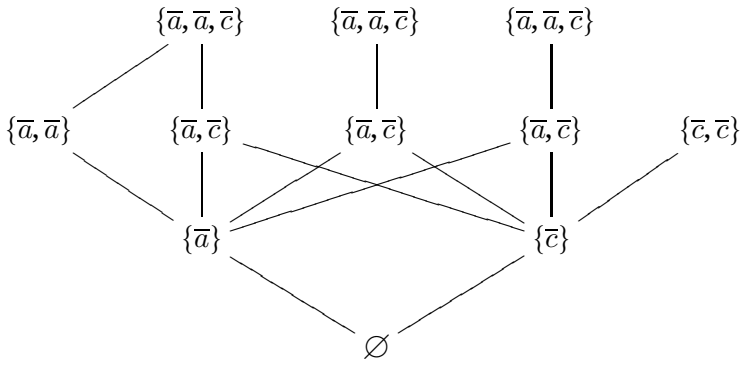
其偏序由其哈斯图给出：



此外， $V(C/\sim)=\{\overline{a},\overline{c}\}$, 和

$$E(C)=\left\{\begin{array}{c}\varnothing,\{\overline{a}\},\{\overline{c}\},\\ \{\overline{a},\overline{a}\},\{\overline{a},\overline{c}\},\{\overline{a},\overline{c}\},\{\overline{a},\overline{c}\},\{\overline{c},\overline{c}\},\{\overline{a},\overline{a},\overline{c}\},\{\overline{a},\overline{a},\overline{c}\},\{\overline{a},\overline{a},\overline{c}\}\end{array}\right\},$$

其偏序由其哈斯图给出:



定理 3.3. 对于任意多重复形 $C\in\mathcal{MC}[X]$ 以及任意 $\sim\in\mathcal{E}[X]$，我们定义

$$\delta_{\sim}(C)=\begin{cases}C/\sim\otimes C\,|\sim & \textit{if } \sim\in\mathcal{E}_c[C],\\ 0 & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

这就在 *[16],* 的意义下，为 **MC** 定义了一个收缩-提取余乘，并且与 m和 Δ相容。

证明. 证明与定理 1.6 的证明类似。 □

4 与超图的联系

定义 4.1. 设 C 是一个多重复形。我们定义超图 $\kappa(C)$ 为

$$V(\kappa(C))=V(C),\qquad\qquad E(\kappa(C))=\operatorname{supp}\{\operatorname{supp}(e)\mid e\in E(C)\}.$$

换言之， $\kappa(C)$ 是从 C 中遗忘偏序 $\leqslant_C$ 以及边和 $E(C)$中的重数后得到的。这定义了一个物种态射 $\kappa\colon\ \mathbf{MC}\longrightarrow\mathbf{H}$。

通过直接验证可得:

命题 4.2. $\kappa\colon\ (\mathbf{MC}\ m,\ \Delta)\longrightarrow(\mathbf{H}\ m,\ \Delta^{(\subset)})$ 是一个扭双代数态射。此外，它与收缩-提取余乘积 δ 和 $\delta^{(\subset)}$相容。

作为一个 c 因此，从 $\mathcal{F}[\mathbf{MC}]$ 到 $\mathbb{K}[X]$ 的唯一双双代数态射是 $P_{\subset}\circ\mathcal{F}[\kappa$].

由 [14,推论 2.3]:

推论 4.3. 我们将 $(\mathcal{F}[\mathbf{MC}],m,\Delta)$ 的对极记为 S。对于任意多重复形 C,

$$S(C)=\sum_{\sim\in\mathcal{E}_c[C]}\left(\sum_{\leqslant\ acyclic\ orientation\ of\ \kappa(C/\sim)}(-1)^{\mathrm{cl}(\leqslant)}\right)C\,|\sim.$$

由 [14,推论 4.5]:

命题 4.4. 我们定义一个映射 ϖ，其定义在 $\mathcal{F}[\mathbf{MC}]$ 上如下：对于任意多重复形 C ，

$$\varpi(C)=\sum_{\sim\in\mathcal{E}_c[C]}\left(\sum_{j\geqslant0}(-1)^jN_{\kappa(C/\sim)}(1,j)\right)C\,|\sim.$$

于是， ϖ 是从原始元空间 原始元($\mathcal{F}$[多复形]) 到 $\mathcal{F}$[多复形] 的投影算子，它在 $(1)\oplus$ 核$(\varepsilon)^2$ 上为零（欧拉幂等元）。因此，原始元($\mathcal{F}$[多复形]) 的一组基由 $(\varpi(C))_{C\text{ 连通多复形}}$给出。

参考文献

[1]Marcelo Aguiar 和 Federico Ardila，《霍普夫幺半群与广义置换多面体》，arXiv:1709.07504，2017。[2] Marcelo Aguiar 和 Swapneel Mahajan，《幺半函子、物种与霍普夫代数》，CRM 专著丛书，第 29 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010 年，附 Kenneth Brown、Stephen Chase 和 André Joyal 撰写的序言。[3] Jean-Christophe Aval、Samuele Giraudo、Théo Karaboghossian 和 Adrian Tanasa，《图插入歌剧代数》，Lothar 组合研讨会 84B（2020），84b.66，12 页（英文）。[4] Jean-Christophe Aval、Karaboghossian Théo 和 Tanasa Adrian，《超图霍普夫幺半群及其子幺半群的多项式不变量与互反定理》，Lothar 组合研讨会 82B（2019），82b.32，12 页（英文）。[5] Claude Berge，《超图：有限集组合学》，法文译本，北荷兰数学文库，第 43 卷，阿姆斯特丹等地：北荷兰，1989 年（英文）。[6] Mieczysław Borowiecki 和 Ewa Łazuka，《超图的色多项式》，数学讨论，图论 20（2000），第 2 期，293–301 页（英文）。[7] Alain Bretto，《超图理论：导论》，数学工程（Cham），Cham：施普林格，2013 年（英文）。[8] Csilla Bujtás、Zsolt Tuza 和 Vitaly Voloshin，《超图着色》，《色图论专题》，剑桥：剑桥大学出版社，2015 年，第 230–254 页。[9] Klaus Dohmen，《超图的破圈定理》，《数学文献》64（1995），第 2 期，159–162 页（英文）。[10] Kurusch Ebrahimi-Fard 和 Gunnar Fløystad，《超图的十二种双代数、余作用与色多项式》，arXiv:2212.03501，2022。[11] Loïc Foissy，《拟偏序集的交换与非交换双代数及其在埃尔哈特多项式中的应用》，纯粹与应用数学进展 10（2019），第 1 期，27–63 页。[12] ———，《扭曲双代数、余自由性与余作用》，arXiv:1905.10199，2019。[13] ———，《图的色多项式与双代数》，国际电子代数杂志 30（2021），116–167 页。[14] ———，《余作用中的双代数、对极与欧拉幂等元》，arXiv:2201.11974，2022。[15] ———，《双代数之上的双代数与拟混洗双双代数》，准备中，2023。[16] ———，《扭曲双代数上的收缩与提取以及着色福克函子》，准备中，2023。[17] ———，《混合图上的霍普夫代数结构》，准备中，2023。[18] Thorkell Helgason，《超拟阵理论的若干方面》，《第一届超图工作研讨会论文集》，哥伦布，1972 年，数学讲义 411，191–213（1974）。[19] Miodrag Iovanov 和 Jaiung Jun，《论多复形的霍普夫代数》，代数组合杂志 56（2022），第 2 期，425–451 页。

[20] André Joyal, 形式幂级数的组合理论, Adv. in Math. **42** (1981), no. 1, 1–82.[21] ———, 解析函子与结构种, 枚举组合学（蒙特利尔，魁北克省，1985／魁北克市，魁北克省，1985）, 数学讲义，卷1234，施普林格，柏林，1986，第126–159页。[22] N. J. A. Sloane, 在线整数序列百科全书, https://oeis.org/.[23] Richard P. Stanley, 图的无环定向, Discrete Math.**5** (1973), 171–178.[24] M. Takeuchi, 由余代数生成的自由霍普夫代数, J. Math. Soc. Japan **23**(1971), 561–582（英文）。[25] Ioan Tomescu, 线性均匀超图的色多项式系数, J. Comb. Theory, Ser. B **72** (1998), no. 2, 229–235（英文）。[26] Vitaly I. Voloshin, 图论与超图理论导论, 纽约，纽约州：NovaScience Publishers，2009。[27] Ruixue Zhang 和 Fengming Dong, 超图色多项式中不适用于图的色多项式的性质, Eur. J. Comb. **64**(2017), 138–151（英文）。