arXiv:2304.00811v1 [math.PR] 3 Apr 2023

随机小波级数的正则性性质

C´eline Esser*、St´ephane Jaffard†和 B´eatrice Vedel ‡

2023年4月4日

摘要

我们研究通过将确定性小波级数的系数与无界独立同分布随机变量相乘而构造的随机小波级数的正则性性质。特别地，我们证明，与傅里叶级数的情形相反，几乎每个连续函数经随机化后，几乎处处都是处处局部无界的函数。

MSC2020： 主要分类：42C40；次要分类：42A20**关键词：** 随机小波级数、随机傅里叶级数、无条件基、一般正则性

1 引言

具有随机系数的函数级数研究历史悠久，内涵丰富，处于调和分析与泛函分析的交汇处。其源头可追溯至 E. Borel 于 1896 年提出的一句开创性却晦涩难懂的话：“一般而言”，泰勒级数无法越过其收敛圆延拓，参见例如 [5, 21]。尽管当时概率论的基本定义尚未形成，这句话仍被解读为系数具有相互独立的随机相位；在这种情况下，H. Steinhaus 于 1930 [32] 中证明了这一结论。后来，Paley 和 Zygmund 对这一主题进行了拓展，研究了 Rademacher 傅里叶级数，其系数具有以下形式 $\pm a_n$，其中 $\pm$ 表示一列相互独立的 Rademacher 随机变量（以概率 $+1$和 -1 分别取值 $1/2$）。他们得到的一项典型结果是，对于所有 $p \in [1, \infty)$，条件 $\sum |a_n|^2 < \infty$ 是确保 Rademacher 傅里叶级数的样本路径几乎处处属于 L^p [30]的充要条件。关于随机傅里叶级数的许多结果表明，系数的随机化具有正则化效应。以下定理提供了最引人注目的证据之一，参见 [20]。

*列日大学´，列日`，B37号楼，理工区，发现大道12号，B-4000 列日，比利时`

†巴黎东克雷泰伊大学、古斯塔夫·埃菲尔大学、法国国家科学研究中心、LAMA UMR8050，F-94010 克雷泰伊，法国 jaffard@u-pec.fr

‡南布列塔尼大学，法国国家科学研究中心 UMR 6205，LMBA，F-56000 瓦讷，法国

定理 1.1。 设$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一列相互独立、对称且方差为 *1* 的复随机变量，并设$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一列复数。令

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad s_j = \left(\sum_{2^j \le |n| < 2^{j+1}} |a_n|^2 \right)^{1/2}. \tag{1}$$

如果序列 $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是递减的且属于 ℓ^1，那么几乎处处，随机三角级数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X_n e^{inx} \tag{2}$$

是连续的。

请注意，条件 $\sum_j s_j < +\infty$ 本身远不足以保证相应确定性傅里叶级数 $\sum a_n e^{inx}$的连续性，这正体现了随机化带来的平滑效应。在高斯情形下，Marcus 和 Pisier 得出了样本路径几乎处处连续的精确条件；我们也提及他们推导出的另一条著名结论 [25, 26]。

定理 1.2。 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个复数序列，并考虑以下两个随机傅里叶级数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n B_n e^{inx} \quad and \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \chi_n e^{inx} \tag{3}$$

其中$(B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个独立拉德马赫随机变量序列，$(\chi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个独立标准高斯随机变量序列。那么，几乎处处，这两个级数要么都连续，要么都不有界。

本文旨在考察对于一般随机小波级数，这类性质会呈现何种形式；也就是说，研究定义在具有相互独立随机系数的正交归一小波基上的级数（请注意，这一术语此前曾用于范围较窄的情形，即同一尺度 j 上的所有小波系数均为独立同分布，见 [2]）。我们将其与此前针对傅里叶级数所得的结果进行比较。事实上，比较傅里叶展开与小波展开由来已久：其历史可追溯至 1909 年，当时引入了 Haar 系统，尤其是为了提供一种基，使连续函数分解的部分和能够一致收敛（这与 F´ejer 定理形成鲜明对照；该定理指出，连续函数的傅里叶级数可能在某些点发散）。后来，在 20 世纪 40 年代，人们从 Wiener 对三角系统的初始构造中推导出布朗运动的一些性质；而 Ciesielski 基于*Schauder* 基 [7]的另一种分解，则揭示了精确的整体正则性和逐点正则性性质；事实上，这个基可视为一种特殊的（非正交）小波基，其中生成小波是“帽形”函数

$$\psi(x) = 1_{[0,1]}(x) \cdot \min(x, 1-x).$$

自 20 世纪 90 年代中期引入光滑小波基以来，人们多次指出，三角级数展开与小波级数展开的函数性质大不相同。

简言之，三角级数的随机化具有“平滑”效应，而小波级数则不然：这是因为全局正则性条件和逐点正则性条件都可以用小波系数模的条件来刻画，而傅里叶级数却无法如此刻画，参见 [18, 17]及其中的参考文献。

另一个涉及带有系数 ± 1 的函数级数的经典主题，是研究函数空间中的基展开。设 X 为一个可分 Banach空间； X 中的元素序列$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为*Schauder* 基，如果对于任意 $f \in X$，都存在唯一的实数序列$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\sum_{n\le N} a_n e_n \to f \quad \text{in} \quad X. \tag{4}$$

如果对级数中的元素作任意排列后仍然收敛，则序列$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 构成无条件基 。这等价于级数$\sum_n \varepsilon_n a_n e_n$ 对任意符号选择 $\varepsilon_n = \pm 1$都在 E 中收敛；这也等价于存在常数 $C > 0$ ，使得对于任意有限子集 $F \subseteq \mathbb{N}$、任意实数$(a_n)_{n\in F}$以及任意符号选择 $\varepsilon_n = \pm 1$,

$$\left\| \sum_{n\in F} \varepsilon_n a_n e_n \right\|_X \le C \left\| \sum_{n\in F} a_n e_n \right\|_X . \tag{5}$$

无条件收敛确保了使用函数的元素线性组合进行重构时的数值稳定性$f \quad e_n$。在统计学中，（5）通常称为乘子性质。请注意，这一性质只是无条件基所需的两个条件之一；尤其是，它可能在不可分空间中成立（在这种情况下，第一个条件无法满足）；例如，H¨older C^α 空间便是如此：事实上，很容易验证，光滑正交归一小波基是无条件弱* 基（这意味着（4）中的强收敛要求被弱* 收敛所取代，参见 [16]）。

这类问题实际上促成了小波基的引入：最早的小波基由 J. O. Str¨omberg 提出，目的正是构造在实 Hardy 空间 H^p （若 $p \le 1$）和勒贝格空间 L^p （若$p > 1$）中同时具有无条件性的基，见 [33]。特别是， $p > 1$的 L^p 空间的小波刻画取决于小波系数的模，因此不会因乘以拉德马赫随机变量而改变。所以，Paley-Zygmund 定理不可能对小波级数成立。这表明随机傅里叶级数与随机小波级数之间还存在另一个重要差异。

由于 H¨older、索伯列夫范数和贝西科夫范数可以用一个与小波系数模有关的量来刻画，因此，小波方法在统计学中的乘子性质的一个关键推论是：对函数展开中的小波系数进行收缩，不会在函数中引入伪奇异性，参见例如 [12] 及其中的参考文献。需要强调的是，这一性质是小波所特有的，在其他“经典”基底中并不成立。特别是在周期情形下，著名的 Kahane-Katznelson-DeLeeuw 定理表明，给定 L^2 中的任意函数，都可以通过增大 f 的傅里叶系数的模，构造出一个连续函数，参见 [10]。

请注意，F. L. Nazarov 将这一结果推广到了相当一般的标准正交基 ψ_n 的展开情形；不过，这些基仍须满足

$$\exists C > 0, \quad \forall n, \qquad \|\psi_n\|_1 \geq C,$$

而小波基显然不满足这一条件，见 [29, 27]。

第5节将详细展开的具体例子，将说明傅里叶级数与小波级数之间这一显著差异：我们将比较锯齿函数的这两种随机化方式 $\{x\}$ （即 x的小数部分）。

比无条件收敛更弱的条件已在 [4]中提出。它不要求级数对任意符号选择 $\pm$都收敛，只要求满足随机无条件收敛：若 Schauder 基 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在空间 X 中，对每个 $f=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n$，级数对几乎所有符号选择 $\varepsilon_n = \pm 1$都收敛，则称其为随机无条件收敛系统。其中，$(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 表示由独立拉德马赫随机变量构成的序列。情形 L^1 尤其值得关注：众所周知，L^1 没有无条件基，而且也没有随机无条件收敛系统 [4]；因此，与 L^p空间不同，尽管小波构成了 L^1的 Schauder 基，但通过独立同分布拉德马赫随机变量对小波系数进行随机化时，该空间并不具有稳定性。

研究这样一种情形同样很自然：将拉德马赫随机变量替换为一列独立同分布随机变量（对于傅里叶级数或 Banach 空间中的基均是如此）。我们重点讨论高斯情形，因为对这一情形的研究最为深入。关于傅里叶级数，若 $X = C(\mathbb{T})$，则 Marcus 和 Pisier（定理 1.2 ）的结果表明，可以将研究归结为拉德马赫情形。对于 Banach 空间中更一般的基，情况则更为微妙。下面的结果给出一个一般判据，见 [22]。

定理 1.3。 设 X 为一个 *Banach*空间，且 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列独立标准高斯随机变量。以下断言等价：

1. 对于 X 中的任意元素序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n x_n$ 几乎处处无条件收敛，当且仅当级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 在X中无条件收敛。

2. 空间 X 不一致地包含 ℓ_∞^n 。

回顾一下，若满足以下条件，则称 X 一致地包含 $\ell_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$：

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \delta(X, \ell_\infty^n) < +\infty$$

其中，对于赋范空间 E 和 X，δ 的定义如下：X 至少包含一个与 E 同构的向量子空间，且满足

$$\delta(E, X) = \inf\{d(E, F) : \ F \subset X, \ F \text{ isomorphic to } E\}$$

以及 d i s 表示同构空间 E 与 F 之间定义的 Banach-Mazur距离，如下， s

$$d(E,F) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : \quad T : X \to Y \text{ isomorphism}\}.$$

注意，空间 L^p 对于 $1 \leq p < +\infty$并不一致地包含 ℓ_∞^n 。因此，对于$1 < p < +\infty$，小波级数的无条件收敛意味着随机高斯展开几乎必然无条件收敛。相反，在 $C(\mathbb{T})$ 中，C^α 和 L^∞ 一致地包含 ℓ_∞^n ，这促使我们研究在这些特定情形下，随机傅里叶级数与小波级数收敛性质之间的差异。

关于 L^1中的高斯级数，压缩论证使 Ledoux 和 Talagrand 能够[23, 第 4 节。2] 证明，高斯随机化的平均值总是大于相应的 Rademacher 平均。特别地，如果 Banach空间 $\sum_n \xi_n x_n$ 中的高斯级数 X 收敛，那么相应的 Rademacher 级数 $\sum_n \varepsilon_n x_n$也收敛。结合 [4] 关于随机无条件收敛系统的结果，这意味着空间 L^1 在对小波系数进行高斯随机化后并非封闭。

非高斯随机化受到的研究要少得多。不过，我们仍要提及 [22] 的以下结果，它给出了无条件收敛的一个判据。

定理1.4. 设 X 是一个不包含一致 ℓ_∞^n 的*Banach*空间，(ζ_k) 是一个数值变量序列，满足

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|\zeta_k|^p \leq c_p < +\infty \quad \forall p > 0$$

以及 $a_k \in X, k = 1,2, \ldots$ 若级数 $\sum_k a_k$ 无条件收敛，则级数$\sum_k a_k\zeta_k$ 在空间 X中几乎处处无条件收敛。

有鉴于此，本文将研究随机小波级数的有界性、连续性和 H¨older 正则性。在第 2 节中，我们根据函数的小波系数给出一个关于函数连续性的自然条件，并证明该条件是最优的。第 3 节专门研究处处无界的随机小波级数。特别地，我们证明，定理1.2 的结论在小波级数情形下截然不同：命题3.1 将给出一些具有 Rademacher 系数的小波级数例子，它们几乎处处具有连续样本路径；而同一小波级数若改用标准高斯系数，则处处局部无界（我们实际上将证明，在小波情形下，Rademacher 随机变量和高斯随机变量并无特殊作用，真正的二分取决于随机变量是有界还是无界）。此外，我们还证明，这种行为并非罕见，而是在连续函数空间中“普遍”存在。第 4 节讨论一个蕴含随机化小波级数连续性的最小正则性条件。最后，我们在第 5 节研究小波系数的随机化对函数 H¨older 连续模的影响，并给出一个具体例子，用以比较傅里叶级数与小波级数随机化所产生的后果。

2 小波级数的连续性

本节将根据函数的小波系数给出一个简单条件，该条件可保证函数连续。此外，我们将证明该条件是最优的。首先回顾 d-变量小波基 [8, 28, 24] 的定义。

定义 2.1. $\mathbb{R}^d$ 上的正交归一 r光滑（$r \geq 0$）小波基由函数 φ 和 $\Psi^{(i)}$、$i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$ 组成，并具有以下性质：

- φ $\Psi_{(i)}$ 及其所有不超过 r 阶的偏导数都快速衰减，
- $\varphi(\cdot - k)$、$k \in \mathbb{Z}^d$ 以及函数 $2^{dj/2}\Psi_{(i)}(2^j \cdot -k)$、$j \in \mathbb{N}$、$k \in \mathbb{Z}^d$ $i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$构成 $\mathbb{R}^d$的一个正交归一基。 ,

例如，Haar 系统是一个 0光滑小波基。通常我们不会提及小波基所需的光滑度，而是假定其“足够大”；所需的确切数值总是可以轻松确定的。为便于与傅里叶级数作更直接的比较，我们主要研究 d维环面$\mathbb{T} = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$。但请注意，我们得到的结果很容易推广到非周期情形（此时应将其理解为局部结果）。在这种情况下，使用周期化小波基；它们由常函数 $1_{\mathbb{T}}$与定义在 $\mathbb{R}$ 上的 1 周期小波 $\psi^{(i)}_{j\,k}$,的并集构成，具体定义如下：

$$\psi^{(i)}_{j,k}(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \Psi^{(i)}(2^j(x - l) - k), \quad i \in \{1, \dots, 2^d - 1\},\ j \in \mathbb{N},\ k \cdot 2^{-j} \in [0, 1)^d.$$

我们将使用以下小波记号：

$$\varphi_k = \varphi(\cdot - k), \quad \Psi^{(i)}_{j,k} = \Psi^{(i)}(2^j \cdot -k), \quad \psi^{(i)}_{j,k} = \psi^{(i)}(2^j \cdot -k),$$

并用 c_k 和 $c^i_{j,\,k}$ 表示相应的小波系数（根据上下文即可明确这些小波系数是在周期情形还是非周期情形下计算的）。注意，我们不使用小波及小波系数的 L^2 归一化；事实上，在处理有界性、连续性或 H¨older 正则性问题时，我们采用的约定会使表述更简洁。

我们先回顾两个直接的结果。

命题 2.2。 设 $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ 为 f 在一个固定的 0 阶光滑小波基下的小波系数。那么，由 $c^i_{j,\,k}$定义的序列 $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$

$$\omega_j = \sup_{i,k} |c^i_{j,k}| \tag{6}$$

属于 ℓ^∞。此外，若 f 连续，则 $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ 属于 c_0。

第一个陈述的最优性（在非周期情形下）由（稍作变体的）Heaviside 函数证明。

$$H(x) = 1_{\mathbb{R}^+}(x) - 1_{\mathbb{R}^-}(x), \tag{7}$$

它显然满足

$$c_{j,k} = c_{j+1,k}. \tag{8}$$

回顾一下，宽度为 C、位于 x_0 处的影响锥 定义为

$$\mathcal{C}(x_0, C) = \{(j,k) : \quad |2^j x_0 - k| \le C\}.$$

因此，(8) 表明，0 处影响锥内的小波系数不会衰减（Haar小波的情形除外，此时它们全都为零！）。将这一反例推广到周期情形和 d维情形十分直接。

由于空间 $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$（由 d 维环面上的连续有界函数构成）没有无条件基，而小波构成该空间的 Schauder 基，因此乘子性质在这里不成立。

尽管如此，下面的结果给出了一个简单且最优的连续性充分条件。

命题 2.3. 设 $c^i_{j,k}$ 是一组系数，满足 $i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$、 $j \ge 0$ 和 $k \cdot 2^{-j} \in [0,1)^d$，并假设所用的小波是 *0*光滑的。

- 如果序列 $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 由 (6) 定义且属于 ℓ^1，那么小波级数

$$f = \sum_j f_j \quad where \quad f_j = \sum_{i,k} c^i_{j,k} \psi^{(i)}_{j,k}, \tag{9}$$

  是正规收敛的，因此它定义了一个有界函数。如果小波还是连续的，那么 f 也是连续的。

- 该条件是最优的，即如果 $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个非负序列，使得 $\sum_{j\in\mathbb{N}} \omega_j = \infty$，并且如果小波是分段连续的，那么存在一个小波级数 (9)使得

$$\forall j, \quad \sup_{i,k} |c^i_{j,k}| = \omega_j, \tag{10}$$

  并且在 $\mathbb{T}^d$ 上处处局部无界。

注释 2.4。 回顾一下，整数的 Sidon集是满足以下条件的集合 $E \subset \mathbb{Z}$： 如果

$$\sum_{n\in E} c_n e^{inx}$$

是连续的，那么 $\sum_{n\in E} |c_n| < \infty$，参见 [31]。Sidon 集的判定在调和分析中有着悠久而丰富的历史。可以将寻找 Sidon 集理解为：探究傅里叶级数满足何种稀疏性条件时，“自然条件”绝对收敛会成为必要条件。因此，我们命题的逆命题部分可以解释为这一探索在小波领域的“变体”。更准确地说，小波情形下，Sidon 集问题的自然对应问题是确定指标集 $\mathcal{I}$ 使得

$$\sum_{(i,j,k)\in\mathcal{I}} c^i_{j,k} \psi^{(i)}_{j,k} \in L^\infty \Longrightarrow \sum_{(i,j,k)\in\mathcal{I}} |c^i_{j,k}||\psi^{(i)}_{j,k}| \in L^\infty.$$

第一点的证明。蕴含关系的正向显然成立：事实上，小波的快速衰减意味着，如果小波是连续的，那么 f_j 也是连续的。在所有情况下，均有

$$|f_j(x)| \leq C\omega_j \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

由此可知，函数级数 $\sum_j f_j$ 是由有界函数构成且正规收敛的级数，因此其和有界。此外，若小波是连续的，则 f_j 也是连续的（因为小波快速衰减），且该级数的和是连续函数。

□

为了证明逆命题，我们注意到可以假设

$$\exists C \ \forall i, j, k, \quad |c^i_{j,k}| \leq C \tag{11}$$

因为命题 2.2 指出，若 $f \in L^\infty$，则满足该条件。我们将使用以下引理。

引理 2.5。 若 ω_j 是满足 $\sum_{j\in\mathbb{N}} \omega_j = \infty$ 的非负数列，则存在一个子列$(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$j_{n+1} - j_n \to +\infty \quad and \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \omega_{j_n} = \infty. \tag{12}$$

证明。 固定一个 N，并且只要求 $j_{n+1}-j_n = N$，则结论显然成立（事实上，满足此性质的 N 数列中必有一个满足 $\sum_n \omega_{j_n} = \infty$）。为了得到满足（12）的子列，首先从由此得到的数列 j_n 中依次取元素，直到对应的和大于 1；然后从 $N = 2$ 中取元素，直到对应的和大于 1；如此继续。

□

现在我们回到命题最优性的证明。

第二点的证明。 首先，我们构造一个满足（10）但不属于 $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 的小波级数：如果ω_j 无界，则结论显然成立，因此我们可以假设序列 ω_j 属于 l^∞。在每个尺度 j上，我们只考虑一个非零系数，其定义如下：

$$c^1_{j,k} = \omega_j.$$

这些系数的位置选择如下。首先，如果 j 不是 j_n之一，我们就将这些系数定位在一个 $k = (k_1, \cdots k_d)$处，使得 $\forall m$, $k_m \cdot 2^{-j} = 3/4$。其次，对于尺度 j_n, $n \in \mathbb{N}$上的局部化，我们注意到，小波分段连续性的假设意味着存在 $C > 0$ 和一个二进立方体 K，使得

$$\psi^{(1)}(x) \geq C, \quad \forall x \in K.$$

我们用$K_{j,\ k}$ 表示二进立方体

$$K_{j,k} = \{x : 2^j x - k \in K\}.$$

如果 Q 是一个二进立方体，我们用 $Q/2$ 表示与其中心和方向相同、宽度为 $|Q/2| = 1/2|Q|$的立方体。采用这些记号，如果 j 是 j_n之一，则非零系数的局部化由第一对（j_n，k_n）给出，使得对应的立方体$K_{j_n,\,k_n}$ 包含于 $[1/8, 3/8]^d$中，后续各对则满足

$$K_{j_{n+1},k_{n+1}} \subset 1/2 \cdot K_{j_n,k_n} \tag{13}$$

（条件 $j_{n+1} - j_n \to +\infty$ 表明这是可能的）。

现在我们来考察小波级数。

$$f = \sum_j c^1_{j,k} \psi^{(1)}_{j,k}$$

由此构造。由于 $c^1_{j,\,k}$ 有界，且每个尺度上至多只有一个不为零，因此该函数属于 L^2。此外，由于小波快速衰减，不属于序列 j_n 的 j 的贡献在立方体 $[1/8, 3/8]^d$ 上有界，因此可以忽略。现在我们将重点放在剩余项的取值上

$$g = \sum_n c^1_{j_n,k_n} \psi^{(1)}_{j_n,k_n} \tag{14}$$

在立方体 K_{j_l,k_l} 上。如果 $x \in K_{j_l,k_l}$，我们有

$$c^1_{j_n,k_n} \psi^{(1)}_{j_n,k_n}(x) \geq C\omega_{j_n}$$

对每个 $n \leq l$。首先假设小波是紧支撑的。对于 $n > l$，由（13）和条件 $j_{n+1} - j_n \to +\infty$ 可知，小波 $\psi^{(1)}_{j_n\,,\,k_n}$的支撑包含于$K_{j_l,\,k_l}$。由于小波的积分为零，因此 g 在 $K_{j_l,\,k_l}$ 上的平均值大于

$$C \sum_{n=1}^{l} \omega_{j_n}. \tag{15}$$

由于这些量没有界，因此可知 $g \notin L^\infty$。

现在我们只假设小波快速衰减。那么，小波 $\psi^{(1)}_{j_n\,,\,k_n}$ 在 $K_{j_l,\,k_l}$ 上的平均值（其中 $n > l$）并非恰好为零。不过，再次利用小波的积分为零这一性质，可将其界定为

$$\int_{x \notin K_{j_l,k_l}} |\psi^{(1)}_{j_n,k_n}(x)| dx,$$

并且条件 $j_{n+1} - j_n \to +\infty$ 和 (13) 表明这些量有界$C/(n+l)^2$；因此 (15) 只会相差一个有界误差项，结论仍然成立。

因此，我们得到函数 f 可以写成 $f = g + h$ 其中

$$h = \sum_{j \neq j_n} c^1_{j,k} \psi^{(1)}_{j,k}$$

且 g 由（14）给出，在 $\mathbb{T}^d$ 上处处有界，至多在一点处除外（对于 h ）以及在一点处除外（对于 g）。我们定义

$$g_l = \sum_{n \geq l+1} c^1_{j_n,k_n} \psi^{(1)}_{j_n,k_n}.$$

Then

$$G(x) = \sum_{l \geq 0} \sum_{k \notin (2\mathbb{Z})^d} g_l(x - 2^{-l}k + 2^{j_l}k_l)$$

处处局部无界，并满足 $\omega_j(G) = \omega_j(g)$，其中 $\omega_j(\phi)$ 由 $\omega_j(\phi) = \sup_{i,\ k} |c^i_{j,\ k}|$ 对一个小波级数 $\phi = \sum_{i,\ j,\ k} c^i_{j,\ k} \psi^{(i)}_{j\,k}$，定义。最后 $F = G + h$ 仍然处处局部无界，并满足 $\omega_j(F) = \omega_j$。

□

3 处处局部无界的随机小波级数

如前所述，傅里叶系数随机化的一个重要特征是具有平滑效应。本节旨在说明，对于小波级数，结论可能恰恰相反：我们将构造一个有界函数，对其小波系数进行无界随机化后，所得随机过程的样本路径几乎必然处处局部无界。更确切地说，我们考虑一般的 随机小波级数，即具有如下形式的随机过程

$$X = \sum_{i,j,k} c^i_{j,k} \chi^i_{j,k} \psi^{(i)}_{j,k}, \tag{16}$$

其中 $\chi^i_{j,\ k}$ 是服从共同概率分布 χ 的独立同分布随机变量。我们的目的是比较该级数的连续性和有界性性质

$$f = \sum_{i,j,k} c^i_{j,k} \psi^{(i)}_{j,k} \tag{17}$$

及其随机化（16）。本节假设级数（17）正规收敛，并将其视为关于 j 的级数（这种表述略有不严谨），即

$$\sum_j \sup_x \left(\sum_{i,k} |c^i_{j,k}| |\psi^{(i)}_{j,k}(x)| \right) < \infty.$$

如果小波是连续的（本节中我们作此假设），显然这样的函数是连续的；此外，如果 χ 有界，那么其随机化（16）也正规收敛，因此表示一个具有连续样本路径的随机过程。本节旨在证明：如果随机变量 χ 无界，则这一结果可能不成立。

我们先对无界随机变量作一个简单说明。首先，注意到 t

$$\forall n, \qquad \mathbb{P}(|\chi| \geq n^3) > 0,$$

因此存在一个递增序列 $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\mathbb{P}(|\chi| \geq n^3) \geq 2^{-dj_n}. \tag{18}$$

因此，由于在尺度 j_n 上有 $(2^d-1)2^{dj_n}$ 个小波，

$$\sum_n \sum_{i,k} \mathbb{P}(|\chi^i_{j_n,k}| \geq n^3) = +\infty,$$

并且博雷尔-坎特利引理表明，几乎处处存在无穷多个$|\chi^i_{j_n,\ k}|$大于 n^3。我们将 $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为与概率分布 χ 相关的发散序列。

现在可以陈述本节的主要结果，它给出了一个连续函数的具体例子：当随机变量 χ 无界时，其随机化小波系数产生一个处处不存在局部有界性的随机过程。

命题 3.1。设 χ 是一个无界随机变量，并设 $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是与 χ 相关的发散序列。则

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \sum_{i,k} \psi^{(i)}_{j_n,k}$$

是一个正规收敛的小波级数（因此 f 是连续的）。然而，其随机化

$$X_f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \sum_{i,k} \chi^i_{j_n,k} \psi^{(i)}_{j_n,k}$$

几乎处处处处不存在局部有界性，其中 $\chi^i_{j,\ k}$ 是服从共同分布 χ 的独立同分布随机变量。

注 3.2. 该结果是在周期化小波的情形下给出的，但可立即推广到 $\mathbb{R}^d$ 上的标准小波情形。

注 3.3. 在不对 χ 作任何假设的情况下，级数 X_f 是形式级数。不过，如果假设 χ 具有有限方差，那么 $\mathbb{E}(\|X_f\|^2) < \infty$，因此 X_f 的样本路径几乎处处属于 L^2。连续性的证明还表明，若 $\chi^i_{j_n,\ k}$ 有界，则随机化小波级数具有连续的样本路径。因此，该定理的一个直接推论是，Marcus 和 Pisier 定理不适用于随机小波级数；在这种情况下，该定理失效的原因仅与随机变量 χ 的有界性有关，而与其具体类型（Rademacher、高斯等）无关。

证明。第一条结论由命题 2.3 得出。至于第二条结论，由引理 2.5 可知，对 j 充分大的情形，某个$|\chi^i_{j_n,\ k}|$ 大于 n^3，因此 X_f 的小波系数无界。根据命题 2.2，这意味着 X_f 不属于 L^∞。为了得到更精确的结论，即X_f 局部无界，我们注意到，导出发散序列的论证可以加强如下：取一个二进立方体 $\lambda \subset [0,1]^d$；同样的论证表明，若考虑包含于 λ中的二进立方体，则几乎必然存在无限多个

个 $\chi^i_{j_n,\ k_n}$ 其对应的指标为 $(j_n,\ k_n)$，且满足 $k2^{-j_n} \subset \lambda$，并且符合$|\chi^i_{j_n,\ k}| \geq n^3$。这对 $[0,1]^d$ 的所有二进制子立方体都成立；这些子立方体构成一个可数集。因此 X_f 实际上处处局部无界。□

现在来证明，这个例子的行为并非病态；恰恰相反，它在空间 $C(\mathbb{T}^d)$中是泛型的。为此，我们将采用普遍性的概念。普遍性将“几乎处处”（相对于勒贝格测度）的概念推广到了无限维情形。在度量无限维向量空间中，不存在既 σ有限又平移不变的测度。不过，可以如下定义一种自然且平移不变的“几乎处处”概念，见 [6, 3]。

定义 3.4。设 E 是一个完备度量向量空间。若存在一个紧支撑概率测度 μ，使得 $A \subset E$ 是 *Haar*零的，则称博雷尔集 $A \subset E$ 为 *Haar*零集。

$$\forall x \in E, \quad \mu(x + A) = 0.$$

若此性质成立，则称测度 μ 与 A横截。若 E 的一个子集包含于某个 *Haar*零博雷尔集中，则称该子集为 *Haar*零集。*Haar*零集的补集称为普遍集。

若 E 是一个函数空间，常常可以将随机过程的概率分布 μ 用作横截测度，例如参见 [15, 13, 14]，其中介绍了该方法的一些应用。在此背景下，要验证性质 $\mathcal{P}$ 仅在 Haar零集上成立，可以构造一个随机过程X，使其样本路径落在 E 的某个紧子集中，并且对所有 $f \in E$，几乎处处，性质 $\mathcal{P}$对 $X + f$不成立。

定理 3.5. 设 $(\chi^i_{j,k})_{j,k}$ 是一列相互独立、同分布且无界的随机变量，其共同分布为 χ。对于几乎所有属于 $C(\mathbb{T}^d)$ 的函数 f，相应的随机化小波级数几乎处处处处无局部有界性。

证明. 我们假设 $d = 1$（$d > 1$ 的证明类似）。令 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 表示随机变量 $(\chi_{j,k})_{j,k}$ 所定义在其上的概率空间。考虑一个递增序列 $(j_n)_n$，使得

$$\mathbb{P}(|\chi| \geq n^3) \geq j_n 2^{-j_n}. \tag{19}$$

令 $(\varepsilon_{j_n,k})_{j_n,k}$ 为第二个概率空间 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ 上的一列相互独立的拉德马赫随机变量，并令 X 为定义在 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ 上的随机过程，其定义为

$$X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{\varepsilon_{j_n,k}}{n^2} \psi_{2^{j_n},k}.$$

作为 $|\varepsilon_n| = 1$，我们得到与之前相同的结论： X 的样本路径构成了 $C(\mathbb{T})$ 的一个逐点有界子集，而且该子集还是等度连续的。阿尔泽拉-阿斯科利定理意味着， X 的样本路径包含在 $C(\mathbb{T})$ 的一个紧子集中。

设 f 是 $C(\mathbb{T})$ 中的任意函数，并用 $(c_{j,\,k})_{j,\,k}$ 表示其小波系数序列。我们来证明， $\mathbb{P}'$-几乎处处，随机小波级数

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{2^{j_n}-1}\left(\frac{\varepsilon_{j_n,k}}{n^2}+c_{j_n,k}\right)\chi_{j_n,k}\psi_{2^{j_n},k}+\sum_{j\neq j_n}\sum_{k=0}^{2^j-1}c_{j,k}\chi_{j,k}\psi_{j,k}$$

与 $X+f$ 几乎处处 $\mathbb{P}$相关的随机小波级数几乎处处处处无局部有界性，这是通过证明该随机小波级数 $\mathbb{P}$几乎处处在任意二进区间上均无界 $\lambda\subseteq[0,1]$得到的。与命题 3.1的证明相同，只需在 $[0,1]$ 上进行讨论。对每个 n，我们考虑 $\{0,\dots,2^{j_n}-1\}$ 的互不相交子集，其定义如下

$$\Lambda_{n,l}=\{l2j_n,\dots,(l+1)2j_n-1\}$$

对 $l\in\{0,\dots,2^{j_n}/2j_n\}$。注意，对每个 n，不等式

$$\left|\frac{\varepsilon_{j_n,k}}{n^2}+c_{j_n,k}\right|<\frac{1}{n^2}$$

只有当 $\varepsilon_{j_n,\,k}$ 是 $n^2c_{j_n,\,k}$的最近整数时，才可能成立。由于 $\varepsilon_{j_n,\,k}$ 只能取 1 和 -1，该事件发生的概率至多为 $1/2$。因此，我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{l=0}^{2^{j_n}/2j_n}\widetilde{\mathbb{P}}\left(\forall k\in\Lambda_{n,l}\,,\,\left|\frac{\varepsilon_{j_n,k}}{n^2}+c_{j_n,k}\right|<\frac{1}{n^2}\right)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2^{j_n}}{2j_n}2^{-2j_n}<+\infty$$

~且博雷尔-坎特利引理表明， $\mathbb{P}$几乎处处地，对所有充分大的 n 以及所有 $l\in\{0,\dots,2^{j_n}/2j_n\}$，都存在 $k_{n,\,l}\in\Lambda_{n,\,l}$使得

$$\left|\frac{\varepsilon_{j_n,k_{n,l}}}{n^2}+c_{j_n,k_{n,l}}\right|\geq\frac{1}{n^2}.$$

由（19）可得

$$\sum_n\sum_l\mathbb{P}(|\chi_{j_n,k_{n,l}}|\geq n^3)=\infty.$$

在空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 上应用博雷尔-坎特利引理，我们得到，几乎必然存在无穷多个 $\chi_{j_n,k_{n,l}}$ 大于 n^3，因此存在无穷多个 n 的取值，使得

$$\left|\frac{\varepsilon_{j_n,k_{n,l}}}{n^2}+c_{j_n,k_{n,l}}\right||\chi_{j_n,k_{n,l}}|\geq n.$$

□

4 高斯小波随机化连续性的充分条件

我们已在命题 2.3 中证明，若函数 f 满足由 $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$定义的序列 6) 属于 ℓ^1，则 f 连续。此外，我们还得到了一个

不能指望条件不那么严格。在命题 3.1中，我们证明了条件 $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ 不足以保证 f 的随机化版本属于 L^∞。本节旨在确定一个能推出高斯小波随机化连续性的最小正则性条件，并研究其最优性。

首先，我们回顾一个关于独立标准高斯随机变量序列渐近行为的经典结果。该结果可由博雷尔-坎泰利引理与不等式直接推出：

$$\mathbb{P}(|\chi| \geq x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x > 0$$

若 χ 是标准高斯随机变量。

引理 4.1. 设 $(\chi^i_{j,k})_{i,j,k}$ 是一列独立标准高斯随机变量。几乎处处，存在 $J \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{i,k} |\chi^i_{j,k}| \leq \sqrt{2dj}\,, \quad \forall j \geq J.$$

下述引理可由随机级数的标准论证直接推出，参见例如 [20]；为求完整起见，我们给出简短证明。

引理 4.2. 设 $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一列独立标准高斯随机变量。若 $\sum_{j\in\mathbb{N}} \omega_j = +\infty$，则

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\chi_j|\omega_j = +\infty$$

几乎处处。

证明。 首先，我们来证明参数为1/2的独立同分布伯努利随机变量 B_j 的情形，即它们满足

$$\mathbb{P}(B_j = 0) = \mathbb{P}(B_j = 1) = 1/2.$$

由于级数 $\sum_{j\in\mathbb{N}} B_j\omega_j$ 是否收敛并不取决于前 B_j个值。因此，柯尔莫哥洛夫零一律适用，该级数收敛的概率只能是 0 或 1。假设该概率为 0，即该级数几乎处处收敛。那么级数 $\sum Q_j\omega_j$也几乎处处收敛，其中 $Q_j = 1 - B_j$ 同样是独立同分布的伯努利随机变量。但这两个级数之和是确定性级数$\sum_{j\in\mathbb{N}} \omega_j$，根据假设，该级数发散。现在，令 $a > 0$ 满足 $\mathbb{P}(|\chi| \geq a) = 1/2$。那么，$(1_{\{|\chi_j|\geq a\}})_{j\in\mathbb{N}}$ 构成一列独立同分布的伯努利随机变量。因此，级数 $\sum_{j\in\mathbb{N}} a1_{\{|\chi_j|\geq a\}}\omega_j$ 几乎处处发散。由关系式 $a1_{\{|\chi_j|\geq a\}} \leq |\chi_j|$即可得出结论。

□

命题 4.3。 假设小波是 *0*光滑的且连续。

- 如果 f 是一个周期函数，并且由 ω_j 定义的量 (6) 满足

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \sqrt{j}\omega_j < \infty, \tag{20}$$

那么， f 的高斯小波随机化 X_f 是连续的。

- 反之，如果 $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个非负序列，使得 $\sum_{j\in\mathbb{N}}\omega_j=\infty$ 并且所使用的小波是分段连续的，那么存在一个函数 $f=\sum c^i_{j,k}\psi_{(i)\ j,k i,j,k}$

  with

$$\sup_{i,k}|c^i_{j,k}|=\omega_j,\quad \forall j\in\mathbb{N}$$

  并且，小波高斯随机化 X_f *of* f 几乎必然在 $\mathbb{T}^d$上无界。

证明。 本命题的第一部分直接由命题2.3和引理4.1得出。第二部分的证明是对命题第二部分证明2.3的改写，有两处修改：首先，我们使用引理4.2。其次，我们需要考虑高斯随机变量可能取正值或负值这一事实。为此，我们还使用另一个立方体，其中 K' 其中

$$\forall x\in K',\qquad \psi^1(x)\le -C,$$

并记 $K'_{j,\ k}$ 为该二进立方体

$$K'_{j,k}=\{x:\ 2^j x-k\in K'\}.$$

随后，为构造第一个函数 f，对命题 2.3第二部分的证明作如下修改：取一个 $\omega_{j_{n+1}}\psi^{(1)}_{j_{n+1},\ k_{n+1}}$ 使得 $K_{j_{n+1},\ k_{n+1}}\subset 1/2.K_{j_n,\ k_n}$，再取一个 $\omega_{j_{n+1}}\psi^{(1)}_{j_{n+1},\ k'_{n+1}}$ 使得 $K_{j_{n+1},\ k'_{n+1}}\subset 1/2.K'_{j_n,\ k_n}$。经过这一修改，根据相应高斯随机变量为正还是为负，我们考察函数中满足 $c^1_{j_n,\ k_n}\chi^i_{j_n,\ k_n}\psi^{(1)}_{j_n\ ,\ k_n}$ 为正的部分，并得到一个无界级数。根据命题 2.3证明中的同样论证，f 的其他分量在 $K_{j_n,\ k_n}$ 上有光滑贡献，因此不会改变该级数的无界性。

□

注记 4.4. 前一结果中的论证很容易推广到更一般的概率分布，如下所示。

- 考虑具有指数衰减的概率分布，即随机变量 χ 满足

$$\mathbb{P}(|\chi|\ge x)\le Ce^{-bx^\gamma},\quad \forall x>0 \tag{21}$$

  对某些常数 $C,b>0$ 和 $\gamma\in(0,2]$. 那么，博雷尔-坎特利引理推出，几乎处处

$$\sup_{i,k}|\chi^i_{j,k}|\le\left(\frac{dj}{b}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

[1]对于每个 j 充分大的值。因此，条件（20）替换为 $\sum_{j\in\mathbb{N}}j^\gamma\omega_j\le\infty$

.

- 一个限制较弱、弱于指数衰减的假设是，随机变量 χ 各阶矩有限。这等价于概率分布快速衰减，即

$$\forall l > 0 \quad \exists C > 0 \quad \text{such that} \quad \mathbb{P}(|\chi| \geq x) \leq \frac{C}{x^l}, \quad \forall x > 0. \tag{22}$$

于是，博雷尔-坎特利引理表明，几乎处处，对于每个 $\varepsilon > 0$，都有

$$\sup_{i,k} |\chi^i_{j,k}| \leq 2^{\varepsilon j}$$

对于所有 j 足够大时。因此，条件（20）可替换为存在$\varepsilon > 0$ 使得 $\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{\varepsilon j}\omega_j < \infty$。

在这两种情形下，对于第二部分，若存在 $a > 0$ 使得 $\mathbb{P}(|\chi| \geq a) = 1/2$，则论证保持不变。否则，只需通过稀疏化论证推广引理4.2：假设 $a > 0$ 满足 $\mathbb{P}(|\chi| \geq a) = p > 0$。考虑一列参数为 p 的独立伯努利随机变量 $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$。若 $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一列参数为 $\frac{1}{2p}$、且与 $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$独立的独立伯努利随机变量，则 $(\varepsilon_j B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一列参数为 $1\ 2$ 的独立伯努利随机变量，因此 $\sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j B_j \omega_j = +\infty$。于是得到 $\sum_{j\in\mathbb{N}} B_j\omega_j = +\infty$，因为 $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$。

命题 4.3 并未给出保证小波高斯随机化有界性的序列 $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 的充要条件。不过，下一个命题表明，一般假设 (20) 无法得到比以下更强的改进：

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{j}}{\log(\log(j))}\omega_j < \infty \tag{23}$$

当小波为紧支撑时。

命题 4.5. 设$(\psi^{(i)}_{j\,k}{}_{,})$ 是一个紧支撑小波基。存在一个非负序列$(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$，满足 *(23)*；还存在一个函数 $f = \sum_{i,j,k} c^i_{j,k}\psi^{(i)}_{j\,k}{}_{,}$，满足

$$\sup_{i,k} |c^i_{j,k}| = \omega_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

使得 f 的小波高斯随机化 X_f 几乎处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处处局部无界。

证明。 从现在起，我们假设 $d = 1$，情形 $d > 1$ 类似。回忆一下，若 χ 是标准高斯随机变量，则

$$\mathbb{P}(\chi \geq \sqrt{j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} e^{-j/2}(1 + o(1)) \geq e^{-3j/4}$$

对于 j 足够大。与命题2.3的证明类似，我们记 K 为一个二进区间，使得 $\psi \geq C$在 K对某个 $C > 0$成立。对于 $j \in \mathbb{N}$和 $k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}$，我们定义

$$\lambda_{j,k} := \text{Supp } \psi_{j,k} \quad \text{and} \quad K_{j,k} := \{x \in \mathbb{R} : 2^j x - k \in K\}.$$

由于小波是紧支撑的，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $j \geq 0$，k，$k' \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}$，都有$\lambda_{j,k} \cap \lambda_{j,k'} = \emptyset$若 $|k - k'| \geq k_0$。

我们令 $j_n = (\lfloor \frac{2}{\log(2) - 1/4} \rfloor + 1)^n$，并通过设定来定义序列 $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$

$$\omega_j = \begin{cases} (\sqrt{j} \log j \log(\log j))^{-1} & \text{if } j = j_n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该序列满足 (23)，但不满足 (20)。我们考虑 f 由以下方式给出

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in k_0 \mathbb{N},\, k \leq 2^{j_n} - 1} \omega_{j_n} \psi_{j_n,k} \tag{24}$$

及其随机化

$$X_f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in k_0 \mathbb{N},\, k \leq 2^{j_n} - 1} \chi_{j_n,k_n} \omega_{j_n} \psi_{j_n,k}. \tag{25}$$

我们将验证 X_f 在任意二进区间上都无界 $\lambda \subset [0,1]$。与命题 3.1 的证明一样，只需在 $[0,1]$ 上进行考察。

对于任意 $j \in \mathbb{N}$，我们令 $j' = (\lfloor \frac{2}{\log(2) - 1/4} \rfloor + 1) j$，并考虑事件

$$A_j = \left\{ \exists k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\} \text{ such that } \forall k' \in k_0 \mathbb{N} \text{ with } \lambda_{j',k'} \subset K_{j,k} \text{ one has } \chi_{j',k'} \leq \sqrt{\frac{j'}{3}} \right\}.$$

注意，存在 $c = c\ k_0\ K \in \mathbb{N}$ j j' $\{k \in k_0 \mathbb{N}\ \lambda_{j'\,k'} \subset (,)$，其与 和 独立，$K_{j\,k}\} = 2^{j'-j-c}$ 且满足 #：。根据高斯随机变量的独立性，我们得到

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_j) &\leq \sum_{k=0}^{2^j - 1} \mathbb{P}\left(\forall k' \in k_0 \mathbb{N} \text{ with } \lambda_{j',k'} \subset K_{j,k} \text{ one has } \chi_{j',k'} \leq \sqrt{\frac{j'}{3}} \right) \\ &\leq 2^j (1 - e^{-j'/4})^{2^{(j'-j-c)}} \\ &\leq 2^j \exp(-2^{j'-j-c} e^{-j'/4}) \\ &\leq 2^j \exp(-\tfrac{1}{2^c} 2^{-j} e^{j'(\log(2) - 1/4)}) \\ &\leq 2^j \exp(-\tfrac{1}{2^c} 2^{-j} e^{2j}) \end{aligned}$$

对于所有足够大的 j。因此，对于 $j_n = (\lfloor \frac{2}{\log(2) - 1/4} \rfloor + 1)^n$，由博雷尔-坎特利引理可知，几乎处处存在一个 $N \in \mathbb{N}$ 和一个序列 $(k_n)_{n \geq N}$，$k_n \in k_0 \mathbb{N}$，使得

$$\lambda_{j_n,k_n} \subset K_{j_{n-1},k_{n-1}} \quad \text{and for all } n \geq N, \quad \chi_{j_n,k_n} > \sqrt{\frac{j_n}{3}}. \tag{26}$$

现在我们在由博雷尔-坎特利引理给出的概率为 1 的事件上进行讨论。该项

$$f_N = \sum_{n < N} \sum_{k \in k_0 \mathbb{N},\, k \leq 2^{j_n} - 1} \chi_{j_n,k} \omega_{j_n} \psi_{j_n,k}$$

显然有界，我们关注其余部分。对于任意整数 $M \geq N+1$，在$\lambda_{j_M,\, k_M}$上有

$$\begin{aligned} g_N &:= \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{k\in k_0\mathbb{N},\, k\leq 2^{j_n}-1} \chi_{j_n,k}\omega_{j_n} h_{j_n,k} \\ &= \sum_{n=N}^{M-1} \chi_{j_n,k_n}\omega_{j_n} h_{j_n,k_n} + \sum_{n\geq M} \sum_{k\in k_0\mathbb{N}:\, \lambda_{j_n,k}\subset\lambda_{j_M,k_M}} \chi_{j_n,k}\omega_{j_n} h_{j_n,k} \\ &\geq \sum_{n=N}^{M-1} C\sqrt{\frac{j_n}{3}}\omega_{j_n} + \sum_{n\geq M} \sum_{k\in k_0\mathbb{N}:\, \lambda_{j_n,k}\subset\lambda_{j_M,k_M}} \chi_{j_n,k}\omega_{j_n}\psi_{j_n,k}. \end{aligned}$$

第二项在 λ_{j_M} 上k_M 的积分为零，因此 g_N在 λ_{j_M} 上k_M的平均值大于 $C\sum_{n=N}^{M}\sqrt{\frac{j_n}{3}}\omega_{j_n}$。由于这一项在 M上无界，故得出结论。 □

注4.6。 1. 同样，这一结果可以推广到满足某种条件的一般概率分布

$$\mathbb{P}(|\chi|\geq x)\geq C'e^{-ax^{\gamma}}$$

对所有 $x>0$ 充分大且存在某个常数 C'，$a>0$ 以及某个指数$\gamma\in(0,2]$。例如，阶数为 $n\geq 1$ 且满足 $\gamma=\frac{2}{n}$ 的 Wiener 混沌中的随机变量就是这种情况，参见 [19, 定理 6。12]在这种情况下，(23) 替换为

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{j^{\frac{1}{\gamma}}}{\log(\log(j))}\omega_j < \infty.$$

2. $2^{js}j^{\gamma}\omega_j < +\infty$ 关于 $s\geq 0$ 的条件意味着函数 f 属于通过傅里叶分析方法定义的对数光滑周期 Besov 空间 $B^{s,\,\gamma}_{p\,q,}(\mathbb{T})$。命题 4.3 的假设 $\sqrt{j}\omega_j<\infty$ 等价于 f 属于 $B^{0,\,1/2}_{\infty\,\infty,}(\mathbb{T})$，因此 f 是 $B^{1,\,1/2}_{\infty\,\infty,}(\mathbb{T})$ 中某个函数的导数。这个空间可以等同于对数光滑齐格蒙德类 $\mathcal{Z}^{1,\,1/2}(\mathbb{T})$:

$$\mathcal{Z}^{1,1/2}(\mathbb{T}) := \{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}) : \sup_{0<|h|<1} \frac{|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|\sqrt{1-\log(h)}}{|h|} < +\infty\}.$$

请注意，对于 $s>0$，通过 傅里叶分析方法定义的对数光滑 Besov 空间与经典对数光滑 Besov 空间的定义（通过 对 的迭代差分积分定义 f）相一致。经典定义可以推广到 $s=0$，但不再与傅里叶分析方法相一致。关于 $,\infty^{1/2}_{\infty,}(\mathbb{T})$ 与 $\mathcal{Z}^{1,1/2}(\mathbb{T})$ 的等同关系，以及对数光滑函数空间的深入研究，请参见 [11]；关于其小波刻画，请参见 [1]。

5 连续模与总结

人们可能会认为，连续性（或有界性）因小波系数的随机化而丧失，是因为连续性和有界性无法通过对小波系数模长的条件来刻画。现在我们将证明事实并非如此，方法是考察具有乘子性质的 H¨older 空间 C^α 。空间 $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ 可由关于小波系数的一个简单条件刻画，见 [28]。首先回顾，若 $\alpha \in (0,1)$，则 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$，当且仅当 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且

$$\exists C > 0 \quad \text{such that} \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

且相同的定义也适用于周期情形。关于 $\alpha \notin (0,\ 1)$ 时的推广，我们也请参阅 [28] 。若小波是 1-光滑的，则 H¨older 空间具有如下小波刻画：函数 f 属于 $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ 当且仅当其小波系数满足

$$\exists C > 0 \quad \text{such that} \quad \begin{cases} |c_k| \leq C & \forall k \in \mathbb{Z}^d \\ |c^i_{j,k}| \leq C2^{-\alpha j} & \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d \end{cases} \tag{27}$$

且该刻画在周期情形下也成立。我们将看到，H¨older 空间提供了一种有趣的情形，在此情形中，关于 Rademacher 随机化与高斯随机化的结论存在显著差异。

我们先作一些简单的说明。首先，显然，(27) 表明，在周期和非周期情形下，属于 C^α 的函数经小波系数的独立同分布随机化后，仍属于 C^α ，其中随机变量 χ 有界。

对于使用无界随机变量进行的随机化，必须区分周期情形与非周期情形。

对于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的函数，无界随机化通常会导致：属于 $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ 空间的函数，其随机化小波级数不属于$L^\infty(\mathbb{R}^d)$。例如，考虑由以下小波级数定义的函数

$$\sum_{j\in\mathbb{N},i,k} 2^{-\alpha j}\Psi^{(i)}_{j,k}. \tag{28}$$

利用（27），显然该函数属于 C^α（$\mathbb{R}^d$）。然而，如果 χ 无界，那么它的随机化

$$\sum_{j\geq 0,i,k} 2^{-\alpha j}\chi^i_{j,k}\Psi^{(i)}_{j,k}$$

不属于 $L^\infty(\mathbb{R}^d)$。事实上，在给定尺度 j 下，存在无穷多个随机变量 $\chi^i_{j,\ k}$ 使得

$$\sup_{i,k} |\chi^i_{j,k}| = +\infty.$$

不过，我们可以预期这个随机过程是局部有界的。这实际上等价于考虑周期情形，我们现在就采用这种情形。更确切地说，我们将

通过随机化的连续模来研究其一致正则性（这一语境也包括 H¨older 空间的情形）。我们回顾一下，连续模是一个递增函数 $\theta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，满足 $\theta(0) = 0$，并且对于所有 $x \in \mathbb{R}^+$ 以及某个常数 $C > 0$，都有 $\theta(2x) \le C\theta(x)$。如果存在一个常数$C > 0$ 使得.....，我们就称 θ 是 f 的连续模

$$|f(x) - f(y)| \le C\theta(|x - y|) \tag{29}$$

对于每个 x，y。正则性的小波刻画要求连续模满足以下附加正则性条件，见 [18]。

定义 5.1。若连续模 θ 满足

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall J \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=J}^{\infty} 2^{Nj}\theta(2^{-j}) \le C2^{NJ}\theta(2^{-J}) \\ \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{J} 2^{(N+1)j}\theta(2^{-j}) \le C2^{(N+1)J}\theta(2^{-J}). \end{cases}$$

命题 5.2。设 θ 是一个连续模，且 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个函数。若 θ是 f的连续模，则

$$\exists C > 0 \quad \forall i, j, k \quad |c^i_{j,k}| \le C\theta(2^{-j}). \tag{30}$$

反之，若(30) 成立，且 θ 是正则的，则 θ 是 f的连续模。

结合注4.4，这一关于一致连续模的刻画直接给出以下结果。

命题 5.3。设 $\chi^{(i)}_{j\,k}$，是共同分布为 χ 且具有阶为 γ 的指数衰减的独立同分布随机变量（见(21)），并设 $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$ 其中 $\alpha \in (0,\ 1)$。则 X_f 对 f 进行小波随机化后，几乎处处存在 $C > 0$ 使得

$$\forall x, y \in \mathbb{T} \qquad |X_f(x) - X_f(y)| \le C|x - y|^\alpha |\log(|x - y|)|^{\frac{1}{\gamma}}.$$

命题 5.3 的最优性也适用于备注4.6中已考虑的概率分布，即属于阶数为 $\frac{2}{\gamma}$ 的 Wiener 混沌的随机变量，$\gamma = 2$特别是标准高斯随机变量的情形。–

命题 5.4。设 $\chi^{(i)}_{j\,k}$,是一列共同分布为 χ 的独立同分布随机变量，并假设存在某个常数 C, $C', a, b > 0$ 以及一个指数 $\gamma \in (0, 2]$，使得当 $x > 0$ 充分大时，

$$C'e^{-ax^\gamma} \le \mathbb{P}(|\chi| \ge x) \le Ce^{-bx^\gamma}.$$

考虑定义在 $\mathbb{T}$ 上的函数 f

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i,k} 2^{-\alpha j}\psi^{(i)}_{j,k}$$

w其中 $\alpha \in (0,\ 1)$。那么，几乎处处，小波随机化 X_f 满足 f 的 s

$$0 < \sup_{x \neq y} \frac{|X_f(x) - X_f(y)|}{|x-y|^\alpha |\log(|x-y|)|^{\frac{1}{\gamma}}} < +\infty.$$

证明。 上界已在命题 5.3. 特别地，注意到 X_f 几乎处处有界。对于下界，我们按照命题 4.5和备注 4.6 的做法证明：对于任意 $c \in (0, d\log\ 2/a)$，几乎处处存在无穷多个尺度 j 使得

$$\sup_{i,k} |\chi_{j,k}^{(i)}| \geq (cj)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

正交 性以及小波的第一个消失矩使我们可以将其写为 e

$$\begin{aligned}(cj)^{\frac{1}{\gamma}} 2^{-\alpha j} \leq |\chi_{j,k}^{(i)}| 2^{-\alpha j} &\leq 2^{dj} \int_{\mathbb{R}^d} |X_f(x) - X_f(k2^{-j})||\psi(2^j x - k)|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|X_f((u+k)2^{-j}) - X_f(k2^{-j})\right||\psi(u)|du \qquad (31)\end{aligned}$$

现在，我们根据 $|u| \leq 2^{-j}$ 或 $|u| > 2^{-j}$将积分分解为两部分。对于第一种情形，我们写成

$$\begin{aligned}&\int_{|u|\leq 2^{-j}} \left|X_f((u+k)2^{-j}) - X_f(k2^{-j})\right||\psi(u)|du \\ \leq\ & 2^{-\alpha j} \sup_{x\neq y} \frac{|X_f(x) - X_f(y)|}{|x-y|^\alpha |\log(|x-y|)|^{\frac{1}{\gamma}}} \int_{|u|\leq 2^{-j}} |u|^\alpha |\log(|u2^{-j}|)|^{\frac{1}{\gamma}} |\psi(u)|du \\ \leq\ & D2^{-\alpha j} j^{\frac{1}{\gamma}} \sup_{x\neq y} \frac{|X_f(x) - X_f(y)|}{|x-y|^\alpha |\log(|x-y|)|^{\frac{1}{\gamma}}}\end{aligned}$$

对于某个常数 $D > 0$，注意到 $|\log(|u2^{-j}|)|^{\frac{1}{\gamma}}$可由 $|\log(|u|)|^{\frac{1}{\gamma}} |\log(|2^{-j}|)|^{\frac{1}{\gamma}}$控制，并利用小波的衰减。对于第二项，我们利用 X_f的有界性以及小波的快速衰减，得到

$$\begin{aligned}\int_{|u|>2^{-j}} \left|X_f((u+k)2^{-j}) - X_f(k2^{-j})\right||\psi(u)|du &\leq 2\|X_f\|_\infty \int_{|u|>2^{-j}} \frac{1}{(1+|u|)^{N+2}} du \\ &\leq D'2^{-Nj}\end{aligned}$$

对于 $N > \alpha$ 以及常数 $D' > 0$。将这两种情形与（31）结合起来，可得

$$(cj)^{\frac{1}{\gamma}} 2^{-\alpha j} \leq D2^{-\alpha j} j^{\frac{1}{\gamma}} \sup_{x\neq y} \frac{|X_f(x) - X_f(y)|}{|x-y|^\alpha |\log(|x-y|)|^{\frac{1}{\gamma}}} + D'2^{-Nj}$$

由此得出结论。 □

注5.5。 小波的正交性假设可以放宽为：要求母小波生成一个双正交基。在这种情况下，我们可以

例如，可以利用 Meyer、Sellan 和 Taqqu 的重要分解来研究分数布朗运动 [34]：事实上，赫斯特指数为 B_H 的分数布朗运动 $H \in (0,1)$ 可以写成

$$B_H(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-Hj} \xi_{j,k} \psi_{H+1/2}(2^j t - k) + R(t) \tag{32}$$

其中 R 是一个光滑过程，$(\xi_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ 是一个独立同分布标准高斯随机变量序列，并且 $\psi_{h+1/2}$ 生成一个双正交小波基。命题5.4 中给出的函数 $C^\alpha(\mathbb{T})$ 的高斯随机化连续模的最优性，是通过一个函数 f 得到的；其随机化在相差一个光滑过程的意义下，与分数布朗运动非常相似。这类随机小波级数的精确逐点行为已在文献 [14]中得到深入研究。特别地，作者发现还存在另外两类点，其逐点振荡比连续模给出的更慢。另见 [9] 关于二阶混沌结果的文献。

如果随机变量 $\xi_{j,k}$ 仅满足式（22）给出的快速衰减假设，则无法得到精确的连续模。然而，若 $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$，那么几乎处处，对所有 $\varepsilon > 0$，都有 $X_f \in C^{\alpha-\varepsilon}$。因此，若将函数¨在 f 上的一致 H $\mathbb{T}$ ölder 指数定义为

$$H_{\min}(f) = \sup\{\alpha > 0 : f \in C^\alpha(\mathbb{T})\},$$

于是有

$$H_{\min}(X_f) \geq H_{\min}(f)$$

几乎处处成立。上述不等式实际上是等式：事实上，固定一个 $\beta > 0$ ，使得 $f \notin C^\beta(\mathbb{T})$。H¨older 空间的小波刻画表明，存在一个序列 $(i_n,\ j_n,\ k_n)$，使得 f 的小波系数满足 $\sup_{n\in\mathbb{N}} 2^{\beta j_n} |c^{i_n}_{j_n,\ k_n}| = +\infty$。对于每个 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|\chi^{i_n}_{j_n,k_n}| \geq 2^{-\varepsilon j_n}) = +\infty,$$

博雷尔-坎特利引理意味着 $\sup_{n\in\mathbb{N}} 2^{(\beta+\varepsilon) j_n} |c^{i_n}_{j_n,\ k_n}||\chi_{j_n,\ k_n}| = +\infty$，因此 $X \notin C^{\beta+\varepsilon}(\mathbb{T})$ 几乎处处成立。由此可得

$$H_{\min}(X_f) = H_{\min}(f)$$

几乎处处成立。

最后，我们通过一个具体例子来清楚展示傅里叶随机化与小波随机化之间的根本区别。令 $\{x\}$ 为“锯齿函数”

$$\{x\} = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{if } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

其傅里叶级数为

$$\{x\} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m x)}{\pi m}. \tag{33}$$

Reca现在，Wiener 关于 $[0,1$ 上布朗运动的精彩傅里叶展开]:

$$B(x)=\sqrt{2}\chi_0 x+\sum_{m=1}^{\infty}\chi_m\frac{\sin(2\pi mx)}{\pi m},$$

其中，$(\chi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是一个独立同分布标准高斯随机变量序列。因此，锯齿函数的高斯随机化除一个线性项外就是布朗运动。这个例子清楚地展示了这种随机化的平滑效应：我们从一个不连续函数出发，得到一个随机过程，其样本路径对任意 $\varepsilon>0$ 都属于 $C^{1/2-\varepsilon}$；但正则性的提升是以更平滑的奇异性“遍布各处”为代价的：几乎处处，对所有 x_0，都有 B 不属于逐点 H¨older 空间 $C^{1/2}(x_0)$。

现在假设我们使用紧支撑小波。对于 j 足够大时，$\Psi_{j\,k}^{(i)}$ 的支撑长度小于 1，且周期化小波与 $\mathbb{R}$上的小波重合；由此可知，锯齿函数的小波系数$c_{j,\ k}$ 与 Heaviside函数的（7）式系数相同（相差一个因子 2）。因此，方程（8）成立，这意味着存在无穷多个大小完全相同的小波系数。由于高斯随机变量可以取任意大的值，因此随机化后，这个序列无界；由命题（2.2）可知，相应过程的样本路径几乎处处无界。

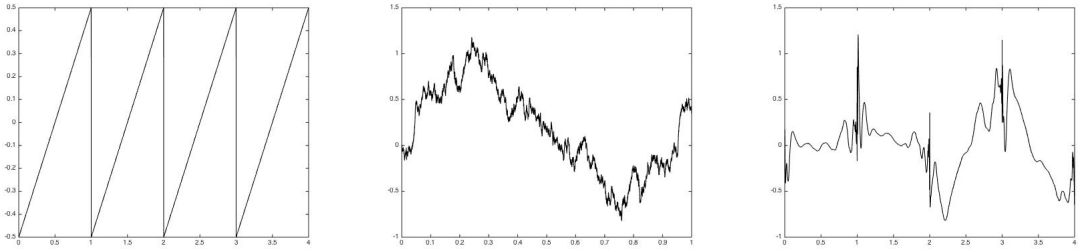

图 1：从左至右：锯齿函数；借助锯齿函数的随机傅里叶级数（维纳公式）得到的布朗运动近似；以及采用 Daubechies- 10 小波得到的锯齿函数随机化小波级数。信号长度为 2^{17}，正弦级数对布朗运动的近似在 $m=2^{14}$ 处停止。可以观察到，随机化小波级数在锯齿函数的不连续点处开始发散，而在其他位置保持光滑；与之形成鲜明对比的是，傅里叶随机化无法保留奇异性的局部化信息。

然而请注意，对于小波随机化，奇异行为仍然出现在初始函数具有奇异行为的位置：对于任意 $\varepsilon>0$，由此得到的随机过程是有界的，甚至足够光滑，以至于任意区间 $\mathbb{T}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]$ 的小波都如此。这与傅里叶随机化形成了鲜明对比。我们还要指出，

随机小波级数和随机傅里叶级数的逐点正则性研究，将在即将开展的工作中得到详细探讨。

参考文献

[1] A. Almeida. 广义 Besov 空间中的小波基。《数学分析与应用杂志》，304:198–211，2005。18[2] J.-M. Aubry 和 S. Jaffard。随机小波级数。《数学物理通讯》，227(3):483–514，2002。2[3] J. Yorke B. Hunt, T. Sauer。普遍性：无限维空间中一种具有平移不变性的“几乎处处”概念。《美国数学会通报》，27(2):217–238，1992。12[4] P. Billard, S. Kwapie ´n, A. Pe-lczy ´nski 和 Ch. Samuel。Banach空间中随机无条件收敛的双正交系统。载于《德克萨斯泛函分析研讨会 1985–1986》（德克萨斯州奥斯汀，1985–1986），Longhorn Notes，第13–35页。德克萨斯大学，德克萨斯州奥斯汀，1986。4, 5[5] E. Borel。论泰勒级数。《数学学报》，20:243–247，1897。1[6] J. Christensen。阿贝尔 Polish 群中的 Haar 零测集。《以色列数学杂志》，13(3):255–260，1972。12[7] Z. Ciesielski。高斯过程实现的 Hölder 条件。《美国数学会会刊》，99:403–413，1961。2[8] I. Daubechies。《小波十讲》。工业与应用数学学会，宾夕法尼亚州费城，1992。6[9] L. Daw 和 L. Loosveldt。用于研究广义 Rosenblatt 过程逐点正则性的小波方法。《电子概率学杂志》，27:1–45，2022。22[10] K. de Leeuw, Y. Katznelson 和 J.-P. Kahane。连续函数的傅里叶系数。《巴黎科学院报告》A-B辑，285(16):A1001–A1003，1977。3[11] O. Dom´ınguez 和 S. Tikhonov。对数光滑函数空间：嵌入与刻画。arXiv，2018。18[12] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkyacharian 和 D. Picard。小波收缩：渐近理论。《英国皇家统计学会杂志》B辑，57(2):301–369，1995。3[13] C. Esser 和 S. Jaffard。小波级数的发散：多重分形分析。《数学进展》，328:928–958，2018。12[14] C. Esser 和 L. Loosveldt。高斯小波级数的慢速点、普通点和快速点，以及在分数布朗运动中的应用。《拉丁美洲概率与数理统计杂志 ALEA》，19(2):1471–1495，2022。12, 22

[15] A. 索博列夫空间。《函数分析杂志》，25(6):1806–1821, 2010年。12[16] C. Heil. 基理论入门。Birkh¨auser, 2010年。3[17] S. Jaffard. 小波技术与逐点正则性。《图卢兹科学学院年刊》，15(1):3– 33, 2006. 3[18] S. Jaffard and Y. Meyer. 小波方法：函数的逐点正则性与局部振荡。《美国数学会回忆录》，123(587), 1996. 3, 20[19] S. Janson. 高斯希尔伯特空间。剑桥数学专著丛书，剑桥大学出版社，1997. 18[20] J.-P. Kahane. 若干随机函数级数。剑桥高等数学研究丛书第5卷，1968. 1, 14[21] J.-P. Kahane. 泰勒级数、傅里叶级数与布朗运动之间一个世纪的交融。《伦敦数学会通报》，29:257–279, 1997. 1[22] V. Kvaratskhelia. 概率论问题中的函数级数无条件收敛。《数学科学杂志》，200(2), 2014. 4, 5[23] M. Ledoux and M. Talagrand. 巴拿赫空间中的概率，收录于《数学及其边界领域成果丛书》(3) 第23卷 [《数学及相关领域成果丛书》(3)]。施普林格出版社，柏林，1991。等周问题与随机过程。5[24] S. Mallat. 信号处理中的小波之旅。学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，1998。6[25] M. B. Marcus and G. Pisier. 随机三角级数一致收敛的充要条件。奥胡斯大学讲义系列，50, 1978. 2[26] M. B. Marcus and G. Pisier. 随机傅里叶级数及其在调和分析中的应用。《数学年刊研究》，普林斯顿大学出版社，1981. 2[27] B. Maurey. 走近并漫游于 Jean-Pierre Kahane 的数学世界，兼及若干旁论。研讨会与大会，33:1–68, 2019. 4[28] Y. Meyer. 《小波与算子》。Hermann，巴黎，1990。英文译本《小波与算子》，剑桥大学出版社，1992。6, 19[29] F. L. Nazarov. 系数问题的 Bang 解。《圣彼得堡数学杂志》，9:407–419, 1997. 4[30] R. Paley and A. Zygmund. 关于若干函数级数。《剑桥哲学学会会刊》，26, 26 and 28:266–272, 337–357, and 458–474, 1930年，1932年。1

[31] W. Rudin. 有间隙的三角级数。《数学与力学杂志》，9(9):203–227。, 1960年。 7..
[32] H. Steinhaus. 关于幂级数的收敛圆以自然边界为界的概率¨。《数学杂志》，31:408–416, 1930年。 1[33] J.O. Str¨omberg. 一种改进的 Franklin 系统及高阶样条系统 $\mathbb{R}^n$作为 Hardy 空间的无条件基。纪念 *Antoni Zygmund* 会议，*W. Beckner* 编，*Wadsworth* 数学丛书，2:475–493, 1983年。 3[34] F. Sellan Y. Meyer and M. Taqqu. 小波、广义白噪声与分数阶积分：分数布朗运动的合成。《傅里叶分析与应用杂志》，27:465–494, 1999年。 22