arXiv:2304.00816v1 [math.NT] 3 Apr 2023

关于某些2进制ζ值的无理性

Li Lai

摘要

令 $\zeta_2(\cdot)$为Kubota–Leopoldt 2进制ζ函数。我们证明，对于每个非负整数 s，都存在区间 $[s+3, 3s+5]$ 内的奇整数 j，使得 $\zeta_2(j)$是无理数。特别地， $\zeta_2(7)$ $\zeta_2(9)$ $\zeta_2(11)$ $\zeta_2(13)$中至少有一个是无理数。

我们的方法受到Sprang近期工作的启发。我们构造了显式的有理函数。这些有理函数的（高阶）导数的Volkenborn 积分产生了1与2进制Hurwitz ζ值的优良线性组合。最困难的一步是证明某些 Volkenborn 积分非零；这一问题通过仔细处理二项式系数得以解决。

1 引言

众所周知，黎曼ζ函数 $\zeta(\cdot)$在正偶整数处的值均为 π的幂的非零有理数倍，且均为超越数。 $\zeta(\cdot)$在正奇整数（$\geqslant 3$）处的值的算术性质则更为神秘。Ap´ery [1] 证明了 $\zeta(3)$是无理数，取得了这一问题的首个成果。Rivoal [12], 以及Ball和Rivoal [2] 给出了由$1, \zeta(3)$ $\zeta(5)\ldots, \zeta(s)$张成的 $\mathbb{Q}$-空间的维数下界。作为Ball-Rivoal定理的推论，存在无穷多个在有理数域上线性无关的 $\zeta(2k+1)$。近年来， [9, 11, 10]中取得了一些进一步的进展。特别是，Fischler [10] 显著改进了该维数下界。

定理 A（Fischler [10]）。对于任意充分大的奇整数 s，我们有

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} (1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(s)) \geqslant 0.21 \sqrt{\frac{s}{\log s}}.$$

虽然 $\zeta(3)$ 仍是目前已知的唯一一个无理的特定奇 zeta 值，但关于 $\zeta(s)$ 在 s 为奇数且较小时的无理性，已有一些部分结果。Zudilin [16] 证明了四个数 $\zeta(5)$ $\zeta(7)$ $\zeta(9)$ $\zeta(11)$ 中至少有一个是无理数。此外，Zudilin [17] 还证明，对于每个奇整数$s \geqslant 1$，集合 $\{\zeta(j) \mid j \in \mathbb{Z} \cap [s+2, 8s-1], j \text{奇}\}$ 中至少包含一个无理数。

现在我们转而关注 p进数世界。本文中，字母 p 和 q 始终表示素数。记号 $\mathbb{Z}_p$、 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{C}_p$ 具有其标准含义。我们用 $v_p(x)$ 表示 x的 p进赋值。 p进范数定义为 $|x|_p = p^{-v_p(x)}$。记号 $|y|$ 表示 y的阿基米德范数。在阿基米德世界中，log 始终表示自然对数。

我们关注 p-进 ζ 函数特殊值的算术性质。文献中记号 $\zeta_p(\cdot)$ 有几种略有不同的含义。我们采用如下定义：对于整数 $s \geqslant 2$，定义 $\zeta_p(s) := L_p(s, \omega^{1-s})$，其中 ω 是 Techm¨uller 特征，而 $L_p(s, \chi)$ 是与特征 χ 相关的 Kubota–Leopoldt$p$- 进 L- 函数。采用这一记号，我们有（对于整数 $s \geqslant 2$）：

$$\zeta_p(s) = \lim_{\substack{k \to s \ p\text{-adically} \\ k \in \mathbb{Z}_{<0}, \quad k \equiv s \pmod{p-1}}} \zeta(k) \quad \in \mathbb{Q}_p,$$

且当 s 为正偶整数时， $\zeta_p(s)$ 为零。我们将在第2节通过 Volkenborn 积分回顾 p-进 Hurwitz ζ 函数和 p-进 L-函数的定义。

Calegari [6] 证明了当 $p=2$ 为 3 时， $\zeta_p(3)$ 是无理数。最近，Calegari、Dimitrov 和 Tang[7] 证明了当 $p=2$ 时， $\zeta_p(5)$ 是无理数。他们使用了算术全纯性判据。另一方面，Sprang [14] 证明了 Ball-Rivoal 定理的 p-进类比。

定理B（Sprang [14]）。设 K 是一个数域（在 $\mathbb{C}_p$中）。对于 $\varepsilon>0$ 和充分大的正奇整数 s，有

$$\dim_K \operatorname{Span}_K\left(1, \zeta_p(3), \zeta_p(5), \ldots, \zeta_p(s)\right) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2[K:\mathbb{Q}](1+\log 2)} \log s.$$

Sprang [14] 还针对 p进 L值和 p进 Hurwitz ζ 值得到了类似的线性无关结果。关于 p进 Hurwitz ζ 值无理性的其他一些结果，见 Beukers [5] 和 Bel [3, 4]。

受 Sprang 工作的启发，我们旨在建立上述 Zudilin 定理的 p进类比。本文仅讨论 $p=2$ 这一情形。我们的主要结果如下。

定理 1.1。对于每个非负整数 s，下列集合至少包含一个无理数:

$$\{\zeta_2(j) \mid j \in \mathbb{Z} \cap [s+3, 3s+5], j \ \textit{odd}\}.$$

特别地，四个 2进数 $\zeta_2(7)$ $\zeta_2(9)$ $\zeta_2(11)$ $\zeta_2(13)$ 中至少有一个是无理数。

对于任意奇素数 p，我们也得到了类似的 p进 ζ 值无理性结果。不过，奇素数情形更为复杂，将在后续的一篇合著论文中介绍。

我们的证明实际上研究的是 2进Hurwitz ζ函数 $\zeta_2(\cdot, 1/4)$ 的取值。注意，对每个奇整数 $j \geqslant 3$ ，我们有

$$\zeta_2(j) = \frac{1}{4}\left(\zeta_2\left(j, \frac{1}{4}\right) + \zeta_2\left(j, \frac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\zeta_2\left(j, \frac{1}{4}\right)$$

根据 p进 Hurwitz ζ 函数的反射公式 $\zeta_p(j,x) = \zeta_p(j, 1-x)$。尽管 $\zeta_2(\cdot)$ 在正偶整数处为零， $\zeta_2(\cdot, 1/4)$ 在正偶整数处的取值非零，也很有趣。我们放宽奇偶性限制，证明以下两个结果。

定理 1.2。 对于任意非负整数 s 和任意 $\delta \in \{0,1\}$，以下集合至少包含一个无理数 :

$$\left\{\zeta_2\left(j, \frac{1}{4}\right) \mid j \in \mathbb{Z} \cap [s+3, 3s+5],\ j \equiv \delta \pmod 2\right\}.$$

定理 1.3。 对于任意非负整数 s，以下集合至少包含一个无理数 r:

$$\left\{\zeta_2\left(j, \frac{1}{4}\right) \mid j \in \mathbb{Z} \cap [s+3, 2s+3]\right\}.$$

间 定理 1.3 的特殊情形 $s=0$ 给出了证明 $\zeta_2(3$ 无理性的另一种方法).

致谢。我谨向 Johannes Sprang 致谢，感谢他在 2021 年和 2023 年与我进行的几次启发性讨论。

1.1 定理 1.2 证明概要

我们的方法是构造一个由小但非零的线性形式组成的序列，这些线性形式涉及 1 和 $\zeta_2(j,1/4)$（$s+3 \leqslant j \leqslant 3s+5$, $j \equiv s+1+\delta$ (模 2)）。那么，引理 2.1 将推出所需的无理性结果。

我们首先构造一列有理函数：

$$A_n(t) := 2^{(6s+12)n} \cdot (4t+2n)^{\delta} \cdot \frac{\left(t+\frac{1}{4}\right)_n^{s+2} \left(t+\frac{3}{4}\right)_n^{s+2}}{(t)_{n+1}^{2s+4}}.$$

然后，对 $A_n(t+1/4)$（$n = 1, 2, \ldots$）求 s 阶导数并计算其 Volkenborn 积分，即可得到我们需要的线性形式：

$$\begin{aligned} S_n &:= \int_{\mathbb{Z}_2} A_n^{(s)}\left(t+\frac{1}{4}\right) \mathrm{d}t \\ &= \rho_{n,0} + \sum_{\substack{2 \leqslant i \leqslant 2s+4 \\ i \equiv \delta \pmod 2}} \rho_{n,i}\, \zeta_2\left(i+s+1, \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

利用阿基米德情形中的常见技巧，我们可以证明，对于每个足够大的 n ：

$$\Phi_n^{-s-2} d_n^{3s+5} \rho_{n,i} \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant i \leqslant 2s+4$$

and

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant 2s+4} |\Phi_n^{-s-2} d_n^{3s+5} \rho_{n,i}| \leqslant \exp\left(((4+4\log 2)s + 7 + 8\log 2 + o(1))\, n\right).$$

这里 $d_n = \mathrm{lcm}[1, 2, \ldots, n]$，而 Φ_n 是某些素数的乘积（见 (4.7)）。

对于 p-adic 方面，不难对每个足够大的 n 给出线性形式的 2-adic 范数上界：

$$|\Phi_n^{-s-2} d_n^{3s+5} S_n|_2 \leqslant 2^{(-10s-20+o(1))n}.$$

因此，线性形式足够小。但一个重大困难是证明 $S_n \neq 0$。可以合理地猜想，对于每个 n，都有 $S_n \neq 0$；然而，要证明这一点似乎相当困难。

为了应用引理 2.1，我们只需证明对无穷多个 n，有 $S_n \neq 0$。我们将 Sprang方法中的 [14] 改编到我们的情形，并证明当 $n = 2^m - 1$、$m \geqslant 2$ 时，$S_n \neq 0$。最终，这依赖于二项式系数的算术性质。更准确地说，应用莱布尼茨法则后，我们可以写成

$$A_n^{(s)}\left(t+\frac{1}{4}\right) = \sum_{\underline{i} \in I} f_{\underline{i}}(t)$$

若干个函数之和。我们找到一个特定的指标 $\underline{i}^*$，使得 $f_{\underline{i}^*}(t)$ 在如下意义上支配这个和：

- $$\int_{\mathbb{Z}_2} f_{\underline{i}^*}(t)\mathrm{d}t \neq 0, \tag{1.1}$$
- $$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2} f_{\underline{i}}(t)\mathrm{d}t\right) > v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2} f_{\underline{i}^*}(t)\mathrm{d}t\right) \quad \text{for every } \underline{i} \neq \underline{i}^*. \tag{1.2}$$

第一个关键点 (1.1) 通过对 Sprang方法的改编得以确立，见引理 2.4 和引理 2.5。另一方面，一个初等观察（引理 6.1）在 (1.2) 中起着核心作用。

2 预备知识

2.1 初等无理性判据

证明无理性或线性无关的一个基本工具，是构造非零但足够小的线性形式。以下初等引理足以满足我们的需要。

引理 2.1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Q}_p$ 以及 $a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,m} \in \mathbb{Z} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ 是整数的 $m+1$ 序列，使得

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{0\leqslant j\leqslant m} |a_{n,j}| \cdot \left| a_{n,0} + \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\alpha_j \right|_p \right) = 0 \tag{2.1}$$

and

$$a_{n,0} + \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\alpha_j \neq 0 \quad \textit{infinitely often.}$$

那么， α_1、 α_2、……、 α_m 中至少有一个是无理数。

证明. 取一个子列后，我们可以假设对每个 n，都有 $a_{n,0} + \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\alpha_j \neq 0$。（特别地，这意味着 $\max_{0\leqslant j\leqslant m} |a_{n,j}| \neq 0$。）假设所有 α_j 都是有理数，并令 $D > 0$ 为 α_j 的公分母。那么，$D \cdot \left(a_{n,0} + \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\alpha_j \right)$ 是一个非零整数，因此显然有

$$\begin{aligned} \left| D \cdot \left(a_{n,0} + \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\alpha_j \right) \right|_p &\geqslant \frac{1}{\left| D \cdot \left(a_{n,0} + \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\alpha_j \right) \right|} \\ &\geqslant \frac{1}{D \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \right) \cdot \max_{0\leqslant j\leqslant m} |a_{n,j}|}, \end{aligned}$$

这意味着

$$\max_{0\leqslant j\leqslant m} |a_{n,j}| \cdot \left| a_{n,0} + \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\alpha_j \right|_p \geqslant \frac{1}{|D|_p \cdot D \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \right)}.$$

由于上式右侧与 n 无关，因此这与（2.1）矛盾。由此我们得出结论： α_1、 α_2、……、 α_m 中至少有一个是无理数。 □

2.2 Volkenborn 积分

本小节简要回顾严格可微函数和 Volkenborn 积分的定义。有关更多细节，请参阅 Robert 的教科书 [13, 第 5] 章。

设 K 为 $\mathbb{Z}_p$ 或 $\mathbb{Q}_p$。若函数 $f\colon \mathbb{Z}_p \to K$ 满足以下条件，则称其在 $\mathbb{Z}_p$ 上严格可微，记作 $f \in S^1(\mathbb{Z}_p, K)$:

$$f(x) - f(y) = (x - y)g(x, y)$$

存在定义在 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 上的连续函数 $g(x, y)$。作为一个基本例子，$\mathbb{Z}_p$ 上的每个收敛幂级数在 $\mathbb{Z}_p$ 上都严格可微。

若函数 $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ 满足以下条件，则称其在 [15] 上 Volkenborn 可积：数列

$$\frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{p^n-1} f(k)$$

当 $n \to \infty$ 时在 p-进意义下收敛。在这种情况下，其值

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(t)\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{p^n-1} f(k)$$

称为 f 的 Volkenborn 积分。作为一个基本例子， $\mathbb{Z}_p$ 上的每个严格可微函数都是 Volkenborn 可积的。

Volkenborn 积分并非平移不变；事实上，我们有以下结论。

引理 2.2. 设 $f \in S^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$，且 k 为正整数。我们有

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(t+k)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{Z}_p} f(t)\mathrm{d}t + \sum_{\ell=0}^{k-1} f'(\ell).$$

证明。由定义可直接得出。另见 [13, 第 267–268] 页。 □

对于任意正整数 k，记 k_- 为从 k 的 p-进制展开中删去首位数字后得到的非负整数。换言之，若 $k = a_0 + a_1 p + \cdots + a_l p^l$, $a_0, \ldots, a_l \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$,$a_l \neq 0$，则 $k_- = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{l-1} p^{l-1}$。为估计 Volkenborn 积分的 p-进范数，我们引入以下记号，这些记号与 Sprang 在 [14]中使用的记号略有不同。

定义 2.3. 设 $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ 是一个函数。对于每个非负整数 m，定义

$$\triangle_m(f) := \inf_{k \geqslant p^m} v_p\left(\frac{f(k) - f(k_-)}{k - k_-}\right).$$

我们还定义

$$\triangle(f) := \inf\{1 + v_p(f(0)), \triangle_0(f)\}.$$

由定义可知

$$-\infty \leqslant \triangle(f) \leqslant \triangle_0(f) \leqslant \triangle_1(f) \leqslant \triangle_2(f) \leqslant \triangle_3(f) \leqslant \cdots \leqslant +\infty,$$

并且，当 f 在 $\mathbb{Z}_p$ 上严格可微时，$\triangle(f) > -\infty$。对于常值函数 f，我们有 $\triangle_0(f) = +\infty$。引理 2.4。设 $f \in S^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$。那么

$$v_p\left(\int_{\mathbb{Z}_p} f(t)\mathrm{d}t\right) \geqslant \triangle(f) - 1. \tag{2.2}$$

此外，对于每个非负整数 m，我们有

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(t)\mathrm{d}t \equiv \frac{1}{p^m} \sum_{k=0}^{p^m-1} f(k) \pmod{p^{\triangle_m(f)-1}\mathbb{Z}_p}. \tag{2.3}$$

证明。容易验证，对于任意整数 $M > m$，我们有

$$\frac{1}{p^M} \sum_{k=0}^{p^M-1} f(k) = \frac{1}{p^m} \sum_{k=0}^{p^m-1} f(k) + \sum_{l=m}^{M-1} \sum_{k=p^l}^{p^{l+1}-1} \frac{f(k) - f(k_-)}{p^{l+1}}.$$

对于任意整数 $k \in [p^l, p^{l+1} - 1]$ $(l \geqslant m)$，我们有

$$v_p\left(\frac{f(k) - f(k_-)}{p^{l+1}}\right) \geqslant \triangle_m(f) - 1$$

根据 $\triangle_m(f)$ 的定义。因此，

$$\frac{1}{p^M} \sum_{k=0}^{p^M-1} f(k) \equiv \frac{1}{p^m} \sum_{k=0}^{p^m-1} f(k) \pmod{p^{\triangle_m(f)-1}\mathbb{Z}_p}.$$

令 $M \to \infty$ 趋于极限，我们得到 (2.3)。

特别是，

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(t)\mathrm{d}t \equiv f(0) \pmod{p^{\triangle_0(f)-1}\mathbb{Z}_p}.$$

现在，(2.2) 直接由 $\triangle(f)$ 的定义得出。 □

Lem命题 2.5. 算子 $\triangle$ 和 $\triangle_m(m=0,1,2,\ldots$ 具有以下性质。).

(1) 若 $f(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jt^j\in\mathbb{Z}_p[[t]]$ 且 $\lim_{j\to\infty}|a_j|_p=0$，则 $\triangle_m(f)\geqslant\triangle(f)\geqslant 0$。

(2) 若 $f,g\in S^1(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$，则 $\triangle(f\cdot g)\geqslant\min\{\triangle(f)\ \triangle(g)\}$ 且 $\triangle_m(f\cdot g)\geqslant\min\{\triangle_m(f)\ \triangle_m(g)\}$。

(3) 对于 $n,j\in\mathbb{Z}$，$n>0$，且 $f(t)=\binom{t+j}{n}$，我们有 $\triangle_m(f)\geqslant\triangle(f)\geqslant-\left\lfloor\frac{\log n}{\text{对数 }p}\right\rfloor$。此外，对于$m>\left\lfloor\frac{\log n}{\text{对数 }p}\right\rfloor$，我们有

$$\triangle_m(f^p)\geqslant-\left\lfloor\frac{\log n}{\log p}\right\rfloor+1.$$

证明。(1) 显然 $v_p(f(0))\geqslant 0$。对于任意正整数 k，我们注意到

$$\frac{f(k)-f(k_-)}{k-k_-}=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\sum_{i=0}^{j-1}k^ik_-^{j-1-i}$$

绝对收敛 收敛到 $\mathbb{Z}_p$ 中的一个元素。因此，对于任意非负整数 m，有 $\triangle_m(f)\geqslant\triangle(f)\geqslant 0$.

(2) 由于 $f(0)\ g(0)\in\mathbb{Z}_p$，我们有 $v_p(f(0)g(0))\geqslant\min\{v_p(f(0))\ v_p(g(0))\}$。对于任意正整数 k，我们有

$$\frac{f(k)g(k)-f(k_-)g(k_-)}{k-k_-}=g(k_-)\cdot\frac{f(k)-f(k_-)}{k-k_-}+f(k)\cdot\frac{g(k)-g(k_-)}{k-k_-}.$$

由于 $g(k_-)\ f(k)\in\mathbb{Z}_p$，我们有

$$v_p\left(\frac{f(k)g(k)-f(k_-)g(k_-)}{k-k_-}\right)\geqslant\min\left\{v_p\left(\frac{f(k)-f(k_-)}{k-k_-}\right),v_p\left(\frac{g(k)-g(k_-)}{k-k_-}\right)\right\}.$$

现在结论很容易得出。

(3) 显然 $v_p(f(0))\geqslant 0$。对于任意正整数 k，利用众所周知的恒等式

$$\binom{x+y}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{x}{i}\binom{y}{n-i}$$

我们得到

$$\frac{f(k)-f(k_-)}{k-k_-}=\frac{1}{k-k_-}\sum_{i=1}^{n}\binom{k-k_-}{i}\binom{k_-+j}{n-i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{k-k_--1}{i-1}\binom{k_-+j}{n-i}.$$

因此，

$$v_p\left(\frac{f(k)-f(k_-)}{k-k_-}\right)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}v_p\left(\frac{1}{i}\right)=-\left\lfloor\frac{\log n}{\log p}\right\rfloor.$$

由此可得，对于任意非负整数 m，我们有 $\triangle_m(f)\geqslant\triangle(f)\geqslant-\left\lfloor\frac{\log n}{\text{对数 }p}\right\rfloor$。

现在假设 $m>\left\lfloor\frac{\text{对数 }n}{\text{对数 }p}\right\rfloor$。对于任意整数 $k\geqslant p^m$，我们有 $v_p(k-k_-)\geqslant m>\left\lfloor\frac{\log n}{\text{对数 }p}\right\rfloor$，并且$v_p(f(k)-f(k_-))>0$。因此 $f(k)\equiv f(k_-)$（模 p），并且

$$\sum_{i=0}^{p-1}f(k)^if(k_-)^{p-1-i}\equiv p\cdot f(k)^{p-1}\equiv 0\pmod p.$$

因此，对于任意整数 $k\geqslant p^m$，我们有

$$\begin{aligned}v_p\left(\frac{f(k)^p-f(k_-)^p}{k-k_-}\right)&=v_p\left(\frac{f(k)-f(k_-)}{k-k_-}\cdot\sum_{i=0}^{p-1}f(k)^if(k_-)^{p-1-i}\right)\\&\geqslant-\left\lfloor\frac{\log n}{\log p}\right\rfloor+1,\end{aligned}$$

这意味着

$$\triangle_m(f^p) \geqslant -\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor + 1$$

对任意整数 $m > \left\lfloor \frac{\log n}{\text{对数}} \right.$
$p \Big\rfloor$。

□

2.3 p进 Hurwitz ζ 函数与 L函数

本小节简要回顾 p进 Hurwitz ζ 函数和 p进 L函数的定义。有关更多细节，请参阅 Cohen 的教科书 [8, 第 11] 章。

当 p 是奇素数时，我们令 $q_p = p$，并令 $q_2 = 4$。p进整数的单位 $\mathbb{Z}_p^\times$ 可规范地分解为

$$\mathbb{Z}_p^\times \cong \mu_{\varphi(q_p)}(\mathbb{Z}_p) \times (1 + q_p\mathbb{Z}_p).$$

这里，$\mu_n(R)$ 表示环 R 中 n次单位根构成的群，而 $\varphi(\cdot)$ 表示欧拉φ函数。规范投影

$$\omega : \mathbb{Z}_p^\times \to \mu_{\varphi(q_p)}(\mathbb{Z}_p)$$

称为 Teichmüller 特征。我们通过如下设定将 ω 扩展为映射 $\mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Q}_p^\times$

$$\omega(x) := p^{v_p(x)}\omega\left(\frac{x}{p^{v_p(x)}}\right)$$

并定义 $\langle x\rangle := x/\omega(x)$。

对于满足 $|s|_p < q_p p^{-1/(p-1)}$ 的 $s \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}$，以及满足 $|x|_p \geqslant q_p$ 的 $x \in \mathbb{Q}_p$，我们定义

$$\zeta_p(s,x) := \frac{1}{s-1}\int_{\mathbb{Z}_p} \langle t+x\rangle^{1-s}\mathrm{d}t.$$

对于满足 $|x|_p \geqslant q_p$ 的固定 $x \in \mathbb{Q}_p$，p 进 Hurwitz ζ 函数 $\zeta_p(\cdot,x)$ 是定义在 $|s|_p < q_p p^{-1/(p-1)}$ 上的 p 进亚纯函数；此外，除在 $s = 1$ 处有留数为 1 的单极点外，它处处解析。此外，我们有反射公式 [8, 定理 11.2.9]:

$$\zeta_p(s,x) = \zeta_p(s,1-x). \tag{2.4}$$

引理 2.6. 设 $x \in \mathbb{Q}_p$ 满足 $|x|_p \geqslant q_p$。对于任意整数 $j \geqslant 1$，有

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^j} = j\cdot\omega(x)^{-j}\cdot\zeta_p(j+1,x).$$

特别地,

$$\int_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^j} = j4^j\cdot\zeta_2\left(j+1,\frac{1}{4}\right).$$

证明。由定义可直接得出。另见 [8, 命题 11.2.6]。 □

设 χ 是导子为 f 的原始特征。设 M 是 f 和 q_p 的公倍数。对于满足 $|s|_p < q_p p^{-1/(p-1)}$ 的 $s \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}$，我们定义

$$L_p(s,\chi) := \frac{\langle M\rangle^{1-s}}{M}\sum_{\substack{a=0\\ p\nmid a}}^{M-1}\chi(a)\zeta_p\left(s,\frac{a}{M}\right).$$

可以证明，上述定义与 M 的选取无关。p-进 L 函数 $L_p(\cdot,\chi)$ 是定义在 $|s|_p < q_p p^{-1/(p-1)}$ 上的 p-进解析函数，但 $\chi = \chi_0$ 为平凡特征时除外；此时，$L_p(\cdot,\chi_0)$ 在 $s = 1$ 处有一个单极点，留数为 $1 - 1/p$。（参见 [8, 命题 11.3.9]。）

函数 $L_p(\cdot,\omega^0)$ $L_p(\cdot,\omega^1)$ ... , $L_p(\cdot,\omega^{p-2})$ 正是对黎曼ζ函数在负整数处取值进行插值的分支。在本文中，对于整数 $s \geqslant 2$，我们定义 $\zeta_p(s) := L_p(s,\omega^{1-s})$。

引理 2.7. 对任意奇整数 $j \geqslant 3$，有

$$\zeta_p(j) = \frac{1}{q_p} \sum_{\substack{a=0 \\ p \nmid a}}^{q_p-1} \omega(a)^{1-j} \zeta_p\left(j, \frac{a}{q_p}\right) = \frac{2}{q_p} \sum_{0<a<q_p/2} \omega(a)^{1-j} \zeta_p\left(j, \frac{a}{q_p}\right).$$

特别地，对于任意奇整数 $j \geqslant 3$，我们有

$$\zeta_2(j) = \frac{1}{2} \zeta_2\left(j, \frac{1}{4}\right).$$

证明。由定义和反射公式 (2.4) 可直接得出。 □

3 有理函数与线性形式

对于正整数 k，我们用 Pochhammer 符号表示

$$(\alpha)_k := \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1).$$

对于 $k=0$，我们定义 $(\alpha)_0 := 1$。

定义 3.1。固定一个非负整数 s，并固定一种 $\delta \in \{0,1\}$ 的选取。对于每个正整数 n，我们定义以下两个有理函数。

$$A_n(t) := 2^{(6s+12)n} \cdot (4t+2n)^{\delta} \cdot \frac{\left(t+\frac{1}{4}\right)_n^{s+2} \left(t+\frac{3}{4}\right)_n^{s+2}}{(t)_{n+1}^{2s+4}}, \tag{3.1}$$

$$B_n(t) := 2^{(3s+6)n} \cdot \frac{\left(t+\frac{3}{4}\right)_n^{s+2}}{(t)_{n+1}^{s+2}}. \tag{3.2}$$

对于有理函数 $R(t) = P(t)/Q(t)$，我们将其次数定义为 $\deg R := \deg P - \deg Q$。$A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 的次数均为 $\leqslant -2$。我们将它们的部分分式分解定义为

$$A_n(t) =: \sum_{i=1}^{2s+4} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,i,k}}{(t+k)^i}, \tag{3.3}$$

$$B_n(t) =: \sum_{i=1}^{s+2} \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n,i,k}}{(t+k)^i}. \tag{3.4}$$

对于函数 $f(t)$，我们用 $f^{(s)}(t)$ 表示 $f(t)$ 的 s 阶导数。$A_n^{(s)}(t+1/4)$（分别为 $B_n^{(s)}(t+1/4)$）的 Volkenborn 积分（$n=1$，2，.....）可产生用于证明定理 1.2（分别为定理 1.3）的良好线性形式。

定义 3.2. 对于每个正整数 n，我们定义

$$S_n := \int_{\mathbb{Z}_2} A_n^{(s)}\left(t+\frac{1}{4}\right) \mathrm{d}t \ \in \mathbb{Q}_2, \tag{3.5}$$

$$T_n := \int_{\mathbb{Z}_2} B_n^{(s)}\left(t+\frac{1}{4}\right) \mathrm{d}t \ \in \mathbb{Q}_2. \tag{3.6}$$

引理 3.3. 对于每个正整数 n，我们有

$$S_n = \rho_{n,0} + \sum_{\substack{2 \leqslant i \leqslant 2s+4 \\ i \equiv \delta \pmod 2}} \rho_{n,i} \ \zeta_2\left(i+s+1, \frac{1}{4}\right), \tag{3.7}$$

$$T_n = \sigma_{n,0} + \sum_{i=2}^{s+2} \sigma_{n,i} \ \zeta_2\left(i+s+1, \frac{1}{4}\right), \tag{3.8}$$

其中

$$\rho_{n,0} = (-1)^{s+1} \sum_{i=1}^{2s+4} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{(i)_{s+1} a_{n,i,k}}{\left(\ell+\frac{1}{4}\right)^{i+s+1}} \in \mathbb{Q}, \tag{3.9}$$

$$\rho_{n,i} = (-1)^{s} (i)_{s+1} 4^{i+s} \sum_{k=0}^{n} a_{n,i,k} \in \mathbb{Q}, \quad (1 \leqslant i \leqslant 2s+4) \tag{3.10}$$

$$\sigma_{n,0} = (-1)^{s+1} \sum_{i=1}^{s+2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{(i)_{s+1} b_{n,i,k}}{\left(\ell+\frac{1}{4}\right)^{i+s+1}} \in \mathbb{Q}, \tag{3.11}$$

$$\sigma_{n,i} = (-1)^{s} (i)_{s+1} 4^{i+s} \sum_{k=0}^{n} b_{n,i,k} \in \mathbb{Q}. \quad (1 \leqslant i \leqslant s+2) \tag{3.12}$$

证明。由 (3.3)，我们有

$$A_n^{(s)}\left(t+\frac{1}{4}\right) = (-1)^s \sum_{i=1}^{2s+4} \sum_{k=0}^{n} \frac{(i)_s a_{n,i,k}}{\left(t+k+\frac{1}{4}\right)^{i+s}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
S_n &= (-1)^s \sum_{i=1}^{2s+4} \sum_{k=0}^{n} (i)_s a_{n,i,k} \int_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+k+\frac{1}{4}\right)^{i+s}} \\
&\overset{\text{Lemma 2.2}}{=} (-1)^s \sum_{i=1}^{2s+4} \sum_{k=0}^{n} (i)_s a_{n,i,k} \left(\int_{\mathbb{Z}_2} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^{i+s}} - (i+s) \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{\left(\ell+\frac{1}{4}\right)^{i+s+1}} \right) \\
&\overset{\text{Lemma 2.6}}{=} (-1)^s \sum_{i=1}^{2s+4} \sum_{k=0}^{n} (i)_s a_{n,i,k} \left((i+s) 4^{i+s} \zeta_2\left(i+s+1, \frac{1}{4}\right) - (i+s) \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{\left(\ell+\frac{1}{4}\right)^{i+s+1}} \right) \\
&= \rho_{n,0} + \sum_{i=1}^{2s+4} \rho_{n,i}\ \zeta_2\left(i+s+1, \frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

这里当 $k=0$ 时，和 $\sum_{\ell=0}^{k-1}$ 视为 0。由于 $\deg A_n(t) \leqslant -2$，我们有

$$\rho_{n,1} = (-1)^s (s+1)! 4^{s+1} \cdot \lim_{t\to\infty} t A_n(t) = 0.$$

有理函数 $A_n(t)$ 具有如下对称性

$$A_n(-t-n) = (-1)^{\delta} A_n(t),$$

这意味着 $(-1)^i a_{n,\ i,\ n-k} = (-1)^{\delta} a_{n,\ i,\ k}$ 对所有 i、k 都成立。因此，$\rho_{n,\ i} = 0$ 当 $i > 0$ 且 $i \not\equiv \delta \pmod 2$ 时成立。总之，我们有

$$S_n = \rho_{n,0} + \sum_{i=1}^{2s+4} \rho_{n,i}\ \zeta_2\left(i+s+1, \frac{1}{4}\right) = \rho_{n,0} + \sum_{\substack{2 \leqslant i \leqslant 2s+4 \\ i \equiv \delta \pmod 2}} \rho_{n,i}\ \zeta_2\left(i+s+1, \frac{1}{4}\right).$$

这就完成了 (3.7) 的证明。(3.8) 的证明类似且更简单：由于 $\deg B_n(t) \leqslant -2$，我们有 $\sigma_{n,\ 1} = 0$，而且无需考虑奇偶性。 □

4 系数的算术性质

照例，我们用

$$d_n := \operatorname{lcm}[1, 2, \ldots, n]$$

最小的 n 个正整数的最小公倍数。

引理 4.1. 设

$$F_{1/4}(t) := \frac{2^{3n}}{n!}\left(t+\frac{1}{4}\right)_n,$$
$$F_{3/4}(t) := \frac{2^{3n}}{n!}\left(t+\frac{3}{4}\right)_n,$$
$$G(t) := \frac{n!}{(t)_{n+1}}.$$

那么，对于任意整数 $k \in [0,n]$ 和任意非负整数 ℓ，我们有

$$d_n^\ell \cdot \frac{1}{\ell!} F_{1/4}^{(\ell)}(t)\big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$
$$d_n^\ell \cdot \frac{1}{\ell!} F_{3/4}^{(\ell)}(t)\big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \tag{4.2}$$
$$d_n^\ell \cdot \frac{1}{\ell!} \left((t+k)G(t)\right)^{(\ell)}\big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

证明. 这些都是众所周知的。详情请参阅 [11, 命题 3.2]（对应于 (4.1) 和 (4.2)）；关于 (4.3)，请参阅 [18, 引理 16]。 □

引理 4.2. 我们有

$$d_n^{2s+4-i} a_{n,i,k} \in \mathbb{Z}, \quad (1 \leqslant i \leqslant 2s+4,\ 0 \leqslant k \leqslant n) \tag{4.4}$$
$$d_n^{s+2-i} b_{n,i,k} \in \mathbb{Z}. \quad (1 \leqslant i \leqslant s+2,\ 0 \leqslant k \leqslant n) \tag{4.5}$$

证明. 我们只证明 (4.4)；(4.5) 的证明类似且更简单。由 (3.3) 可得

$$a_{n,i,k} = \frac{1}{(2s+4-i)!}\left((t+k)^{2s+4}A_n(t)\right)^{(2s+4-i)}\big|_{t=-k}. \tag{4.6}$$

沿用引理 4.1 中的记号。设 $H(t) = (4t+2n)^\delta$。显然，我们有

$$\frac{1}{\ell!} H^{(\ell)}(t)\big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}$$

对于任意整数 $k \in [0,n]$ 以及任意非负整数 ℓ。

注意到

$$(t+k)^{2s+4}A_n(t) = H(t)\cdot F_{1/4}(t)^{s+2}\cdot F_{3/4}(t)^{s+2}\cdot\left((t+k)G(t)\right)^{2s+4}.$$

应用莱布尼茨法则和引理 4.1，我们得到

$$\begin{aligned} & d_n^{2s+4-i} a_{n,i,k} \\ =& \sum \ \frac{d_n^h H^{(h)}(t)}{h!} \cdot \prod_{u=1}^{s+2} \frac{d_n^{f_u} F_{1/4}^{(f_u)}(t)}{f_u!} \cdot \prod_{u=1}^{s+2} \frac{d_n^{f'_u} F_{3/4}^{(f'_u)}(t)}{f'_u!} \cdot \prod_{u=1}^{2s+4} \frac{d_n^{g_u}\left((t+k)G(t)\right)^{(g_u)}}{g_u!}\Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

其中求和遍历所有满足以下条件的元组

$$(h, f_1, \ldots, f_{s+2}, f'_1, \ldots, f'_{s+2}, g_1, \ldots, g_{2s+4})$$

其各项之和等于 $2s+4-i$ 的非负整数元组。 □

我们在下面的引理中对 (4.4) 作进一步细化。这对于证明定理 1.2 是必要的。引理 4.3. 对任意正整数 n，我们定义

$$\Phi_n := \prod_{\substack{\sqrt{10n} < q \leqslant n \\ \left\{\frac{n}{q}\right\} > \frac{1}{2}}} q. \tag{4.7}$$

这里 $\{n/q\}$ 是 n/q的小数部分。当 $n > (2s+4)^2$ 且 n 为奇数时，我们有 e

$$\Phi_n^{-s-2} d_n^{2s+4-i} a_{n,i,k} \in \mathbb{Z}. \quad (1 \leqslant i \leqslant 2s+4,\ 0 \leqslant k \leqslant n) \tag{4.8}$$

证明。设 $j = 2s+4-i \in [0, 2s+3]$。根据 (4.4)，我们的目标 (4.8) 可化为以下断言：对于任意满足 $\sqrt{10n} < q \leqslant n$ 和 $\{n/q\} > 1/2$的素数 q，对于任意 $0 \leqslant j \leqslant 2s+3$ 和任意 $0 \leqslant k \leqslant n$，都有

$$v_q(a_{n,2s+4-j,k}) \geqslant s+2-j. \tag{4.9}$$

我们固定 q 和 k，并对 j 使用归纳法证明断言 (4.9)。

设 $\widetilde{A_n}(t) := (t+k)^{2s+4}A_n(t)$。那么 (4.6) 可以改写为

$$a_{n,2s+4-j,k} = \frac{1}{j!}\widetilde{A_n}^{(j)}(-k). \tag{4.10}$$

对于 $j = 0$，我们有

$$\begin{aligned} a_{n,2s+4,k} &= \widetilde{A_n}(-k) \\ &= 2^{(6s+12)n}(-4k+2n)^{\delta}\left(\frac{(-k+1/4)_n(-k+3/4)_n}{k!^2(n-k)!^2}\right)^{s+2} \\ &= (-4k+2n)^{\delta}\left(\frac{(4k)!(4n-4k)!}{(2k)!(2n-2k)!k!^2(n-k)!^2}\right)^{s+2}. \end{aligned}$$

为了证明 $v_q(a_{n,2s+4,k}) \geqslant s+2$，只需证明

$$v_q\left(\frac{(4k)!(4n-4k)!}{(2k)!(2n-2k)!k!^2(n-k)!^2}\right) \geqslant 1.$$

记 $x = \{n/q\}$ 和 $y = \{k/q\}$。我们有 $1/2 < x < 1$。由于 $q > \sqrt{10n}$，我们有

$$v_q\left(\frac{(4k)!(4n-4k)!}{(2k)!(2n-2k)!k!^2(n-k)!^2}\right) = \lfloor 4y\rfloor + \lfloor 4x-4y\rfloor - \lfloor 2y\rfloor - \lfloor 2x-2y\rfloor - 2\lfloor y\rfloor - 2\lfloor x-y\rfloor.$$

容易验证，只要 $1/2 < x < 1$ 和$0 \leqslant y < 1$，上式右端就至少为 1。因此，断言 (4.9) 对 $j = 0$ 成立。

现在假设 $1 \leqslant j \leqslant 2s+3$，并且断言 (4.9) 对任何更小的 j 都成立。令

$$\begin{aligned} U(t) &:= \frac{\widetilde{A_n}'(t)}{\widetilde{A_n}(t)} \\ &= \frac{\delta}{t+n/2} + (s+2)\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{t+\ell+1/4}+\frac{1}{t+\ell+3/4}\right) - (2s+4)\sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{1}{t+\ell}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

应用莱布尼茨法则，我们得到

$$\begin{aligned} \widetilde{A_n}^{(j)}(-k) &= \left(\widetilde{A_n}(t)\cdot U(t)\right)^{(j-1)}\big|_{t=-k} \\ &= \sum_{v=0}^{j-1}\binom{j-1}{v}\widetilde{A_n}^{(j-1-v)}(-k)\cdot U^{(v)}(-k). \end{aligned} \tag{4.12}$$

对于任意 $0 \leqslant v \leqslant j-1$，由 (4.10) 和归纳假设可得

$$v_q\left(\widetilde{A_n}^{(j-1-v)}(-k)\right) = v_q((j-1-v)!a_{n,2s+4-(j-1-v),k}) \geqslant s+2-(j-1-v). \tag{4.13}$$

另一方面，由（4.11）可得

$$U^{(v)}(t) = (-1)^v v!\left(\frac{\delta}{(t+n/2)^{1+v}} + \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{s+2}{(t+\ell+1/4)^{1+v}} + \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{s+2}{(t+\ell+3/4)^{1+v}} - \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{2s+4}{(t+\ell)^{1+v}}\right). \tag{4.14}$$

由于 $q>\sqrt{10n}$，由（4.14）可知

$$v_q\left(U^{(v)}(-k)\right)\geqslant -1-v. \tag{4.15}$$

（我们假设 n 为奇数，因此 $-k+n/2\neq 0$ 和 $t=-k$ 不是 $U(t)$ 的极点。）因此，由 (4.12)、(4.13) 和 (4.15)，我们得到

$$v_q\left(\widetilde{A_n}^{(j)}(-k)\right)\geqslant s+2-j. \tag{4.16}$$

注意到 $q>\sqrt{10n}>2s+4$ 和 $j<2s+4$，由 (4.10) 和 (4.16) 可得

$$v_q(a_{n,2s+4-j,k})\geqslant s+2-j,$$

这就完成了归纳过程。 □

备注4.4. 对于任意偶数 $n>(2s+4)^2$，结论 (4.8) 仍然成立，只需稍微修改 $k=n/2$ 情形的证明即可。由于我们最终将取 $n=2^m-1$，因此不需要考虑偶数 n 的情形。

引理 4.5. 我们有

$$\Phi_n^{-s-2}d_n^{2s+4-i}\rho_{n,i}\in\mathbb{Z},\quad (1\leqslant i\leqslant 2s+4) \tag{4.17}$$

$$d_n^{s+2-i}\sigma_{n,i}\in\mathbb{Z}.\quad (1\leqslant i\leqslant s+2) \tag{4.18}$$

证明. 方程 (4.17) 由 (3.10) 和 (4.8) 得出，而 (4.18) 则由 (3.12) 和 (4.5) 得出。 □

下面的引理至关重要。它利用了 $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 的重根。这类技巧已在 [9, 11, 14] 中使用过。

引理 4.6. 我们有

$$\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}\rho_{n,0}\in\mathbb{Z}, \tag{4.19}$$

$$d_n^{2s+3}\sigma_{n,0}\in\mathbb{Z}. \tag{4.20}$$

证明。假设 (4.19) 不成立。那么由 (3.9) 可推得，存在一个整数 $k_0\in[1,n]$和一个整数 $\ell_0\in[0,k_0-1]$，使得

$$\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}\sum_{i=1}^{2s+4}\frac{(-1)^{s+1}(i)_{s+1}a_{n,i,k_0}}{\left(\ell_0+\frac{1}{4}\right)^{i+s+1}}\notin\mathbb{Z}.$$

注意到根据 (3.1)，$t=-k_0+\ell_0+1/4$ 是 $A_n(t)$ 的一个重数为 $s+2$ 的根，我们推得 $t=-k_0+\ell_0+1/4$ 是

$$A_n^{(s+1)}(t)=\sum_{i=1}^{2s+4}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{s+1}(i)_{s+1}a_{n,i,k}}{(t+k)^{i+s+1}}.$$

因此，我们得到

$$\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}\sum_{i=1}^{2s+4}\frac{(-1)^{s+1}(i)_{s+1}a_{n,i,k_0}}{\left(\ell_0+\frac{1}{4}\right)^{i+s+1}}=-\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}\sum_{i=1}^{2s+4}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq k_0}}\frac{(-1)^{s+1}(i)_{s+1}a_{n,i,k}}{\left(-k_0+\ell_0+k+\frac{1}{4}\right)^{i+s+1}}\notin\mathbb{Z}.$$

因此，存在满足 $k_1\neq k_0$ 的 $1\leqslant i_0$、$i_1\leqslant 2s+4$ 和 $0\leqslant k_1\leqslant n$，以及一个素数 q，使得

$$v_q\left(\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}\frac{(-1)^{s+1}(i_0)_{s+1}a_{n,i_0,k_0}}{\left(\ell_0+\frac{1}{4}\right)^{i_0+s+1}}\right)<0,\quad v_q\left(\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}\frac{(-1)^{s+1}(i_1)_{s+1}a_{n,i_1,k_1}}{\left(-k_0+\ell_0+k_1+\frac{1}{4}\right)^{i_1+s+1}}\right)<0.$$

另一方面，由 (4.8) 可得

$$v_q\left(\Phi_n^{-s-2}d_n^{2s+4-i_0}a_{n,i_0,k_0}\right)\geqslant 0,\quad v_q\left(\Phi_n^{-s-2}d_n^{2s+4-i_1}a_{n,i_1,k_1}\right)\geqslant 0.$$

由此可得

$$v_q\left(\ell_0+\frac{1}{4}\right)>v_q(d_n),\quad v_q\left(-k_0+\ell_0+k_1+\frac{1}{4}\right)>v_q(d_n),$$

then

$$v_q(-k_0+k_1)>v_q(d_n).$$

但这与 $0<|-k_0+k_1|\leqslant n$ 矛盾。因此我们得出 (4.19) 成立。

(4.20) 的证明类似。关键在于 $B_n^{(s+1)}(t)$ 的根为 $-1+1/4,-2+1/4,\ldots,-n+1/4$。

□

5 系数的阿基米德范数

众所周知，素数定理蕴含

$$d_n=e^{(1+o(1))n}\quad\text{as } n\to\infty. \tag{5.1}$$

下面的引理也是素数定理的一个推论。

Le引理 5.1. 因子 Φ_n （定义见 (4.7）的渐近估计如下):

$$|\Phi_n|=\exp\left((2\log 2-1+o(1))n\right)\quad as\ n\to\infty.$$

证明. 根据素数定理，我们知道

$$\sum_{q\leqslant Y}\log q=(1+o(1))Y,\quad\text{as } Y\to\infty. \tag{5.2}$$

我们有

$$\log\Phi_n=\sum_{\substack{\sqrt{10n}<q\leqslant n\\ \left\{\frac{n}{q}\right\}>\frac{1}{2}}}\log q=\sum_{\substack{q\leqslant n\\ \left\{\frac{n}{q}\right\}>\frac{1}{2}}}\log q+O(\sqrt{n}).$$

只需证明

$$L_n:=\sum_{\substack{q\leqslant n\\ \left\{\frac{n}{q}\right\}>\frac{1}{2}}}\log q=(2\log 2-1+o(1))n.$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}L_n&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k+\frac{1}{2}<\frac{n}{q}<k+1}\log q\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\frac{n}{k+1}<q<\frac{n}{k+1/2}}\log q.\end{aligned}$$

因此，对每个整数 $K\geqslant 2$ ，我们有

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{\frac{n}{k+1}<q<\frac{n}{k+1/2}}\log q\leqslant L_n\leqslant\sum_{k=1}^{K}\sum_{\frac{n}{k+1}<q<\frac{n}{k+1/2}}\log q+\sum_{q<\frac{n}{K+3/2}}\log q.$$

于是 (5.2) 推出

$$n\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{k+1/2}-\frac{1}{k+1}\right)+o(n)\leqslant L_n\leqslant n\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{k+1/2}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{n}{K+3/2}+o(n).$$

令 $K \to \infty$，我们得到

$$L_n = n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1/2}-\frac{1}{k+1}\right)+o(n) = (2\log 2-1)n+o(n),$$

正如所需。 □

引理 5.2. 由于 $n \to \infty$，我们有

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 2s+4}|\rho_{n,i}| \leqslant 2^{(6s+12+o(1))n}, \tag{5.3}$$

$$\max_{0\leqslant i\leqslant s+2}|\sigma_{n,i}| \leqslant 2^{(3s+6+o(1))n}. \tag{5.4}$$

证明. 我们只证明 (5.3)。(5.4) 的证明类似。由 (3.9) 和 (3.10)，我们有

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 2s+4}|\rho_{n,i}| \leqslant (3s+5)!4^{3s+5}(n+1)^2\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2s+4\\ 0\leqslant k\leqslant n}}|a_{n,i,k}|.$$

只需证明

$$\max_{i,k}|a_{n,i,k}| \leqslant 2^{(6s+12+o(1))n}.$$

由柯西积分公式，我们有

$$a_{n,i,k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|t+k|=\frac{1}{8}}(t+k)^{i-1}A_n(t)\mathrm{d}t,$$

因此

$$\begin{aligned}|a_{n,i,k}| &\leqslant 2^{(6s+12)n}\sup_{|t+k|=\frac{1}{8}}\left|(t+k)^{i-1}(4t+2n)^{\delta}\frac{\left(t+\frac{1}{4}\right)_n^{s+2}\left(t+\frac{3}{4}\right)_n^{s+2}}{(t)_{n+1}^{2s+4}}\right|\\ &\leqslant 2^{(6s+12)n}\cdot(10n)\sup_{|t+k|=\frac{1}{8}}\left|\left(t+\frac{1}{4}\right)_n^{s+2}\left(t+\frac{3}{4}\right)_n^{s+2}(t)_{n+1}^{-2s-4}\right|.\end{aligned} \tag{5.5}$$

下面我们估计 (5.5) 中的各项。显然有

$$\begin{aligned}\sup_{|t+k|=\frac{1}{8}}\left|\left(t+\frac{1}{4}\right)_n\right| &\leqslant k!(n-k)!,\\ \sup_{|t+k|=\frac{1}{8}}\left|\left(t+\frac{3}{4}\right)_n\right| &\leqslant k!(n-k)!,\\ \sup_{|t+k|=\frac{1}{8}}\left|(t)_{n+1}^{-1}\right| &\leqslant \frac{100n^2}{k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

因此，

$$\max_{i,k}|a_{n,i,k}| \leqslant 2^{(6s+12)n}(10n)(100n^2)^{2s+4},$$

正如所需。 □

6 线性形式的 2-adic 范数

引理 6.1. 设 $m \geqslant 2$ 是一个整数，且 $n = 2^m-1$。设 $k_0 = 2^{m-1}$。那么，对于任意满足 $1 \leqslant k \leqslant n$ 且 $k \neq k_0$的整数 k，有

$$v_2((k-1)!(n-k)!) \geqslant v_2((k_0-1)!(n-k_0)!)+1.$$

证明. 众所周知，对于任意非负整数 a，有 $v_2(a!)=a-\mathrm{sod}_2(a)$，其中 $\mathrm{sod}_2(a)$ 表示 a的二进制展开的数位和。我们有

$$\begin{aligned} v_2((k-1)!(n-k)!) &= k-1-\mathrm{sod}_2(k-1)+n-k-\mathrm{sod}_2(n-k) \\ &= n-1-\mathrm{sod}_2(k-1)-\mathrm{sod}_2(n-k). \end{aligned}$$

只需证明

$$\mathrm{sod}_2(k-1)+\mathrm{sod}_2(n-k)\leqslant \mathrm{sod}_2(k_0-1)+\mathrm{sod}_2(n-k_0)-1=2m-3$$

对 $k\neq k_0$ 成立即可。

对于任意非负整数 a，有 $a\geqslant 1+2+2^2+\cdots+2^{\mathrm{sod}_2(a)-1}=2^{\mathrm{sod}_2(a)}-1$，因为 a 的二进制展开中 1 的个数恰好是 $\mathrm{sod}_2(a)$。特别地：

- $\mathrm{sod}_2(a)\leqslant m-1$ 对任意整数 $a\in[0,2^m-2]$ 成立。
- 如果 $\mathrm{sod}_2(a)=m-1$ 且 $a\in[0,2^{m-1}-1]$，那么 $a=2^{m-1}-1$。

现在，由于 $k-1$ 和 $n-k$ 都属于 $[0,2^m-2]$，我们有 $\mathrm{sod}_2(k-1)+\mathrm{sod}_2(n-k)\leqslant(m-1)+(m-1)=2m-2$。如果等式成立，则 $\mathrm{sod}_2(k-1)=\mathrm{sod}_2(n-k)=m-1$。注意到 $\min\{k-1,n-k\}\in[0,2^{m-1}-1]$，等式 $\mathrm{sod}_2(k-1)=\mathrm{sod}_2(n-k)=m-1$ 蕴含 $\min\{k-1,n-k\}=2^{m-1}-1\Rightarrow k=k_0$。因此我们有

$$\mathrm{sod}_2(k-1)+\mathrm{sod}_2(n-k)<2m-2$$

对于 $k\neq k_0$，如所需。 □

引理 6.2. 对于任意形如 $n=2^m-1$ 且满足 $m\geqslant 2$ 的整数 n，我们有

$$v_2\left(\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}S_n\right)=(10s+20)n+(s+2)m+2s+v_2((s+2)!)+2.$$

特别地，$\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}S_n\neq 0$ 和

$$\left|\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}S_n\right|_2=2^{(-10s-20+o(1))n}$$

因为 $n=2^m-1\to\infty$。

证明. 显然，$v_2(\Phi_n)=0$ 且 $v_2(d_n)=m-1$。只需证明

$$v_2(S_n)=(10s+20)n-(2s+3)m+5s+v_2((s+2)!)+7.$$

注意

$$A_n\left(t+\frac{1}{4}\right)=2^{(9s+18)n+4s+8}\cdot f(t),$$

其中

$$f(t)=(t+1)^{s+2}(t+2)^{s+2}\cdots(t+n)^{s+2}g(t)$$

and

$$g(t)=(4t+2n+1)^{\delta}\cdot\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2t+2k+1)^{s+2}}{\prod_{k=0}^{n}(4t+4k+1)^{2s+4}}.$$

因此我们有

$$S_n=2^{(9s+18)n+4s+8}\cdot\int_{\mathbb{Z}_2}f^{(s)}(t)\mathrm{d}t$$

因此只需证明

$$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2}f^{(s)}(t)\mathrm{d}t\right)=(s+2)n-(2s+3)m+s+v_2((s+2)!)-1. \tag{6.1}$$

我们将指标集 I 定义为

$$I=\left\{(i_1,\ldots,i_n,j)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^{n+1}\ \mid\ i_1+\cdots+i_n+j=s\right\}.$$

应用莱布尼茨法则，我们有

$$\begin{aligned}
f^{(s)}(t) &= \sum_{(i_1,\dots,i_n,j)\in I} \frac{s!}{i_1!\cdots i_n!}\cdot\left((t+1)^{s+2}\right)^{(i_1)}\cdots\left((t+n)^{s+2}\right)^{(i_n)}\cdot\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n,j)\in I} \frac{s!}{i_1!\cdots i_n!}\cdot\frac{(s+2)!}{(s+2-i_1)!}\cdots\frac{(s+2)!}{(s+2-i_n)!}\cdot(t+1)^{s+2-i_1}\cdots(t+n)^{s+2-i_n}\cdot\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n,j)\in I} s!\binom{s+2}{i_1}\cdots\binom{s+2}{i_n}\cdot(t+1)^{s+2-i_1}\cdots(t+n)^{s+2-i_n}\cdot\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n,j)\in I} f_{(i_1,\dots,i_n,j)}(t), \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
f_{(i_1,\dots,i_n,j)}(t) = s!\binom{s+2}{i_1}\cdots\binom{s+2}{i_n}\cdot\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\cdot n!^{2+j}\binom{t+n}{n}^{2+j}\\
\times\prod_{k=1}^{n}\left((k-1)!(n-k)!\binom{t+k-1}{k-1}\binom{t+n}{n-k}\right)^{i_k}.
\end{aligned}$$

我们将证明，式 (6.2) 中对应于指标 $(0,\dots,0,i_{2^{m-1}}=s,0,\dots,0)$ 的项支配 Volkenborn 积分 $f^{(s)}(t)$ 的 2-adic 范数。更确切地说，我们将证明

$$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2} f_{(0,\dots,0,i_{2^{m-1}}=s,0,\dots,0)}(t)\mathrm{d}t\right) = (s+2)n-(2s+3)m+s+v_2((s+2)!)-1, \qquad (6.3)$$

and

$$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2} f_{(i_1,\dots,i_n,j)}(t)\mathrm{d}t\right) \geqslant (s+2)n-(2s+3)m+s+v_2((s+2)!) \qquad (6.4)$$

对于任意 $(i_1,\dots,i_n,j)\in I$ with $i_{2^{m-1}}\neq s$, 均成立。

一旦证明了 (6.3) 和 (6.4)，它们与 (6.2) 一起便可推出 (6.1)。至此，引理 6.2 的证明就完成了。

我们先证明 (6.3)。我们有

$$\begin{aligned}
&f_{(0,\dots,0,i_{2^{m-1}}=s,0,\dots,0)}(t)\\
&= \frac{(s+2)!}{2}\cdot(2^m-1)!^2\cdot(2^{m-1}-1)!^{2s}\cdot g(t)\cdot\binom{t+2^m-1}{2^m-1}^2\binom{t+2^{m-1}-1}{2^{m-1}-1}^s\binom{t+2^m-1}{2^{m-1}-1}^s.
\end{aligned}$$

显然，$v_2((2^m-1)!) = n-m$ 且 $v_2((2^{m-1}-1)!) = \frac{n}{2}-m+\frac{1}{2}$。因此，(6.3) 可化为

$$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2} g(t)\binom{t+2^m-1}{2^m-1}^2\binom{t+2^{m-1}-1}{2^{m-1}-1}^s\binom{t+2^m-1}{2^{m-1}-1}^s\mathrm{d}t\right) = -m. \qquad (6.5)$$

显然，我们可以将 $g(t)$ 表示为一个幂级数

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

其中，对于每个 $k\geqslant 0$，都有 $c_k\in 2^k\mathbb{Z}_2$。然后

$$\frac{g^{(j)}(t)}{j!} = \sum_{k=j}^{\infty} c_k\binom{k}{j}t^{k-j},$$

并且我们有

$$\triangle_m\left(\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\right)\geqslant\triangle\left(\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\right)\geqslant 0\quad\text{for every } j\geqslant 0 \tag{6.6}$$

由引理 2.5 (1)。

由引理 2.5 (3)，我们有

$$\begin{aligned}\triangle_m\left(\binom{t+2^m-1}{2^m-1}^2\right)&\geqslant -(m-1)+1=-m+2,\\ \triangle_m\left(\binom{t+2^{m-1}-1}{2^{m-1}-1}\right)&\geqslant -(m-2)=-m+2,\\ \triangle_m\left(\binom{t+2^m-1}{2^{m-1}-1}\right)&\geqslant -(m-2)=-m+2.\end{aligned}$$

于是，由引理 2.5 (2)，我们有

$$\triangle_m\left(g(t)\binom{t+2^m-1}{2^m-1}^2\binom{t+2^{m-1}-1}{2^{m-1}-1}^s\binom{t+2^m-1}{2^{m-1}-1}^s\right)\geqslant -m+2.$$

因此，引理 2.4 推得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Z}_2} g(t)\binom{t+2^m-1}{2^m-1}^2\binom{t+2^{m-1}-1}{2^{m-1}-1}^s\binom{t+2^m-1}{2^{m-1}-1}^s\mathrm{d}t\\ \equiv\ &\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2^m-1} g(k)\binom{k+2^m-1}{2^m-1}^2\binom{k+2^{m-1}-1}{2^{m-1}-1}^s\binom{k+2^m-1}{2^{m-1}-1}^s\pmod{2^{-m+1}\mathbb{Z}_2}.\end{aligned}$$

注意，根据库默尔定理或卢卡斯定理，$\binom{k+2^m-1}{2^m-1}$ 对于 $1\leqslant k\leqslant 2^m-1$ 是偶数，并且 $g(0)\equiv 1\pmod{2\mathbb{Z}_2}$。我们得到

$$\int_{\mathbb{Z}_2} g(t)\binom{t+2^m-1}{2^m-1}^2\binom{t+2^{m-1}-1}{2^{m-1}-1}^s\binom{t+2^m-1}{2^{m-1}-1}^s\mathrm{d}t\equiv 2^{-m}\pmod{2^{-m+1}\mathbb{Z}_2},$$

这就证明了 (6.5)。

最后，我们证明 (6.4)。固定 $(i_1,\ldots,i_n,j)\in I$ with $i_{2^{m-1}}\neq s$。再次由引理 2.5 (3)，对任意整数 $k\in[1,n]$，有

$$\begin{aligned}\triangle\left(\binom{t+n}{n}\right)&\geqslant -m+1,\\ \triangle\left(\binom{t+k-1}{k-1}\right)&\geqslant -m+1,\\ \triangle\left(\binom{t+n}{n-k}\right)&\geqslant -m+1.\end{aligned}$$

它们与 (6.6) 及引理 2.5 (2) 一起推出

$$\triangle\left(\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\cdot\binom{t+n}{n}^{2+j}\prod_{k=1}^{n}\binom{t+k-1}{k-1}^{i_k}\binom{t+n}{n-k}^{i_k}\right)\geqslant -m+1.$$

由引理 2.4，得

$$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2}\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\cdot\binom{t+n}{n}^{2+j}\prod_{k=1}^{n}\binom{t+k-1}{k-1}^{i_k}\binom{t+n}{n-k}^{i_k}\mathrm{d}t\right)\geqslant -m.$$

因此，要证明 (6.4)，只需证明

$$v_2\left(s!\binom{s+2}{i_1}\cdots\binom{s+2}{i_n}n!^{2+j}\prod_{k=1}^{n}\left((k-1)!(n-k)!\right)^{i_k}\right)\geqslant(s+2)n-(2s+2)m+s+v_2((s+2)!).$$

由于二项式系数是整数，只需证明

$$v_2\left(s!\binom{s+2}{i_*}n!^{2+j}\prod_{k=1}^{n}\left((k-1)!(n-k)!\right)^{i_k}\right)\geqslant(s+2)n-(2s+2)m+s+v_2((s+2)!),\tag{6.7}$$

其中 $i_*=i_{2^{m-1}}$。回忆 $i_*\neq s$。

由引理 6.1，得

$$v_2\left((k-1)!(n-k)!\right)\begin{cases}=n-2m+1, & \text{if } k=2^{m-1},\\ \geqslant n-2m+2, & \text{if } k\neq 2^{m-1}.\end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned}&v_2\left(n!^{2+j}\prod_{k=1}^{n}\left((k-1)!(n-k)!\right)^{i_k}\right)\\ \geqslant&(2+j)(n-m)+(i_1+\cdots+i_n)(n-2m+2)-i_*\\ =&(2+j)(m-2)+(i_1+\cdots+i_n+j+2)(n-2m+2)-i_*\\ \geqslant&2(m-2)+(s+2)(n-2m+2)-i_*.\end{aligned}$$

要证明 (6.7)，只需证明

$$v_2\left(s!\binom{s+2}{i_*}\right)+s-i_*-v_2((s+2)!)\geqslant 0.$$

设 $u=s-i_*$，则 $1\leqslant u\leqslant s$。只需证明

$$u+v_2\left(\frac{s!}{(s-u)!(u+2)!}\right)\geqslant 0.$$

由于 $\binom{s}{s-u}\in\mathbb{Z}$，只需证明 $u+v_2(u!/(u+2)!)\geqslant 0$，即

$$u\geqslant v_2((u+2)(u+1)).$$

这对任意整数 $u\geqslant 1$ 都成立。事实上，当 $u\geqslant 1$ 为奇数时，我们有 $v_2((u+2)(u+1))=v_2(u+1)\leqslant$ ~~$u+1$~~ 对数 $2\leqslant u$；当 $u\geqslant 2$ 为偶数时，我们有 $v_2((u+2)(u+1))=v_2($~~$u+2$~~$)\leqslant$ ~~6~~ 对数$(u+2)$ 对数 $2\leqslant u$。

引理 6.2 的证明完成。 □

引理 6.3. 对于任意形如 $n=2^m-1$ 且满足 $m\geqslant 2$ 的整数 n，有

$$v_2\left(d_n^{2s+3}T_n\right)=(6s+12)n+s+v_2((s+2)!).$$

特别地，$d_n^{2s+3}T_n\neq 0$ 和

$$\left|d_n^{2s+3}T_n\right|_2=2^{(-6s-12+o(1))n}$$

如 $n=2^m-1\to\infty$。

证明。证明与引理 6.2 的证明类似。

由于 $v_2(d_n) = m-1$，只需证明

$$v_2(T_n) = (6s+12)n - (2s+3)m + 3s + v_2((s+2)!) + 3.$$

注意

$$B_n\left(t+\frac{1}{4}\right) = 2^{(5s+10)n+2s+4}\cdot f(t),$$

其中

$$f(t) = (t+1)^{s+2}(t+2)^{s+2}\cdots(t+n)^{s+2}g(t)$$

and

$$g(t) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(4t+4k+1)^{s+2}}.$$

只需证明

$$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2} f^{(s)}(t)\mathrm{d}t\right) = (s+2)n - (2s+3)m + s + v_2((s+1)!) - 1.$$

我们将指标集 I 定义为

$$I = \left\{(i_1,\ldots,i_n,j)\in(\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^{n+1} \;\middle|\; i_1+\cdots+i_n+j = s\right\}.$$

应用莱布尼茨法则，得到

$$\begin{aligned} f^{(s)}(t) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n,j)\in I} s!\binom{s+2}{i_1}\cdots\binom{s+2}{i_n}\cdot(t+1)^{s+2-i_1}\cdots(t+n)^{s+2-i_n}\cdot\frac{g^{(j)}(t)}{j!} \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n,j)\in I} f_{(i_1,\ldots,i_n,j)}(t), \end{aligned} \tag{6.8}$$

其中

$$\begin{aligned} f_{(i_1,\ldots,i_n,j)}(t) = s!\binom{s+2}{i_1}\cdots\binom{s+2}{i_n}\cdot\frac{g^{(j)}(t)}{j!}\cdot n!^{2+j}\binom{t+n}{n}^{2+j} \\ \times\prod_{k=1}^{n}\left((k-1)!(n-k)!\binom{t+k-1}{k-1}\binom{t+n}{n-k}\right)^{i_k}. \end{aligned}$$

我们将证明，(6.8) 中对应于指标 $(0,\ldots,0,i_{2^{m-1}}=s,0,\ldots,0)$ 的项主导 Volkenborn 积分 $f^{(s)}(t)$ 的 2-adic 范数。更确切地说，我们将证明

$$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2} f_{(0,\ldots,0,i_{2^{m-1}}=s,0,\ldots,0)}(t)\mathrm{d}t\right) = (s+2)n - (2s+3)m + s + v_2((s+2)!) - 1,$$

and

$$v_2\left(\int_{\mathbb{Z}_2} f_{(i_1,\ldots,i_n,j)}(t)\mathrm{d}t\right) \geqslant (s+2)n - (2s+3)m + s + v_2((s+2)!)$$

对任意 $(i_1,\ldots,i_n,j)\in I$ 且满足 $i_{2^{m-1}}\neq s$，

证明的其余部分与引理 6.2 的证明逐字相同。 □

注 6.4. 运用与引理 6.2 和引理 6.3 的证明类似（且更简单）的论证，我们可以证明

$$\begin{aligned} \left|\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}S_n\right|_2 &\leqslant 2^{(-10s-20+o(1))n} \\ \left|d_n^{2s+3}T_n\right|_2 &\leqslant 2^{(-6s-12+o(1))n} \end{aligned}$$

对每个足够大的正整数 n 都成立。然而，对于一般的正整数 n，似乎很难证明 $S_n\neq 0$ 和 $T_n\neq 0$。

7 主要结果的证明

定理 1.2 的证明。结合引理 3.3、引理 4.5 和引理 4.6，我们得到： $\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}S_n$是 1、 $\zeta_2(j,1/4)$（ $s+3\leqslant j\leqslant 3s+5$ 和 $j\equiv s+1+\delta$（模 2））的一个线性组合，系数为整数。

根据 (5.1)、引理 5.1、引理 5.2 和引理 6.2，当 $n=2^m-1\to\infty$ 时，我们有

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 2s+4}\left|\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}\rho_{n,i}\right|\cdot\left|\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}S_n\right|_2\leqslant\exp\left(((4-6\log 2)s+7-12\log 2+o(1))\,n\right)\to 0,$$

（因为 $4-6$ 对数 $2<0$ 和 $7-12$ 对数 $2<0$），更重要的是

$$\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}S_n\neq 0.$$

将引理 2.1 应用于线性形式序列 $\{\Phi_n^{-s-2}d_n^{3s+5}S_n\}_{n=2^m-1,m\geqslant 2}$，我们可以推得以下集合中至少包含一个无理数：

$$\left\{\zeta_2\left(j,\frac{1}{4}\right)\ \mid\ j\in\mathbb{Z}\cap[s+3,3s+5],\ j\equiv s+1+\delta\pmod 2\right\}.$$

这对于 任意非负整数 s 以及任意 $\delta\in\{0,1\}$都成立。定理 1.2 的证明至此完成。 □

定理 1.3 的证明。结合引理 3.3、引理 4.5 和引理 4.6，我们得到： $d_n^{2s+3}T_n$ 是 1, $\zeta_2(j,1/4)$ $(s+3\leqslant j\leqslant 2s+3)$ 的整数系数线性组合。

由 (5.1)、引理 5.2 和引理 6.3，当 $n=2^m-1\to\infty$ 时，我们有

$$\max_{0\leqslant i\leqslant s+2}\left|d_n^{2s+3}\sigma_{n,i}\right|\cdot\left|d_n^{2s+3}T_n\right|_2\leqslant\exp\left(((2-3\log 2)s+3-6\log 2+o(1))\,n\right)\to 0,$$

并且重要的是

$$d_n^{2s+3}T_n\neq 0.$$

应用引理 2.1，我们推得下列集合至少包含一个无理数：

$$\left\{\zeta_2\left(j,\frac{1}{4}\right)\ \mid\ j\in\mathbb{Z}\cap[s+3,2s+3]\right\}.$$

这对任意非负整数 s 都成立。定理 1.3 的证明完成。 □

定理 1.1 的证明。由引理 2.7，定理 1.1 是定理 1.2 的特例 $\delta=1$。取 $s=3$，我们得到 ζ_2(7) ζ_2 (9) ζ_2(11) ζ_2(13) 中至少有一个是无理数。 □

参考文献

[1] R. Ap´ery, 《(2) 和 (3) 的无理性》，载于《算术日》（吕米尼，1978），Ast´erisque，第 61 卷（法国数学会，巴黎，1979），11–13。

[2] K. Ball 和T. Rivoal, 《ζ 函数在奇整数处的无穷多个值的无理性》，《数学发明》146（2001），193–207。

[3] P. Bel, 《L 函数与无理性》，《比萨高等师范学院科学类年刊》（第 5 辑）9（2010），第 1 期，189–227。

[4] P. Bel, 《某些 $\zeta_p(4,x)$ 值的无理性》，J. Th´eor. Nombres Bordeaux 31 (2019), no. 1, 81–99.

[5] F. Beukers，某些 p进 L 值的无理性，《数学学报（英文版）》24 (2008), no. 4, 663–686.[6] F. Calegari，某些小 p 的 p进周期的无理性，《国际数学研究通知》 (2005), no. 20, 1235–1249.[7] F. Calegari、V. Dimitrov 和 Y. Tang， p进 Eisenstein 级数、算术全纯性判据以及 2进周期 $\zeta_2(5)$ 的无理性，即将出版.[8] H. Cohen，《数论》，第 II 卷：解析与现代工具，《数学研究生教材》240, Springer，纽约，2007.[9] S. Fischler、J. Sprang 和 W. Zudilin，许多奇数 ζ 值都是无理数，《组合数学》155(5) (2019), 938–952.[10]S. Fischler，利用 Siegel 引理证明奇数 ζ 值的线性无关，预印本 (2021), arXiv:2109.10136.[11] L. Lai 和 P. Yu，关于无理奇数 ζ 值个数的一则注记。《组合数学》156 (2020), no. 8, 1699–1717.[12] T. Rivoal，黎曼ζ函数在奇整数处取无穷多个无理值。C. R. Acad. Sci. 巴黎 S´er. I Math. 331 (2000), no. 4, 267–270.[13] A. M. Robert，《p进分析教程》，《数学研究生教材》198，Springer 出版社，纽约，2000.[14] J. Sprang， p进 L 值的线性无关性结果，《杜克数学杂志》169 (2020), no. 18, 3439– 3476.[15] A. Volkenborn，一个 p进积分及其应用，I，《数学手稿》7 (1972), 341–373.[16] W. Zudilin， $\zeta(5)$、 $\zeta(7)$、 $\zeta(9)$、 $\zeta(11)$ 中至少有一个是无理数，《数学科学进展} [《俄罗斯数学调查》（2001), 149–150 [774–776].[17] W. Zudilin，黎曼ζ函数值的无理性，《俄罗斯科学院数学辑学报》 [《数学汇刊》（2002), 49-102 [489–542].[18] W. Zudilin，涉及奇数 ζ 值的线性形式的算术。J. Th´eor. Nombres Bordeaux 16(1), 251–291 (2004).

E–mail address: lilaimath@gmail.com