arXiv:2304.00817v1 [cs.DS] 3 Apr 2023

通过对有向图进行边时序化来最大化时序可达性的复杂性简述

Alkida Balliu[1], Filippo Brunelli[*2]、Pierluigi Crescenzi[1], Dennis Olivetti[1],和 Laurent Viennot[*2]

[1]GSSI，I-67100 拉奎拉，意大利[2]Inria、Irif、巴黎大学´，F-75013 巴黎，法国

2023年4月4日

摘要

时序图是一种为边分配了时间标签的图。如果时序图中存在一条从 u 到 v 且边的时间标签递增的路径，则节点 u 和 v 彼此可达。我们研究如何为有向图的边分配时间标签，以最大化所得时序图的总可达性（即彼此可达的节点对数）。具体而言，我们证明该问题是NP难的。随后，我们猜想该问题可以在常数近似比内得到近似求解。该猜想可由以下图论猜想推出：任意含有 n 个节点的强连通有向图，都存在一棵出向有向树和一棵入向有向树；二者边不相交、根相同，且各自覆盖Ω(n)个节点。

关键词： 时序图；时间路径；时间分配；时序可达性。

1 引言

在过去二十年中，时序图日益受到关注 [11,12, 15, 19] ，并且已有多种不同的定义 [1, 10, 13, 2, 6, 5, 14]（有关时序图的分类，请参见 [3] ）。在此，我们将一个时序图 $G = (V, \mathbb{E})$ 定义为一个由时序边 组成的列表（u， v， t），其中 u， $v \in V$是图中的两个节点 （分别称为时序边的尾端 和头端 ），并且

*本研究部分由法国国家研究署（ANR）通过 Multimod（ANR-17-CE22-0016）和 Tempogral（ANR-22-CE48-0001）项目资助。

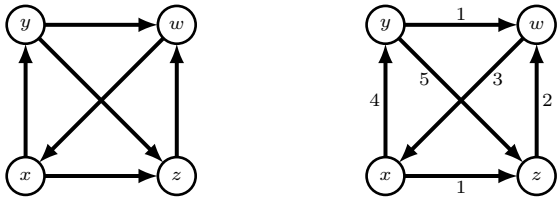


图 1：一个有向图 D （左）以及其边时序化结果 D （右）。所得时序图的时序可达性为 16，因为每个节点在时间上都可从任意其他节点到达。

t 是该时序边的出现时间 。对于每条时序边（u，v，t），我们可以从 u 出发，在时间 t 沿该边 traversing，并于时间 $t+1$到达 v，该时间即为该时序边的到达时间 。

我们研究一个与时序图中可达性概念相关的网络优化问题。给定一个时序图 G，从节点 u到节点 v的一条（时间）路径 是一个时序边序列 e_1，e_2，... ... e_k，其中 e_1 的尾端为 u，e_k 的头端为 v；并且对于任意满足 $1 < i \leq k$ 的 i，e_i 的尾端等于 e_{i-1} 的头端，且 e_i 的出现时间晚于 e_{i-1}的出现时间。G 的时序可达性 是节点对 u 和 v 的数量，其中 v 可从 u在时间上到达 ，也就是说，存在一条从 u 到 v的时间路径。
Maximum Reachability Edge Temporal-isation （mret）问题是：给定一个有向图（简称有向图）$D = (V, E)$，求一个边时序化 $\tau : E \to \mathbf{N}$ ，使所得时序图的时序可达性最大化。例如，考虑图 1 左侧所示的有向图。在图的右侧，我们展示了一个含有四个节点的有向图 D 的边时序化结果，使得所得时序图的时序可达性为 16，这显然是可能达到的最大时序可达性。

针对无向图的 mret 问题已在 [9],中得到研究，研究表明，判定所得时序图是否时间连通（也就是说，对于任意两个节点 u 和 v，v 都可以从 u时间可达）是 NP 完全的（显然，这意味着针对无向图的 mret 问题是 NP难的）。此外，很容易看出，针对无向连通图的 mret问题可以在常数近似比内近似求解，因为只需在生成树中寻找一个“重心”，即可轻松计算出一种时序化方案，使得一半节点可以到达另一半节点。不过请注意，对称有向图的时序化并不等同于无向图的时序化，因为可以为一条边（u，v）和其对称边（v，u）分配不同的时间。

下文将证明，该 mret 问题是NP难的，即使将问题限制在强连通有向图上也是如此。最后，我们将提出一个猜想，认为

该问题可以在常数近似比内近似求解，并提出一个图论猜想，该猜想或许可以用于证明关于 MRET 问题可近似性的猜想。

本文研究的类似问题此前已有研究 [13, 16, 7, 8, 17, 20, 18, 4]。例如，在 [17] 中，作者提出了时序网络设计的两个成本最小化参数（即一条边的最大出现时间数，以及所有边的出现时间总数），并研究了在满足某种连通性约束的条件下如何优化这些参数。

2 困难性结果

下一个结果表明，除非 P 等于 NP，否则不存在能够解决MRET 问题的多项式时间算法。下文中，我们将边时序化称为调度，也就是有向图中边的排列。事实上，可以很容易地将一种边时序化 τ 转换为另一种边时序化 τ'，使所有时间标签两两不同，同时保持根据 τ 得到的总可达性不变。接着注意到，根据 τ' 得到的总可达性仅取决于边按其时间标签排列的顺序。给定有向图 $D = (V, E)$ 和调度 S，如果节点 v 在由 D 和边时序化 τ_S 所诱导的时序图 G中，在时序上可从节点 u 到达，则称节点 v 可从节点 u 以S方式到达；该边时序化将出现时间 i 赋给 S 的第i条边，其中 $i \in [|E|]$。从节点 u 以 S方式可达的节点集合记为 $\mathcal{R}_G(u)$。 D 的 S可达性定义为由 τ_S诱导的时序图的时序可达性。

定理1. MRET问题是*NP*难的，即使有向图 D 是强连通的。

证明. 我们将 3-SAT 归约到 MRET ，如下所示。考虑一个 3-SAT 公式 Φ，其中有 n 个变量 x_1、.....、 x_n 和 m 个子句 c_1、.....、 c_m。不失一般性，假设每个变量至少在一个子句中以正文字出现，并且至少在一个子句中以负文字出现。首先，我们将无权有向图 D =(V， E)定义为以下构件的并（见图 2）。

变量构件 对于 Φ中的每个变量 x_i， V包含节点 t_i^1、 t_i^2、 f_i^1和f_i^2，而 E包含边(t_i^1, f_i^2)、(f_i^2， f_i^1)、(f_i^1， t_i^2)和(t_i^2， t_i^1)。

子句构件 对于每个子句 c_j, V 包含节点 c_j^1 和 c_j^2。如果文字 x_i出现在 c_j中，则 E包含边 (c_j^1, t_i^1) 和 (t_i^2, c_j^2)；而如果文字 $\neg x_i$出现在 c_j中，则 E包含边 (c_j^1, f_i^1) 和 (f_i^2, c_j^2)。此外，对于每一对满足 $h \neq j$的子句 c_h 和 c_j， E 包含边 (c_j^1, c_h^2)（参见图中的虚线边）。最后，对于每个子句 c_j, V 还包含节点 d_j^i 和 e_j^i, 用于 $i \in [K]$ （ K 的取值将在证明中稍后说明）；对于 $i \in [K]$， E包含边 (d_j^i, c_j^1) 和 (c_j^2, e_j^i)。

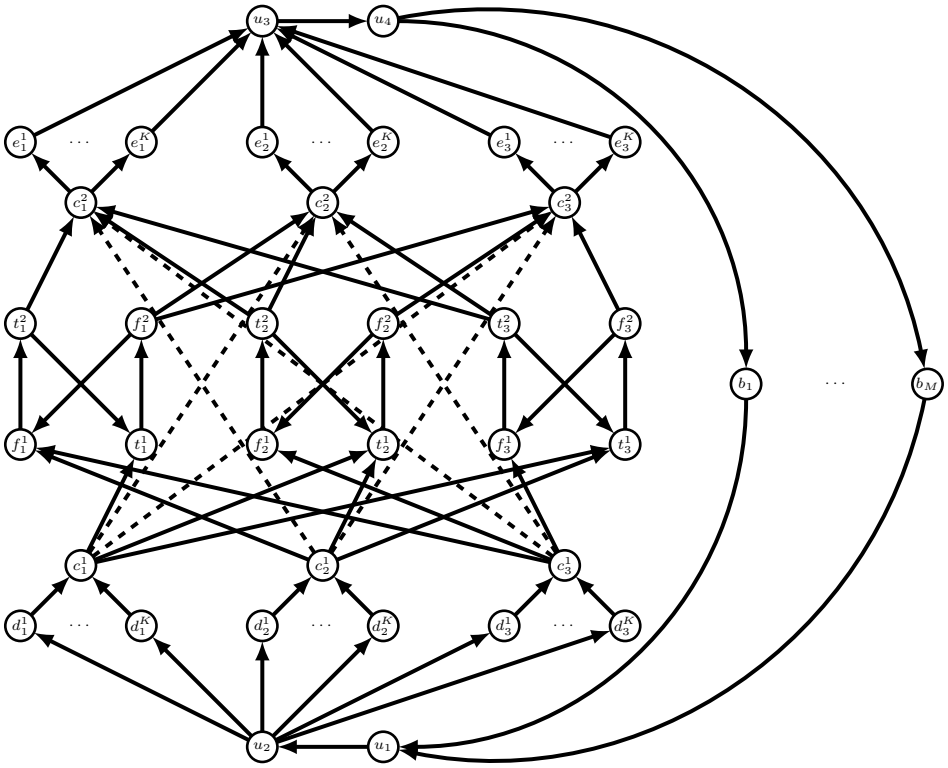


图 2： 3-SAT 到 MRET的归约示例。 3-SAT 公式为（$x_1 \vee x_2 \vee x_3$） $\wedge$ （$\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$） $\wedge$ （$\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$）。

块构件 V 包含节点 u_1、 u_2、 u_3和 u_4，以及用于 $i \in [M]$ 的节点 b_i（ M 的取值将在证明中稍后说明）。 E 包含边 $\{(b_i,\ u_1)\colon\ i \in [M]\}$、$(u_1,\ u_2)$、 $\{(u_2,\ d_j^l)\colon\ j \in [m],\ l \in [K]\}$、$\{(e_j^l,\ u_3)\colon\ j \in [m],\ l \in [K]\}$、$(u_3,\ u_4)$，以及 $\{(u_4,\ b_i)\colon\ i \in [M]\}$。

注意， D 是强连通的。事实上，我们来考虑这些环

$$C_{i,j,l,p} = \langle u_1, u_2, d_j^l, c_j^1, t_i^1, f_i^2, f_i^1, t_i^2, c_j^2, e_j^l, u_3, u_4, b_p, u_1 \rangle,$$

其中， $j \in [m]$, i 满足： x_i 是子句 c_j, $l \in [K]$中的一个文字，且 $p \in [M]$，并且这些环

$$C_{i,j,l,p} = \langle u_1, u_2, d_j^l, c_j^1, f_i^1, t_i^2, t_i^1, f_i^2, c_j^2, e_j^l, u_3, u_4, b_p, u_1 \rangle,$$

其中， $j \in [m]$, i 满足： $\neg x_i$ 是子句 c_j, $l \in [K]$中的一个文字，且$p \in [M]$。这些环的并集包含 V中的每个节点，并且每个环都包含节点 u_1。这证明了 D的强连通性。

下文中， B 表示集合 $\{b_i : i \in [M]\}$ ，而 H 表示不属于块构件的节点集合，即 $H = V \setminus (\{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cup B)$ （注意， $|V| = M + |H| + 4$ 且 $|H| = 2(K+1)\ m + 4n$）。

变量构件中节点对的激活 考虑变量 x_i及其对应的变量构件，以及对与该变量构件相关的 4 条边进行的调度 S 。如果 t_i^2（分别为 f_i^2）在构件内可从 t_i^1（分别为 f_i^1） S-可达，我们就说 S激活了节点对（t_i^1， t_i^2）（分别为（f_i^1， f_i^2））；也就是说，（t_i^1， f_i^2）、（f_i^2， f_i^1）和（f_i^1， t_i^2）（分别为（f_i^1， t_i^2）、（t_i^2， t_i^1）和（t_i^1， f_i^2））按此顺序调度。注意，任何调度都无法同时激活（t_i^1， t_i^2）和（f_i^1， f_i^2），因为边（t_i^1， f_i^2）要么在边（f_i^1， t_i^2）之前调度，要么在其之后调度。

根据一个满足赋值构造调度。假设存在一个满足 Φ 的赋值 α ，并考虑如下调度 S。首先，以任意顺序调度 $\{(b_i, u_1) : i \in [M]\}$ 中的边，然后调度边 (u_1, u_2)，接着以任意顺序调度 $\{(u_2, d_j^i) : j \in [m], i \in [K]\}$ 中的边。然后，以任意顺序调度边 $\{(d_j^i, c_j^1) : j \in [m], i \in [K]\}$，接着以任意顺序调度从节点 c_j^1 出发的边，其中 $j \in [m]$ 。然后，对于每个 $i \in [n]$，若 $\alpha(x_i) = \textsc{True}$，我们按此顺序调度边 (t_i^1, f_i^2)、(f_i^2, f_i^1)、(f_i^1, t_i^2) 和 (t_i^2, t_i^1)（从而激活 (t_i^1, t_i^2)）。否则（即 $\alpha(x_i) = \textsc{False}$），我们按此顺序调度边 (f_i^1, t_i^2)、(t_i^2, t_i^1)、(t_i^1, f_i^2) 和 (f_i^2, f_i^1)（从而激活 (f_i^1, f_i^2)）。然后，以任意顺序调度所有进入节点 c_j^2 的边，其中 $j \in [m]$ ；接着，以任意顺序调度所有从节点 c_j^2 出发的边，其中 $j \in [m]$ 。最后，以任意顺序调度 $\{(e_j^l, u_3) : j \in [m], l \in [K]\}$ 中的边，然后调度边 (u_3, u_4)，并以任意顺序调度 $\{(u_4, b_i) : i \in [M]\}$ 中的所有边。令 G 为由 D 和调度 S 所诱导的时序图。

首先注意，对于任意含有 c_j with $j \in [m]$ 的子句，根据赋值 α，存在一个满足 c_j 的文字。设 x_i （分别地， $\neg x_i$）为满足 c_j 的文字。由于 (t_i^1, t_i^2)（分别地，(f_i^1, f_i^2)) 被激活，因此存在一条从 c_j^1 到 c_j^2 的时间路径，该路径经过与 x_i 对应的变量构件。这意味着 $c_j^2 \in \mathcal{R}_G(c_j^1)$ ，并且对于 $l, l' \in [K]$， $e_j^{l'} \in \mathcal{R}_G(d_j^l)$ 。现在，我们通过证明从每个可能的源点出发在时间上可达的节点数量的下界，来证明 $\mathbb{L}$ 上 S-可达性的下界。

- 对于任意 $v \in V$ 以及对于 $i \in [M]$， $v \in \mathcal{R}_G(b_i)$ 。这会向 $\mathbb{L}$ 添加 M（$M + |H| + 4$）。
- 对于 $i \in [4]$ 和 $j \in [M]$， $b_j \in \mathcal{R}_G(u_i)$ 。此外， $\{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cup H \subseteq \mathcal{R}_G(u_1)$ 、$\{u_2, u_3, u_4\} \cup H \subseteq \mathcal{R}_G(u_2)$ 、 u_3， $u_4 \in \mathcal{R}_G(u_3)$ 以及 $u_4 \in \mathcal{R}_G(u_4)$ 。这使 $\mathbb{L}$增加了 $4M + 2|H| + 10$ 。

• 对于 j, $h \in [m]$、 i, $l \in [K]$和 $p \in [M]$, c_h^2, $e_h^l \in \mathcal{R}_G$（d_j^i）（基于上述观察）以及 $b_p \in \mathcal{R}_G$（d_j^i）。这使 $\mathbb{L}$增加了 Km（$M + Km + m$）。

• 对于 $j, h \in [m]$, $l \in [K]$和 $i \in [M]$, $c_h^2, e_h^l, b_i \in \mathcal{R}_G(c_j^1)$。这会将$m($$M + Km + m)$添加到 $\mathbb{L}$中。

• 对于 $i \in [n]$, 存在 $j \in [m]$, 使得 c_j 由 $\alpha(x_i)$满足。因此，对于 $p \in [2]$, $l \in [K]$和 $h \in [M]$, $e_j^l, b_h \in \mathcal{R}_G(t_i^p)$以及 $e_j^l, b_h \in \mathcal{R}_G(f_i^p)$。这会将 $4n(M + K)$添加到 $\mathbb{L}$中。

• 对于 $j \in [m]$, $l \in [K]$和 $h \in [M]$, $e_j^l, b_h \in \mathcal{R}_G(c_j^2)$。这会将 $m(M + K)$添加到 $\mathbb{L}$中。

• 对于 $j \in [m]$, $l \in [K]$和 $h \in [M]$, $b_h \in \mathcal{R}_G(e_j^l)$。这会将 MKm添加到 $\mathbb{L}$中。

因此， S-可达性至少为

$$\begin{aligned}\mathbb{L} \;=\; & M(M + |H| + 4) + (4M + 2|H| + 10) + Km(M + Km + m) \\ & + m(M + Km + m) + 4n(M + K) + m(M + K) + MKm.\end{aligned}$$

当 Φ 不可满足时对可达性的界定。令 M 等于任意大于$(|H| + 5)^2$的值。现在证明：如果不存在满足公式 Φ的真值赋值，那么任何调度 S 的 S-可达性都不可能大于或等于 $\mathbb{L}$。首先注意，如果 S 为边(u_3, u_4)赋予的开始时间小于为(u_1, u_2)赋予的开始时间，那么S-可达性小于 $\mathbb{L}$。这是因为在这种情况下，对于 i, $j \in [M]$ 在$i \neq j$时，b_j 无法从 b_i到达 S。因此， S-可达性受限于$\mathbb{U}_1 = M(|H|+4+1)+(|H|+4)($$M+|H|+4)$：如果对于每个节点$v \notin B$, $\mathcal{R}_G(v) = V$，就会出现这种情况。由于 $\mathbb{L} > M^2$, $\mathbb{U}_1 = M(|H|+4+1)+(|H|+4)(M+|H|+4)$ $=2M(|H| + 4)$ $+(|H| + 4)$ $^2 + M < M(|H| + 5)^2$,且 $M >(|H| + 5)^2$,, 因此有 $\mathbb{L} > \mathbb{U}_1$。于是，我们可以只考虑这样一些调度：为边$(u_1, u_2)$赋予的开始时间小于为边$(u_3, u_4)$赋予的开始时间。令 S 为这样的一个调度，并令 G 为由 D 和 S诱导的时序图。我们通过给出从每个可能的源点可到达的节点数上界，来证明 S-可达性的上界 $\mathbb{U}_2$ 。注意，对于任意两个节点 u 和 v，只有当 D 中存在一条从u 到 v 的路径，且该路径在边(u_1, u_2)之前不包含边(u_3, u_4)时， v 才可能属于 $\mathcal{R}_G(u)$。

• 对于 $i \in [M]$, $|\mathcal{R}_G(b_i)| \leq |V|$。这会将 $M(M + |H| + 4)$ 添加到 $\mathbb{U}_2$。

• 对于 $i \in [2]$, $|\mathcal{R}_G(u_i)| \leq |V|$, 而 $|\mathcal{R}_G(u_3)| \leq M+3$ 和 $|\mathcal{R}_G(u_4)|$ $\leq |V| =M + |H| + 4$。

• 对于 $j \in [m]$ 和 $i \in [K]$, 在最佳情况下， $\mathcal{R}_G(d_j^i)$ 包含 d_j^i, c_j^1, 即对应于 c_j 中出现的三个变量的 12 个节点，以及 $\{c_h^2$ 中的节点： $h \in [m]\} \cup \{e_h^l$: $h \in [m]$, $l \in [K]\} \cup \{u_1, u_3, u_4\} \cup B$, 从而得到$|\mathcal{R}_G(d_j^i)| \leq M + Km + m + 17$。然而，我们可以证明存在一个索引 j^* , 使得对于 l, $l' \in [K]$, $e_{j^*}^{l'} \notin \mathcal{R}_G(d_{j^*}^l)$, 这意味着

d 个节点最多为 $\mathbb{U}_2$ 增加 $Km(M+Km+m+17)-K^2$。为定义j^*，我们考虑以下真值赋值 α：对于任意满足$i \in [n]$的变量 x_i，若 (t_i^1, f_i^2) 的调度早于 (f_i^1, t_i^2)，则 $\alpha(x_i) = \textsc{True}$；否则$\alpha(x_i) = \textsc{False}$。注意，如果 $\alpha(x_i) = \textsc{True}$（分别地，$\alpha(x_i) = \textsc{False}$），我们便知道 S不会激活 (f_i^1, f_i^2)（分别地，(t_i^1, t_i^2)）。由于公式 Φ 不可满足，存在 $j^* \in [m]$，使得 c_{j^*} 未被 α 满足。令 x_i（分别地，$\neg x_i$）为 c_{j^*} 中的一个文字。由于 c_{j^*} 未被 α 满足，我们可知 $\alpha(x_i) = \textsc{False}$（分别地，$\alpha(x_i) = \textsc{True}$），且 (t_i^1, t_i^2)（分别地，(f_i^1, f_i^2)）未被激活。因此，不可能通过 x_i 的变量构件从 $c_{j^*}^1$ 到达 $c_{j^*}^2$。另一方面，在 D 中所有其他连接 $c_{j^*}^1$ 和 $c_{j^*}^2$ 的游走里，边 (u_3, u_4) 都先于边 (u_1, u_2) 出现。因此，对于 $l,l' \in [K]$，$c_{j^*}^2 \notin \mathcal{R}_G(c_{j^*}^1)$ 和 $e_{j^*}^{l'} \notin \mathcal{R}_G(d_{j^*}^l)$。

- 对于 $j \in [m]$，在最佳情况下，$\mathcal{R}_G(c_j^1)$包含 c_j^1、对应于子句 c_j中三个变量的 12 个节点，以及$\{c_h^2$ 中的节点：$h \in [m]\} \cup \{e_h^l$：$h \in [m]$，$l \in [K]\} \cup \{u_1, u_3, u_4\} \cup B$。这会将$m(M+Km+m+16)$添加到 $\mathbb{U}_2$中。

- 对于 $i \in [n]$，以及对于 $j \in [2]$，在最佳情况下，$\mathcal{R}_G(t_i^j)$和 $\mathcal{R}_G(f_i^j)$包含对应的四个变量节点以及 $\{c_h^2$ 中的节点：$h \in [m]\} \cup \{e_h^l$：$h \in [m]$，$l \in [K]\} \cup \{u_1, u_3, u_4\} \cup B$。这会将 $4n(M+Km+m+7)$添加到$\mathbb{U}_2$中。

- 对于 $j \in [m]$，在最佳情况下，$\mathcal{R}_G(c_j^2)$ 包含 c_j^2 以及 $\{e_j^l$ 中的节点：$l \in [K]\} \cup \{u_1, u_3, u_4\} \cup B$。这会将 $m(M+K+4)$ 添加到 $\mathbb{U}_2$。

- 对于 $j \in [m]$ 和 $i \in [K]$，在最佳情况下，$\mathcal{R}_G(e_j^i)$ 包含 e_j^i 以及 $\{u_1, u_3, u_4\} \cup B$ 中的节点。这会将 $Km(M+4)$ 添加到 $\mathbb{U}_2$。

总结，

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_2 \;=\;& M(M+|H|+4)+(4M+3|H|+15)+(Km(M+Km+m+17)-K^2)\\ &+m(M+Km+m+16)+4n(M+Km+m+7)+m(M+K+4)\\ &+Km(M+4).\end{aligned}$$

我们有 $\mathbb{L}-\mathbb{U}_2 = -|H|-5K^2-21Km-4n(K(m-1)+m+7)-20m = K^2-23Km-4n(K(m-1)+m+8)-22m-5 > K^2-Knm(23+4(1+1+8)+22+5) = K^2-90Knm$，使用 K，n，$m \geq 1$。令 K 等于任何大于或等于 $91nm$ 的值。于是我们得到 $K^2 > 90Knm$，因此 $\mathbb{L} > \mathbb{U}_2$。也就是说，$S$-可达性必须小于 $\mathbb{L}$。

结论。因此，我们证明了公式 Φ 可满足，当且仅当存在一个调度 S，使得 D 的 S-可达性至少为 $\mathbb{L}$。至此，定理得证。

□ □

3 结论与开放问题

在本文中，我们研究了 MRET 问题，即为有向图的边分配出现时间，以最大化所得时序图的总可达性。我们证明了该问题是 NP难的，即使该有向图是强连通的也是如此。我们猜想， MRET 问题可以在常数近似比内近似。具体而言，我们猜想，任何强连通有向图都存在一种边时序化，使其时序可达性至少为 $c \cdot n^2$，其中 $c > 0$为某个常数。证明这一命题的一种方法是证明以下有趣的图论猜想。

几乎生成的双根有向树猜想(ASTRA**)**。任何强连通有向图都存在一棵出向有向树和一棵入向有向树，它们边不相交、具有共同根，且各自包含$\Omega(n)$ 个节点。

需要注意的是，不难证明， ASTRA 猜想中提到的两棵有向树的根不可能是图中的任意节点。例如，考虑图3所示的图。在这种情况下，节点x_1 不可能是这两棵有向树的共同根，因为以 x_1 为根的唯一入向有向树和唯一出向有向树共享边（x_2， y_2），因此其中一棵有向树至多包含一个节点（当然，这个例子可以推广到任意偶数个节点）。

还要注意，如果要求这两棵有向树至少包含 $\frac{n}{3-\epsilon}$ 个节点，那么对于任意正数常量 ϵ， ASTRA 猜想都是假的。例如，考虑图4所示的有向图 $G = (V, E)$。对于某个整数参数 $k > 0$，其节点集为 $V = \{x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\} \cup \{z_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq k\}$，边集为 $E = \{(x, y)\} \cup \{(y, x_i), (x_i, y_i), (y_i, x), (y_i, z_i, 1), (z_{i,k}, x_i) \mid 1 \leq i \leq 3\} \cup \{(z_{i,j}, z_{i,j+1}) \mid 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j < k\}$。注意，节点总数为 $n = 3k + 8$。首先，考虑根不是 x 或 y 的情况，给出入向有向树和出向有向树的节点数中较小者的上界。对于任意这样的节点，由于边 (x, y) 只能属于其中一棵有向树，因此入向有向树或出向有向树至多包含 $k + 3$ 个节点。

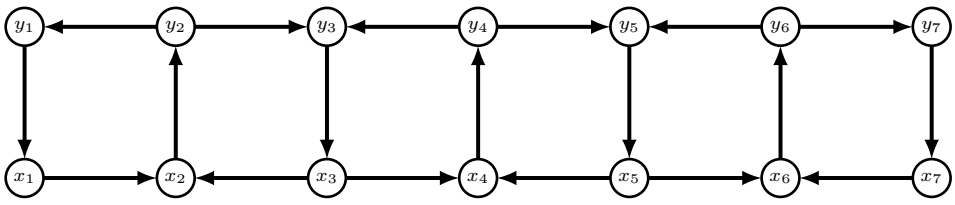


图3：一个有向图示例，其中只有部分节点可以作为两棵各自包含 $\Omega(n)$ 个节点的有向树的根。

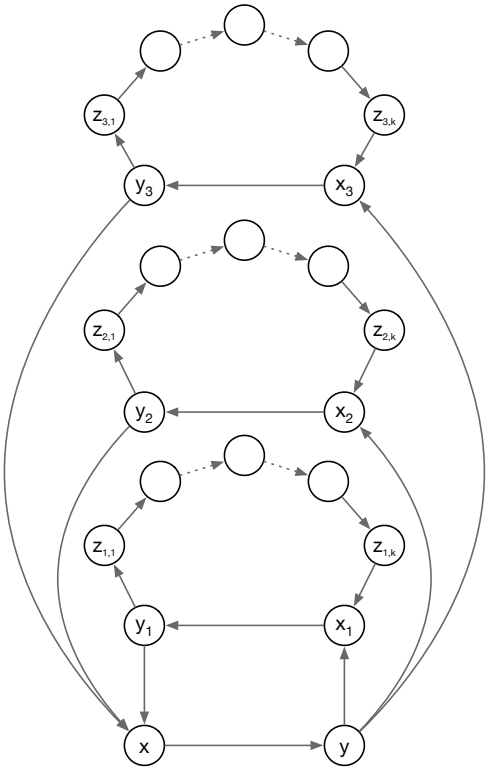


图4：一个有向图示例，其中不存在两棵具有共同根且各自覆盖超过 $n/3+c$ 个节点的边不相交有向树；对某个正常数 c 而言，情况如此。

现在考虑 x 或 y 为根的情况。假设根为 x （另一种情况可以用类似的方法分析）。由于对于每个 $i = 1, 2, 3$，边 (x_i, y_i) 只能属于一棵有向树，因此以 x 为根的入向有向树或出向有向树至多包含 $n - 2k = k + 8$ 个节点。由此可得，在所有情况下，入向有向树或出向有向树的节点数都不超过 $k+8 = n/3+O(1)$。

参考文献

[1] Kenneth A. Berman. 调度网络的脆弱性及孟格定理的一种推广。*Networks*, 28(3):125–134，1996年。

[2] S. Bhadra 和 A. Ferreira. 演化图中连通分量的复杂性，以及动态网络中多播树的计算。载于*ADHOC-NOW*，第 259–270 页，2003年。

[3] F. Brunelli、P. Crescenzi 和 L. Viennot. 加权时变网络中帕累托最优路径的计算。*Information Processing Let-ters*，168:106086，2021年。[4] Filippo Brunelli、Pierluigi Crescenzi 和 Laurent Viennot. 通过为游走集合指定起始时间，最大化时序图中的可达性。*Networks*，第 1–27 页，2002年。[5] A. Casteigts、P. Flocchini、W. Quattrociocchi 和 N. Santoro. 时变图与动态网络。*IJPEDS*，27(5):387–408，2012年。[6] Eddie Cheng、Jerrold W Grossman 和 Marc J Lipman. 时间戳图及其关联的影响有向图。*Discrete Applied Mathe-matics*，128(2):317–335，2003年。[7] F. Cor`o、G. D'Angelo 和 Y. Velaj. 推荐链接以最大化社交网络中的影响力。载于*IJCAI*，第 2195–2201 页，2019年。[8] J.A. Enright、K. Meeks、G.B. Mertzios 和 V. Zamaraev. 删除边以限制时间网络中流行病的规模。载于*MFCS*，第 57:1–57:15 页，2019年。[9] F. G¨obel、J. Orestes Cerdeira 和 H.J. Veldman. 标签连通图与闲聊问题。*Discrete Mathematics*，87(1):29–40，1991年。[10] F. Harary 和 G. Gupta. 动态图模型。*Mathematical and Com-puter Modelling*，25(7):79–87，1997年。[11] P. Holme 和 J. Saram¨aki. 时间网络。*Physics Reports*，519(3):97–125，2012年。[12] Petter Holme 和 Jari Sar¨amaki. 时间网络。Springer，柏林、海德堡，2013年。[13] D. Kempe、J. Kleinberg 和 A. Kumar. 时间网络中的连通性与推断问题。*Journal of Computer and System Sciences*，64(4):820–842，2002年。[14] M. Latapy、T. Viard 和 C. Magnien. 用于建模随时间变化的交互的流图和链接流。*Social Netw. Analys. Mining*，8(1):61:1–61:29，2018年。[15] Naoki Masuda 和 Renaud Lambiotte. 时间网络指南。World Scientific，新加坡，2016。[16] G.B. Mertzios、O. Michail、I. Chatzigiannakis 和 P.G. Spirakis. 满足连通性约束的时间网络优化。载于*ICALP*，第 657–668 页，2013年。

[17] G.B. Mertzios、O. Michail 和 P.G. Spirakis。满足连通性约束的时序网络优化。*Algorithmica*，81(4):1416–1449，2019。[18] George B. Mertzios、Hendrik Molter、Malte Renken、Paul G. Spirakis 和 Philipp Zschoche。时序图传递定向的复杂性。载于 *MFCS*，第 202 卷 *LIPIcs*，页码 75:1–75:18，2021。[19] O. Michail。时序图导论：算法视角。*Internet Mathematics*，12(4):239–280，2016。[20] Hendrik Molter、Malte Renken 和 Philipp Zschoche。时序可达性最小化：延迟与删除。载于 *MFCS*，第 202 卷 *LIPIcs*，页码 76:1–76:15，2021。