使用雅可比算子和卷积恒等式实现 Racah 代数

Q. Labriet*，L. Poulain d'Andecy†

2023年4月4日

arXiv:2304.00820v1 [math.RT] 3 Apr 2023

摘要

利用 sl_2 的表示论以及最低权 Verma 模张量积的一个适当模型，我们首先使用 Jacobi 微分算子给出 Hahn 代数的一个实现，随后给出 Racah代数的一个实现。在此过程中，我们重新得到了一些涉及 Hahn 多项式和 Racah多项式的雅可比多项式已知卷积公式。类似地，我们还构造了高阶 Racah 代数的实现，其中极大交换子代数均以 Jacobi 微分算子的形式实现。

1 引言

Racah代数与 Racah 多项式相关联。Racah 多项式是正交多项式族中的一员，位于单变量正交多项式的 Askey 方案顶端。从某种意义上说，Racah代数反映了 Racah 多项式的双谱性质（递推关系和差分方程）。这一代数曾在许多场合出现，并已应用于物理学和数学的多个领域。关于 Racah代数的更多背景，请参阅 [1, 3, 10, 11] 及其中的参考文献。

本文着重介绍并运用对 Racah代数的一种简单的表示论解释。Racah代数编码了两个称为 X 和 Y的算子之间的关系。表示论中的一个简单练习表明，粗略地说，如果我们有一个 Racah代数的表示，其中 X 可对角化且具有某种非退化谱，那么 X 和 Y 共同构成所谓的 Leonard 对 [18]。也就是说，当 X 为对角形式时，Y 为三对角形式，反之亦然。三对角性反映了 Racah 多项式的双谱性质；对我们而言，最重要的是，Racah 多项式（更确切地说，它们在某些点上的取值）会作为 X 的特征基与Y的特征基之间的转移系数出现。总而言之，Racah代数的表示中隐藏着涉及 Racah 多项式的换基恒等式。完全相同的论述也适用于 Hahn 代数，它是与 Hahn 多项式相关联的代数。

本文的第一个目标，是从这一角度考察一些涉及 Hahn 多项式和 Racah多项式的已知恒等式。更具体地说，本文考察的恒等式涉及雅可比多项式。涉及 Hahn 多项式的恒等式将雅可比多项式与通常的单项式基联系起来，而涉及 Racah 多项式的恒等式则将两种不同的雅可比多项式乘积联系起来。由于其特殊形式，它们常被称为卷积恒等式；其形式如下：

$$(x+y)^N P_l^{\lambda_1,\lambda_2}\left(\frac{y-x}{x+y}\right) = \sum_{k=0}^{N} W_{l,k} x^k y^{N-k} \ ,$$

*奥胡斯大学数学系，Ny Munkegade 118，DK-8000，奥胡斯 C 区，丹麦。 *email adress*: quentin.labriet@math.au.dk

†</style}兰斯数学实验室 LMR，UMR 9008，兰斯香槟-阿登大学，穆兰德拉乌斯 BP 1039，51100 兰斯，法国。 *email adress*: loic.poulain-dandecy@univ-reims.fr

and

$$(x+y+z)^{N-l}(x+y)^{l}P_{N-l}^{\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+2l}(\frac{x+y-z}{x+y+z})P_{l}^{\lambda_2,\lambda_1}(\frac{x-y}{x+y})$$
$$=\sum_{k=0}^{N}U_{l,k}(x+y+z)^{N-k}(y+z)^{k}P_{N-k}^{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2k}(\frac{y+z-x}{x+y+z})P_{k}^{\lambda_2,\lambda_3}(\frac{z-y}{y+z}),$$

其中 $P^{\alpha,\beta}$ 是雅可比多项式，而系数 $W_{l,k}$ (分别，$U_{l,k}$) 用 Hahn 多项式（分别用 Racah 多项式）表示。具体恒等式见正文中的定理 3.7 和定理 4.8。这些恒等式早已为人所知 [6, 14, 19, 22] 本文的目标是展示 Hahn 代数和 Racah 代数各自的显式表示，按照上述思路，这些表示可以推出相应的恒等式。

文献[14, 19] 中从李代数表示论角度对这些恒等式的阐释，与我们的方法密切相关。事实上，文献 [14, 19] 的作者将上述恒等式中出现的各种多项式解释为 sl_2 （或$su_{1,1}$）两个或三个 Verma 模的张量积某个模型中的向量，并利用已知的 Clebsch–Gordan 系数和 Racah 系数用 Hahn 多项式和 Racah 多项式表示的表达式推导这些恒等式。我们希望为此补充的是，对以上述多项式为特征向量的算子作出明确描述。

自然，这些算子将用与雅可比多项式相关的超几何算子来表示。值得关注的是，如何将超几何算子作明确组合，使上述雅可比多项式的特定乘积成为其特征向量。按照构造，这些算子将构成 Hahn 代数和 Racah 代数的表示。于是，卷积恒等式便可由上文讨论的关于这些代数的一般简单代数事实推出。因此，我们看到，用雅可比算子实现 Hahn 代数和 Racah 代数，正是卷积恒等式之上的代数表述。这为这些恒等式提供了一种替代方法。这种方法的一个优点是，它纯粹是代数性的，无需进行解析延拓即可处理复参数。

在利用雅可比算子构造出通常的 Racah 代数的一种实现后，我们现在继续研究所谓的高秩 Racah 代数。这些代数之于 n 重张量积的 sl_2-表示，正如通常的 Racah 代数之于情形 $n=3$；它们是近年来积极研究的主题（例如参见 [1, 3, 4, 5]）。高秩 Racah 代数与多元拉卡多项式有关，后者作为不同交换子代数 [1, 5, 17]的公共特征基之间的转移系数出现。我们所做的是，为高秩 Racah 代数提供若干种显式实现，其中每一种都将给定的交换子代数完全表示为雅可比算子的形式。这使我们能够显式构造每个交换子代数的特征向量，形式为若干雅可比多项式的乘积。因此，我们再次将这些代数构造视为对这些多项式出现原因的解释；这些多项式在 [16, 20] 中以 sl_2-表示论的方式构造并加以阐释。此外，这也提供了一种代数方法，用多元拉卡多项式来表达这些雅可比多项式乘积之间的恒等式。请注意，雅可比多项式的乘积也曾作为单纯形 [7, 15]上的正交多项式出现。

我们希望，本文中与高秩 Racah 代数相关的构造将有助于研究这些代数、它们的交换子代数以及相关的多元多项式（如 [1] 所示）；这一研究领域目前正蓬勃发展。作为这项工作的自然延续，我们提及 [14] 中的其他卷积恒等式，其中雅可比多项式被 Askey 方案中的其他多项式所取代。按照本文的思路，可以找到 Hahn 代数和 Racah 代数的相关代数实现。最后，当然还应研究本文的 q 版本，其中涉及量子群 $U_q(sl_2)$ 和 Askey–Wilson 代数 [2]，而非 Racah 代数。

致谢。作者谨向 N. Cramp´e 和 E. Koelink 致以诚挚谢意，感谢他们对本工作的关注。第一作者获得维隆基金会研究经费支持（资助编号：00025373）。第二作者获得法国国家研究署 AHA 项目 ANR-18-CE40-0001 以及法国国家科学研究中心国际研究项目 AAPT 的支持。

2 雅可比多项式与雅可比算子的记号

全文中，我们遵循 [13]。我们会说明何处为满足本文需要而对记号稍作调整。

记号。对于任意量 x 和任意非负整数 N，波赫哈默符号定义如下：

$$(x)_N := \prod_{i=0}^{N-1}(x+i) = x(x+1)\dots(x+N-1)\ .$$

超几何级数定义如下：

$${}_kF_l\left(\begin{matrix}a_1\,,\ \dots\ ,\ a_k\\ b_1\,,\ \dots\ ,\ b_l\end{matrix};x\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{(a_1)_n\dots(a_k)_n}{(b_1)_n\dots(b_l)_n}\frac{x^n}{n!}\ .$$

雅可比多项式。设 $\lambda,\lambda'\in\mathbb{C}$。雅可比多项式定义如下：

$$P_l^{\lambda,\lambda'}(x) = \frac{(\lambda)_l}{l!}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-l\,,\ l+\lambda+\lambda'-1\\ \lambda\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right)\ .$$

如 [13], 所示，更经典的参数化方式为 $\alpha=\lambda-1$ 和 $\beta=\lambda'-1$。雅可比多项式也可表示为：

$$P_l^{\lambda,\lambda'}(x) = \frac{1}{2^l}\sum_{s=0}^{l}(-1)^s\binom{l+\lambda-1}{l-s}\binom{l+\lambda'-1}{s}(1-x)^s(1+x)^{l-s}\ .$$

雅可比多项式满足以下微分方程：

$$l(l+\lambda+\lambda'-1)P_l^{\lambda,\lambda'}(x) = \Phi_x^{\lambda,\lambda'}P_l(x)\,,\qquad l\geq 0\ .$$

其中 $\Phi^{\lambda,\ \lambda'}_{x}$ 是雅可比算子：

$$\Phi_x^{\lambda,\lambda'} = (x^2-1)\partial_x^2 + \big(\lambda-\lambda'+(\lambda+\lambda')x\big)\partial_x\ , \tag{2.1}$$

其中 ∂_x^k 表示变量 x 的 k 阶导数。

3 Hahn 代数与雅可比多项式

在本 节中，我们固定一个正整数 N 以及满足以下条件的 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ ：

$$\lambda_1,\lambda_2\notin\{0,-1,\dots,-(N-1)\}\quad\text{and}\quad\lambda_1+\lambda_2\notin\{0,-1,\dots,-(2N-2)\}\ . \tag{3.1}$$

3.1 Hahn 多项式与 Hahn 代数

Hahn 多项式。Hahn 多项式为：

$$Q_k(x;\lambda_1,\lambda_2,N) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}-k\,,\ k+\lambda_1+\lambda_2-1\,,\ -x\\ \lambda_1\,,\ -N\end{matrix};1\right)\qquad\text{for } k=0,\dots,N.$$

更常用的参数，如 [13], 为 $\alpha = \lambda_1 - 1$ 和 $\beta = \lambda_2 - 1$。参数固定后，我们将简写为 $Q_k(x)$ 。Hahn 多项式满足以下差分关系：

$$k(k+\lambda_1+\lambda_2-1)Q_k(x) = B(x)Q_k(x+1) + M(x)Q_k(x) + D(x)Q_k(x-1)\,, \qquad k = 0, \dots, N\,,$$

其中

$$B(x) = (x-N)(x+\lambda_1), \qquad D(x) = x(x-\lambda_2-N), \qquad M(x) = -B(x) - D(x)\,.$$

它们还满足以下递推关系：

$$xQ_k(x) = A_k Q_{k+1}(x) + N_k Q_k(x) + C_k Q_{k-1}(x)\,, \qquad k = 0, \dots, N\,,$$

其中

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{(k-N)(k+\lambda_1)(k+\lambda_1+\lambda_2-1)}{(2k+\lambda_1+\lambda_2-1)(2k+\lambda_1+\lambda_2)}\,, \\ C_k = -\dfrac{k(k+\lambda_2-1)(k+\lambda_1+\lambda_2+N-1)}{(2k+\lambda_1+\lambda_2-2)(2k+\lambda_1+\lambda_2-1)}\,, \end{cases} \qquad N_k = -A_k - C_k\,.$$

条件（3.1）确保值 $\{A_k, C_{k+1}, B(k)\ D(k+1)\}_{k=0,\dots,N-1}$ 均有定义且非零。

定义 Hahn 多项式的以下取值和重归一化值，其中 $k, l = 0, \dots, N$：

$$Q_{k,l} = Q_k(l) \qquad \text{and} \qquad \tilde{Q}_{k,l} = \frac{B(0)\dots B(l-1)}{D(1)\dots D(l)} \frac{A_0 \dots A_{k-1}}{C_1 \dots C_k} Q_{k,l}\,.$$

˜将 $Q_{k、\,l}$ 和$Q_{k、\,l}$ 联系起来的公式可通过直接计算得到：

$$\begin{aligned} \frac{B(0)\dots B(l-1)}{D(1)\dots D(l)} &= \binom{N}{l} \frac{(\lambda_1)_l (\lambda_2)_{N-l}}{(\lambda_2)_N}\,, \\ \frac{A_0 \dots A_{k-1}}{C_1 \dots C_k} &= \binom{N}{k} \frac{(\lambda_1)_k (\lambda_1+\lambda_2)_N}{(\lambda_2)_k (\lambda_1+\lambda_2+k-1)_k (\lambda_1+\lambda_2+2k)_{N-k}}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hahn 代数。为构造 Hahn 代数（例如参见 [21, 23]），我们考虑作用于多项式上的以下两个算子：

$$X_{Hahn} = x \qquad \text{and} \qquad Y_{Hahn} = B(x)T_+ + M(x)\mathrm{Id} + D(x)T_-\,,$$

其中 x 表示乘以 x，而 $T_\pm f(x) = f(x \pm 1)$。Hahn 代数刻画了这两个算子之间的对易关系。

定义 3.1。Hahn 代数由满足以下关系的 X、Y 生成：

$$\begin{aligned} &[X, Y] = Z\,, \\ &[X, Z] = 2X^2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2N)X + Y - \lambda_1 N\,, \\ &[Y, Z] = -2\{X, Y\} - (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)X - (\lambda_1 - \lambda_2 - 2N)Y + \lambda_1(\lambda_1+\lambda_2-2)N\,. \end{aligned}$$

注意，第一个关系式将 Z 表示为 X 和 Y 的函数。根据构造，Hahn 代数由 Hahn 多项式导出的算子实现。事实上，经过直接计算可知，下式构成 Hahn 代数的一个表示

$$X \mapsto X_{Hahn} \qquad \text{and} \qquad Y \mapsto Y_{Hahn}\,.$$

Hahn 代数与转移系数。设 X、Y 是作用于一个 $(N+1)$ 维向量空间上的两个线性算子，使得：

$$Sp(X) = \{0, 1, \ldots, N\} \quad \text{and} \quad X, Y \text{ satisfy the Hahn algebra.}$$

这些假设足以推导出， X 与Y 的特征基之间的转移系数可用 Hahn 多项式表示。更确切地说，我们可以利用 Hahn 代数的关系推导出以下性质。

命题 3.2。我们可以找到两组基 $\{\tilde{v}_l\}_{l=0,\ldots,N}$ 和 $\{\tilde{w}_l\}_{l=0,\ldots,N}$，使得 X 和Y 的作用如下：

$$X\tilde{v}_l = l\tilde{v}_l \quad and \quad Y\tilde{v}_l = B(l-1)\tilde{v}_{l-1} + M(l)\tilde{v}_l + D(l+1)\tilde{v}_{l+1} \ ,$$

$$Y\tilde{w}_l = l(l+\lambda_1+\lambda_2-1)\tilde{w}_l \quad and \quad X\tilde{w}_l = C_l\tilde{w}_{l-1} + N_l\tilde{w}_l + A_l\tilde{w}_{l+1} \ .$$

此外，转移系数为：

$$\tilde{w}_l = \sum_{k=0}^{N} Q_{l,k}\tilde{v}_k \quad and \quad \tilde{v}_l = \Gamma^{-1}\sum_{k=0}^{N} \tilde{Q}_{k,l}\tilde{w}_k \ , \tag{3.3}$$

其中， Γ 是一个常数，其值为：

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{N} \frac{B(0)\ldots B(k-1)}{D(1)\ldots D(k)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{A_0\ldots A_{k-1}}{C_1\ldots C_k} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)_N}{(\lambda_2)_N} \ . \tag{3.4}$$

证明。 • 取 X 的一组特征基 $\{\tilde{v}_l\}_{l=0,\ldots,N}$，并写作

$$Y\tilde{v}_l = \sum_{i\geq 0} y_{i,l}\tilde{v}_i \ .$$

由 Hahn 代数中 X 与 Z 之间的交换关系可得，如果$i \notin \{l-1, l, l+1\}$，则$y_{i,l} = 0$；还可得$y_{l,l} = M(l)$。然后，由Y 与 Z之间的交换关系可得：

$$2(y_{l+1,l}y_{l,l+1} - y_{l-1,l}y_{l,l-1}) = -4ly_{l,l} - (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)l - (\lambda_1-\lambda_2-2N)y_{l,l} + \lambda_1(\lambda_1+\lambda_2-2)N \ .$$

这样递归地确定 l，便可得到 $y_{l+1,\,l}y_{l,\,l+1}$ 的唯一解；经验证，该解为 $B(l)D(l+1)$。注意，当 $l \in \{0, \ldots, N-1\}$ 时，该式始终不为零。因此，我们总可以对向量 $\tilde{v}_l$ 重新缩放（进行对角基变换），使得 $y_{l+1,\,l} = D(l+1)$ 且 $y_{l,\,l+1} = B(l)$。由此得到 Y 所需的作用。

• 然后我们根据式（$\{\tilde{w}_l\}_{i=0、\ldots、N}$）中的第一个公式定义 Y，并直接将 X 作用于其上。对于 Y 的作用，该结论可由直接应用 Hahn 多项式的差分方程得到，并利用 $B(N) = 0$。对于 X 的作用，该结论可由直接应用 Hahn 多项式的递推关系得到。

• 接下来，我们注意到，基 $\{\tilde{v}_l\}_{i=0,\ \ldots,\ N}$ 在满足 X 和 Y 的作用条件下，除一个整体因子外是唯一确定的。直接计算即可验证 X 和 Y 对以下向量的作用：

$$\tilde{v}'_l = \sum_{k=0}^{N} \tilde{Q}_{k,l} = \frac{B(0)\ldots B(l-1)}{D(1)\ldots D(l)} \sum_{k=0}^{N} Q_{k,l}\frac{A_0\ldots A_{k-1}}{C_1\ldots C_k}\tilde{w}_k \ ,$$

与条目 1 中的作用相同。对于 X 的作用，使用递推关系；对于 Y 的作用，则使用差分关系。由此得出，对于某个整体因子 Γ，有 $\tilde{v}_l = \Gamma^{-1}\tilde{v}'_l$。

为了得到 Γ 的第一个表达式，我们写出：

$$\tilde{w}_0 = \sum_{k=0}^{N} \tilde{v}_k = \Gamma^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{B(0)\dots B(k-1)}{D(1)\dots D(k)}\Big)\tilde{w}_0 + \dots \text{ (terms with } \tilde{w}_i,\ i>0) \dots .$$

我们得出：

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{N} \frac{B(0)\dots B(k)}{D(1)\dots D(k)} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(\lambda_1)_k (\lambda_2)_{N-k}}{(\lambda_2)_N} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)_N}{(\lambda_2)_N} .$$

我们使用了（3.2），最后一个等式是一个经典的组合恒等式。最后，对于 Γ 的第二个表达式，我们现在从 $\tilde{v}_0$ 出发，按上述方法进行。 □

注 3.3。 依次应用（3.3）中的两个关系（先按一种顺序，再按另一种顺序），即可得到 Hahn 多项式的正交关系：

$$\sum_{k=0}^{N} Q_{k,l}\tilde{Q}_{k,l'} = \delta_{l,l'}\Gamma \qquad \text{and} \qquad \sum_{l=0}^{N} Q_{k,l}\tilde{Q}_{k',l} = \delta_{k,k'}\Gamma$$

对于任意 k、k'、l、$l' = 0$、.....、N：

▲

注意，（ Γ 的公式涉及系数 A_i、C_i （3.4）以及（3.2），由此可得一个非平凡的等式：

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(\lambda_1)_k}{(\lambda_2)_k(\lambda_1+\lambda_2+k-1)_k(\lambda_1+\lambda_2+2k)_{N-k}} = \frac{1}{(\lambda_2)_N} . \tag{3.5}$$

3.2 Hahn 代数在 $U(sl_2) \otimes U(sl_2)$ 中的实现

取 H、E、F 为满足以下关系的李代数 sl_2 的生成元：

$$[H,E] = 2E , \quad [H,F] = -2F , \quad [E,F] = H .$$

$U(sl_2)$ 到 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 的对角嵌入是由生成元上的如下映射定义的代数同态：

$$\delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x \quad \text{for } x \in \{H,E,F\}.$$

生成 $U(sl_2)$ 中心的卡西米尔元为：

$$C = \frac{H^2+2H}{4} + FE .$$

为有效确定 Hahn 代数及其参数，我们现在固定 λ_1、$\lambda_2 \in \mathbb{C}$。回忆一下，在权为 λ 的最低权模中，卡西米尔元 C 等于标量 $\frac{1}{4}\lambda(\lambda-2)$。因此，我们将在 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 的商代数中工作，其中以下中心元相应地取定为：

$$C\otimes 1 = \frac{\lambda_1(\lambda_1-2)}{4} \quad \text{and} \quad 1\otimes C = \frac{\lambda_2(\lambda_2-2)}{4} .$$

等价地，这是 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 关于表示 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}$ 的核所得的商代数，其中 V_{λ_i} 是最低权为 λ_i 的 Verma 模。换言之，我们直接着眼于在权为 λ_1 和 λ_2 的最低权模的张量积中工作，例如 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}$。

最后，我们定义 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 中的以下元素：

$$X = \frac{H\otimes 1 - \lambda_1}{2} , \qquad Y = \delta(C) - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)}{4} , \qquad h_{12} = \frac{\delta(H)-(\lambda_1+\lambda_2)}{2} . \tag{3.6}$$

这里所作的选择旨在以最直接、最清晰的方式还原上述定义的 Hahn 代数。事实上，在 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 的上述特化情形中可以得到 Hahn 代数。直接计算可得：

命题 3.4. 由 X、Y 和 h_{12} 生成的子代数实现了定义3.1 中的 Hahn 代数，其中 N 替换为 h_{12}。

注意，此处 h_{12} 是中心元（它与 X 和 Y对易），而 N 在 Hahn 代数中被视为参数。当我们考虑一个表示时（这正是我们接下来要做的），若其中 h_{12} 可对角化且具有正整数特征值，并且我们将范围限制在特征值 N对应的特征子空间上，那么 Definition 3.1 所定义的真正的 Hahn 代数便得以实现，前一小节的讨论也适用。

3.3 Hahn 代数、雅可比多项式与卷积恒等式

多项式空间上的 Verma 模实现。最低权为 λ 的 Verma 模 V_λ 在单变量 x 上的多项式空间 $Pol(x)$中实现如下：

$$H \mapsto \lambda + 2x\partial_x\,, \qquad E \mapsto x\,, \qquad F \mapsto -x\partial_x^2 - \lambda\partial_x\ . \tag{3.7}$$

注意，我们用 x 表示乘以 x，用 λ 表示乘以标量 λ。从现在起，我们始终采用类似的记法。

接下来考虑张量积 $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$，它实现在空间 $Pol(x) \otimes Pol(y) = Pol(x,y)$上。代数 $U(sl_2) \otimes U(sl_2)$作用在这个空间上，具体而言，元素 $H\otimes 1$、$E\otimes 1$、$F\otimes 1$按照上述公式作用，而元素 $1\otimes H$、$1\otimes E$、$1\otimes F$则按照将 x替换为 y后的相同公式作用。当然，我们有：

$$\begin{aligned} H\otimes 1 + 1\otimes H &\mapsto \lambda_1+\lambda_2 + 2x\partial_x + 2y\partial_y\ , \\ E\otimes 1 + 1\otimes E &\mapsto x+y\ , \\ F\otimes 1 + 1\otimes F &\mapsto -x\partial_x^2 - y\partial_y^2 - \lambda_1\partial_x - \lambda_2\partial_y\ . \end{aligned} \tag{3.8}$$

变量变换。在此模型中，多项式 $x^n y^m$ 是 $H\otimes 1$ 和 $1\otimes H$的特征向量。要寻找对角 Casimir 算子 $\delta(C)$的特征向量，采用另一种模型会更方便，因为在该模型中，它将具有熟悉的表达式。为此，我们使用坐标变换

$$(t,v) = (x+y, \frac{y-x}{x+y}) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (\frac{t(1-v)}{2}, \frac{t(1+v)}{2})\ . \tag{3.9}$$

在考虑 $SL_2(\mathbb{R})$ 的两个全纯离散级数表示的张量积时，这种变量变换可从对称锥的角度作几何解释（见 [15]）。请注意，在此模型中，表示空间是关于 t 和 tv的多项式空间。

在这个新模型中，对角嵌入 $U(sl_2$的各个元素作用如下，其中显式出现了雅可比算子 $\Phi^{\lambda_1,\ \lambda_2}_{v}$，见第 2节。

命题 3.5。我们有：

$$\begin{aligned} H\otimes 1 + 1\otimes H &\mapsto \lambda_1+\lambda_2 + 2t\partial_t\ , \\ E\otimes 1 + 1\otimes E &\mapsto t\ , \\ F\otimes 1 + 1\otimes F &\mapsto -t\partial_t^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\partial_t + t^{-1}\Phi_v^{\lambda_1,\lambda_2}\ , \end{aligned} \tag{3.10}$$

and

$$\delta(C) \mapsto \frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)}{4} + \Phi_v^{\lambda_1,\lambda_2}\ . \tag{3.11}$$

证明。公式（3.10）由（3.8）应用变量变换（x，y）$\to$（t，v）直接得到，该变换见（3.9）。这些都是简单直接的计算，所用到的是：

$$\partial_x = \partial_t - \frac{1+v}{t}\partial_v \quad \text{and} \quad \partial_y = \partial_t + \frac{1-v}{t}\partial_v\ .$$

于是很容易推导出 $\delta(C)$的公式，因为前面公式中仅含 t 的部分合起来构成标量$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)}{4}$（这是单变量中的经典计算）。唯~~一的附加项来自~~ $\delta(F)\delta(E)$，并立即得到 $\Phi^{\lambda_1,\ \lambda_2}_{v}$。

□

当然，关键在于现在卡西米尔算子是一个普通微分算子，只含关于 v的导数；而且这是一个我们非常熟悉并且十分了解的微分算子。

注 3.6。 第三个公式中出现 t^{-1} （3.10）并无问题，因为我们记得表示空间是由 t 和 tv 中的多项式构成的空间，并且注意到算子 $\Phi^{\lambda_1,\ \lambda_2}_v$作用在不含 v 的多项式上时为 0。因此，上述命题中的公式确实给出了表示空间上的作用；这正如预期，因为我们一开始就是从一个表示出发的。本文后续的其他公式也适用类似的说明，但我们不再逐一指出。

▲

特征向量与卷积恒等式。回想一下，在 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 中实现 Hahn 代数的元素为：

$$X = \frac{H\otimes 1-\lambda_1}{2}\,,\qquad Y=\delta(C)-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)}{4}\,,\qquad h_{12}=\frac{\delta(H)-(\lambda_1+\lambda_2)}{2}\,.$$

它们在表示 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}$ 中的作用为：

$$\begin{aligned} X &\mapsto x\partial_x\,,\\ h_{12} &\mapsto x\partial_x+y\partial_y=t\partial_t\,,\\ Y &\mapsto \Phi_v^{\lambda_1,\lambda_2}\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中，我们使用坐标 $(x,\ y)$ 或坐标 $(t,\ v)$（或者在 h_{12} 时同时使用两者），它们通过（3.9）相关联；我们使用命题 3.5 中的公式。

考虑以下两族向量：

$$v_l=x^l y^{N-l}\quad\text{and}\qquad w_l=t^N P_l^{\lambda_1,\lambda_2}(v)=(x+y)^N P_l^{\lambda_1,\lambda_2}\Big(\frac{y-x}{x+y}\Big)\,,\qquad l=0,1,\dots,N\,.$$

我们立即看到，上述两族向量都是 h_{12} 的特征向量，对应的特征值为 N；它们也是两个算子 X 和 Y 的特征向量，即：

$$Xv_l=lv_l\quad\text{and}\quad Yw_l=l(l+\lambda_1+\lambda_2-1)w_l\,.$$

根据命题 3.2中讨论的 Hahn 代数的一般性质，我们可以相当直接地得到以下恒等式。

定理 3.7. 对于 $l=0,\ 1,\dots,N$，有：

$$w_l=\frac{(\lambda_1)_l}{l!}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}Q_{l,k}v_k\,,$$

$$v_l=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{k!(\lambda_1)_l(\lambda_2)_{N-l}}{(\lambda_2)_k(\lambda_1+\lambda_2+k-1)_k(\lambda_1+\lambda_2+2k)_{N-k}}Q_{k,l}w_k\,,$$

这里回顾一下，$Q_{k,\ l}={}_3F_2$Å $-k,\ k+\lambda_1+\lambda_2-1,$
$\lambda_1\quad -N$,; 1ã 。

证明。 由于 $Xv_l=lv_l$ 对于 $l=0,$ ....., $N,$ 命题 3.2 的结论适用。因此，每个特征向量 v_l的 X（分别地，每个特征向量 w_l 的 Y）都必与命题 $\tilde{v}_l$（分别地，$\tilde{w}_l$）中得到的向量成比例 $\tilde{v}_l$ 3.2。令 $v_l=\alpha_l\tilde{v}_l$ 且 $w_l=\beta_l\tilde{w}_l$。现在，涉及 Hahn 系数的等式（3.3）写作：

$$w_l=\beta_l\sum_{k=0}^{N}Q_{l,k}\alpha_k^{-1}v_k\quad\text{and}\quad v_l=\alpha_l\Gamma^{-1}\sum_{k=0}^{N}\beta_k^{-1}\tilde{Q}_{k,l}w_k\,.$$

接下来只需计算该关系中出现的未知系数 α 和 β。首先取 $l=0$，并利用 $w_0=(x+y)^N$，得到 $\beta_0\alpha_k^{-1}=\binom{N}{k}$。然后令 $x=0$（l 任意），并利用此时的 $w_l=P_l(1)$，得到 $P_l(1)=\beta_l\beta_0^{-1}$。利用 $P_l(1)=(\lambda_1)_l/l!$，即可得到第一个等式。

对于第二组关系，我们已经知道 $\alpha_l\beta_k^{-1}=\left(\binom{N}{l}(\lambda_1)_k/k!\right)^{-1}$。因此，只需运用简单的代数运算即可得到所述等式：使用显式公式（3.4）计算 Γ 和 $\tilde{}$，并使用关系式（3.2）将 $Q_{k,l}$ 表示为 $Q_{k,l}$。 □

注 3.8。从 sl_2 的表示论角度来看，对于给定的 $l\geq 0$，多项式 $\{t^{l+n}P_l^{\lambda_1,\lambda_2}(v)\}_{n\geq 0}$ 构成 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}$ 的一个直和项的基，该直和项与 $V_{\lambda_1+\lambda_2+2l}$ 同构。事实上，这证明了在满足参数条件（3.1）λ_1、λ_2 时，此类直和项的存在性。如果这些条件对任意正整数 N 都成立，我们便显式地实现了张量积的分解：

$$V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}=\bigoplus_{l\geq 0}V_{\lambda_1+\lambda_2+2l}\ .$$

在每个直和项 $V_{\lambda_1+\lambda_2+2l}$ 中，最低权向量为 $t^lP^{\lambda_1,\lambda_2}_l(v)$。 ▲

3.4 Jacobi 代数中的 Hahn 代数

由上可知，我们可以仅利用作用于变量 v 的算子来实现 Hahn 代数。为此，注意到：

$$H\otimes 1\mapsto 2x\partial_x+\lambda_2=t\partial_t(1-v)-(1-v)(1+v)\partial_v+\lambda_2\ .$$

由此得到以下结果。

命题 3.9。以下是 Hahn 代数的一个表示：

$$X\mapsto\frac{1}{2}N(1-v)-\frac{(1-v)(1+v)}{2}\partial_v\quad\text{and}\quad Y\mapsto\Phi_v^{\lambda_1,\lambda_2}\ .$$

证明。由目前所得结果可立即得出这一结论。注意，这里的参数 N（即抽象实现中中心元 h_{12} 的像）由算子 $t\partial_t$ 给出。 □

注 3.10. 上述命题也可以不借助 sl_2 的表示论以及 Hahn 代数在 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 中的实现而直接验证。这一计算可以在有时称为 Jacobi 代数的代数中进行（由 v 和 $\Phi^{\lambda_1,\lambda_2}_v$ 生成）。关于这类计算，参见 [9]。 ▲

4 Racah代数与雅可比多项式

本节中，我们固定一个正整数 N 以及满足以下条件的 λ_1、λ_2、$\lambda_3\in\mathbb{C}$：

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\notin\{0,-1,\dots,-(N-1)\}\quad\text{and}\quad\lambda_1+\lambda_2,\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\notin\{0,-1,\dots,-(2N-2)\}\ .\ (4.1)$$

4.1 Racah代数

Racah 多项式。Racah多项式为：

$$R_k(\mu(x))={}_4F_3\left(\begin{matrix}-k\ ,\ k+\lambda_2+\lambda_3-1\ ,\ -x\ ,\ x+\lambda_1+\lambda_2-1\\ \lambda_2\ ,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1\ ,\ -N\end{matrix};1\right)\qquad\text{for } k=0,\dots,N,$$

其中 $\mu(x) = x(x+\lambda_1+\lambda_2-1)$。参数固定后，记号中便不再标明。参数与文献 α, β, γ, δ中更常用的参数 [13] 之间的关系为:

$$\alpha = \lambda_2 - 1\,, \quad \beta = \lambda_3 - 1\,, \quad \delta = \lambda_1 + \lambda_2 + N - 1\,, \quad \gamma = -N - 1\,.$$

Racah多项式满足差分方程:

$$k(k+\lambda_2+\lambda_3-1)R_k(\mu(x)) = B(x)R_k(\mu(x+1)) + M(x)R_k(\mu(x)) + D(x)R_k(\mu(x-1))\,,$$

其中

$$B(x) = \frac{(x-N)(x+\lambda_2)(x+\lambda_1+\lambda_2-1)(x+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)}{(2x+\lambda_1+\lambda_2-1)(2x+\lambda_1+\lambda_2)}\,,$$

$$D(x) = \frac{x(x+\lambda_1-1)(x-\lambda_3-N)(x+\lambda_1+\lambda_2+N-1)}{(2x+\lambda_1+\lambda_2-2)(2x+\lambda_1+\lambda_2-1)}\,,$$

$$M(x) = -B(x) - D(x)\,.$$

它们还满足递推关系:

$$x(x+\lambda_1+\lambda_2-1)R_k(\mu(x)) = A_k R_{k+1}(\mu(x)) + N_k R_k(\mu(x)) + C_k R_{k-1}(\mu(x))\,,$$

其中

$$A_k = B(k)|_{\lambda_1\leftrightarrow\lambda_3}\,, \quad C_k = D(k)|_{\lambda_1\leftrightarrow\lambda_3}\,, \quad N_k = -A_k - C_k\,.$$

条件（4.1）确保值 $\{A_k, C_{k+1}, B(k)\ D(k+1)\}_{k=0,\dots,N-1}$ 均有定义且非零。

定义以下 Racah多项式的值和重归一化值:

$$R_{k,l} = R_k(\lambda(l)) \quad \text{and} \quad \tilde{R}_{k,l} = \frac{B(0)\dots B(l-1)}{D(1)\dots D(l)}\frac{A_0\dots A_{k-1}}{C_1\dots C_k}R_{k,l} \qquad \forall k,l = 0,\dots,N\,. \tag{4.2}$$

˜将 $R_{k,l}$ 与 $R_{k,l}$ 联系起来的公式可通过直接计算得到:

$$\begin{aligned}
&\frac{B(0)\dots B(l-1)}{D(1)\dots D(l)} = \binom{N}{l}\frac{(\lambda_2)_l(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)_l(\lambda_1+\lambda_2)_N}{(\lambda_1)_l(\lambda_3+N-l)_l(\lambda_1+\lambda_2+l-1)_l(\lambda_1+\lambda_2+2l)_{N-l}}\,,\\
&\frac{A_0\dots A_{k-1}}{C_1\dots C_k} = \frac{B(0)\dots B(k-1)}{D(1)\dots D(k)}|_{\lambda_1\leftrightarrow\lambda_3}\,.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Racah代数。为构造 Racah代数，我们考虑作用于多项式的以下两个算子:

$$X_{Racah} = x(x+\lambda_1+\lambda_2-1) \quad \text{and} \quad Y_{Racah} = B(x)T_+ + M(x)\mathrm{Id} + D(x)T_-\,,$$

其中，x 仅表示乘以 x，而 $T_\pm f(x) = f(x\pm1)$。Racah代数刻画了这两个算子 [10, 11] 之间的交换关系。

定义 4.1。Racah代数由满足以下条件的 X, Y 生成:

$$\begin{aligned}
&[X,Y] = Z\,,\\
&[X,Z] = 2X^2 + 2\{X,Y\} + a_1X + a_2Y + a_3\,,\\
&[Y,Z] = -2Y^2 - 2\{X,Y\} - a_1Y - b_2X - b_3\,,
\end{aligned}$$

其中

$$a_1 = (\lambda_2 - 2N)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1) - \lambda_2(N+1) - \lambda_1\lambda_3\,,$$

$$a_2 = (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)\,, \quad a_3 = -\lambda_2N(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)(\lambda_1+\lambda_2-2)\,,$$

$$b_2 = (\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3-2)\,, \quad b_3 = -\lambda_2N(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)(\lambda_2+\lambda_3-2)\,.$$

注意，第一个关系式用 X 和 Y定义了 Z。根据构造，Racah代数由来自 Racah 多项式的算子实现；直接计算可知，下式给出了 Racah代数的一个表示:

$$X \mapsto X_{Racah} \quad \text{and} \quad Y \mapsto Y_{Racah}\,.$$

Racah代数与转移系数。设 X、Y是作用于一个 $(N+1)$ 维向量空间上的两个线性算子，使得：

$$Sp(X) = \{l(l+\lambda_1+\lambda_2-1)\}_{l=0,\dots,N} \quad \text{and} \quad X, Y \text{ satisfy the Racah algebra.}$$

这些假设足以推导出， X 和Y 的特征基之间的转移系数可用 Racah 多项式表示。更确切地说，我们可以利用 Racah代数的关系推导出以下性质。

命题 4.2。我们可以找到两组基 $\{\tilde{v}_l\}_{i=0,\dots,N}$ 和 $\{\tilde{w}_l\}_{i=0,\dots,N}$ ，使得 X 和Y 的作用如下：

$$X\tilde{v}_l = l(l+\lambda_1+\lambda_2-1)\tilde{v}_l \quad and \quad Y\tilde{v}_l = B(l-1)\tilde{v}_{l-1} + M(l)\tilde{v}_l + D(l+1)\tilde{v}_{l+1} \ ,$$

$$Y\tilde{w}_l = l(l+\lambda_2+\lambda_3-1)\tilde{w}_l \quad and \quad X\tilde{w}_l = C_l\tilde{w}_{l-1} + N_l\tilde{w}_l + A_l\tilde{w}_{l+1} \ .$$

此外，转移系数为：

$$\tilde{w}_l = \sum_{k=0}^{N} R_{l,k}\tilde{v}_k \quad and \quad \tilde{v}_l = \Gamma^{-1}\sum_{k=0}^{N} \tilde{R}_{k,l}\tilde{w}_k \ , \tag{4.4}$$

其中， Γ 是由下式给出的常数：

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{N} \frac{B(0)\dots B(k-1)}{D(1)\dots D(k)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{A_0\dots A_{k-1}}{C_1\dots C_k} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)_N(\lambda_2+\lambda_3)_N}{(\lambda_1)_N(\lambda_3)_N} \ .$$

证明。 证明过程与 Hahn 代数的命题 3.2 完全相同，只有最后关于 Γ的等式除外。与备注 3.3中一样，我们可以依次应用（4.4）中的两个关系，从而推导出 Racah 多项式的正交关系：

$$\sum_{k=0}^{N} R_{k,l}\tilde{R}_{k,l'} = \delta_{l,l'}\Gamma \quad \text{and} \quad \sum_{l=0}^{N} R_{k,l}\tilde{R}_{k',l} = \delta_{k,k'}\Gamma \ .$$

Γ 的公式因此可在[13]中找到。 □

注意，涉及系数 Γ 的公式 A_i， C_i 与（4.3）结合后，导出一个非平凡等式，它推广了 Hahn 情形中的等式（3.5）：

$$\sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} \frac{(\lambda_2)_l(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)_l}{(\lambda_1)_l(\lambda_3+N-l)_l(\lambda_1+\lambda_2+l-1)_l(\lambda_1+\lambda_2+2l)_{N-l}} = \frac{(\lambda_2+\lambda_3)_N}{(\lambda_1)_N(\lambda_3)_N} \ .$$

注 4.3。 两个算子 X 和 Y 构成一个 Leonard 对 [18], ，也就是说，每个算子在另一个算子的特征基下都是三对角的。这在 Hahn 情形的命题 3.2中也是如此。关于 Racah 代数表示的、与命题 4.2 精神相近的更一般结果，见 [10, 11]。我们只陈述了所需的版本，即从一开始就假设已知 X的谱。 ▲

4.2 在 $U(sl_2)^{\otimes 3}$ 中实现 Racah代数。

我们需要 C 在 $U(sl_2)^{\otimes 3}$ 中的若干嵌入。更多一般的中间 Casimir 元素定义于下一节，它们位于 $U(sl_2)$ 的 n 重张量积中，以下是其中的特例：

$$C_{12} = \delta(C)\otimes 1 \ , \qquad C_{23} = 1\otimes\delta(C) \qquad \text{and} \qquad C_{123} = (\delta\otimes \mathrm{Id})\circ\delta(C) \ .$$

由于 $C\otimes 1$ 是 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 中的中心元，它尤其与 $\delta(C)$ 对易；应用 $\delta\otimes \mathrm{Id}$ 可得 C_{123} 与 C_{12} 对易。类似地可证明，C_{123} 也与 C_{23} 对易。

为了高效地识别 Racah代数，我们沿用上一节处理 Hahn 代数的方法，并考虑 $U(sl_2)^{\otimes 3}$ 的商代数，其中中心元取以下特殊值：

$$C\otimes 1\otimes 1=\frac{\lambda_1(\lambda_1-2)}{4}\,,\quad 1\otimes C\otimes 1=\frac{\lambda_2(\lambda_2-2)}{4}\quad\text{and}\quad 1\otimes 1\otimes C=\frac{\lambda_3(\lambda_3-2)}{4}\,.$$

我们定义 $U(sl_2)^{\otimes 3}$ 的以下元素：

$$\begin{gathered}X=C_{12}-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)}{4}\,,\qquad Y=C_{23}-\frac{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3-2)}{4}\,,\\ C'_{123}=C_{123}-\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)}{4}\,.\end{gathered}\tag{4.5}$$

这里所作的选择是为了以最直接、最清晰的方式得到上述表述的 Racah代数。事实上，在 $U(sl_2)^{\otimes 3}$ 的上述特殊化中可以找到 Racah代数。经过直接且经典的计算可得：

命题 4.4。由 X、Y 和 C'_{123} 生成的子代数实现了定义*4.1* 中的 Racah代数，其中 C'_{123} 替换如下：

$$C'_{123}=N(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)\,.\tag{4.6}$$

注意，C'_{123} 是一个中心元（它与 X 和 Y对易），因此我们可以将其视为一个参数。由此可见，上述命题中的公式实际上是一次重新参数化。当然，在我们将要考虑的表示中，元素 C'_{123} 将是可对角化的，其特征值由上述公式给出，其中 N 取正整数值。换言之，上述命题指出，定义 4.1 中的真正 Racah代数实现为作用在 C'_{123} 的特征子空间上，其特征值由上述公式给出，其中正整数 N。注意，当 C'_{123} 的特征值如命题所述时，这对应于总Casimir元的以下（更易识别的）取值 C_{123}：

$$C_{123}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2N)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2N-2)}{4}\,.$$

4.3 Racah 代数、雅可比多项式与卷积恒等式

三个最低权 Verma 模的张量积 sl_2。我们沿用上一节中公式（V_λ 3.7）给出的最低权 λ Verma 模在多项式上的实现。于是，张量积 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_3}$实现在空间 $Pol(x,\ y,\ z)$ 上。代数 $U(sl_2)^{\otimes 3}$作用于该空间，其中每个副本分别作用于变量 x，y，z。显然，sl_2 到 $U(sl_2)^{\otimes 3}$ 的对角嵌入作用如下：

$$\begin{aligned}H\otimes 1\otimes 1+1\otimes H\otimes 1+1\otimes 1\otimes H &\mapsto \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2x\partial_x+2y\partial_y+2z\partial_z\,,\\ E\otimes 1\otimes 1+1\otimes E\otimes 1+1\otimes 1\otimes E &\mapsto x+y+z\,,\\ F\otimes 1\otimes 1+1\otimes F\otimes 1+1\otimes 1\otimes F &\mapsto -x\partial_x^2-y\partial_y^2-z\partial_z^2-\lambda_1\partial_x-\lambda_2\partial_y-\lambda_3\partial_z\,.\end{aligned}\tag{4.7}$$

变量变换。与 Hahn 代数的情形一样，为了自然地找到实现 Racah代数的元素的特征向量，我们需要改变模型。事实证明，根据我们想要对角化的元素不同，我们需要采用不同的变量变换。我们使用以下坐标变换

$$(t,u_1,u_2)=(x+y+z,\ \frac{y-x}{x+y},\ \frac{z-(x+y)}{x+y+z})\,.\tag{4.8}$$

$$(t, v_1, v_2) = (x + y + z,\ \frac{z - y}{y + z},\ \frac{(y + z) - x}{x + y + z}) \ . \tag{4.9}$$

注意， x、 y、 z中的多项式空间分别变为t、 tu_2、 $tu_1(1 - u_2)$中的多项式空间，以及 t、 tv_2、 $tv_1(1 + v_2)$中的多项式空间。

借助这些变量变换，我们可以用各种雅可比算子表示 Racah代数的每个元素 $\Phi^{\lambda,\ {}_v{}^{\lambda'}}$ 来自第 2节。

命题 4.5。使用第一组变量（t, u_1, u_2），我们有：

$$X \mapsto \Phi_{u_1}^{\lambda_1,\lambda_2}, \qquad C'_{123} \mapsto \Phi_{u_2}^{\lambda_1+\lambda_2,\lambda_3} + \frac{2}{1 - u_2}\Phi_{u_1}^{\lambda_1,\lambda_2} \ .$$

使用第二组变量（t, v_1, v_2），我们有：

$$Y \mapsto \Phi_{v_1}^{\lambda_2,\lambda_3}, \qquad C'_{123} \mapsto \Phi_{v_2}^{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3} + \frac{2}{1 + v_2}\Phi_{v_1}^{\lambda_2,\lambda_3} \ .$$

证明。我们分两步进行第一次变量变换。先进行第一步，将（x, y）替换为 $t_1 = x + y$ 和 $u_1 = \frac{y-x}{x+y}$（并保持 z 不变）。在此阶段，我们已根据命题 3.5 中关于两个变量的计算得知，算子 X 变为 $\Phi^{\lambda_1,\ {}_{u_1}{}^{\lambda_2}}$。这些计算还表明，将 sl_2 对角嵌入到 $U(sl_2)^{\otimes 3}$ 后，其作用如下：

$$\begin{aligned}
H \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes H \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes H &\mapsto \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2t_1\partial_{t_1} + 2z\partial_z \ , \\
E \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes E \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes E &\mapsto t_1 + z \ , \\
F \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes F \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes F &\mapsto -t_1\partial_{t_1}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\partial_{t_1} + t_1^{-1}\Phi_{u_1}^{\lambda_1,\lambda_2} - z\partial_z^2 - \lambda_3\partial_z \ .
\end{aligned}$$

现在我们进行变量变换的第二步，将（t_1, z）替换为 $t = t_1 + z$ 和$u_2 = \frac{z-t_1}{t_1+z}$ （不改变 u_1）。我们看到，与之前相同的两个变量计算给出：

$$\begin{aligned}
H \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes H \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes H &\mapsto \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2t\partial_t \ , \\
E \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes E \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes E &\mapsto t \ , \\
F \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes F \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes F &\mapsto -t\partial_t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\partial_t + t_1^{-1}\Phi_{u_1}^{\lambda_1,\lambda_2} + t^{-1}\Phi_{u_2}^{\lambda_1+\lambda_2,\lambda_3} \ ,
\end{aligned}$$

这里我们没有修改 F 的作用中 $t_1^{-1}\Phi^{\lambda_1,\ {}_{u_1}{}^{\lambda_2}}$ 这一项。要真正完成变量变换，我们需要在这一项中用新变量替换 t_1。公式为 $t_1 = \frac{1}{2}t(1 - u_2)$。根据上述 H、 E、 F 的作用公式，可以直接计算出 C_{123} 的像。具体而言，只含 t 的项根据单变量中熟知的计算，给出标量 $\frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2)$。这正是我们从 C_{123} 中减去以得到 C'_{123} 的部分。其余各项（在 E 和 F 的像的乘积中）则给出所述的 C'_{123} 公式。

另一个变量变换的推理完全类似，首先进行变量变换，将 (y, z) 替换为 $t_1 = y + z$ 和 $v_1 = \frac{z-y}{y+z}$（且不涉及 x）。我们略去与上述完全相同的细节。结果中唯一的区别是 v_2 前的符号；这是因为现在有 $t_1 = \frac{1}{2}t(1 + v_2)$。 □

Racah代数的特征向量。现在我们已经得到了算子 X、 Y 和 C'_{123} 关于雅可比算子的显式形式，便可以寻找它们的特征向量；自然，这些特征向量将用雅可比多项式表示。回想一下，我们一方面寻找 X 和 C'_{123} 的公共特征向量，另一方面寻找 Y 和 C'_{123} 的公共特征向量。

利用（4.8）和（4.9）中的新变量，我们定义以下两个多项式族：

$$\begin{aligned}
v_l &= \frac{t^N}{2^l}(1 - u_2)^l P_{N-l}^{\lambda_1+\lambda_2+2l,\lambda_3}(u_2)P_l^{\lambda_1,\lambda_2}(u_1) \ , \\
w_l &= \frac{t^N}{2^l}(1 + v_2)^l P_{N-l}^{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2l}(v_2)P_l^{\lambda_2,\lambda_3}(v_1) \ ,
\end{aligned} \qquad l = 0, 1, \ldots, N \ . \tag{4.10}$$

或者用原变量 x、y、z 表示:

$$\begin{aligned} v_l &= (x+y+z)^{N-l}(x+y)^l P_{N-l}^{\lambda_1+\lambda_2+2l,\lambda_3}\left(\tfrac{z-(x+y)}{x+y+z}\right) P_l^{\lambda_1,\lambda_2}\left(\tfrac{y-x}{x+y}\right), \\ w_l &= (x+y+z)^{N-l}(y+z)^l P_{N-l}^{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2l}\left(\tfrac{y+z-x}{x+y+z}\right) P_l^{\lambda_2,\lambda_3}\left(\tfrac{z-y}{y+z}\right), \end{aligned} \qquad l=0,1,\dots,N\,. \tag{4.11}$$

命题 4.6. 向量 v_l 和 w_l 是满足 Racah代数的算子 X 和 Y 的特征向量:

$$Xv_l = l(l+\lambda_1+\lambda_2-1)v_l \quad \textit{and} \quad Yw_l = l(l+\lambda_2+\lambda_3-1)w_l\ .$$

此外，两组向量 $\{v_l\}_{l=0,\dots,N}$ 和 $\{w_l\}_{l=0,\dots,N}$ 都是 C'_{123}的特征向量:

$$C'_{123}v_l = N(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)v_l \quad \textit{and} \quad C'_{123}w_l = N(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)w_l\ .$$

证明。 根据命题 4.5，在新变量中，算子 X 的作用形式为 $\Phi^{\lambda_1}{}_{,u_1}{}^{\lambda_2}$。由此立即可知，向量 v_l 是对应特征值下算子 X 的特征向量。

现在，为了证明向量 v_l 也是 C'_{123}的特征向量，我们来看 C'_{123}用命题 4.5中给出的新变量表示的形式。我们需要以下这个简单的引理。

引理 4.7. 作为作用于 u中的多项式上的算子，对于任意 $l\geq 0$，有:

$$\Phi_u^{\alpha,\beta}\circ(1-u)^l = (1-u)^l\circ\left(\Phi_u^{\alpha+2l,\beta} + l\beta - l(l+\alpha-1)\frac{1+u}{1-u}\right)\ .$$

引理的证明。通过应用莱布尼茨法则直接计算即可。从 $\Phi^{\alpha}{}_{,u}{}^{\beta}\circ(1-u)^l$ 出发，并将导数移过 $(1-u)^l$，得到:

$$(1-u)^l\Phi_u^{\alpha,\beta} + (u^2-1)\Big(l(l-1)(1-u)^{l-2} - 2l(1-u)^{l-1}\partial_u\Big) - l(1-u)^{l-1}\Big(\alpha-\beta+(\alpha+\beta)u\Big)\ .$$

含有 ∂_u 的项可以进入雅可比算子，因为 $\Phi^{\alpha}{}_{,u}{}^{\beta} + 2l(1+u)\partial_u = \Phi^{\alpha+2l}{}_{,u}{}^{\beta}$。$\partial_u$ 中次数为 0 的其余项按所述方式组合。 □

现在利用这个引理，很容易将算子 $\Phi^{\lambda_1+\lambda_2}{}_{,u_2}{}^{\lambda_3}$作用于 v_l。我们得到:

$$\Phi_{u_2}^{\lambda_1+\lambda_2,\lambda_3}(v_l) = (N-l)(N+l+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)v_l + l\lambda_3 v_l - l(l+\lambda_1+\lambda_2-1)\frac{1+u_2}{1-u_2}v_l\ .$$

C'_{123} 作用的其余部分立即给出:

$$\frac{2}{1-u_2}\Phi_{u_1}^{\lambda_1,\lambda_2}(v_l) = l(l+\lambda_1+\lambda_2-1)\frac{2}{1-u_2}v_l\ .$$

将这两个公式相加，我们发现只剩下 $N(N+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)v_l$，如所述。

关于向量 w_l 的公式的证明完全类似，只需使用 $\Phi^{\alpha}{}_{,\,-u}{}^{\beta} = \Phi^{\beta}{}_{,u}{}^{\alpha}$。 □

卷积恒等式。 既然我们已经确定了 X 和 Y的特征向量，就可以应用命题 4.2 中讨论的 Racah代数的一般性质，并推导出以下恒等式。

定理 4.8. 对于 $l=0$、1、.....、N，我们有

$$w_l = \sum_{k=0}^{n}\binom{N}{l}\frac{(\lambda_2)_l(\lambda_1)_{N-l}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)_k}{(\lambda_1)_k(\lambda_1+\lambda_2+k-1)_k(\lambda_1+\lambda_2+2k)_{N-k}}R_{l,k}v_k\ ,$$

$$v_l = \sum_{k=0}^{n}\binom{N}{l}\frac{(\lambda_2)_l(\lambda_3)_{N-l}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)_k}{(\lambda_3)_k(\lambda_2+\lambda_3+k-1)_k(\lambda_2+\lambda_3+2k)_{N-k}}R_{k,l}w_k\ .$$

证明。回顾一下，经过变量变换后，表示空间分别变为关于 t、tu_2、$tu_1(1-u_2)$ 的多项式空间，以及关于 t、tv_2、$tv_1(1+v_2)$ 的多项式空间。由它们的显式表达式（4.10）可知，多项式 $t^n v_l$，其中 n、N 在 $\mathbb{N}$ 和 $l \in \{0,\dots,N\}$ 中变化，构成该空间的一组基（向量 $t^n w_l$ 也同样如此）。

考虑两个算子 C'_{123} 和 $t\partial_t$。它们彼此对易，且向量 $t^n v_l$ 和 $t^n w_l$ 分别是特征值为 $N(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)$ 和 $n+N$ 的公共特征向量。我们用到了命题4.5 以及 t 对 C'_{123} 透明这一事实。注意，对于不同的 N，特征值 $N(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)$ 互不相同；这里用到了从一开始就在 (4.1) 中对 λ_1、λ_2、λ_3 所作的条件限制。由此可知，集合 $\{v_l\}_{l=0,\dots,N}$ 和 $\{w_l\}_{l=0,\dots,N}$ 张成同一个子空间（C'_{123} 和 $t\partial_t$ 的公共特征空间）。

现在我们可以应用命题4.2的结果，因为 C'_{123} 取了正确的值 $N(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)$，且 v_l 和 w_l 分别是 X 和 Y 的特征向量，其特征值也正确。因此，的每个特征向量 X（相应地，的每个特征向量 Y）都必定与命题 4.2中得到的向量成比例，即 $\tilde{v}_l$（相应地，$\tilde{w}_l$）。我们令 $v_l=\alpha_l\tilde{v}_l$ 并令 $w_l=\beta_l\tilde{w}_l$。涉及 Racah 系数的等式（4.4）现在写作：

$$w_l=\beta_l\sum_{k=0}^{N}\alpha_k^{-1}R_{l,k}v_k \quad \text{and} \quad v_l=\Gamma^{-1}\alpha_l\sum_{k=0}^{N}\beta_k^{-1}\tilde{R}_{k,l}w_k\,,$$

其中 Γ 已明确给出。我们在第一个等式中先取 $y=0$，再取 $x=0$；在第二个等式中先取 $y=0$，再取 $z=0$。利用雅可比多项式在 1 处的取值 et -1

$$P_k^{\alpha,\beta}(1)=\frac{(\alpha)_k}{k!} \quad \text{and} \quad P_k^{\alpha,\beta}(-1)=(-1)^kP_k^{\beta,\alpha}(1)=(-1)^k\frac{(\beta)_k}{k!}\,,$$

我们立即得到：

$$\beta_l=\binom{N}{l}\frac{(\lambda_1)_{N-l}(\lambda_2)_l}{(\lambda_1+\lambda_2)_N}\alpha_0 \quad \text{and} \quad \alpha_l=\binom{N}{l}\frac{(\lambda_3)_{N-l}(\lambda_2)_l}{(\lambda_2+\lambda_3)_N}\Gamma\tilde{R}_{0,l}^{-1}\beta_0\,.$$

特别地，我们得到 $\alpha_0\beta_0^{-1}=\frac{(\lambda_3)_N}{(\lambda_2+\lambda_3)_N}\Gamma$。结合以上两个公式可得：

$$\beta_l\alpha_k^{-1}=\binom{N}{l}\binom{N}{k}^{-1}\frac{(\lambda_1)_{N-l}(\lambda_2)_l(\lambda_3)_N}{(\lambda_2)_k(\lambda_3)_{N-k}(\lambda_1+\lambda_2)_N}\tilde{R}_{0,k}\,.$$

还需计算 $\tilde{R}_{0,\,k}$，根据定义，它等于 $B_{(0)\dots B(k-1)\,D(1)\dots D(k)}$。利用 (4.3)，我们得到：

$$\tilde{R}_{0,k}=\binom{N}{k}\frac{(\lambda_2)_k(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)_k(\lambda_1+\lambda_2)_N}{(\lambda_1)_k(\lambda_3+N-k)_k(\lambda_1+\lambda_2+k-1)_k(\lambda_1+\lambda_2+2k)_{N-k}}\,.$$

代入其 中 preceding 公式，并进行一些简单化简，我们得出 ：

$$\beta_l\alpha_k^{-1}=\binom{N}{l}\frac{(\lambda_2)_l(\lambda_1)_{N-l}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+N-1)_k}{(\lambda_1)_k(\lambda_1+\lambda_2+k-1)_k(\lambda_1+\lambda_2+2k)_{N-k}}\,,$$

由此证明了定理中的第一个公式。

第二个公式可以从刚得到的关于 $\beta_l\alpha_k^{-1}$ 的公式出发，通过类似的运算得到。更简便地，我们注意到，操作 $\lambda_1\leftrightarrow\lambda_3$ 会交换 v_l 和 w_l（同时将 x 重命名为 z，反之亦然）。该操作也会交换 $R_{k,\,l}$ 和 $R_{l,\,k}$。由此立即得到逆公式。

□

注 4.9。与注 3.8类似，上述构造可以自然地从 sl_2 的表示论角度来理解。对于给定的 $N\geq 0$，多项式 $t^n v_l$（或 $t^n w_l$），其中

$l=0,\ \ldots,\ N$和 $n\geq 0$，构成张量积 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_3}$中一个直和项的基，该直和项同构于 $N+1$ 个 $V_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2N}$。事实上，这证明了在参数 4.1所满足的限制条件（ λ_1、 λ_2、 λ_3）下，这样一个直和项的存在性。如果这些限制条件对任意正整数 N均成立，我们就显式地实现了张量积的分解：

$$V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_3}=\bigoplus_{N\geq 0}(N+1)V_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2N}\ .$$

注意，集合 $\{v_l\}_{l=0,\ldots,N}$ 和 $\{w_l\}_{l=0,\ldots,N}$ 是权 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2N$ 的最低权向量空间的两组不同的基，分别将 C_{12} 和 C_{23} 对角化。▲

5 高秩 Racah 代数与雅可比算子

设 $n\geq 3$。高秩 Racah 代数（更准确地说，按照 [3] 的术语，其特殊商代数）是由中间 Casimir 元素生成的 $U(sl_2)^{\otimes n}$ 的子代数。取任意子集 $I\subset\{1,\ldots,n\}$，并定义 sl_2 在 n 重张量积中的相应嵌入：

$$\delta_I(x)=\sum_{i\in I}1\otimes\ldots 1\otimes\overset{(i)}{x}\otimes 1\cdots\otimes 1\qquad\text{for any } x\in sl_2\ ,$$

其中，在上面的求和中， x 位于位置 i。这扩展为 $U(sl_2)$ 到 n 重张量积中的代数嵌入，而由 I 标记的中间 Casimir 元素是 Casimir 元素 C 的像：

$$C_I=\delta_I(C)\qquad\text{for any } I\subset\{1,\ldots,n\}.$$

我们通常在集合的记号中省略花括号，例如记作 $C_{125}=C_{\{1,2,5\}}$。

注意，我们有：

$$[C_I,C_J]=0\qquad\text{if } I\subset J \text{ or } I\cap J=\emptyset\,. \tag{5.1}$$

显然，若 $I\cap J=\emptyset$。若 $I\subset J$，则只需适当置换某些分量，考察 $U(sl_2)^{k+l}$ 中的 $I=\{1,\ldots,k\}$ 和 $J=\{1,\ldots,k+l\}$ 即可。于是我们有

$$C_I=\delta_{\{1,\ldots,k\}}(C\otimes 1^{\otimes l-1})\qquad\text{and}\qquad C_J=\delta_{\{1,\ldots,k\}}\big(\delta_{\{1,\ldots,l\}}(C)\big)\ .$$

由于 $C\otimes 1^{\otimes l-1}$ 和 $\delta_{\{1,\ldots,l\}}(C)$ 在 $U(sl_2)^{\otimes l}$ 中对易（回忆一下， C 是中心的），它们的像 C_I 和 C_J 也对易。

n 重 Verma 模的张量积。固定复参数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$，并考虑最低权 Verma 模的张量积 $V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n}$。与前几节一样，我们采用多项式实现。现在表示空间为 $Pol(x_1,\ldots,x_n)$，变量 x_i 对应于张量积的第 i 个因子。

本节中，为简便起见，我们将元素 C_I 与其在 $Pol(x_1,\ldots,x_n)$ 上的作用视为相同。我们注意到，在单个因子中作用的 Casimir 元素都是数：

$$C_i=\frac{\lambda_i(\lambda_i-2)}{4}\qquad\text{for any } i=1,\ldots,n.$$

我们像之前一样对元素 C_I 作平移：

$$C'_I=C_I-\frac{\lambda_I(\lambda_I-2)}{4}\qquad\text{where } \lambda_I=\sum_{i\in I}\lambda_i\,.$$

采用这些记号，我们有 $C'_1=\cdots=C'_n=0$。

5.1 耦合方案与交换子代数

我们将用集合划分来讨论耦合方案，$\{1,\dots,n\}$ 并采用适合我们记号的方式 C_I，以便描述交换子代数。等价的表示方式还包括二叉树或带括号的词[8, 16, 20]。不同表示方式之间的对应关系很容易推导。

耦合步骤。一个耦合步骤将集合 $\{1,\dots,n\}$ 的两个划分联系起来。我们用 $I_1\sqcup\cdots\sqcup I_k$ 表示 $\{1,\dots,n\}$ 的一个划分，其中 I_1、.....、I_k 两两不相交，且它们的并集为 $\{1,\dots,n\}$。我们总是假设出现的子集按如下方式排列：$\min(I_1)<\cdots<\min(I_k)$。

我们将一个耦合步骤定义为：按照如下方式，将 $\{1,\dots,n\}$ 的一个划分变换为另一个这样的划分：

$$I_1\sqcup\cdots\sqcup I_k \overset{(I_a,I_b)}{\longrightarrow} J_1\sqcup\cdots\sqcup J_{k-1}\ ,$$

其中，子集 I_a 和 I_b 从第一个划分中移除，并由它们的并集 $I_a\cup I_b$ 取代。可见，耦合步骤总会使子集的数量减少一个。我们用涉及的两个子集表示该耦合步骤：(I_a, I_b)。

每个耦合步骤都对应一个特定的变量变换。我们从一组由第一个划分的子集索引的变量 $(x_{I_1},\dots,x_{I_k})$ 开始，并将两个变量 x_{I_a}、x_{I_b} 替换为：

$$x_{I_a\cup I_b}=x_{I_a}+x_{I_b}\qquad\text{and}\qquad u_{I_a,I_b}=\frac{x_{I_b}-x_{I_a}}{x_{I_a}+x_{I_b}}\ . \tag{5.2}$$

耦合方案与交换子代数。我们将耦合方案 Γ 定义为从 $\{1\}\sqcup\{2\}\sqcup\cdots\sqcup\{n\}$ 到平凡划分 $\{1,\dots,n\}$的一系列 $n-1$ 耦合步骤：

$$\Gamma\ :\ \{1\}\sqcup\cdots\sqcup\{n\}\overset{(I_1,J_1)}{\longrightarrow}\cdots\cdots\cdots\overset{(I_{n-1},J_{n-1})}{\longrightarrow}\{1,\dots,n\}\ . \tag{5.3}$$

对于每个记作 (I_k, J_k) 的步骤，我们关联元素 $C'_{I_k\cup J_k}$，并将所有这些元素放在一起构成集合：

$$S_\Gamma=\{C'_{I_1\cup J_1},\dots,C'_{I_{n-1}\cup J_{n-1}}\}\ .$$

显然，集合 S_Γ 是交换的。事实上，经过第一步后，划分中会生成子集 $I_1\cup J_1$。随后，第二步要么不涉及这个子集，此时 $I_2\cup J_2$与 $I_1\cup J_1$不相交；要么涉及它，此时 $I_2\cup J_2$ 将包含 $I_1\cup J_1$。在这两种情况下，$C'_{I_1\cup J_1}$ 和 $C'_{I_2\cup J_2}$ 都根据（5.1）交换。对整个集合 S_Γ也可作类似推理。

请注意，S_Γ 中的最后一个元素始终是 $C'_{1\dots n}$，而第一个元素始终只有两个指标C'_{ij}，即 i、$j\in\{1,\dots,n\}$。

变量变换。与一个耦合方案相关联 Γ 如（5.3）所示，存在一个变量变换，它通过从变量集合 x_1、.....、x_n开始，依次应用（5.2）中的部分变量变换得到。结果如下：

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_{1\dots n}\,,\,u_{I_1,J_1}\,,\,\dots\,,\,u_{I_{n-1},J_{n-1}})\ , \tag{5.4}$$

其中 $x_{1\dots n}=x_1+\cdots+x_n$，更一般地，对于 I、$J\subset\{1,\dots,n\}$，记号如下：

$$x_I=\sum_{i\in I}x_i\qquad\text{and}\qquad u_{I,J}=\frac{x_J-x_I}{x_I+x_J}\ .$$

每个耦合步骤都会由两个变量 x 生成一个变量 u和一个新变量 x。考虑对应于子集 (I_k, J_k) 的第 k 步。在此之前，我们已经生成了 $k-1$ 个变量$u_{I_1,\ J_1},\dots,u_{I_{k-1},\ J_{k-1}}$，这些变量将保持固定直至结束。此时我们有与经过 $k-1$ 步后得到的划分中的子集相对应的变量 x。特别地，我们有变量 x_{I_k} 和x_{J_k}。第 k 步使用这两个变量生成新变量 $x_{I_k\cup J_k}$和 $u_{I_k,\ J_k}$。

例 5.1. 对于 $n=3$，耦合方案 $1\sqcup 2\sqcup 3 \to 12\sqcup 3 \to 123$对应以下子代数和新变量：

$$S_\Gamma = \{C'_{12}, C'_{123}\} \qquad \text{and} \qquad (x_1+x_2+x_3, \frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}, \frac{x_3-(x_1+x_2)}{x_1+x_2+x_3}) \ .$$

我们从上一节恢复变量变换（4.8）。另一个变量变换（4.9）则通过耦合方案 $1\sqcup 2\sqcup 3 \to 1\sqcup 23 \to 123$得到，它对应于子代数$\{C'_{23}, C'_{123}\}$。注意，我们还有第三种耦合方案，它产生子代数 $\{C'_{13}, C'_{123}\}$。

$n=4$ 的一个例子是 $1\sqcup 2\sqcup 3\sqcup 4 \to 12\sqcup 3\sqcup 4 \to 12\sqcup 34 \to 1234$，由此得到以下子代数和新变量：

$$S_\Gamma = \{C'_{12}, C'_{34}, C'_{1234}\} \quad \text{and} \quad (x_1+x_2+x_3+x_4, \frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}, \frac{x_4-x_3}{x_3+x_4}, \frac{x_3+x_4-(x_1+x_2)}{x_1+x_2+x_3+x_4}) \ .$$

▲

注 5.2. 不难看出，不同的耦合方案可以产生相同的交换子代数。例如，考虑与前一个例子相比的 $1\sqcup 2\sqcup 3\sqcup 4 \to 1\sqcup 2\sqcup 34 \to 12\sqcup 34 \to 1234$。不难看出，耦合方案的数量为 $\prod_{k=3}^{n}\binom{k}{2} = \frac{n!}{(n-1)!\,2^{n-1}}$，而得到的交换子代数数量为 $(2n-3)!! = 3\times 5\times\cdots\times 2n-3$，见 [8]。

▲

5.2 使用雅可比算子的实现

我们固定一个耦合方案 Γ:

$$\Gamma \ : \ \{1\}\sqcup\cdots\sqcup\{n\} \overset{(I_1,J_1)}{\longrightarrow} \cdots\cdots\cdots \overset{(I_{n-1},J_{n-1})}{\longrightarrow} \{1,\dots,n\} \ . \tag{5.5}$$

我们有一个与之关联的交换集 $S_\Gamma = \{C'_{I_1\cup J_1}, \dots, C'_{I_{n-1}\cup J_{n-1}}\}$，以及一组由 x_1、……、x_n 得到的新变量：

$$(x_{1\dots n}\ ,\ u_{I_1,J_1}\ ,\ \dots\ ,\ u_{I_{n-1},J_{n-1}}) \ ,$$

见（5.4）。现在，我们的目标是说明如何使用雅可比算子和 $n-1$ 新变量 u来表示集合 S_Γ 中的算子。

命题 5.3。我们有：

$$C'_{I_k\cup J_k} = \Phi^{\lambda_{I_k},\lambda_{J_k}}_{u_{I_k,J_k}} + \frac{2}{1-u_{I_k,J_k}}C'_{I_k} + \frac{2}{1+u_{I_k,J_k}}C'_{J_k} \ .$$

在给出证明之前，我们注意到，C'_{I_k} 要么为 0（如果 $|I_k|=1$），要么已经包含在 S_Γ 中（C'_{J_k} 的情况类似）。因此，该命题确实允许我们按 k 递归地使用新变量 u 表示 S_Γ 中的任意元素。后面将给出示例。

证明。我们通过对以下各项进行递归来证明该公式：$k=1$，……，$n-1$，逐步进行变量变换，每一步都由（5.2）给出。就在变量变换的第 k 步之前，我们手头有一组变量：

$$\vec{u} = (u_{I_1,J_1},\dots,u_{I_{k-1},J_{k-1}}) \quad \text{and} \quad \vec{x} = (\dots,x_{I_k},\dots,x_{J_k},\dots) \ ,$$

其中，$\vec{x}$中的变量按照经过 $k-1$个步骤后达到的 $\{1,\dots,n\}$ 的划分中的子集进行索引。$\vec{u}$ 中的变量将不再被修改。第 k步移除变量x_{I_k} 和x_{J_k}，并在 $\vec{u}$ 中创建一个新变量，在 $\vec{x}$ 中创建另一个新变量，具体如下：

$$x_{I_k\cup J_k} = x_{I_k} + x_{J_k} \qquad \text{and} \qquad u_{I_k,J_k} = \frac{x_{J_k}-x_{I_k}}{x_{I_k}+x_{J_k}} \ . \tag{5.6}$$

我们需要计算 $\delta_{I_k\cup J_k}$ 对 sl_2 的生成元以及进而对卡西米尔元的像，并声称在变量变换的第 k步之后，我们有：

$$\begin{aligned}\delta_{I_k\cup J_k}(H) &\mapsto \lambda_{I_k\cup J_k}+2x_{I_k\cup J_k}\partial_{x_{I_k\cup J_k}}\,,\\ \delta_{I_k\cup J_k}(E) &\mapsto x_{I_k\cup J_k}\,,\\ \delta_{I_k\cup J_k}(F) &\mapsto -x_{I_k\cup J_k}\partial^2_{x_{I_k\cup J_k}}-\lambda_{I_k\cup J_k}\partial_{x_{I_k\cup J_k}}+x^{-1}_{I_k\cup J_k}\widetilde{F}_{I_k\cup J_k}\,,\end{aligned}\tag{5.7}$$

‹其中 $F_{I_k\cup J_k}$ 由递归给出

$$\widetilde{F}_{I_k\cup J_k}=\Phi^{\lambda_{I_k},\lambda_{J_k}}_{u_{I_k,J_k}}+\frac{2}{1-u_{I_k,J_k}}\widetilde{F}_{I_k}+\frac{2}{1+u_{I_k,J_k}}\widetilde{F}_{J_k}\quad\text{and}\quad\widetilde{F}_i=0\,,\ i=1,\dots,n\,.$$

‹由此，计算 $C'_{I_k\cup J_k}$ 显而易见。不含 $F_{I_k\cup J_k}$ 的部分是通常的单变量计算，其结果恰好是我们从 $\delta_{I_k\cup J_k}(C)$中减去、以定义 $C'_{I_k\cup J_k}$的常数。‹剩余项表明 $C'_{I_k\cup J_k}=F_{I_k\cup J_k}$。注意，这只涉及变量 u，因此在变量变换结束之前都不会改变。命题得证。

因此我们只需证明（5.7）。注意，对任意 $\delta_{I_k\cup J_k}(X)=\delta_{I_k}(X)+\delta_{J_k}(X)$，且 $X\in\{H,E,F\}$，因此在变量变换的第 k步之前，我们有：

$$\begin{aligned}\delta_{I_k\cup J_k}(H) &\mapsto \lambda_{I_k}+2x_{I_k}\partial_{x_{I_k}}+\lambda_{J_k}+2x_{J_k}\partial_{x_{J_k}}\,,\\ \delta_{I_k\cup J_k}(E) &\mapsto x_{I_k}+x_{J_k}\,,\\ \delta_{I_k\cup J_k}(F) &\mapsto -x_{I_k}\partial^2_{x_{I_k}}-\lambda_{I_k}\partial_{x_{I_k}}-x_{J_k}\partial^2_{x_{J_k}}-\lambda_{J_k}\partial_{x_{J_k}}+x^{-1}_{I_k}\widetilde{F}_{I_k}+x^{-1}_{J_k}\widetilde{F}_{J_k}\,.\end{aligned}$$

‹‹当 $k=1$ 时，这显然成立，因为此时 $|I_k|=|J_k|=1$ 且 $F_{I_k}=F_{J_k}=0$；而当 $k>1$时，我们使用了递推假设。

现在我们进行变量变换中的第 k 步（5.6）。不涉及 ~ ~ 的项的计算 F_{I_k} 和 F_{J_k} 已在命题 3.5 中作为双变量计算完成。因此立即得到 5.7 中关于 H 和 E 的所需公式；而对于 F，此时有：

$$\delta_{I_k\cup J_k}(F)\ \mapsto\ -x_{I_k\cup J_k}\partial^2_{x_{I_k\cup J_k}}-\lambda_{I_k\cup J_k}\partial_{x_{I_k\cup J_k}}+x^{-1}_{I_k\cup J_k}\Phi^{\lambda_{I_k},\lambda_{J_k}}_{u_{I_k,J_k}}+x^{-1}_{I_k}\widetilde{F}_{I_k}+x^{-1}_{J_k}\widetilde{F}_{J_k}\,.$$

~ ~根据递推关系， F_{I_k} 和 F_{J_k} 只涉及变量 u，因此我们保留它们不变，只需将变量 x_{I_k}、x_{J_k} 变换为新变量。(5.6) 的逆变换公式为：

$$x_{I_k}=\frac{x_{I_k\cup J_k}(1-u_{I_k,J_k})}{2}\quad\text{and}\quad x_{J_k}=\frac{x_{I_k\cup J_k}(1+u_{I_k,J_k})}{2}\,.$$

至此，(5.7) 的验证以及命题的证明均告完成。 □

例 5.4。 对于 $n=3$，我们特别得到命题 4.5。对于 $n=4$，考虑给出集合 $\{C'_{12},C'_{123},C'_{1234}\}$ 的耦合方案。新变量为：

$$(x_{1234}\,,\,u_{1,2}\,,\,u_{12,3}\,,\,u_{123,4})=(x_1+x_2+x_3+x_4\,,\,\frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}\,,\,\frac{x_3-(x_1+x_2)}{x_1+x_2+x_3}\,,\,\frac{x_4-(x_1+x_2+x_3)}{x_1+x_2+x_3+x_4})$$

以及 交换集由 $C'_{12}=\Phi^{\lambda_1,\ \lambda_2}_{u_{1\,2},}$、$C'_{123}=\Phi^{\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_3}_{u_{12},\ 3}+\frac{2}{1-u_{12},\ 3}\Phi^{\lambda_1\ \ \lambda_2}_{,\ u_{1\,2}}$ 以及 实现

$$C'_{1234}=\Phi^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_4}_{u_{123,4}}+\frac{2}{1-u_{123,4}}\Phi^{\lambda_1+\lambda_2,\lambda_3}_{u_{12,3}}+\frac{4}{(1-u_{123,4})(1-u_{12,3})}\Phi^{\lambda_1,\lambda_2}_{u_{1,2}}\,.$$

对于例 5.1 中给出集合 $\{C'_{12},C'_{34},C'_{1234}\}$ 的耦合方案，新变量记为$u_{1,2}$, $u_{3,4}$ 和 $u_{12,34}$，算子为：

$$C'_{12}=\Phi^{\lambda_1,\lambda_2}_{u_{1,2}}\,,\quad C'_{34}=\Phi^{\lambda_3,\lambda_4}_{u_{3,4}}\,,\quad C'_{1234}=\Phi^{\lambda_1+\lambda_2,\lambda_3+\lambda_4}_{u_{12,34}}+\frac{2}{1-u_{12,34}}\Phi^{\lambda_1,\lambda_2}_{u_{1,2}}+\frac{2}{1+u_{12,34}}\Phi^{\lambda_3,\lambda_4}_{u_{3,4}}\,.$$

▲

5.3 特征向量与雅可比多项式

我们还需要一些记号。耦合方案 Γ 仍然固定。对于 $1 \le a < b \le n-1$，我们记：

$$\begin{cases} a \prec_L b & \text{if } I_a \cup J_a \subset I_b\,, \\ a \prec_R b & \text{if } I_a \cup J_a \subset J_b\,. \end{cases}$$

换言之，对于固定的 b，满足 $a \prec_L b$ 的 a 是耦合方案中用于生成子集 I_b 的步骤的指标（对于 $a \prec_R b$ 和 J_b 也类似）。我们还记作：

$$a \preceq b \qquad \text{if } a = b \text{ or } a \prec_L b \text{ or } a \prec_R b\,.$$

例 5.5。考虑方案 $1\sqcup 2\sqcup 3\sqcup 4 \xrightarrow{(1)} 12\sqcup 3\sqcup 4 \xrightarrow{(2)} 123\sqcup 4 \xrightarrow{(3)} 1234$，其中步骤的编号已明确标出。我们有 $1 \prec_L 2$，而没有任何 a 满足 $a \prec_R 2$（因为步骤 2 右侧所使用的集合 $\{3\}$ 的基数为 1）。我们有 $1 \prec_L 3$ 和 $2 \prec_L 3$，而没有任何 a 满足 $a \prec_R 3$。▲

最后，我们定义以下参数平移 λ's，它取决于整数向量 $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_{n-1})$：

$$(\lambda_{I_b}^{(\vec{k})}, \lambda_{J_b}^{(\vec{k})}) = (\lambda_{I_b} + 2\sum_{a \prec_L b} k_a\,,\ \lambda_{J_b} + 2\sum_{a \prec_R b} k_a)\,,$$

并且我们可以开始引入将成为我们算子特征向量的多项式：

$$v_{k_1,\ldots,k_{n-1}} = \prod_{b=1}^{n-1} (x_{I_b \cup J_b})^{k_b} P_{k_b}^{\lambda_{I_b}^{(\vec{k})}, \lambda_{J_b}^{(\vec{k})}}(u_{I_b,J_b})\,, \qquad k_1, \ldots, k_{n-1} \ge 0\,. \tag{5.8}$$

对于 $n = 3$，根据耦合方案，我们可以从式（4.11）中得到向量 v_l 和 w_l（令 $k_1 = l$ 且 $N = k_1 + k_2$）。上述定义公式使我们可以轻松地将多项式表示为变量 x_1、……、x_{n-1}的形式。例子见文末。不过，多项式也可以完全用与该方案相关联的新变量（$x_{1\ldots n}$、u_{I_1, J_1}、……、$u_{I_{n-1}, J_{n-1}}$）表示。下文的证明将在式（5.9）中给出该公式。

以下命题推广了命题 4.6（情形 $n = 3$），给出了任意耦合方案对应的交换族的特征向量，适用于任意 n。

命题 5.6。向量 $\{v_{k_1,\ldots,k_{n-1}}\}_{k_1,\ldots,k_{n-1} \ge 0}$ 是算子交换族 S_Γ 的公共特征向量，其特征值如下：

$$C'_{I_b \cup J_b}(v_{k_1,\ldots,k_{n-1}}) = \big(\sum_{a \preceq b} k_a\big)\big(\sum_{a \preceq b} k_a + \lambda_{I_b} + \lambda_{J_b} - 1\big) v_{k_1,\ldots,k_{n-1}}\,.$$

证明。首先，我们需要将多项式 $v_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ 仅用变量 $x_{1\ldots n}$ 和 u 表示。我们有：

$$v_{k_1,\ldots,k_{n-1}} = \Big(\frac{x_{1\ldots n}}{2}\Big)^{k_1+\cdots+k_{n-1}} \prod_{b=1}^{n-1} (1-u_{I_b,J_b})^{\sum_{a \prec_L b} k_a} (1+u_{I_b,J_b})^{\sum_{a \prec_R b} k_a} P_{k_b}^{\lambda_{I_b}^{(\vec{k})}, \lambda_{J_b}^{(\vec{k})}}(u_{I_b,J_b})\,. \tag{5.9}$$

为此，令 $a \in \{1, \ldots, n-1\}$，并考虑因子 $(x_{I_a \cup J_a})^{k_a}$，它出现在 (5.8) 中。我们需要用新变量改写它（仅当 $a < n-1$ 时；否则它等于 $x_{1\ldots n}^{k_{n-1}}$）。现在，令 $b > a$ 为满足 $I_a \cup J_a$ 等于 I_b 或 J_b的指标。那么，变量替换的第 b 步给出

$$2x_{I_a \cup J_a} = \begin{cases} x_{I_b \cup J_b}(1 - u_{I_b,J_b}) & \text{if } I_a \cup J_a = I_b\,, \\ x_{I_b \cup J_b}(1 + u_{I_b,J_b}) & \text{if } I_a \cup J_a = J_b\,. \end{cases}$$

重复此过程，直到达到 $x_{I_b \cup J_b}$，我们看到因子（$x_{1\ldots n}$）首先贡献一个整体因子$x_{I_a \cup J_a}$，^{k_a} 其次贡献因子（$\big(\frac{x_{1\ldots n}}{2}\big)^{k_a}$、$1 \pm u_{I_b}$）$_{J_b}$，对任意 b，只要 $a \prec_L b$或$a \prec_R b$即可，相应地选择符号。这就证明了公式（5.9）。

现在，我们可以对向量 $C'_{I_b\sqcup J_b}$应用算子5.3，利用命题中的递归公式 $v_{k_1,\ \ldots,\ k_{n-1}}$，这些向量由（5.9）给出。我们对 b 使用归纳法。对于 $b=1$，有 $C'_{I_1\sqcup J_1}=\Phi^{\lambda_{I_1}}_{u_{I_1}}{}^{\lambda_{J_1}}_{J_1}\circ u_{I_1}$仅出现变量$J_1$，因此，将其应用于 $v_{k_1,\ \ldots,\ k_{n-1}}$ 立即得到特征值$k_1(k_1+\lambda_{I_1}+\lambda_{J_1}-1)$，命题对 $b=1$ 得证。

然后令 $b>1$，并使用递归公式：

$$C'_{I_b\sqcup J_b}=\Phi^{\lambda_{I_b},\lambda_{J_b}}_{u_{I_b,J_b}}+\frac{2}{1-u_{I_b,J_b}}C'_{I_b}+\frac{2}{1+u_{I_b,J_b}}C'_{J_b}\ .$$

根据递归假设，作用于 $v_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ 的最后两项给出以下系数：

$$\frac{2}{1-u_{I_b,J_b}}\sum_{a\prec_L b}k_a\Big(\sum_{a\prec_L b}k_a+\lambda_{I_b}-1\Big)+\frac{2}{1+u_{I_b,J_b}}\sum_{a\prec_R b}k_a\Big(\sum_{a\prec_R b}k_a+\lambda_{J_b}-1\Big)\ . \tag{5.10}$$

剩下的就是应用 $\Phi^{\lambda_{I_b}}_{,u_{I_b}}{}^{\lambda_{J_b}}_{J_b}\circ$ 只需将其作用于乘积 (5.9) 中包含变量 u_{I_b,J_b} 的因子。根据上一节中使用的引理 4.7，结合 $\Phi^{\beta}_{,-u}{}^{\alpha}=\Phi^{\alpha}_{,u}{}^{\beta}$，可得：

$$\begin{aligned}\Phi^{\alpha,\beta}_u\circ(1-u)^l(1+u)^m=(1-u)^l(1+u)^m\circ\Big(&\Phi^{\alpha+2l,\beta+2m}_u\\&+l\beta+m\alpha+2lm-l(l+\alpha-1)\frac{1+u}{1-u}-m(m+\beta-1)\frac{1-u}{1+u}\Big)\ .\end{aligned}$$

这表明，将 $\Phi^{\lambda_{I_b}}_{,u_{I_b}}{}^{\lambda_{J_b}}_{J_b,}$ 作用于 $v_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$，可得以下系数：

$$\begin{aligned}&k_b(k_b+\lambda_{I_b}+\lambda_{J_b}+2\sum_{a\prec_L b}k_a+2\sum_{a\prec_R b}k_a-1)+\lambda_{J_b}\sum_{a\prec_L b}k_a+\lambda_{I_b}\sum_{a\prec_R b}k_a+2\sum_{a\prec_L b}k_a\sum_{a\prec_R b}k_a\\&\quad-\sum_{a\prec_L b}k_a\Big(\sum_{a\prec_L b}k_a+\lambda_{I_b}-1\Big)\frac{1+u_{I_b,J_b}}{1-u_{I_b,J_b}}-\sum_{a\prec_R b}k_a\Big(\sum_{a\prec_R b}k_a+\lambda_{J_b}-1\Big)\frac{1-u_{I_b,J_b}}{1+u_{I_b,J_b}}\ .\end{aligned}$$

求和对（5.10）进行作用后，合并得到命题中所述的特征值 n. □

示例。我们以一些与 $n=4$ 的耦合方案相关的多项式为例，结束本节。我们使用记号 $\lambda_I=\sum_{i\in I}\lambda_i$、$x_I=\sum_{i\in I}x_i$ 和 $u_{I,\ J}=\frac{x_J-x_I}{x_I+x_J}$。• 对于给出交换集 $\{C'_{12},C'_{123},C'_{1234}\}$ 的方案 $1\sqcup2\sqcup3\sqcup4\to12\sqcup3\sqcup4\to123\sqcup4\to1234$，这些向量为：

$$(x_{1234})^{k_3}(x_{123})^{k_2}(x_{12})^{k_1}P^{\lambda_{123}+2k_1+2k_2,\lambda_4}_{k_3}(u_{123,4})P^{\lambda_{12}+2k_1,\lambda_3}_{k_2}(u_{12,3})P^{\lambda_1,\lambda_2}_{k_1}(u_{1,2})\ .$$

• 对于给出交换集 $\{C'_{12},C'_{34},C'_{1234}\}$ 的方案 $1\sqcup2\sqcup3\sqcup4\to12\sqcup3\sqcup4\to12\sqcup34\to1234$，这些向量为：

$$(x_{1234})^{k_3}(x_{34})^{k_2}(x_{12})^{k_1}P^{\lambda_{12}+2k_1,\lambda_{34}+2k_2}_{k_3}(u_{12,34})P^{\lambda_3,\lambda_4}_{k_2}(u_{3,4})P^{\lambda_1,\lambda_2}_{k_1}(u_{1,2})\ .$$

• 对于给出交换集 $\{C'_{34},C'_{234},C'_{1234}\}$ 的方案 $1\sqcup2\sqcup3\sqcup4\to1\sqcup2\sqcup34\to1\sqcup234\to1234$，这些向量为：

$$(x_{1234})^{k_3}(x_{234})^{k_2}(x_{34})^{k_1}P^{\lambda_1,\lambda_{234}+2k_1+2k_2}_{k_3}(u_{1,234})P^{\lambda_2,\lambda_{34}+2k_1}_{k_2}(u_{2,34})P^{\lambda_3,\lambda_4}_{k_1}(u_{3,4})\ .$$

• 对于给出交换集 $\{C'_{24},C'_{234},C'_{1234}\}$ 的方案 $1\sqcup2\sqcup3\sqcup4\to1\sqcup24\sqcup3\to1\sqcup234\to1234$，这些向量为：

$$(x_{1234})^{k_3}(x_{234})^{k_2}(x_{24})^{k_1}P^{\lambda_1,\lambda_{234}+2k_1+2k_2}_{k_3}(u_{1,234})P^{\lambda_{24}+2k_1,\lambda_3}_{k_2}(u_{24,3})P^{\lambda_2,\lambda_4}_{k_1}(u_{2,4})\ .$$

利用 $n = 3$ 在定理 4.8中得到的卷积公式，在参数 λ_i满足适当条件时，可以看出，每一族向量都通过涉及一个 Racah 多项式的转移系数与下一族相关。因此，从第一族过渡到最后一族时，转移系数涉及三个 Racah 多项式的乘积。这些就是双变量 Racah 多项式的例子。

关于 [1]，其中详细研究了 S_Γ 交换子集 $n = 4$ 以及作为转移系数出现的相应双变量 Racah 多项式。在上面的例子中，第一个子集与最后一个子集在该图中的距离为 3，这说明相应的转移系数需要由三个 Racah 系数相乘得到。对于 $n = 4$，该图的直径为 3。关于一般 n的图的研究，参见 [8] 。

参考文献

[1] N. Crampe, L. Frappat, E. Ragoucy, 《二阶 Racah 代数的表示与正交多元多项式》, Linear Algebra Appl. 664 (2023), 165–215.[2] N. Crampe, L. Frappat, J. Gaboriaud, L. Poulain d'Andecy, E. Ragoucy 和 L. Vinet, 《Askey–Wilson 代数及其各种形式》, J. Phys. A: Math. Theor. 54 (2021) 063001.[3] N. Crampe, J. Gaboriaud, L. Poulain d'Andecy 和 L. Vinet, 《Racah 代数、 $sl(2)$ 的对角中心化子及其 Hilbert–Poincar´e 级数》, Ann. Henri Poincar´e 23 (2022), no. 7, 2657–2682.[4] H. De Bie, V. X. Genest, W. van de Vijver, and L. Vinet, 《高阶 Racah 代数与 $\mathbb{Z}_2^n$Laplace–Dunkl 算子》, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 51, 025203 (2017).[5] H. De Bie, and W. van de Vijver, 《高阶 Racah 代数的离散实现》, Constructive Approximation 52 (2020) 1–29.[6] C.F. Dunkl, 《二维变量中的一个差分方程与 Hahn 多项式》, Pacific J. Math. 92 (1981), no. 1, 57–71.[7] C.F. Dunkl and Y. Xu, 《多变量正交多项式》, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 81. Cambridge Univ. Press, 2001.[8] V. Fack, S. Lievens, J. Van der Jeugt, 《二叉耦合树旋转图的直径》, Discrete Math. 245 (2002), no. 1-3, 1–18.[9] V. Genest, M.E.H. Ismail, L. Vinet, A. Zhedanov, 《超几何算子的三对角化与 Racah-Wilson 代数》, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), no. 10, 4441–4454. [10] V. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov, 《Racah 代数与超可积模型》, Journal of Physics: Conference Series 512, 012011 (2014).[11] V. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov, 《二维超可积性与 Racah–Wilson 代数》, Lett. Math. Phys. 104 (2014), no. 8, 931–952.[12] Ya. A. Granovskii, A. S. Zhedanov, 《6j 符号对称群的本质》, Soviet Phys. JETP 67 (1988), no. 10, 1982–1985 (1989)；译自 Zh. `Eksper. Teoret. Fiz. 94 (1988), no. 10, 49–54 (俄文)[13] R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Swarttouw, 《超几何正交多项式及其 q-类比》, Springer 数学专著, Springer Berlin, Heidelberg (2010).[14] H.T. Koelink, J. Van Der Jeugt, 《来自李代数与量子代数表示的正交多项式卷积》, SIAM J. Math. Anal. 29 (1998), no. 3, 794–822.[15] Q. Labriet, 《共形李群全纯离散级数分支问题的几何视角》, Internat. J. Math. 33 (2022), no. 10-11, Paper No. 2250069, 70 pp.

[16] S. Lievens, J. Van der Jeugt, 《 su(1, 1) 的 3nj 系数作为 n 变量正交多项式之间的连接系数》, J. Math. Phys. 43 (2002), no. 7, 3824–3849.[17] S. Post, 《 su(1, 1) 的 Racah 多项式与重耦合方案》, SIGMA 11 (2015) 057, doi:10.3842/SIGMA.2015.057.[18] P. Terwilliger, 《两个线性变换，各自相对于对方的一个特征基均为三对角》, 《线性代数及其应用》330 (2001) 149–203.[19] J. Van der Jeugt, 《李代数表示的耦合系数与特殊函数的加法公式》, J. Math. Phys. 38 (1997), no. 5, 2728-2740.[20] J. Van der Jeugt, 《3nj 系数与超几何型正交多项式》, 《正交多项式与特殊函数》（Leuven, 2002）, 25–92, Lecture Notes in Math., 1817, Springer, Berlin, 2003.[21] L. Vinet, A. Zhedanov, 《Hahn 型 Heun 算子》, Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019) 2987–2998.[22] Y. Xu, 《多变量 Hahn、Jacobi 和 Krawtchouk 多项式》, Approx. Theory 195 (2015), 19–42.[23] A. Zhedanov, 《两个环形势的隐藏对称代数与重叠系数》, J. Phys. A 26 (1993) 4633.