双稳态方程中的传播或灭绝：初始碎片化的非单调作用

Matthieu Alfaro [a]、Fran¸cois Hamel [b] 和 Lionel Roques [c] *

a 诺曼底鲁昂大学，LMRS，法国国家科学研究中心，鲁昂，法国 b 艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，I2M，马赛，法国 c 法国国家农业、食品与环境研究院，BioSP，84914，阿维尼翁，法国

arXiv:2304.00828v2 [math.AP] 1 Jul 2024

谨以此文献给杰出的学者、备受尊敬的数学家 *Yihong Du* 教授

摘要

本文研究了具有双稳态反应项的 $\mathbb{R}^N$ 反应扩散方程柯西问题的有界解的大时间行为。我们考虑的初始条件主要是有界博雷尔集的示性函数。我们考察这些初始条件的支集经过几何变换后，如何影响解的大时间传播或灭绝。我们还考虑了定义在有界博雷尔集类上的两个碎片化指标，并在初始支集碎片化程度较低或较高时，建立了一些关于传播或灭绝的结果。最后，我们证明，即使对于等测集，解的大时间动力学也不会随所考察的碎片化指标单调变化。

关键词：反应扩散方程；入侵；灭绝；碎化。

1 引言

本文研究双稳态反应扩散方程柯西问题的解的大时间行为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

在任意维数 $N \geq 1$ 中，其中 Δ 表示关于空间变量 $x \in \mathbb{R}^N$ 的拉普拉斯算子。函数 f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ 假定属于 C^1 类，并且具有

*本研究获得了艾克斯-马赛大学卓越计划´e——A*MIDEX（法国“未来投资计划”项目）的资助，以及法国国家研究署 RESISTE（ANR-18-CE45-0019）、ReaCh（ANR-23-CE40-0023-02）和 DEEV（ANR-20-CE40-0011-01）项目的资助。

双稳态型且具有正质量，也就是说，

$$\begin{cases} f(0)=f(1)=0, \quad f'(0)<0, \quad f'(1)<0, \quad \displaystyle\int_0^1 f(s)ds>0, \\ \exists\,\theta\in(0,1), \quad f<0 \text{ in } (0,\theta), \ f>0 \text{ in } (\theta,1), \ f'(\theta)>0. \end{cases} \tag{1.2}$$

初始条件 $u_0:\mathbb{R}\to[0,1]$ 假设为勒贝格可测且紧支撑。柯西问题 (1.1) 是适定的，并且对于每个这样的 u_0，解 $u:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^N\to[0,1]$ 存在且唯一，在 $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$ 内是经典解，并且 $u(t,\cdot)\to u_0$ 当 $t\to0^+$ 时属于 $L^1(\mathbb{R}^N)$。此外，由强抛物型最大值原理可知，对于所有 $(t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$，$0<u(t,x)<1$，前提是 $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}>0$。在生物学或生态学模型中，量 u 表示某一物种的归一化浓度；该物种一方面受到局部扩散的影响，另一方面经历考虑了强阿利效应的生长与死亡过程，这意味着人均增长率 $f(u)/u$（因此 $f(u)$本身）在低密度时为负。

一些记号

在全文中，“$\|\ \|_\infty$”、“$|\ |$”和“$\cdot$”分别表示 $\mathbb{R}^N$ 中的最大范数、欧几里得范数和欧几里得内积，$B_r(x):=\{y\in\mathbb{R}^N:\ |y-x|<r\}$ 表示以 $x\in\mathbb{R}^N$ 为中心、半径为 $r\geq0$ 的开欧几里得球，而 $B_r:=B_r(0)$。我们称

$$\mathcal{B}:=\big\{B_r(x):x\in\mathbb{R}^N,\ r>0\big\}.$$

我们用 λ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的勒贝格测度，并令 $\omega_N:=\lambda(B_1)$。对于 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 $\mathbb{R}^N$ 的博雷尔子集 E，我们将 x 与 E 之间的本质距离定义为

$$\operatorname{dist}(x,E):=\operatorname{essinf}\big(y\in E\mapsto|x-y|\big)=\sup\big\{r\geq0:\lambda(B_r(x)\cap E)=0\big\}$$

（因此，若 $\lambda(E)=0$，则 $\operatorname{dist}(x,\ E)=+\infty$；若 $\lambda(E)>0$，则上确界为最大值）。函数 $x\mapsto\operatorname{dist}(x,\ E)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中是利普希茨连续的。$\mathbb{R}^N$ 中两个有界博雷尔子集 E 和 F 之间的 d_1-距离，定义为对称差 $E\Delta F$ 的勒贝格测度，即，

$$d_1(E,F):=\lambda\big((E\cup F)\setminus(E\cap F)\big)=\lambda(E\cup F)-\lambda(E\cap F), \tag{1.3}$$

这也等于集合 E和 F的示性函数之差的 L^1 范数。两个有界博雷尔子集 E 和 F之间的本质豪斯多夫距离定义为

$$d_H(E,F):=\max\Big(\|\operatorname{dist}(\cdot,F)\|_{L^\infty(E)},\|\operatorname{dist}(\cdot,E)\|_{L^\infty(F)}\Big), \tag{1.4}$$

按照约定，$d_H(E,F)=d_H(F,E)=+\infty$当且仅当 $\lambda(E)>0=\lambda(F)$，而 $d_H(E,F)=0$当且仅当 $\lambda(E)=\lambda(F)=0$。在全文中，对于 $\mathbb{R}^N$ 的两个博雷尔子集 E 和 F，若 $\lambda(E\setminus F)=0$，我们也称 E 除去一个零测集后包含于 F，等价地，称 F 除去一个零测集后包含 E。若 $E\subset F$ 除去一个零测集后成立，且 $F\subset E$ 除去一个零测集后成立，我们就称 E 和 F 除去一个零测集后相等；也就是说，集合 E 和 F 的示性函数在 $\mathbb{R}^N$ 上几乎处处相等。换言之，对于 $\mathbb{R}^N$ 的任意两个有界博雷尔子集 E 和 F，$d_1(E,F)=0$ 当且仅当 E 和 F 除去一个零测集后相等。最后，对于有界博雷尔集 $E\subset\mathbb{R}^N$ 和 $r>0$，我们称

$$\mathbb{B}_r(E):=\big\{F\text{ bounded Borel subsets of }\mathbb{R}^N:d_1(E,F)<r\big\}. \tag{1.5}$$

文献中的一些结果

本文的主要目标是理解初始条件 u_0 的碎化（其含义将予以精确定义）对解 u 的大时间动力学所起的作用。不过，在介绍碎化的各种概念及其性质，以及它们对方程 (1.1) 动力学的影响之前，我们先回顾文献中的一些重要已知结果。

首先，对于每个给定的紧支集初始条件u_0： $\mathbb{R}^N \to [0,1]$， u 在 $t \to +\infty$时只能呈现三种渐近行为。也就是说，由 [33] 可知，要么 u（t， $\cdot$）在 $t \to +\infty$ 时于 $\mathbb{R}^N$ 上一致地 $\to 0$ （灭绝情形）；要么 u（t， $\cdot$）在 $t \to +\infty$时于 $\mathbb{R}^N$上局部一致地 $\to 1$（入侵情形）；要么对某个 $x_0 \in \mathbb{R}^N$， u（t， $\cdot$）在 $t \to +\infty$时于 $\mathbb{R}^N$上一致地 $\to \Phi(\cdot + x_0)$，其中 Φ： $\mathbb{R}^N \to (0,1)$是方程(1.1)的唯一平稳解，在无穷远处趋于0，且满足$\max_{\mathbb{R}^N} \Phi = \Phi(0)$（函数 Φ 实际上是径向对称的，并且关于原点递减）。我们指出，若 f 满足(1.2)，但其在 $[0,1]$, 上的积分非正，则只有灭绝情形可能发生。在完整假设(1.2)下，当 u（t， $\cdot$）在 $t \to +\infty$时于 $\mathbb{R}^N$上局部一致地 $\to 1$，则根据 [10]（在 $N = 1$维）以及 [45]（在任意 $N \geq 1$维），还已知

$$\liminf_{t\to+\infty} \Big(\min_{|x|\leq ct - \frac{N-1}{c}\ln t - A} u(t,x) \Big) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{and} \quad \limsup_{t\to+\infty} \Big(\max_{|x|\geq ct - \frac{N-1}{c}\ln t + A} u(t,x) \Big) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

其中， $c > 0$ 是行波前 $\varphi(x - ct)$的唯一速度；该行波前在维数 $N = 1$ 下求解方程 (1.1)，并连接1与0，即满足 φ： $\mathbb{R} \to (0,1)$，且 $\varphi(-\infty) = 1$， $\varphi(+\infty) = 0$。换言之，对于给定水平 $\rho \in \in (0,1)$， u 的水平集会随着 c 以速度向所有方向扩散（这一扩散结果最初在 [3]中得到证明），并且始终位于半径为$ct - ((N-1)/c)\ln t$的球面周围的有界豪斯多夫距离内。事实上，当 $t \to +\infty$时，水平集渐近地呈现局部平面化，因为由 [18]可知，$\sup_{t\geq A, |x|\geq A} \nabla u(t,x)/|\nabla u(t,x)| + x/|x| \to 0$ 在 $A \to +\infty$ 时趋于 [18]（关于更进一步的扁平化性质，参见 [16, 17] ）；然而，它们并不一定收敛到球面族，见 [40, 41, 43]。关于各种类型函数 f的进一步扩散性质及水平集位置估计，可参见例如：紧支撑初始条件的情形见 [7, 9, 13, 37] ；维数为 $N = 1$ 且具有无界初始支集的初始条件见 [5, 11, 14, 20, 22, 32, 36, 44]；任意维数的情形见 [15, 16, 17, 24, 25, 35, 38, 39] 。

此外，对于问题 (1.1)-(1.2)，若考虑一族紧支撑初始条件 $[0,+\infty) \ni \sigma \mapsto u_0^\sigma$，该族在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 意义下连续且递增，并且满足 $u_0^0 = 0$，则存在唯一阈值 $\sigma^* \in (0,+\infty]$，使得以初始条件 u_0^σ 为初始条件的 (1.1) 的解 u^σ 满足：1) 若 $0 \leq \sigma < \sigma^*$，则当 $t \to +\infty$ 时， $u^\sigma(t,\cdot) \to 0$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中一致地成立；2) 若 $\sigma^* < +\infty$ 且 $\sigma > \sigma^*$，则当 $t \to +\infty$ 时， $u^\sigma(t,\cdot) \to 1$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中局部一致地成立；3) 若$\sigma^* < +\infty$，则对于某个 $x_0 \in \mathbb{R}^N$，当 $t \to +\infty$ 时，$u^{\sigma^*}(t,\cdot) \to \Phi(\cdot + x_0)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中一致地成立，见 [33]。特别地，对于任意给定的 $\alpha \in (\theta, 1]$，由于以初始条件

$$u_0^{\alpha,R} = \alpha \mathbb{1}_{B_R} := \begin{cases} \alpha & \text{if } |x| < R, \\ 0 & \text{if } |x| \geq R, \end{cases}$$

当 $R > 0$ 足够大时，在 $\mathbb{R}^N$ 中局部一致地收敛到 1（参见

例如 [3, 8]），于是由 [30] 或 [33] 可得一个唯一的 $R_\alpha \in (0, +\infty)$，使得

$$\begin{cases} u^{\alpha,R} \to 0 \text{ as } t \to +\infty \text{ uniformly in } \mathbb{R}^N & \text{if } 0 \le R < R_\alpha, \\ u^{\alpha,R} \to 1 \text{ as } t \to +\infty \text{ locally uniformly in } \mathbb{R}^N & \text{if } R > R_\alpha, \\ u^{\alpha,R} \to \Phi \text{ as } t \to +\infty \text{ uniformly in } \mathbb{R}^N & \text{if } R = R_\alpha. \end{cases} \tag{1.6}$$

在 [1] 中估计了 R_α 当 $\alpha \overset{\geq}{\to} \theta$ 时的渐近行为。此类尖锐阈值结果最早是在维数为 $N = 1$ 的情形下得到的：先是在 [46] 中针对初始条件为有界区间示性函数的情形，随后在 [6] 中推广到更一般的初始条件。在这两篇论文中，可以考虑更一般的函数 [6, 46]，f （例如点火型非线性：存在 $\theta \in$ 属于 $(0, 1)$，使得 $f = 0$ 在 $[0, \theta] \cup \{1\}$ 中成立，$f > 0$ 属于 $(\theta, 1)$，且 f 在 θ 的某个邻域内非减）。我们指出，文献 [6] 还给出了一个一般收敛结果：在维数为 $N = 1$ 的情形下，对于满足唯一假设 $f(0) = 0$ 的方程 (1.1) 的有界非负解，若其初始条件紧支撑，则这些解当 $t \to +\infty$ 时在 $\mathbb{R}$ 中局部收敛到一个平稳解；该平稳解要么是常数，要么是关于某一点对称且单调递减的函数。文献 [26, 33] 还针对 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^N$ 中双稳态型自治或非自治方程，获得了其他尖锐阈值结果；其中初始条件在无穷远处趋于 0。文献 [29, 30] 则针对更一般的函数 f 以及在 $L^2(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中的径向对称非增初始条件，得到了相关结果。较早的文献 [3, 19, 23] 还针对 $\mathbb{R}^N$ 中各种反应项 f，建立了关于初始条件 u_0 大小或幅度的非尖锐灭绝与入侵结果。关于各种类型 (1.1) 方程的平稳解收敛或收敛到平稳解集合（拟收敛）的更多结果，参见 [6, 8, 26, 27, 34] 。对于一般无界区域 Ω 中的 (1.1) 型方程，也得到了灭绝与入侵结果，见 [4, 42]。最后，我们提及 [2, 28, 31] 的一些结果：在某些具有诺伊曼边界条件的有界区域 Ω 中定义的反应扩散方程，针对满足某些逐点与积分约束的初始条件，对 $\int_\Omega u(T, \cdot)$ （或其他积分量）进行优化。

本文的主要目标与结构

本文考虑具有（1.2）型双稳态函数 f 的柯西问题（1.1），其初始条件主要是有界 Borel集合 E的示性函数，即，

$$u_0(x) = \mathbb{1}_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^N \setminus E. \end{cases} \tag{1.7}$$

我们的目标是理解初始集 E 的碎化对初始条件为 (1.7) 时方程 (1.1) 的解的大时间动力学的影响。与此前针对初始条件单调族得到的尖锐阈值结果不同，那些结果在 (1.7) 中对应于关于集合包含关系单调的集合族 E；本文通常考虑一些具有相同勒贝格测度的博雷尔集 E （因此它们通常在包含关系下不可比较），并探寻这些集合具备哪些性质时，解 u 会灭绝或发生入侵。正如我们将看到的，集合 E 的碎化会强烈影响大时间动力学。本文考察了两个碎片化指标，并在第 2 节讨论它们的性质。关于碎化 E 对大时间动力学影响的主要结果

在第 3 节给出了方程 (1.1) 和 (1.7) 的解的相关结果。我们特别证明，在等测集这一类集合中，大时间动力学相对于碎片化指标并不具有单调性。主要证明见第4节。

2 碎化指标及其性质

对于问题 (1.1)-(1.2) 中初始条件为 (1.7) 型且满足$E = B_R$的解 u ，存在唯一的 $R_1 \in (0, +\infty)$，使得当 $R < R_1$ 时，若 $t \to +\infty$ ，则解会灭绝；而当 $R > R_1$ 时，则会发生入侵。正如第 1 节所述，参见 (1.6)。现在，对于一个集合 E ，若其勒贝格测度 $\lambda(E)$ 大于 $\lambda(B_{R_1})$，能否给出一些保证灭绝或入侵发生的条件？根据最大值原理，如果 E 本身是一个球，或者 E 包含一个半径大于 R_1 的球，显然会发生入侵。但一般而言，入侵并不一定发生。例如，在维数 $N = 1$ 下，由 [12, 定理 2] 可知，若

$$D_a := (-a - r, -a) \cup (a, a + r)$$

给定 $r \in (0, 2R_1)$ 时，方程 (1.1) 的解 u^a 在初始条件 $\mathbb{1}_{D_a}$ 下，当 $t \to +\infty$ 时会灭绝，只要 $a > 0$ 足够大；而若选择 r 使得 $r > R_1$，则 $\lambda(D_a) = 2r > 2R_1 = \lambda(B_{R_1})$。

为了量化有界非忽略博雷尔集 E 与测度和 E 相同的球的偏离程度，本文考虑两种不同的碎片化指标。随后，我们列出它们的主要性质并进行比较。对于这样的集合 E，我们定义

$$R_E := \Big(\frac{\lambda(E)}{\omega_N}\Big)^{1/N} = \Big(\frac{\lambda(E)}{\lambda(B_1)}\Big)^{1/N}$$

它恰好是所有等测球的半径。接着，我们将 ρ_E 记为包含 E （除去一个零测集）的球的最小半径，它也可以表示为

$$\rho_E = \min_{x \in \mathbb{R}^N} \|d(x, \cdot)\|_{L^\infty(E)}. \tag{2.1}$$

注意，

$$\rho_E \geq \frac{\mathrm{diam}(E)}{2} \tag{2.2}$$

对任意 $N \geq 1$，当 $N = 1$ 时等号成立，其中

$$\mathrm{diam}(E) := \| (x, y) \mapsto |x - y| \|_{L^\infty(E \times E)}$$

是 E 的本质直径。实际上，存在唯一的 x_E ，使得 $E \subset B_{\rho_E}(x_E)$（除去一个零测集）。最后，

$$R_E \leq \rho_E$$

且当且仅当 E （除去一个零测集）是一个球时等号成立。

碎片化指数 δ_1

有界非忽略博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^N$ 的第一个所考虑的碎片化指数，除去乘法因子 $1/2$外，即为弗兰克尔不对称度。它基于 E 与等测球之间的 L^1 距离：

$$\delta_1(E) := \inf_{B \in \mathcal{B},\, \lambda(B) = \lambda(E)} \frac{\|\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_E\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}{2\lambda(E)}.$$

由于对于每个球 $B = B_{R_E}(x)$（即满足 $\lambda(B) = \lambda(E)$ 的球），都有 $\|\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_E\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \lambda(B\Delta E)$ $= 2\lambda(E) - 2\lambda(E \cap B_{R_E}(x)) = 2\lambda(E\setminus B_{R_E}(x))$，由映射 $x \mapsto \lambda(E\setminus B_{R_E}(x))$ 和 $x \mapsto \lambda(E \cap B_{R_E}(x))$ 在 $\mathbb{R}^N$中的连续性可得：

$$\begin{aligned}\delta_1(E) = \min_{x\in\mathbb{R}^N} \frac{\lambda(E\setminus B_{R_E}(x))}{\lambda(E)} &= \min_{x\in\mathbb{R}^N} \frac{\lambda(E) - \lambda(E \cap B_{R_E}(x))}{\lambda(E)} \\ &= 1 - \max_{x\in\mathbb{R}^N} \frac{\lambda(E \cap B_{R_E}(x))}{\lambda(E)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

特别是，

$$0 \le \delta_1(E) < 1,$$

且 $\delta(E) = 0$ 当且仅当 E 除去一个零测集后是一个球。此外，不等式 $\delta_1(E) < 1$ 中的常数 1 是最优的：例如，这些非零测博雷尔集

$$E_n := \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^N\cap(0,n)^N} B_{1/n^2}\Big(\frac{x}{n}\Big), \quad n \ge 1, \tag{2.4}$$

它们都包含在立方体 $(0,1)^N$ 中；对于指标 δ_1 as$n \to +\infty$，它们高度碎片化，具体而言，

$$\delta_1(E_n) \to 1 \quad \text{as } n \to +\infty. \tag{2.5}$$

最后，对于任意 $\nu \in (0,1)$，考虑这些非零测博雷尔集

$$F_n := \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^N\cap B_n} \Big[\frac{x}{n} + \Big(-\frac{\nu}{2n}, \frac{\nu}{2n}\Big)^N\Big] = \bigcup_{y\in(\mathbb{Z}^N/n)\cap B_1} \Big[y + \Big(-\frac{\nu}{2n}, \frac{\nu}{2n}\Big)^N\Big], \quad n \ge 1, \tag{2.6}$$

它们都包含在球 $B_{1+\nu\sqrt{N}/2}$ 中。实际上，计算点的数量 A_n of points$x \in \mathbb{Z}^N \cap B_n$ 对应于高斯圆问题的 $N-$ 维推广。这是一个困难的问题，但当 n 较大时，可以得到一些估计。特别是，$A_n = n^N\omega_N + O(n^{N-1})$ 当 $n \to +\infty$ 时，参见 [21, 第 4] 章以了解更精确的估计。因此，$\lambda(F_n) = A_n(\nu/n)^N \to \nu^N\omega_N$ 当 $n \to +\infty$ 时。同样的论证表明，$\lambda(F_n \cap B_\nu) \to \nu^{2N}\omega_N$ 当 $n \to +\infty$ 时，因此

$$\delta_1(F_n) \to 1 - \nu^N \quad \text{as } n \to +\infty.$$

碎片化指数 δ_H

所考虑的有界非忽略博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^N$的第二个碎片化指数基于 E 与等测球之间的本质豪斯多夫距离：

$$\delta_H(E) := \inf_{B\in\mathcal{B},\, \lambda(B)=\lambda(E)} \frac{d_H(E,B)}{\rho_E + R_E}.$$

由映射 $x \mapsto d_H(E, B_{R_E}(x))$ 关于 $\mathbb{R}^N$ 的连续性，还可以写成

$$\delta_H(E) = \min_{x\in\mathbb{R}^N} \frac{d_H(E, B_{R_E}(x))}{\rho_E + R_E}. \tag{2.7}$$

此外，对于唯一的 $x_E \in \mathbb{R}^N$，使得除一个零测集外 $E \subset B_{\rho_E}(x_E)$ 成立，有 $\|\text{dist}(\cdot, B_{R_E}(x_E))\|_{L^\infty(E)} \le \rho_E - R_E < \rho_E + R_E$。此外，

$\|\operatorname{dist}(\cdot,E)\|_{L^\infty(B_{R_E}(x_E))} < \rho_E + R_E$（事实上，否则，由于映射 $\operatorname{dist}(\cdot,E)$ 关于 $\mathbb{R}^N$ 连续，就存在一个点 $y_E \in B_{R_E}(x_E)$，使得 $\operatorname{dist}(y_E,E) \geq \rho_E + R_E$，因此除一个零测集外 $E \subset \mathbb{R}^N \setminus B_{\rho_E+R_E}(y_E)$ 成立；进而由三角不等式，除一个零测集外 $E \subset \mathbb{R}^N \setminus B_{\rho_E}(x_E)$ 成立，这与 $\lambda(E)$ 的正性以及 $E \subset B_{\rho_E}(x_E)$ 除一个零测集外成立相矛盾）。最后，不等式 $\|\operatorname{dist}(\cdot,E)\|_{L^\infty(B_{R_E}(x_E))} < \rho_E + R_E$ 已得到证明，因此 $d_H(E, B_{R_E}(x_E)) < \rho_E + R_E$ 并且

$$0 \leq \delta_H(E) < 1.$$

对于指标 δ_1，有界且非零测的博雷尔 E 满足 $\delta_H(E) = 0$，当且仅当 E 除去一个零测集后是一个球。此外，不等式 $\delta_H(E) < 1$ 中的常数 1 是最优的：例如，式 (2.4) 中定义的集合 E_n 满足 $\delta_H(E_n) \to 1$，当 $n \to +\infty$ 趋于……时。同样，取 $\mathbb{R}^N$ 中的两个点 $x \neq y$，非零测的博雷尔集

$$G_n := B_{1/n}(x) \cup B_{1/n}(y), \quad n \geq 1, \tag{2.8}$$

它们都包含在球 $B_{|x-y|/2+1}((x+y)/2)$ 中；对于指标 δ_H，当 $n \to +\infty$ 趋于……时，这些集合高度碎片化，其含义是

$$\delta_H(G_n) \to 1 \ \text{ as } n \to +\infty.$$

但请注意，这些集合对于指标 δ_1 并非高度碎片化，因为当 $n \to +\infty$ 趋于……时，$\delta_1(G_n) \to 1/2$。最后，对于 $\nu \in (0,1)$，由 (2.6) 定义的集合 F_n 满足

$$\delta_H(F_n) \to \frac{1-\nu}{1+\nu} \ \text{ as } n \to +\infty.$$

在维数为 $N = 1$ 的情况下，对于有界非忽略博雷尔集 E，记作

$$m_E := \operatorname{essinf} E \ \text{ and } \ M_E := \operatorname{esssup} E,$$

有 $m_E < M_E \in \mathbb{R}$, $x_E = (m_E + M_E)/2$，且 $\operatorname{diam}(E) = M_E - m_E = 2\rho_E \geq 2R_E$。此外，对于每个 $x \in \mathbb{R}$，$\|\operatorname{dist}(\cdot,(x - R_E, x + R_E))\|_{L^\infty(E)} \geq \rho_E - R_E$，当且仅当 $x = x_E$ 时取等号；而 $\|\operatorname{dist}(\cdot,E)\|_{L^\infty(x_E-R_E,x_E+R_E)} \leq \rho_E - R_E$（否则将存在 $y_E \in [x_E - R_E, x_E + R_E]$ 使得 $d := \operatorname{dist}(y_E,E) > \rho_E - R_E$，并且 $E \subset (x_E - \rho_E, x_E + \rho_E) \setminus (y_E - d, y_E + d)$ 除去一个零测集外成立，这与 $|y_E - x_E| \leq R_E$ 以及 $\lambda(E) = 2R_E$ 矛盾）。最后，对于每个 $x \in \mathbb{R}$，$d_H(E, (x - R_E, x + R_E)) \geq \rho_E - R_E$，当且仅当 $x = x_E$ 时取等号，因此

$$\delta_H(E) = \frac{\rho_E - R_E}{\rho_E + R_E} \ \text{ in dimension } N = 1.$$

此外，在任意维数 $N \geq 1$ 下，(2.1) 表明，对任意 $x \in \mathbb{R}^N$，$\|d(x, \cdot)\|_{L^\infty(E)} \geq \rho_E$，因此 $d_H(E, B_{R_E}(x)) \geq \|d(\cdot, B_{R_E}(x))\|_{L^\infty(E)} \geq \rho_E - R_E$，并且

$$\delta_H(E) \geq \frac{\rho_E - R_E}{\rho_E + R_E} \ \text{ in any dimension } N \geq 1, \tag{2.9}$$

由 (2.7) 可知。注意，与 $N = 1$ 的情形不同，在维数 $N \geq 2$ 下，不等式 (2.9) 通常是严格的。例如，取任意 $a > 0$，并考虑球壳 $N \geq 2$

$$E := B_{(a^N+1)^{1/N}} \setminus B_a.$$

对于这个集合，有 $R_E = 1$, $\rho_E = (a^N + 1)^{1/N}$；又由于 $a > (a^N + 1)^{1/N} - 1$ （因为$N \geq 2$），因此可得

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} d_H(E, B_1(x)) = d_H(E, B_1) = a > (a^N + 1)^{1/N} - 1 = \rho_E - R_E,$$

因此 $\delta_H(E) = a/(\rho_E + R_E) > (\rho_E - R_E)/(\rho_E + R_E)$。

(2.9) 的一个重要推论是，当 $\rho_E/R_E \to +\infty$ 时， $\delta_H(E) \to 1$ ，例如 (2.4) 和 (2.8) 中定义的集合 E_n 和 G_n ，对于这些集合， $\rho_{E_n}/R_{E_n} \sim n\sqrt{N}/2$ 和 $\rho_{G_n}/R_{G_n} \sim n|x-y|/2^{1+1/N}$，因为 $n \to +\infty$。

这些指标的一些性质

现在我们来列举碎片化指标 δ_1 和 δ_H 满足的一些其他性质。首先，显然它们在刚体运动下保持不变。它们在收缩或膨胀下也保持不变，即

$$\delta_1(\mu E) = \delta_1(E) \quad \text{and} \quad \delta_H(\mu E) = \delta_H(E)$$

对于每个有界非忽略博雷尔集 E 以及每个 $\mu > 0$，均成立。

此外， δ_1 与 δ_H 之间的比较，以及 $1-\delta_1$ 与 $1-\delta_H$ 之间的比较，总结如下命题。简言之，对于指标 δ_H 而言的弱碎裂集，对 δ_1 而言也属于弱碎裂集；对于指标 δ_1 而言的高度碎裂集，对 δ_H 而言也属于高度碎裂集；反向比较则不成立。

命题 2.1. *(i)* 存在常数 $\gamma > 0$ 使得

$$0 \leq \delta_1(E) \leq \gamma\, \delta_H(E) \tag{2.10}$$

对于每个有界非忽略博雷尔集 E。特别地， $\delta_1(E) \to 0$ 当 $\delta_H(E) \to 0$时。

(ii) 另一方面，

$$\delta_H(E) \not\to 0 \quad as\ \delta_1(E) \to 0.$$

(iii) 存在常数 $\eta > 0$ 使得

$$0 < 1 - \delta_H(E) \leq \eta\, (1 - \delta_1(E))^{1/N} \tag{2.11}$$

对每个有界非忽略博雷尔集 E。特别地， $\delta_H(E) \to 1$ 当 $\delta_1(E) \to 1$.

（*iv*）另一方面，

$$1 - \delta_1(E) \not\to 0 \quad as\ 1 - \delta_H(E) \to 0.$$

第（iv）部分是显然的，因为在（2.8）中定义的集合 G_n 满足：当 $n \to +\infty$ 时， $\delta_H(G_n) \to 1$; 当 $n \to +\infty$ 时， $\delta_1(G_n) \to 1/2 \neq 1$ 。对于（ii），考虑一个满足 $|x| > 1$ 的点 $x \in \mathbb{R}^N$，以及集合 $H_n := B_1 \cup B_{1/n}(x)$，其中 $n \geq 1$。有 $\delta_1(H_n) \to 0$，且 $\delta_H(H_n) \to (|x| - 1)/(|x| + 3) > 0$ ，当 $n \to +\infty$ 时成立，由此可得所需结论。第（i）和（iii）部分的证明不那么显然，将在第4.1小节中给出。

3 初始碎化对大时间行为的影响

让我们回到柯西问题（1.1），其初始条件 $u_0 = \mathbb{1}_E$ 如（1.7）所示，其中 $E \subset \mathbb{R}^N$ 始终表示有界非忽略博雷尔集，而 f 是满足（1.2）的双稳态函数。记住，对于任意这样的集合 E，$0 < u(t,\ x) < 1$ 对所有 $(t,\ x) \in (0,\ +\infty) \times \mathbb{R}^N$ 均成立，并记

$$\begin{cases} \mathcal{I} := \big\{E : u(t,\cdot) \to 1 \text{ as } t \to +\infty \text{ locally uniformly in } \mathbb{R}^N\big\}, \\ \mathcal{E} := \big\{E : u(t,\cdot) \to 0 \text{ as } t \to +\infty \text{ uniformly in } \mathbb{R}^N\big\}, \\ \mathcal{T} := \big\{E : \exists\, a \in \mathbb{R}^N,\ u(t,\cdot) \to \Phi(\cdot + a) \text{ as } t \to +\infty \text{ uniformly in } \mathbb{R}^N\big\}, \end{cases}$$

其中 $\Phi :\ \mathbb{R}^N \to (0,\ 1)$ 是方程 (1.1) 的唯一径向对称平稳解，满足 $\Phi(x) \to 0$ 当 $|x| \to +\infty$。根据第 1 节回顾的 [33] 的结果，任意有界非忽略博雷尔集 E 都属于 $\mathcal{I} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{T}$。花体字母 $\mathcal{I}$、$\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别表示入侵、灭绝和阈值。

本节的目标是确定使 E 属于 $\mathcal{I}$ 或 $\mathcal{E}$ 的充分条件，并对这些条件进行比较。根据比较原理可立即看出，若 $E \subset F$ 且 $F \in \mathcal{E}$（分别地，若 $E \in \mathcal{I}$），则 $E \in \mathcal{E}$（分别地，$F \in \mathcal{I}$）。事实上，对于关于集合包含关系单调、关于勒贝格测度连续递增的集合族 E，除至多一个阈值外，这些集合都属于 $\mathcal{I} \cup \mathcal{E}$，根据 [33], ；这也是我们主要关注使 $E \in \mathcal{I}$ 或 $E \in \mathcal{E}$ 成立的条件的原因。不过，我们此处不考虑单调集族 E，而是针对勒贝格测度 $\lambda(E)$ 固定的情形，寻找涉及碎片化指标 $\delta_1(E)$ 和 $\delta_H(E)$ 的条件。

首先可以证明，对于由式 (1.5) 中定义的球 $\mathbb{B}_r(E)$ 所生成的拓扑，集合 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{E}$ 是开集，正如下述命题所述（证明见第 4.2 小节）。

命题 3.1。对于每个 $E \in \mathcal{I}$，存在 $r > 0$，使得 $\mathbb{B}_r(E) \subset \mathcal{I}$，这里采用记号 (1.5)。类似地，对于每个 $E \in \mathcal{E}$，存在 $s > 0$，使得 $\mathbb{B}_s(E) \subset \mathcal{E}$。

其次，容易看出

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \ \big(\lambda(E) \le \varepsilon\big) \Longrightarrow \big(E \in \mathcal{E}\big), \tag{3.1}$$

而且，这个推论与碎片化指标 $\delta_1(E)$ 和 $\delta_H(E)$ 无关。事实上，令

$$M' := \max_{[0,1]} |f'| \tag{3.2}$$

并令 $\varepsilon := e^{-M'}(4\pi)^{N/2}\theta/2 > 0$，其中 $\theta \in (0,1)$ 如式 (1.2) 所示，并假设 $\lambda(E) \le \varepsilon$，则有

$$0 < u(1,x) \le \frac{e^{M'}}{(4\pi)^{N/2}} \int_E e^{-|x-y|^2/4} dy \le \frac{e^{M'}\lambda(E)}{(4\pi)^{N/2}} \le \frac{\theta}{2}$$

由最大值原理，对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 都有，因此 $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to 0$，因为 $t \to +\infty$，且 $f(0) = 0$，并且 $f < 0$ 在 $(0,\theta)$ 中。

第三，给定集合的高度收缩集会导致灭绝，而给定集合的高度膨胀集会导致入侵，如下述命题所述。

命题 3.2. 对于任意有界且不可忽略的 *Borel* $E \subset \mathbb{R}^N$，存在一些实数 $0 < \mu_{\underline{E}} \leq \mu_{\overline{E}}$，使得

$$\begin{cases} (0 < \mu < \underline{\mu}_E) & \Longrightarrow \ (\mu E \in \mathcal{E}), \\ (\mu > \overline{\mu}_E) & \Longrightarrow \ (\mu E \in \mathcal{I}). \end{cases} \tag{3.3}$$

此外，集合 $\{\mu > 0 : \ \mu E \in \mathcal{E}\}$ 和 $\{\mu > 0 : \ \mu E \in \mathcal{I}\}$ 是开集，并且

$$\{\mu > 0 : \mu E \in \mathcal{T}\} \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

事实上，(3.1) 表明 $\mu_E := (\varepsilon/\lambda(E))^{1/N} > 0$ 满足 (3.3) 的第一个断言。如果 E 有非空内部 $\mathring{E}$，也就是说，若存在 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 和 $r > 0$ 使得$E \supset B_r(x_0)$，那么根据比较原理以及 (1.1) 关于平移的不变性，当 $\mu r > R_1$时，$\mu E \supset B_{\mu r}(\mu x_0)$ 且 $\mu E \in \mathcal{I}$，其中 $R_1 > 0$ 如 (1.6) 所示。(3.3) 第二个断言的证明结尾部分（包括剩余情形 $\mathring{E} = \emptyset$），以及命题 3.2 的最后一部分，将在第 4.2 小节中完成。由 (1.6) 和命题 3.2 可知，我们很容易猜想，对于任意有界且不可忽略的博雷尔$E \subset \mathbb{R}^N$，集合 $\{\mu > 0 : \ \mu E \in \mathcal{T}\}$ 应为单点集；也就是说，若 μ_E 和 μ_E 分别表示满足 (3.3) 的最大和最小实数，则 $\mu_E = \mu_E$。如果进一步假设 E 关于某个点（比如 x_0）是星形的，那么这一性质成立；这是由 [33], 得出的，因为此时初始条件$\mathbb{1}_{\mu(E-x_0)}$ 关于 $\mu > 0$ 逐点非递减，并且在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中递增；又因为对于每个 $\mu > 0$，集合 $\mu(E - x_0)$ 和 μE 都属于同一个集合 $\mathcal{E}$、$\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{I}$。然而，在一般情形下，对于非星形集合 E，集合 $\{\mu > 0 : \ \mu E \in \mathcal{T}\}$ 中元素的唯一性仍有待证明。

其余结果均关注碎片化指标 $\delta_1(E)$ 和 $\delta_H(E)$ 对 E属于 $\mathcal{I}$还是 $\mathcal{E}$的影响。第一个此类结果指出，对于指标 δ_1，等测度且高度碎裂的集合属于消亡集 $\mathcal{E}$。

命题 3.3. 对于每个给定的 $m > 0$，都存在 $\varepsilon_m > 0$，使得任何满足 $\lambda(E) = m$ 且 $\delta_1(E) \geq 1 - \varepsilon_m$ 的有界博雷尔集 E 均属于 $\mathcal{E}$。

关于这个在第 4.2 小节中证明的结果，有两点需要说明。首先，由于命题 3.2 以及 δ_1 在膨胀下的不变性，如果不假设这些集合具有给定的勒贝格测度 m，结论便不成立。具体来说，例如，集合 Rn^2E_n（其中 $n \geq 2$、E_n 如 (2.4) 中所示，且 $R > R_1$）根据 (1.6) 和比较原理，均属于 $\mathcal{I}$；然而，$\delta_1(Rn^2E_n) = \delta_1(E_n) \to 1$ 与 $n \to +\infty$一样。

我们还指出，如果将 δ_1 替换为 δ_H，则与命题 3.3 类似的结论将不成立。例如，考虑 $R > R_1$ 和 $E_n' := B_R \cup B_1(x_n)$，其中 $R + 1 < |x_n| \to +\infty$ 为 $n \to +\infty$。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\lambda(E_n') = \omega_N(R^N + 1)$，并可由比较原理得到 $E_n' \in \mathcal{I}$；然而，$\delta_H(E_n') \to 1$，因为 $n \to +\infty$。另一方面，对于指标 δ_H，即使集合并非关于指标 δ_1 高度碎裂，只要其勒贝格测度固定，高度碎裂的集合仍可能灭绝。例如，对任意 $r \in (0, 2R_1)$，第2节第一段中给出的集合 $D_a := (-a - r, -a) \cup (a, a + r)$，其测度为 $2r$，当 $a > 0$ 足够大时都属于 $\mathcal{E}$；而 $\delta_H(D_a) \to 1$，且 $\delta_1(D_a) \to 1/2$，因为 $a \to +\infty$（这由 [12], 得出，并且在任意维数 $N \geq 1$ 下也立即有类似性质）。

在处理了高度碎片化的集合之后，现在让我们在下面的命题及其直接推论中考虑弱碎裂集。

命题 3.4。对于每个给定的 $m > \lambda(B_{R_1}) = \omega_N R_1^N$，其中 R_1 由(1.6)给出，存在 $\eta_m > 0$，使得任何满足 $\lambda(E) = m$ 和 $\delta_1(E) \le \eta_m$ 的有界博雷尔集 E 都属于 $\mathcal{I}$。

命题 3.4 在第 4.2 小节中证明。结合命题 2.1 (i)，可立即得到以下推论。

推论 3.5. 对于每个给定的 $m > \lambda(B_{R_1}) = \omega_N R_1^N$，任何满足条件 E *satisfying* $\lambda(E) = m$ 和 $\delta_H(E) \le \eta_m/\gamma$ 的有界博雷尔集都属于 $\mathcal{I}$，其中 $\eta_m > 0$ 由命题 3 中给出。4 而$\gamma > 0$ 见 (2.10)。

与命题 3.3 类似，若不假设集合具有给定的勒贝格测度 m，命题 3.4 和推论 3.5 的结论便不再成立。例如，根据 (1.6)，球 B_r with $0 < r < R_1$ 属于 $\mathcal{E}$，但其碎片化指标 $\delta_1(B_r)$ 和 $\delta_H(B_r)$ 却都等于 0。

最后，在得到关于具有给定勒贝格测度的高度碎化或弱碎裂集合的上述结果后，我们来考察以下问题：如果两个有界博雷尔集 E_1 和 E_2 具有相同的勒贝格测度，能否根据 $\delta_1(E_1)$ 与 $\delta_1(E_2)$，或 $\delta_H(E_1)$ 与 $\delta_H(E_2)$ 的值的比较，判断它们是否属于 $\mathcal{E}$ 或 $\mathcal{I}$？换言之，解 (1.1) 和 (1.7) 的大时间动力学是否会相对于初始集 E 的碎片化指标 δ_1 或 δ_H 呈现某种单调性?

事实上，很容易看出，对于指标 δ_H，这个问题的答案是否定的。本段将解释其原因。推论 3.5 表明，对于给定的 $m > \lambda(B_{R_1})$，属于指标 δ_H（即 $\delta_H(E) \le \eta_m/\gamma$）的弱碎裂有界博雷尔集 E，其勒贝格测度等于 m，属于入侵集 $\mathcal{I}$。现在，令 $R := (m/\omega_N)^{1/N} > R_1$，任取 $e \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$，并定义有界博雷尔集

$$O_n := \bigcup_{k=1}^{n} B_{R/n^{1/N}}(ke).$$

对于所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$，有 $\lambda(O_n) = m$；当 $n \to +\infty$ 时，$\delta_1(O_n) \to 1$（根据命题 2.1，当 $n \to +\infty$ 时，$\delta_H(O_n) \to 1$ 也成立）。利用命题 3.3，存在足够大的 $n_0 \ge 2$，使得 $\lambda(O_{n_0}) = m$ 且 $O_{n_0} \in \mathcal{E}$。现在任取 $R' \in (R_1, R)$，并令 $r' > 0$ 使得 $\omega_N r'^N = m - \omega_N R'^N$。任取序列 $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$，其中 $\mathbb{R}^N$，使得当 $p \to +\infty$ 时 $|x_p| \to +\infty$。有界博雷尔集

$$Q_p := B_{R'} \cup B_{r'}(x_p)$$

对所有足够大的 p，满足 $\lambda(Q_p) = m$，且由于它们包含球 $B_{R'}$并满足 $R' > R_1$，因此属于 $\mathcal{I}$。此外，$\lim_{p\to+\infty} \delta_H(Q_p) = 1 > \delta_H(O_{n_0}) > 0$（不等式$\delta_H(O_{n_0}) > 0$ 成立，因为 $n_0 \ge 2$，因此 O_{n_0} 除去一个零测集后并非球）。因此，存在足够大的 $p_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\lambda(Q_{p_0}) = m$ 且 $\delta_H(Q_{p_0}) > \delta_H(O_{n_0}) > 0$，而$Q_{p_0} \in \mathcal{I}$。总之，集合 B_R、O_{n_0} 和 Q_{p_0} 等测，

$$0 = \delta_H(B_R) < \delta_H(O_{n_0}) < \delta_H(Q_{p_0}),$$

然而

$$B_R \in \mathcal{I}, \quad O_{n_0} \in \mathcal{E} \quad \text{and} \quad Q_{p_0} \in \mathcal{I}.$$

换句话说，在等测集这一类中，方程 (1.1) 和 (1.7) 的解的大时间动力学关于 $\delta_H(E)$ 不具有单调性。

就碎片化指数 δ_1 而言，同样的单调性问题并没有那么明确。对于给定的 $m > \lambda(B_{R_1})$，我们从命题 3.4 得知，碎片化程度较弱的有界博雷尔集 E（即，指数为 δ_1（也就是 $\delta_1(E) \leq \eta_m$））且勒贝格测度等于 m 的集合属于入侵集 $\mathcal{I}$；而碎片化程度较高的集合（即，$\delta_1(E) \geq 1-\varepsilon_m$）则根据命题 3.3 属于消亡集 $\mathcal{E}$。然而，对于碎片化指数 $\delta_H(E)$ 而言，$\delta_1(E)$ 取中间值时的情况并不像前者那样明确。本文最后一个主要结果实际上表明，对于等测集类中的解（1.1）和（1.7），其大时间动力学一般而言并不关于 $\delta_1(E)$ 具有单调性。

定理 3.6. 存在一些有界非忽略博雷尔集 E_1 和 E_2，使得$\lambda(E_1) = \lambda(E_2)$、$0 < \delta_1(E_2) < \delta_1(E_1)$，而 $E_1 \in \mathcal{I}$ 和 $E_2 \in \mathcal{E}$。

沿用定理 3.6 和命题 3.3 中的记号，记 $m := \lambda(E_1) = \lambda(E_2) > 0$，则有 $0 < \delta_1(E_2) < \delta_1(E_1) < 1-\varepsilon_m$。现在考虑在（2.4）中定义的集合 E_n（对于 $n \geq 3$，为避免与上述集合 E_1 和 E_2 混淆），它们满足（ 2.5 ）。存在 $n_0 \geq 3$，使得 $\delta_1(E_{n_0}) \geq 1-\varepsilon_m$。记 $F := \mu E_{n_0}$，其中 $\mu = (m/\lambda(E_{n_0}))^{1/N} > 0$，因此 $\lambda(F) = m$，$\delta_1(F) = \delta_1(E_{n_0}) \geq 1-\varepsilon_m$，并且根据命题 3.3，有 $F \in \mathcal{E}$。有界非忽略博雷尔集 E_0、E_1 和 F 等测，并满足

$$\delta_1(E_2) < \delta_1(E_1) < \delta_1(F),$$

而

$$E_2 \in \mathcal{E}, \quad E_1 \in \mathcal{I}, \quad \text{and} \quad F \in \mathcal{E}.$$

定理 3.6（数值模拟为其提供了支持，见图 1）在第 4.3 小节中得到证明。我们给出了一种基于均匀化结果的证明，该结果对任意维数 $N \geq 1$ 都成立。我们还给出另一种证明，该证明适用于维数为 $N \geq 2$ 的情形，其依据是截然不同的几何论证，以及将球与立方体相交来构造合适初始集的方法。第一种证明基于均匀化技术，似乎表明碎化对可入侵性具有内在的正向影响，如图 1 所示。第二种证明则更偏几何，其依据不是碎化的内在影响，而是δ_1 指标无法捕捉某些类型的碎化。因此，我们认为，第一种证明中的论证，也就是说，方程 (1.1) 和 (1.7) 的解的大时间动力学相对于 E 在等测集类中的碎化所呈现的非单调性，对于很大一类碎片化指标都应当成立（而第二种证明中的论证则不应再适用于那些能够更精细地捕捉 E连通分支之间距离的指标，见第 4.3 小节中的图 2）。例如，其他指标可以基于测度 $\mathbb{1}_E$ 与 $\mathbb{1}_{B_{R_E}(x)}$ 之间的瓦瑟斯坦距离。

4 主要结果的证明

4.1 指标之间的比较 δ_1 和 δ_H：命题 2.1 的证明

命题的证明 2。1。 正如在陈述命题 2.1 后的第 2 节中已经强调的，只需证明第（i）和（iii）部分。对于（i）的证明，不失一般性，可以限制

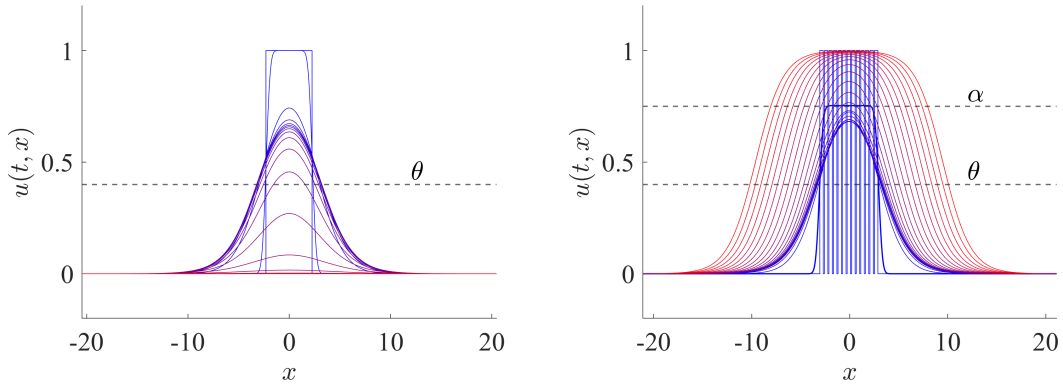


图 1：对于 $N = 1, f(s) = s(1-s)(s-\theta)$，以及 $\theta = 0.4$，以初始条件 $u_0(x) = \mathbb{1}_E(x)$ 为起点时，方程 (1.1) 的数值解 $u(t,x)$ 的演化，其中左图为 $E = E_1 := (-L/2, L/2)$，右图为 $E = E_2 := \bigcup_{x\in\mathbb{Z}\cap[-k,k]} \left[\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix} + \left(-\frac{\alpha}{2z}, \frac{\alpha}{2z}\right)\right]$。曲线对应于 $t = 0$，$t = 0.05$ 时的解，以及 t 从 4 到 80、步长为 4 时的解。梯度颜色由蓝色（最早时刻）渐变为红色（最晚时刻）。左图中，$\lambda(E_1) = L = 4.55$，且 $\delta_1(E_1) = 0$；右图中，$\alpha = 3/4$, $z = 2.16$, $k = 6$, $\lambda(E_2) = 4.52$，且 $\delta_1(E_2) = 0.23$。我们在此观察到，尽管 z 并不算大，且 $\lambda(E_2)$ 甚至小于 $\lambda(E_1)$，但碎片化（右图）提高了入侵成功率。我们还注意到，当 $t \ll 1$ 时，$u(t,x) \approx \alpha \mathbb{1}_{B_R}$，且 $R = k/z + \alpha/(2z)$。计算所用的 Matlab 代码可在 `http://doi.org/10.17605/OSF.IO/ZM479` 获取。

在有界博雷尔集这一类中，E 满足 $\rho_E = 1$，因为指标 δ_1 和 δ_H 在集合的膨胀或收缩下保持不变。考虑任意这样的集合 E。首先假设

$$\delta_H(E) < \frac{1}{4}.$$

由 (2.7) 和 $0 < R_E \le \rho_E = 1$，于是存在一点 $y_E \in \mathbb{R}^N$ 使得

$$d_H(E, B_{R_E}(y_E)) = \delta_H(E)\,(\rho_E + R_E) \le 2\delta_H(E) < \frac{1}{2},$$

因此，除一个零测集外，$E \subset B_{R_E+1/2}(y_E)$。由此可得 $R_E + 1/2 \ge \rho_E = 1$，即 $R_E \ge 1/2$。另一方面，

$$\begin{aligned} \delta_1(E) \;\le\; \frac{\lambda(E \setminus B_{R_E}(y_E))}{\lambda(E)} \;&\le\; \frac{\omega_N (R_E + d_H(E, B_{R_E}(y_E)))^N - \omega_N R_E^N}{\omega_N R_E^N} \\ &\le\; \frac{(R_E + 2\delta_H(E))^N - R_E^N}{R_E^N}. \end{aligned}$$

由于 $1/2 \le R_E \le R_E + 2\delta_H(E) \le 3/2$，由中值定理可推得 $\delta_1(E) \le 2^N N (3/2)^{N-1} \times (2\delta_H(E)) = 4N3^{N-1}\delta_H(E)$。

若此时 $\delta_H(E) \ge 1/4$，则 $\delta_1(E) < 1 \le 4\delta_H(E)$。最后，对每个有界非忽略博雷尔集 E，都有 $\delta_1(E) \le 4N3^{N-1}\delta_H(E)$，即 (2.10) 对 $\gamma := 4N3^{N-1} > 0$ 成立。

对于 (iii) 的证明，不妨将范围限制在满足 E 且 $R_E = \sqrt{N}/2$ 的有界博雷尔集类中。任取这样一个集合 E。首先假设

$$0 < 1 - \delta_1(E) < \frac{1}{6^N}.$$

Then
$$\frac{1}{2}\times\Big(\frac{1}{(1-\delta_1(E))^{1/N}}-1\Big)-1>\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-\delta_1(E))^{1/N}}>\frac{3}{2},$$
并且存在一个整数 $m_E\geq 2$ 使得
$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-\delta_1(E))^{1/N}}<m_E<\frac{1}{2}\times\Big(\frac{1}{(1-\delta_1(E))^{1/N}}-1\Big). \tag{4.1}$$
现在，由于任意边长为单位长度的立方体都包含在半径为 $R_E=\sqrt{N}/2$ 的球内，特别有
$$\max_{k\in\mathbb{Z}^N}\frac{\lambda(E\cap(k+(0,1)^N))}{\lambda(E)}\leq\max_{x\in\mathbb{R}^N}\frac{\lambda(E\cap B_{R_E}(x))}{\lambda(E)}=1-\delta_1(E),$$
其中，最后一个等式由 (2.3) 得出。另一方面，由于 $\lambda(E)>0$，且立方体 $k+(0,1)^N$ 除一个零测集外覆盖 $\mathbb{R}^N$，而 k 描述 $\mathbb{Z}^N$，因此存在 $k_E\in\mathbb{Z}^N$ 使得
$$0<\max_{k\in\mathbb{Z}^N}\lambda(E\cap(k+(0,1)^N))=\lambda(E\cap(k_E+(0,1)^N))\leq(1-\delta_1(E))\,\lambda(E).$$
因此，
$$\lambda\Big(E\cap\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^N,\,\|k\|_\infty\leq m_E}(k_E+k+(0,1)^N)\Big)\leq(2m_E+1)^N\times(1-\delta_1(E))\,\lambda(E).$$
由于 $\lambda(E)>0$，并且根据 (4.1) 中的右侧不等式，$(2m_E+1)^N(1-\delta_1(E))<1$，可得
$$\lambda\Big(E\cap\Big(\mathbb{R}^N\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^N,\,\|k\|_\infty\leq m_E}(k_E+k+(0,1)^N)\Big)\Big)>0,$$
因此，存在 $k'_E\in\mathbb{Z}^N$，满足 $\|k'_E\|_\infty>m_E$（即 $\|k'_E\|_\infty\geq m_E+1$），使得$\lambda(E\cap(k_E+k'_E+(0,1)^N))>0$。记住，$\lambda(E\cap(k_E+(0,1)^N))>0$，可得 $\operatorname{diam}(E)\geq m_E$，因此
$$\rho_E\geq\frac{\operatorname{diam}(E)}{2}\geq\frac{m_E}{2}\geq\frac{1}{8\,(1-\delta_1(E))^{1/N}},$$
利用 (2.2) 和 (4.1) 中的左侧不等式。结合 (2.9) 和归一化条件$R_E=\sqrt{N}/2$，可推知
$$1-\delta_H(E)\leq\frac{2R_E}{\rho_E+R_E}\leq\frac{2R_E}{\rho_E}\leq 8\sqrt{N}\,(1-\delta_1(E))^{1/N}.$$
若此时 $1-\delta_1(E)\geq 1/6^N$，则 $1-\delta_H(E)\leq 1\leq 6(1-\delta_1(E))^{1/N}$。最后，对每个有界非忽略博雷尔集 $\overline{E}$，都有$1-\delta_H(E)\leq 8\sqrt{N}\,(1-\delta_1(E))^{1/N}$，也就是说，(2.11) 在 $\eta:=8\sqrt{N}$ 时成立。至此，命题 2.1 的证明完成。 □

4.2 对膨胀集以及高度或轻度碎片化集合的灭绝与入侵

本小节旨在证明命题 3.1–3.4，讨论方程 (1.1) 的解在 (1.7) 中的示性集 E 接近、经膨胀、高度碎片化或弱碎片化时的大时间动力学。

命题 3.1. 我们首先考虑 E 在 $\mathcal{I}$ 中的情形，并证明：对于任意有界博雷尔集 F，只要 $d_1(E,F)$ 足够小，便有 $F \in \mathcal{I}$。令 u_E 和 u_F 分别表示初始条件为 $\mathbb{1}_E$ 和 $\mathbb{1}_F$ 时方程 (1.1) 的解。任取满足 (1.2) 中 $\theta \in (0,1)$ 条件的 $\alpha \in (\theta,1)$，回忆 (1.6) 中 $R_\alpha > 0$ 的定义，并任取 $R \in (R_\alpha, +\infty)$。由于 $u_E(t,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中关于 $t \to +\infty$ 局部一致地 $\to 1$，存在 $T > 0$使得 $\min_{B_R} u_E(T,\cdot) > \alpha$。由于

$$\|u_E(T,\cdot) - u_F(T,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \frac{e^{M'T}}{(4\pi T)^{N/2}} \times \|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_F\|_{L_1(\mathbb{R}^N)} \tag{4.2}$$

根据最大值原理，取 (3.2) 中的 $M' = \max_{[0,1]} |f'|$，则存在 $r > 0$，使得当 $d_1(E,F) = \|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_F\|_{L_1(\mathbb{R}^N)} < r$时，$\min_{B_R} u_F(T,\cdot) \ge \alpha$。因此，对于每个 $F \in \mathbb{B}_r(E)$，都有 $1 \ge u_F(T,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中 $\ge \alpha \mathbb{1}_{B_R}$，所以根据比较原理和 (1.6)，再次得到 $u_F(t,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中关于 $t \to +\infty$ 局部一致地 $\to 1$。换言之，$\mathbb{B}_r(E) \subset \mathcal{I}$。

现在假设 $E \in \mathcal{E}$。因此，存在 $T > 0$，使得 $0 \le u_E(T,\cdot) \le \theta/3$属于 $\mathbb{R}^N$。由 (4.2)，于是存在 $s > 0$，使得对于每个满足 $d_1(E,F) < s$ 的有界博雷尔集 F，都有 $u_F(T,\cdot) \le \theta/2$ 属于 $\mathbb{R}^N$。因此，根据 (1.2) 和比较原理，非负函数 u_F 当 $t \to +\infty$ 时关于 $\mathbb{R}^N$ 一致地收敛到 0。换言之，$\mathbb{B}_s(E) \subset \mathcal{E}$。 □

命题3。2。 正如在陈述命题 3.2 之后的第 3 节中所强调的，要证明 (3.3)，只需处理具有较大 μ 和 $\mathring{E} = \emptyset$ 的膨胀集 μE 这一情形。设 E 为这样的集合。由于 $\lambda(E) > 0$，并且

$$\frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\, dy \to \mathbb{1}_E(x) \quad \text{as } r \overset{>}{\to} 0 \text{ for almost every } x \in \mathbb{R}^N$$

根据勒贝格微分定理，存在 $x_0 \in \mathbb{R}^N$，使得 $\lambda(E \cap B_r(x_0)) \sim \lambda(B_r(x_0))$，当 $r \overset{>}{\to} 0$ 时成立。由于 (1.1) 在平移下保持不变，不失一般性，可假设 $x_0 = 0$。任取 $R > R_1$，其中 R_1 按照 (1.6) 中的定义取值，且 $\alpha = 1$（因此，$B_R \in \mathcal{I}$）。由于

$$\lambda(B_R) \ge \lambda(\mu E \cap B_R) = \mu^N \lambda(E \cap B_{R/\mu}) \underset{\mu \to +\infty}{\sim} \mu^N \lambda(B_{R/\mu}) = \lambda(B_R),$$

由此可得 $d_1(B_R, \mu E \cap B_R) \to 0$，当 $\mu + \infty$ 时成立。因此，根据命题 3.1，对所有足够大的 $\mu > 0$，都有 $\mu E \cap B_R \in \mathcal{I}$。最后，根据比较原理，对所有足够大的 $\mu > 0$，都有 $\mu E \in \mathcal{I}$。

现在我们转向证明集合 $\{\mu > 0 : \mu E \in \mathcal{E}\}$ 和$\{\mu > 0 : \mu E \in \mathcal{I}\}$的开性。当有界博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^N$ 对于 N维勒贝格测度 λ具有零测边界时，即如果 $\lambda(\partial E) = 0$，那么，对于

任意 $\mu_0 > 0$, $\lambda(\partial(\mu_0 E)) = 0$ 且

$$\begin{aligned} d_1(\mu E, \mu_0 E) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\mathbb{1}_{\mu E}(x) - \mathbb{1}_{\mu_0 E}(x)|\, dx \\ &= \int_{\overset{\circ}{\mu_0 E}} |\mathbb{1}_{\mu E}(x) - \mathbb{1}_{\mu_0 E}(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mu_0 E}} |\mathbb{1}_{\mu E}(x) - \mathbb{1}_{\mu_0 E}(x)|\, dx \underset{\mu \to \mu_0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

由勒贝格控制收敛定理可知。因此，在这种情况下，集合 $\{\mu > 0 : \mu E \in \mathcal{E}\}$ 和 $\{\mu > 0 : \mu E \in \mathcal{I}\}$ 的开性由命题 3.1 得出。

现在考虑一般有界博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^N$ 的情形。首先假设 $\mu_0 > 0$满足

$$\mu_0 E \in \mathcal{I}.$$

对于 $\mu > 0$，此处用 u_μ 表示以 $\mathbb{1}_{\mu E}$为初始条件的方程 (1.1) 的解。与命题 3.1 的证明类似，任取 $\alpha \in (\theta, 1)$ 以及任意 $R > R' > R_\alpha$，其中 $R_\alpha > 0$ 如 (1.6) 所示。根据假设，当 $t \to +\infty$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中局部一致地收敛时，有 $u_{\mu_0}(t, \cdot) \to 1$。于是存在$T > 0$，使得 $\min_{B_R} u_{\mu_0}(T, \cdot) > \alpha$。另一方面，对于每个 $\mu > 0$，函数

$$(t, x) \mapsto v_\mu(t, x) := u_\mu\Big(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} t, \frac{\mu}{\mu_0} x\Big)$$

在 $[0, 1]$ 中取值并满足

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial t} = \Delta v_\mu + \frac{\mu^2}{\mu_0^2} f(v_\mu), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^N$$

初始条件为 $v_\mu(0, \cdot) = \mathbb{1}_{\mu_0 E} = u_{\mu_0}(0, \cdot)$。因此，函数 $w_\mu := v_\mu - u_{\mu_0}$ 在时刻 $t = 0$ 消失，并满足

$$\frac{\partial w_\mu}{\partial t} \le \Delta w_\mu + f(v_\mu) - f(u_{\mu_0}) + M\Big|\frac{\mu^2}{\mu_0^2} - 1\Big| \le \Delta w_\mu + M'|w_\mu| + M\Big|\frac{\mu^2}{\mu_0^2} - 1\Big|$$

在 $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$ 中，其中 $M := \max_{[0,1]} |f|$ 且 $M' = \max_{[0,1]} |f'|$。由最大值原理可得

$$w_\mu(t, x) \le \frac{M}{M'}\Big|\frac{\mu^2}{\mu_0^2} - 1\Big| \times \big(e^{M' t} - 1\big) \ \text{ for all } t \ge 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}^N.$$

用 $u_{\mu_0} - v_\mu$ 作类似论证，可得 $|v_\mu - u_{\mu_0}|$的相同上界。特别地，在时刻 $t = T$，将 v_μ 用 u_μ 表示，并将 x 改写为 $(\mu_0/\mu)x$，可推出

$$\Big|u_\mu\Big(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} T, x\Big) - u_{\mu_0}\Big(T, \frac{\mu_0}{\mu} x\Big)\Big| \le \frac{M}{M'}\Big|\frac{\mu^2}{\mu_0^2} - 1\Big| \times \big(e^{M' T} - 1\big) \ \text{ for all } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.3}$$

因此，注意到 $\min_{B_R} u_{\mu_0}(T, \cdot) > \alpha$，且 $R > R'$，存在$\varepsilon \in (0, \mu_0)$ 使得，若 $|\mu - \mu_0| \le \varepsilon$，则

$$\min_{\overline{B_{R'}}} u_\mu\Big(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} T, \cdot\Big) \ge \alpha,$$

因此，在 $\mathbb{R}^N$ 中有 $1 \ge u_\mu((\mu^2/\mu_0^2)T, \cdot) \ge \alpha \mathbb{1}_{B_{R'}}$。由于 $R' > R_\alpha$，由 (1.6) 和最大值原理可得，当 $t \to +\infty$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中局部一致地趋于 1 时，$u_\mu(t, \cdot)$

对每个 $\mu\in(\mu_0-\varepsilon,\ \mu_0+\varepsilon)$ 都成立，也就是说，对任意这样的 μ，$\mu E\in\mathcal{I}$ 都成立。由 μ_0 的任意性（其中 $\mu_0E\in\mathcal{I}$），可知 $\{\mu>0:\ \mu E\in\mathcal{I}\}$ 是开集。

现在令 $\mu_0>0$ 满足

$$\mu_0E\in\mathcal{E},$$

并令 $T>0$ 满足 $0\leq u_{\mu_0}(T,\cdot)\leq\theta/3$ 属于 $\mathbb{R}^N$。不依赖于假设 $\mu_0E\in\mathcal{E}$ 的不等式 (4.3) 保证存在 $\varepsilon\in(0,\mu_0)$，使得若$|\mu-\mu_0|\leq\varepsilon$，则 $u_\mu((\mu^2/\mu_0^2)T,\cdot)\leq\theta/2$ 属于 $\mathbb{R}^N$，因此根据 (1.2) 和比较原理，$u_\mu(t,\cdot)\to 0$ 当 $t\to+\infty$ 时关于$\mathbb{R}^N$一致地成立。最后，对所有 $\mu\in(\mu_0-\varepsilon,\mu_0+\varepsilon)$，$\mu E\in\mathcal{E}$，且集合 $\{\mu>0:\ \mu E\in\mathcal{E}\}$ 是开集。

最后，性质 (3.4) 可由 (3.3)、集合 $\{\mu>0:\ \mu E\in\mathcal{E}\}$ 和 $\{\mu>0:\ \mu E\in\mathcal{I}\}$ 的开性，以及对每个 $\mu>0$ 都有 $\mu E\in\mathcal{E}\cup\mathcal{T}\cup\mathcal{I}$ 这一事实立即推出。至此，命题 3.2 的证明完成。

□

命题 3.3 的证明。令 $m>0$ 给定，定义

$$s:=\frac{1}{\sqrt{N}}\times\Big(\frac{m}{\omega_N}\Big)^{1/N}>0,$$

并注意，任何测度为 $(2s)^N$ 的立方体都包含在一个测度为 m 的球内。现在考虑任意满足 $\lambda(E)=m$ 的有界博雷尔集 E，并令 u 为初始条件为 (1.7) 的方程 (1.1) 的解。于是，由公式 (2.3) 和前面的观察可知，对于每个测度为 $(2s)^N$ 的立方体 Q，都有 $\lambda(Q\cap E)\leq m(1-\delta_1(E))$。因此，回想定义 $M'=\max_{[0,1]}|f'|$，由比较原理可得，对于每个 $x\in\mathbb{R}^N$，

$$\begin{aligned}
0\ \leq\ u(1,x)\ &\leq\ \frac{e^{M'}}{(4\pi)^{N/2}}\times\int_E e^{-|x-y|^2/4}dy\\
&=\ \frac{e^{M'}}{(4\pi)^{N/2}}\times\sum_{k\in\mathbb{Z}^N}\int_{E\cap(x+2ks+(-s,s)^N)}e^{-|x-y|^2/4}dy\\
&\leq\ \frac{e^{M'}}{(4\pi)^{N/2}}\times m\times(1-\delta_1(E))\times\sum_{k\in\mathbb{Z}^N}e^{-\max(2\|k\|_\infty-1;0)^2s^2/4},
\end{aligned}$$

上述两个级数均收敛。由于最后一个不等式的右侧不依赖于 x，因此存在 $\varepsilon_m>0$，使得只要 $0\leq u(1,\cdot)\leq\theta/2$，$\mathbb{R}^N$ 中就有 $\delta_1(E)\geq 1-\varepsilon_m$，故当 $t\to+\infty$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中一致地趋于 $\to 0$ 时，$u(t,\cdot)\to 0$。换言之，任何满足 $\lambda(E)=m$ 且 $\delta_1(E)\geq 1-\varepsilon_m$ 的有界博雷尔集 E 都属于 $\mathcal{E}$。

□

命题3.4. 任取 $m>\lambda(B_{R_1})=\omega_NR_1^N$。定义 $\alpha=(\theta+1)/2\in(\theta,1)$ 和 $R=R_\alpha+1$，其中 $\theta\in(0,1)$，且 R_α 由 (1.2) 和 (1.6) 给出。令 v 表示以 $\mathbb{1}_{B_{(m/\omega_N)^{1/N}}}$ 为初始条件的 (1.1) 的解。由于根据假设 $(m/\omega_N)^{1/N}>R_1$，由 (1.6) 可得 $v(t,\cdot)\to 1$，当 $t\to+\infty$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中局部一致地变化时成立，因此存在 $T>0$，使得 $\min^{B_R}v(T,\cdot)>\alpha$。现在考虑任意满足 $\lambda(E)=m$ 的有界博雷尔集 E，并由 (2.3) 取 $z_E\in\mathbb{R}^N$ 使得

$$\|\mathbb{1}_E-\mathbb{1}_{B_{(m/\omega_N)^{1/N}}(z_E)}\|_{L_1(\mathbb{R}^N)}=2\lambda(E\setminus B_{(m/\omega_N)^{1/N}}(z_E))=2\lambda(E)\delta_1(E)=2m\delta_1(E).$$

与 (4.2) 中一样，具有初始条件 $\mathbb{1}_E$ 的 (1.1) 的解 u_E 满足

$$\|u_E(T,\cdot)-v(T,\cdot-z_E)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq\frac{e^{M'T}}{(4\pi T)^{N/2}}\times\|\mathbb{1}_E-\mathbb{1}_{B_{(m/\omega_N)^{1/N}}(z_E)}\|_{L_1(\mathbb{R}^N)},$$

因此 $\|u_E(T,\cdot+z_E)-v(T,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le 2e^{M'T}(4\pi T)^{-N/2}m\times\delta_1(E)$。注意到 α 和 T 仅依赖于 f 和 m （以及维数 N），并记得 $\min_{B_R} v(T,\cdot)>\alpha$，于是存在 $\eta_m>0$，使得只要 $\delta_1(E)\le\eta_m$，就有 $\min_{B_R} u_E(T,\cdot+z_E)\ge\alpha$。对于任何这样的 E，都有 $u_E(T,\cdot+z_E)\ge\alpha\mathbb{1}_{B_R}$，因此根据 (1.6) 和定义 $R=R_\alpha+1$，$u_E(t,\cdot)\to 1$ 随着 $t\to+\infty$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中局部一致地成立。因此，任何满足 $\lambda(E)=m$ 且 $\delta_1(E)\le\eta_m$ 的有界博雷尔集 E 都属于 $\mathcal{I}$。□

4.3 定理 3.6 的证明

我们给出定理 3.6 的两种不同证明。第一种证明适用于任意维数$N\ge 1$，并基于均匀化技术；所构造的集合 E_1 和 E_2与(2.6)中定义的集合 F_n 具有相似性。另一种证明适用于维数$N\ge 2$，所构造的集合涉及立方体及其与球的交集。

定理 3的证明6 适用于任意维数 $N\ge 1$。考虑任意 $\alpha\in(\theta,\ 1)$，其中 $\theta\in(0,\ 1)$如(1.2)中所述。然后固定某些实数 R 和 R'，使其充分接近 R_α，从而

$$0<R'<R_\alpha<R,\ \ \alpha^{1/N}R<R',\ \ \text{and}\ \ 0<\alpha R^N-\alpha R'^N<\min\Big(\frac{R_1^N}{2^N},\alpha^2R^N\Big),\tag{4.4}$$

其中 $R_\alpha>0$ 和 $R_1>0$ 如(1.6)中所述。根据 R_α的定义，具有初始条件 $\alpha\mathbb{1}_{B_{R'}}$的(1.1)的解 $\widetilde{v}$ 在 $\mathbb{R}^N$上一致地趋于0，当 $t\to+\infty$时，因此存在 $T>0$，使得 $\widetilde{v}(T,\cdot)\le\theta/3$于 $\mathbb{R}^N$中。对于 $\beta\in(\alpha,1]$，令 $\widetilde{v}^\beta$为具有初始条件 $\beta\mathbb{1}_{B_{R'}}$的(1.1)的解。由最大值原理，由于 $0\le\widetilde{v}^\beta(T,\cdot)-\widetilde{v}(T,\cdot)\le e^{M'T}(4\pi T)^{-N/2}\|\beta\mathbb{1}_{B_{R'}}-\alpha\mathbb{1}_{B_{R'}}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$，其中 $M'=\max_{[0,1]}|f'|$如(3.2)中所述，因此可以选择充分接近 α的 $\beta\in(\alpha,\ 1)$，使得 $0\le\widetilde{v}^\beta(T,\cdot)\le\theta/2$于 $\mathbb{R}^N$中，于是

$$\widetilde{v}^\beta(t,\cdot)\to 0\ \text{as}\ t\to+\infty\ \text{uniformly in}\ \mathbb{R}^N\tag{4.5}$$

由（1.2）和最大值原理可得。即使这意味着要减小 (α,1) 中的 β，也可以不失一般性地假设

$$0<\alpha R^N-\beta R'^N<\min\Big(\frac{R_1^N}{2^N},\alpha^2R^N\Big).\tag{4.6}$$

考虑以下有界博雷尔集

$$F_n:=\bigcup_{z\in(\mathbb{Z}^N/n)\cap B_R}\Big[z+\Big(-\frac{\alpha^{1/N}}{2n},\frac{\alpha^{1/N}}{2n}\Big)^N\Big]$$

and

$$G_n:=\bigcup_{z\in(\mathbb{Z}^N/n)\cap B_{R'}}\Big[z+\Big(-\frac{\beta^{1/N}}{2n},\frac{\beta^{1/N}}{2n}\Big)^N\Big]$$

对于 $n\ge 1$。集合 F_n 和 G_n 满足以下条件（见（2.6）及下文）

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda(F_n)=\alpha\omega_NR^N>\beta\omega_NR'^N=\lim_{n\to+\infty}\lambda(G_n)\tag{4.7}$$

and

$$\lim_{n\to+\infty}\delta_1(F_n)=1-\alpha>1-\beta=\lim_{n\to+\infty}\delta_1(G_n)>0.\tag{4.8}$$

结合（4.6），于是存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$0 < \lambda(G_n) < \lambda(F_n) \ \text{ and } \ \lambda(F_n) - \lambda(G_n) < \min\left(\omega_N \frac{R_1^N}{2^N}, \alpha^2 \omega_N R^N\right) \tag{4.9}$$

对所有 $n \geq n_1$。

令 u_n、v_n、u 和 $v = \widetilde{v}^\beta$ 分别为方程 (1.1) 在初始条件 $\mathbb{1}_{F_n}$、$\mathbb{1}_{G_n}$、$\alpha\,\mathbb{1}_{B_R}$ 和 $\beta\,\mathbb{1}_{B_{R'}}$ 下的解。类似地，令 U_n、V_n、U 和 V 分别为热方程 $\frac{\partial z}{\partial t} = \Delta z$ 在初始条件 $\mathbb{1}_{F_n}$、$\mathbb{1}_{\overline{G_n}}$、$\alpha\,\mathbb{1}_{B_R}$ 和 $\beta\,\mathbb{1}_{B_{R'}}$ 下的解。需要指出的是，这 8 个函数均非负，且 u_n、v_n、u 和 v 的取值均在 $[0,1]$ 中。由于当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\|\alpha \mathbb{1}_{B_R} - (\alpha-\varepsilon)\mathbb{1}_{B_{R-\varepsilon}}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$，并且根据 (1.6)，$u(t,\cdot) \to 1$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上局部一致地趋于 $t \to +\infty$（因为 $R > R_\alpha$），仿照命题 3.1 的证明可知，存在 $\varepsilon_1 \in (0, R)$，使得具有初始条件

$$u_0^{\varepsilon_1} := (\alpha - \varepsilon_1)\mathbb{1}_{B_{R-\varepsilon_1}}$$

当 $t \to +\infty$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中局部一致地趋于 1。还注意到，当 $t \to 0$ 在 B_R 中局部一致地趋于 $\to \alpha$ 时，$U(t,\cdot)$。因此，存在充分小的 $t_1 > 0$，使得

$$U(t_1,\cdot) \geq \left(\alpha - \frac{\varepsilon_1}{3}\right)\mathbb{1}_{B_{R-\varepsilon_1}} \ \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

即使这意味着减小 $t_1 > 0$，也不失一般性地可假设 $(\alpha - \varepsilon_1/2)e^{-M't_1} \geq \alpha - \varepsilon_1$。现在，根据 F_n 的定义，由齐次化可得

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ U_n(t_1,x) \quad &= \quad \frac{1}{(4\pi t_1)^{N/2}} \sum_{z \in (\mathbb{Z}^N/n) \cap B_R} \int_{z + (-\alpha^{1/N}/(2n),\, \alpha^{1/N}/(2n))^N} e^{-|x-y|^2/(4t_1)}\, dy \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ \frac{1}{(4\pi t_1)^{N/2}} \int_{B_R} \alpha\, e^{-|x-y|^2/(4t_1)}\, dy = U(t_1,x) \end{aligned}$$

关于 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致地成立。因此，存在 $n_2 \geq n_1$，使得

$$U_n(t_1,\cdot) \geq \left(\alpha - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\mathbb{1}_{B_{R-\varepsilon_1}} \ \text{ in } \mathbb{R}^N \text{ for all } n \geq n_2.$$

由于根据最大值原理，$1 \geq u_n(t_1,\cdot) \geq e^{-M't_1} U_n(t_1,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中，故可推出，对所有 $n \geq n_2$，$1 \geq u_n(t_1,\cdot) \geq (\alpha - \varepsilon_1)\mathbb{1}_{B_{R-\varepsilon_1}} = u_0^{\varepsilon_1}$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中，因而当 $t \to +\infty$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中局部一致地趋于 $\to 1$ 时，$u_n(t,\cdot)$。换言之，

$$F_n \in \mathcal{I} \ \text{ for all } n \geq n_2. \tag{4.10}$$

现在考虑初始条件为 $\beta\,\mathbb{1}_{B_{R'}}$ 的方程 (1.1) 的解 $v = \widetilde{v}^\beta$。由 (4.5)，存在 $T' > 0$，使得 $0 \leq v(T',\cdot) \leq \theta/3$ 于 $\mathbb{R}^N$ 中。对于 $\varepsilon \in (0,\ 1-\beta)$，令 v^ε 为初始条件为

$$v_0^\varepsilon := (\beta + \varepsilon)\,\mathbb{1}_{B_{R'+\varepsilon}} + \varepsilon\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R'+\varepsilon}}.$$

由于

$$\begin{aligned} 0 \leq v^\varepsilon(T',x) - v(T',x) \leq \frac{e^{M'T'}}{(4\pi T')^{N/2}} \Big[&\int_{B_{R'}} \varepsilon\, e^{-|x-y|^2/(4T')} dy + \int_{B_{R'+\varepsilon} \setminus B_{R'}} (\beta+\varepsilon)\, e^{-|x-y|^2/(4T')} dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R'+\varepsilon}} \varepsilon\, e^{-|x-y|^2/(4T')} dy \Big] \end{aligned}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^N$，可以推知，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $v^{\varepsilon}(T', \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中一致地 $\to v(T', \cdot)$。因此，存在 $\varepsilon_2 \in (0, 1-\beta)$，使得 $0 \le v^{\varepsilon_2}(T', \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中 $\le \theta/2$，从而当 $t \to +\infty$ 时， $v^{\varepsilon_2}(t, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中一致地 $\to 0$。另一方面，当 $t \to 0$ 时，$\sup^{B_{R'+\varepsilon_2}} v(t, \cdot) \to \beta$，且 $\sup^{\mathbb{R}^N \setminus B_{R'+\varepsilon_2}} v(t, \cdot) \to 0$；而对所有 $t \ge 0$，由最大值原理， $V(t, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中 $\le e^{M't} v(t, \cdot)$。因此，存在一个足够小且与 n 无关的 $t_2 > 0$，使得

$$V(t_2, \cdot) \le \Big(\beta + \frac{\varepsilon_2}{3}\Big) \mathbb{1}_{B_{R'+\varepsilon_2}} + \frac{\varepsilon_2}{3} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R'+\varepsilon_2}}.$$

即使这意味着减小 $t_2 > 0$，也可以不失一般性地假设 $(\beta + \varepsilon_2/2) e^{M't_2} \le \beta + \varepsilon_2$ 且 $(\varepsilon_2/2) e^{M't_2} \le \varepsilon_2$。现在，根据 G_n的定义，借助均匀化可知，当 $n \to +\infty$ 时， $V_n(t_2, \cdot) \to V(t_2, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中一致地成立；对于上文中的 $U_n(t_1, \cdot)$和 $U(t_1, \cdot)$，情况也相同。因此，存在 $n_3 \ge n_2$ 使得

$$V_n(t_2, \cdot) \le \Big(\beta + \frac{\varepsilon_2}{2}\Big) \mathbb{1}_{B_{R'+\varepsilon_2}} + \frac{\varepsilon_2}{2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R'+\varepsilon_2}} \text{ in } \mathbb{R}^N \text{ for all } n \ge n_3.$$

由最大值原理可知，在 $\mathbb{R}^N$中， $0 \le v_n(t_2, \cdot) \le e^{M't_2} V_n(t_2, \cdot)$，因此可以推断，对于所有 $n \ge n_3$， $0 \le v_n(t_2, \cdot) \le (\beta + \varepsilon_2) \mathbb{1}_{B_{R'+\varepsilon_2}} + \varepsilon_2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R'+\varepsilon_2}} = v_0^{\varepsilon_2}$在 $\mathbb{R}^N$中成立，故

$$0 \le v_n(t_2 + t, \cdot) \le v^{\varepsilon_2}(t, \cdot) \text{ in } \mathbb{R}^N \text{ for all } t \ge 0 \text{ and } n \ge n_3 \tag{4.11}$$

由最大值原理可得。特别地， $v_n(t, \cdot) \to 0$ 当 $t \to +\infty$ 在 $\mathbb{R}^N$中一致地趋于 $G_n \in \mathcal{E}$时，对所有 $n \ge n_3$均成立。

回忆 (4.9)，并定义

$$0 < \rho_n := \Big(\frac{\lambda(F_n) - \lambda(G_n)}{\omega_N}\Big)^{1/N} < \frac{R_1}{2} \tag{4.12}$$

对 $n \ge n_1$。最后考虑点序列 $(x_n)_{n \ge n_1}$，其中 $\mathbb{R}^N$ 满足 $B_{\rho_n}(x_n) \cap G_n = \emptyset$对每个 $n \ge n_1$均成立，且当 $n \to +\infty$趋于 $|x_n| \to +\infty$ 时成立。有界博雷尔集

$$H_n := G_n \cup B_{\rho_n}(x_n)$$

满足

$$\lambda(H_n) = \lambda(F_n) > 0 \text{ for all } n \ge n_1. \tag{4.13}$$

由于 $\rho_n < R_1/2$，根据 R_1 的定义，所有球 $B_{\rho_n}(x_n)$ 都属于 $\mathcal{E}$。

对于初始条件为 $\mathbb{1}_{H_n}$的柯西问题 (1.1)，当 n 足够大时，两个分量 $\mathbb{1}_{G_n}$ 和 $\mathbb{1}_{B_{\rho_n}(x_n)}$ 可视为近似独立的初始条件，因此 H_n 将属于 $\mathcal{E}$；对于每个足够大的 n，情况皆如此（如第 2 节第一段中给出的集合 D_a 的例子）。更准确地说，为了证明这一事实，先固定满足 $G_n \subset B_\rho$ 且对所有 $n \ge n_1$ 都有 $\rho_n \le \rho$ 的 $\rho > 0$。记 w、 w_n 和 z_n 分别为初始条件为 $\mathbb{1}_{B_{R_1/2}}$、 $\mathbb{1}_{B_{\rho_n}(x_n)}$ 和 $\mathbb{1}_{H_n}$ 时方程 (1.1) 的解。由 (4.11)–(4.12) 以及 $\lim_{t \to +\infty} \|v^{\varepsilon_2}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$，结合 R_1 的定义，可知存在 $\tau > 0$ 使得

$$0 \le v_n(\tau, \cdot) \le \frac{\theta}{3} \text{ and } 0 \le w_n(\tau, \cdot) \le w(\tau, \cdot - x_n) \le \frac{\theta}{3} \text{ in } \mathbb{R}^N, \text{ for all } n \ge n_3. \tag{4.14}$$

此外，由于 $H_n = G_n \cup B_{\rho_n}(x_n)$，最大值原理得出

$$\begin{aligned} 0 \le v_n(\tau, x) \le z_n(\tau, x) &\le v_n(\tau, x) + \frac{e^{M'\tau}}{(4\pi\tau)^{N/2}} \int_{B_{\rho_n}(x_n)} e^{-|x-y|^2/(4\tau)} dy \\ &\le v_n(\tau, x) + \frac{e^{M'\tau}}{(4\pi\tau)^{N/2}} \int_{B_\rho} e^{-|x-x_n-y|^2/(4\tau)} dy \end{aligned}$$

and

$$0 \le w_n(\tau,x) \le z_n(\tau,x) \le w_n(\tau,x) + \frac{e^{M'\tau}}{(4\pi\tau)^{N/2}} \int_{G_n} e^{-|x-y|^2/(4\tau)} dy$$
$$\le v_n(\tau,x) + \frac{e^{M'\tau}}{(4\pi\tau)^{N/2}} \int_{B_\rho} e^{-|x-y|^2/(4\tau)} dy$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $n \ge n_1$ 均成立。令 $\sigma > 0$ 满足

$$\frac{e^{M'\tau}}{(4\pi\tau)^{N/2}} \int_{B_\rho} e^{-|\xi-y|^2/(4\tau)} dy \le \frac{\theta}{6} \quad \text{for all } |\xi| \ge \sigma.$$

结合 (4.14)，可得 $0 \le z_n(\tau, x) \le \theta/2$ 对所有 $n \ge n_3$ 以及满足 $|x - x_n| \ge \sigma$ 或 $|x| \ge \sigma$ 的所有 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。由于当 $n \to +\infty$ 时 $|x_n| \to +\infty$，存在 $n_4 \ge n_3$，使得对所有 $n \ge n_4$ 和 $x \in \mathbb{R}^N$，均有 $0 \le z_n(\tau, x) \le \theta/2$；进而，$z_n(t, \cdot) \to 0$，当 $t \to +\infty$ 时关于 $\mathbb{R}^N$ 一致成立。换言之，

$$H_n \in \mathcal{E} \quad \text{for all } n \ge n_4. \tag{4.15}$$

最后，我们来估计较大 n 时的 $\delta_1(H_n)$。由 (4.7) 可知，当$n \to +\infty$ 时，$0 < \lambda(H_n) = \lambda(F_n) \to \alpha\omega_N R^N$，因此有

$$0 < R_{H_n} \to \alpha^{1/N} R < R' \quad \text{as } n \to +\infty, \tag{4.16}$$

其中，不等式 $\alpha^{1/N} R < R'$ 由 (4.4) 得出。由此，结合 $G_n \subset B_\rho$、$|x_n| \to +\infty$ 和 $\rho_n < R_1/2$，可知存在 $n_5 \ge n_4$，使得对每个 $n \ge n_5$ 和 $y \in \mathbb{R}^N$，以下二者必有其一：$G_n \cap B_{R_{H_n}}(y) = \emptyset$，或 $B_{\rho_n}(x_n) \cap B_{R_{H_n}}(y) = \emptyset$。因此，

$$\max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(H_n \cap B_{R_{H_n}}(y)\big) = \max\Big(\max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(G_n \cap B_{R_{H_n}}(y)\big), \max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(B_{\rho_n}(x_n) \cap B_{R_{H_n}}(y)\big)\Big)$$

对所有 $n \ge n_5$。但是，根据 (4.9)，$\lambda(B_{\rho_n}(x_n)) = \lambda(F_n) - \lambda(G_n) < \alpha^2\omega_N R^N < \alpha\beta\omega_N R^N$ 对所有 $n \ge n_1$成立；另一方面，根据 (4.16) 和 G_n的定义，当 $n \to +\infty$时，$\lambda(G_n \cap B_{R_{H_n}}) \to \beta\omega_N \alpha R^N$。因此，存在 $n_6 \ge n_5$ 使得

$$\max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(H_n \cap B_{R_{H_n}}(y)\big) = \max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(G_n \cap B_{R_{H_n}}(y)\big)$$

对所有 $n \ge n_6$成立，进而

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(H_n \cap B_{R_{H_n}}(y)\big) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(G_n \cap B_{R_{H_n}}) = \alpha\beta\omega_N R^N.$$

因此，

$$\delta_1(H_n) \to 1 - \frac{\alpha\beta\omega_N R^N}{\alpha\omega_N R^N} = 1 - \beta \quad \text{as } n \to +\infty.$$

由 (4.8) 可知，存在 $n_7 \ge n_6$ 使得

$$\delta_1(F_n) > \delta_1(H_n) > 0 \quad \text{for all } n \ge n_7.$$

结合 (4.10)、(4.13) 和 (4.15)，可得对于每个 $n \ge n_7$，集合$E_1 := F_n$ 和 $E_2 := H_n$ 满足定理 3.6 所要求的性质，从而完成其证明。

□

定理 3.6 在维数 $N \geq 2$ 下的另一种证明。这里我们假设 $N \geq 2$。对于$a > 0$，令

$$Q_a := \Big(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\Big)^N$$

为以原点为中心、边长为 a的 $\mathbb{R}^N$ 立方体。对于初始条件为 $\mathbb{1}_{Q_a}$的方程 (1.1) 的解，由 [33] 可知，在灭绝与入侵之间存在唯一阈值 $a^* > 0$，即，

$$Q_a \in \mathcal{E} \text{ if } 0 < a < a^*, \quad Q_{a^*} \in \mathcal{T}, \quad \text{and} \quad Q_a \in \mathcal{I} \text{ if } a > a^*. \tag{4.17}$$

对于 $a > 0$ 和 $r > 0$，定义

$$C_{a,r} = Q_a \cap B_r.$$

对每个固定的 $a > 0$，族$C_{a,\,r}$ 关于 $r \in$在(0，$a\sqrt{N/2}$]上随 $L^1(\mathbb{R}^N)$连续递增；而对每个固定的 $r > 0$，族$C_{a,\,r}$关于 $a \in$在(0，$2r$]上随 $L^1(\mathbb{R}^N)$连续递增。考虑

$$a = a^* + \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon > 0$。对于 $r \geq a\sqrt{N/2} = (a^* + \varepsilon)\sqrt{N/2}$，有$C_{a,\,r} = Q_a$，因此由 (4.17) 可知，初始条件为$\mathbb{1}_{C_{a,\,r}}$ 的方程 (1.1) 的解在 $\mathbb{R}^N$上当 $t \to +\infty$ 时局部一致地收敛于 1。另一方面，当 $r > 0$ 足够小时，有$C_{a,\,r} = B_r$ ，并且发生灭绝，即$C_{a,\,r} \in \mathcal{E}$。因此，再次由 [33] 可知，存在一个阈值

$$r^*(\varepsilon) \in \Big(0, \frac{a\sqrt{N}}{2}\Big) = \Big(0, \frac{(a^* + \varepsilon)\sqrt{N}}{2}\Big)$$

使得

$$C_{a,r} \in \mathcal{E} \text{ if } 0 < r < r^*(\varepsilon), \quad C_{a,r^*(\varepsilon)} \in \mathcal{T}, \quad \text{and} \quad C_{a,r} \in \mathcal{I} \text{ if } r > r^*(\varepsilon).$$

当 $\varepsilon \to 0$时，我们观察到 $r^*(\varepsilon) \to a^*\sqrt{N/2}$。事实上，一方面，对于每个 $\varepsilon > 0$，$r^*(\varepsilon) < (a^* + \varepsilon)\sqrt{N/2}$，因此 $\limsup_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} r^*(\varepsilon) \leq a^*\sqrt{N/2}$。另一方面，对于每个 $r \in (0, a^*\sqrt{N/2})$，有 $C_{a^*,r} \subset Q_{a^*}$ 且 $\lambda(Q_{a^*} \setminus C_{a^*,r}) > 0$，因此根据 [33] 有 $C_{a^*,r} \in \mathcal{E}$，进而由命题 3.1 可知，对所有足够小的 $\varepsilon > 0$，$C_{a^*+\varepsilon,r} \in \mathcal{E}$。最后，对于每个 $r \in (0, a^*\sqrt{N/2})$，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，有 $r < r^*(\varepsilon)$，因此 $\liminf_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} r^*(\varepsilon) \geq a^*\sqrt{N/2}$，从而

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0} r^*(\varepsilon) = \frac{a^*\sqrt{N}}{2}. \tag{4.18}$$

当 $\varepsilon > 0$足够大时，使得 $Q_{a^*+\varepsilon} \supset B_{R_1}$ 满足 (1.6) 中的条件，其中 $R_1 > 0$如上所述，则 $r^*(\varepsilon) = R_1$。由于族$C_{a^*+\varepsilon,\,r}$ 关于 $\varepsilon > 0$非递减，函数 $\varepsilon \mapsto r^*(\varepsilon)$ 在 $(0, +\infty)$ 上非递增。按照上述类似论证，并再次使用命题 3.1，可知该映射在 $(0, +\infty)$ 上也连续。还请注意，$\omega_N = \lambda(B_1) > (2/\sqrt{N})^N$（因为 $B_1 \supset Q_{2/\sqrt{N}}$且 $\lambda(B_1 \setminus Q_{2/\sqrt{N}}) > 0$，这里用到了假设 $N \geq 2$！）。因此，可以选取 $\sigma \in (1/\omega_N^{1/N}, \sqrt{N/2})$，使其足够接近 $\sqrt{N/2}$，从而

$$0 < \lambda(Q_{a^*}) - \lambda(C_{a^*,\sigma a^*}) < \frac{\omega_N a^{*N}}{2^N}.$$

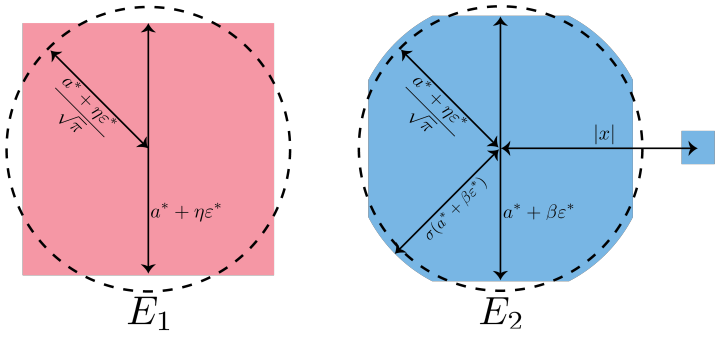


图 2：两个集合 E_1 （红色）和 E_2 （蓝色）具有相同的勒贝格测度$\lambda(E_1) = \lambda(E_2)$。对于初始条件为 $\mathbb{1}_{E_1}$ 的 (1.1)，会发生入侵；而对于 $\mathbb{1}_{E_2}$则不会。为了理解为何对所有足够大的 $|x|$ ，$0 < \delta_1(E_2) < \delta_1(E_1)$，注意 $\max_{B\in\mathcal{B},\lambda(B)=\lambda(E_1)} \lambda(E_1 \cap B)$ 的值在维数 $N = 2$ 下对应于虚线圆内圆盘 B 与 E_1 的交集的测度 $\lambda(E_1 \cap B)$。当 $|x|$ 足够大时，$\max_{B\in\mathcal{B},\lambda(B)=\lambda(E_2)} \lambda(E_2 \cap B)$ 的值就简单地对应于 $\lambda(E_2 \cap B)$ 的测度，并且高于 $\lambda(E_1 \cap B) = \max_{B\in\mathcal{B},\lambda(B)=\lambda(E_1)} \lambda(E_1 \cap B)$，因此 $\delta_1(E_2) < \delta_1(E_1)$。详细内容如下。

由于 $0 < \sigma < \sqrt{N}/2$，根据 (4.18) 以及映射 $\varepsilon \mapsto r^*(\varepsilon)$ 的上述连续性和单调性，可知存在唯一的 $\varepsilon^* > 0$ ，使得

$$r^*(\varepsilon^*) = \sigma\left(a^* + \varepsilon^*\right).$$

现在固定足够小的 $\beta \in (0,1)$，使得

$$0 < \lambda(Q_{a^*+\beta\varepsilon^*}) - \lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,\sigma(a^*+\beta\varepsilon^*)}) < \frac{\omega_N a^{*N}}{2^N}, \tag{4.19}$$

定义

$$0 < \frac{a^* + \beta\varepsilon^*}{\omega_N^{1/N}} < r := \sigma\left(a^* + \beta\varepsilon^*\right) < \frac{(a^* + \beta\varepsilon^*)\sqrt{N}}{2} \tag{4.20}$$

并选择足够接近 β 的 $\eta \in (0, \beta)$，使得

$$0 < \lambda(Q_{a^*+\eta\varepsilon^*}) - \lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,r}) < \frac{\omega_N a^{*N}}{2^N}, \tag{4.21}$$

and

$$\frac{a^* + \beta\varepsilon^*}{2} < \frac{a^* + \eta\varepsilon^*}{\omega_N^{1/N}} \tag{4.22}$$

（由于 (4.19) 以及 $\omega_N < 2^N$，并且这是由该假设$N \geq 2$导致的，这样的选择是可能的）。定义

$$E_1 := Q_{a^*+\eta\varepsilon^*} \quad \text{and} \quad E_2 := C_{a^*+\beta\varepsilon^*,r} \cup Q^x,$$

其中 Q^x 表示测度为 $\lambda(Q^x)$ 的立方体：$= \lambda(Q_{a^*+\eta\varepsilon^*}) - \lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,\ r}) > 0$ ，其中心位于 x ，且 $|x|$ 足够大，使得 $C_{a^*+\beta\varepsilon^*,\ r} \cap Q^x = \emptyset$。我们来验证有界博雷尔集 E_1 和 E_2 满足定理 3.6 的预期结论，前提是 $|x|$ 足够大（见图 2）。

首先，根据 (4.17) 中 a^* 的定义，对于初始条件为 $\mathbb{1}_{E_1}$ 的 (1.1) 的解，会发生入侵，也就是说， $E_1 \in \mathcal{I}$。根据 $r^*(\varepsilon^*)$ 的定义，对于初始条件为 $\mathbb{1}_{C_{a^*+\beta\varepsilon^*,\, r}}$ 的 (1.1) 的解，会发生灭绝，因为

$$r = \sigma\left(a^* + \beta\varepsilon^*\right) < \sigma\left(a^* + \varepsilon^*\right) = r^*(\varepsilon^*) \leq r^*(\beta\varepsilon^*),$$

也就是说，$C_{a^*+\beta\varepsilon^*,\, r} \in \mathcal{E}$。此外，

$$0 < \lambda(Q^x) = \lambda(Q_{a^*+\eta\varepsilon^*}) - \lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,r}) < \frac{\omega_N a^{*N}}{2^N} < a^{*N} \tag{4.23}$$

由 (4.21) 和 $\omega_N < 2^N$ 可得。因此，根据 (4.17) 中 a^* 的定义以及 (1.1) 关于平移的不变性，对于初始条件为 $\mathbb{1}_{Q^x}$ （也就是说， $Q^x \in \mathcal{E}$）的 (1.1) 的解，当 $|x|$ 足够大时都会发生灭绝。至于定理 3.6 首次证明中的 (4.15) 里的 H_n ，对于初始条件为 $\mathbb{1}_{E_2}$ 的柯西问题 (1.1)，当 $|x|$ 足够大时会发生灭绝（也就是说， $E_2 \in \mathcal{E}$）。

现在，注意到当 $|x|$ 足够大时，对所有 >0 都有 $\lambda(E_1) = \lambda(E_2)$，并且

$$\delta_1(E_1) = 1 - \frac{\lambda(C_{a^*+\eta\varepsilon^*,R_E})}{\lambda(E_1)},$$

with

$$\frac{a^* + \beta\varepsilon^*}{2} < R_E := \frac{a^* + \eta\varepsilon^*}{\omega_N^{1/N}} < \frac{a^* + \beta\varepsilon^*}{\omega_N^{1/N}}, \tag{4.24}$$

其中，上述第一个不等式由 (4.22) 得出。最后，对于足够大的 $|x|$ ，使得 $C_{a^*+\beta\varepsilon^*,\, r} \cap Q^x = \emptyset$，有

$$\lambda(Q^x) < \frac{\omega_N a^{*N}}{2^N} < \frac{\omega_N(a^* + \beta\varepsilon^*)^N}{2^N} \tag{4.25}$$

由 (4.23) 得。另一方面，由 (4.20) 和 (4.24) 可知，进而

$$\lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,r} \cap B_{R_E}) = \lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,R_E}) > \frac{\omega_N(a^* + \beta\varepsilon^*)^N}{2^N} \tag{4.26}$$

因为由 (4.24) 可知。对于每个足够大的 , 以及每个 , 要么 , 要么 。因此

$$\max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(E_2 \cap B_{R_E}(y)\big) = \max\Big(\max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,r} \cap B_{R_E}(y)\big), \max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(Q^x \cap B_{R_E}(y)\big)\Big)$$

对于所有足够大的 均成立。由于根据 (4.25)-(4.26)，对所有足够大的 , 均成立，因此可推得

$$\max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(E_2 \cap B_{R_E}(y)\big) = \max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,r} \cap B_{R_E}(y)\big)$$

在最大值 $\max_{y\in\mathbb{R}^N} \lambda\big(E_2 \cap B_{R_E}(y)\big) = \lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,r} \cap B_{R_E}) = \lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,R_E})$ 中。因此并且 ,

$$\delta_1(E_2) = 1 - \frac{\lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,R_E})}{\lambda(E_1)} > 0$$

对所有足够大的 $|x|$ （注意，由于 E_2 除去一个零测集后并不是球， $\delta_1(E_2) > 0$ ）。最后，由 (4.24) 可知 $a^* + \eta\varepsilon^* < a^* + \beta\varepsilon^* < 2R_E$ ，因此 $\lambda(C_{a^*+\eta\varepsilon^*,\, R_E}) < \lambda(C_{a^*+\beta\varepsilon^*,\, R_E})$，于是

$$0 < \delta_1(E_2) < \delta_1(E_1),$$

对所有足够大的 $|x|$ ，定理 3.6 在维数 $N \geq 2$ 下的另一种证明至此完成。

□

参考文献

[1] M. Alfaro、A. Ducrot 和 G. Faye。《反应扩散方程传播阈值现象的定量估计》，SIAM应用动力系统杂志 19 (2020年)，1291–1311。[2] L. Almeida、A. Hadon、C. Kermorvant、A. L´eculier、Y. Privat、M. Strugarek、N. Vauchelet 和 J. P. Zubelli。《为控制登革热传播而释放蚊子的优化方案》，ESAIM会议录与调查 67 (2020年)，16-29。[3] D. G. Aronson 和 H. F. Weinberger。《群体遗传学中产生的多维非线性扩散》，数学进展 30 (1978年)，33–76。[4] H. Berestycki、F. Hamel 和 N. Nadirashvili。《KPP型问题的传播速度。II：一般区域》，J. Amer. Math. Soc. 23 (2010年)，1–34。[5] M. Bramson。《柯尔莫哥洛夫方程解向行波的收敛》，美国数学会回忆录 44，1983年。[6] Y. Du 和 H. Matano。《非线性扩散问题中传播的收敛与尖锐阈值》，欧洲数学会杂志 12 (2010年)，279–312。[7] Y. Du 和 H. Matano。《多稳态反应扩散方程的径向阶梯解与传播剖面》，$\mathbb{R}^N$，https://arxiv.org/pdf/1711.00952。[8] Y. Du 和 P. Pol´aˇcik。《非线性抛物方程解在 $\mathbb{R}^N$ 上局部一致收敛到一个平衡态》，印第安纳大学数学杂志 64 (2015年)，787–824。[9] A. Ducrot。《紧支撑初始数据下多维Fisher-KPP方程的大时间行为》，Nonlinearity 28 (2015年)，1043–1076。[10] P. C. Fife 和 J. B. McLeod。《非线性扩散方程的解趋近行进前沿解》，Arch. Ration. Mech. Anal. 65 (1977年)，335–361。[11] R. A. Fisher。《有利基因的扩散》，优生学年刊 7 (1937年)，335–369。[12] J. Garnier、L. Roques 和 F. Hamel。《创始种群的空间分布与生物入侵成功率的关系》，数学生物学通报 74 (2012年)，453–473。[13] J. G¨artner。《多维KPP方程的波前位置与布朗运动首次退出密度》，数学通讯 105 (1982年)，317–351。[14] F. Hamel、J. Nolen、J.-M. Roquejoffre 和 L. Ryzhik。《Fisher-KPP方程中Bramson对数修正的简短证明》，网络与异质介质 8 (2013年)，275–289。[15]F. Hamel 和 L. Rossi。《反应扩散方程的传播速度与扩展集》，https://arxiv.org/abs/2105.08344。[16]F. Hamel 和 L. Rossi。《Fisher-KPP方程的渐近一维对称性》，https://arxiv.org/abs/2207.05147。[17] F. Hamel 和 L. Rossi。《反应扩散方程中的传播、平坦化与对数滞后》，$\mathbb{R}^N$。[18] C. K. R. T. Jones。《反应扩散方程的球对称解》，J. Diff. Equations 49 (1983年)，142–169。[19] J. I. Kanel'。《具有有限初始函数的燃烧理论方程解的稳定化》，数学文集（新系列）65 (1964年)，398–413。

[20] A. N. Kolmogorov、I. G. Petrovsky 和 N. S. Piskunov。《关于具有物质量增长的扩散方程的研究及其在生物学问题中的应用》，Bull. Univ. Etat Moscou, S ´er. Intern. A 1 (1937年), 1–26.[21] E. Kr¨atzel。《格点》，Springer Science & Business Media, 33, Springer, 1989.[22] K.-S. Lau。《Kolmogorov、Petrovsky 和 Piscounov 的非线性扩散方程》，J. Diff. Equations 59 (1985年), 44–70.[23] M. A. Lewis 和 P. Kareiva。《阿利效应动力学与入侵生物的扩散》，Theo. Pop. Biol. 43 (1993), 141–158.[24] H. Matano 和 M. Nara。《Allen-Cahn 方程中受扰平面前沿的大时间行为》，J. Diff. Equations 251 (2011), 3522–3557.[25] H. Matano、M. Nara 和 M. Taniguchi。《Allen-Cahn 方程中平面波的稳定性》，Comm. Part. Diff. Equations 34 (2009), 976–1002.[26] H. Matano 和 P. Pol´aˇcik。《具有局部化初始数据的一维反应扩散方程非负解的动力学。第一部分：一般拟收敛定理及其推论》，Comm. Part. Diff. Equations 41 (2016), 785–811.[27] H. Matano 和 P. Pol´aˇcik。《具有局部化初始数据的一维反应扩散方程非负解的动力学。第二部分：一般非线性项》，Comm. Part. Diff. Equations 45 (2020), 483–524.[28] I. Mazari、G. Nadin 和 A. I. Toledo Marrero。《半线性抛物方程总种群规模关于初始条件的优化问题：双尺度展开与对称化》，Nonlinearity 34 (2021), 7510–7539.[29] C. B. Muratov 和 X. Zhong。《反应扩散方程对称递减解的阈值现象》，Nonlin. Diff. Equations Appl. 20 (2013), 1519–1552.[30] C. B. Muratov 和 X. Zhong。《反应扩散方程对称递减径向解的阈值现象》，Disc. Cont. Dyn. Syst. A 37 (2017), 915–944.[31] G. Nadin 和 A. I. Toledo Marrero。《反应扩散方程解关于其初始数据的最大化问题》，Math. Model. Nat. Phenom. 15 (2020), 71.[32] J. Nolen、J.-M. Roquejoffre 和 L. Ryzhik。《Fisher-KPP 方程中解收敛至单个波》，Chinese Ann. Math. Ser. B (special issue in honour of H. Brezis) 38 (2017), 629–646.[33] P. Pol´aˇcik。《实数轴 $\mathbb{R}^N$上非自治抛物方程的阈值解与陡峭转变》，Arch. Ration. Mech. Anal. 199 (2011), 69–97.[34] P. Pol´aˇcik。《实数轴上抛物方程解的收敛与拟收敛性质：综述》，载于：Patterns of Dynamics, Springer Proc. Math. Stat. 205, Springer, 2017, 172–183.[35] P. Pol´aˇcik。《平面传播台阶与半线性抛物方程解的渐近一维对称性》，SIAM J. Math. Anal. 49 (2017), 3716–3740.[36] P. Pol´aˇcik。《实数轴 $\mathbb{R}$上反应扩散方程前沿型解的传播台阶与动力学》，Mem. Amer. Math. Soc. 264, 2020.[37] J.-M. Roquejoffre、L. Rossi 和 V. Roussier-Michon。《 N维 Fisher-KPP 方程中的尖锐大时间行为》，Disc. Cont. Dyn. Syst. A 39 (2019), 7265–7290.[38] J.-M. Roquejoffre 和 V. Roussier-Michon。《双稳态型反应扩散方程中的非平凡大时间行为》，Ann. Mat. Pura Appl. 188 (2009), 207–233.

[39] J.-M. Roquejoffre 和 V. Roussier-Michon。《二维 Fisher-KPP 方程中对数位移之后的非平凡动力学》，*Nonlinearity* **31** (2018年), 3284–3307.[40] J.-M. Roquejoffre 和 V. Roussier-Michon。《 N维双稳态型反应扩散方程中的尖锐大时间行为》，*J. Diff. Equations* **339** (2022年), 134–151.[41] L. Rossi。《反应扩散方程中的对称化与反对称化》，*Proc. Amer. Math.Soc.* **145** (2017), 2527–2537.[42] L. Rossi。《一般无界区域上半线性抛物问题的稳定性分析》，*J. Funct.Anal.* **279** (2020), 108657.[43] V. Roussier。《反应扩散方程中径向对称行波的稳定性》，*Ann.Inst. H. Poincar´e, Anal. Non Lin´eaire* **21** (2004年), 341–379.[44] K. Uchiyama。《某些半线性扩散方程解的大时间行为》，*J. Math.Kyoto Univ.* **18** (1978年), 453–508.[45] K. Uchiyama。《具有变化漂移系数的反应扩散方程解的渐近行为》，*Arch. Ration. Mech. Anal.* **90** (1985年), 291–311.[46] A. Zlatoˇs。《反应灭绝与传播之间的陡峭转变》，*J. Amer. Math. Soc.* **19**(2006年), 251–263.