arXiv:2304.00832v1 [math.AG] 3 Apr 2023

# 环面纤维化的相干-可构造对应

YUXUAN HU 和 PYONGWON SUH

Abstract. 设 $\Sigma$ 是格 $\mathbb{Z}^n$中的一个扇，且 $\mathcal{E}: \mathbb{Z}^n \to \mathrm{Pic}\, S$ 是阿贝尔群之间的一个映射。我们引入主环面纤维化 $\mathcal{X}_{\Sigma,\ \mathcal{E}}$ 其底空间为基方案 $S$，这是对通常环面构造（针对$\Sigma$）的相对化。我们证明，这种纤维化上的非相干凝聚层范畴等价于 Kashiwara-Schapira 层叠的整体截面；该层叠由某个茎为 IndCoh $S$的范畴的局部系统扭曲而成。这同时推广了 Harder-Katzarkov [HK19]以及 Kuwagaki[Kuw20], 的工作，并应被视为相干-可构造对应 [FLTZ11]的族版本。

## Contents

1. 引言 2 1.1. 镜像对称与相干-可构造对应 2 1.2. 相对情形中的 CCC 3 1.3. 曲面上的反常 Schober 4 1.4. 关于 Fukaya 范畴 4 1.5. 论文概要 5 致谢 6 2. 记号与一般概述 6 2.1. 范畴 6 2.2. Kashiwara-Schapira 层叠 7 3. 主环面纤维化 9 3.1. 叠化主环面纤维化 9 3.2. 系数系统 $\Phi(\mathcal{E})$ 11 3.3. 主定理 11 4. 仿射情形 12 4.1. 可构造层的描述 12 4.2. 相干层 14 4.3. 抽象描述 16 5. 仿射叠情形 16 5.1. 绝对情形 17 5.2. 相对情形 18 6. 下降 19 6.1. 环面下降 19 6.2. 非光滑情形 21 6.3. 主定理的证明 22 7. 环面 $\mathbb{P}^n$-丛的箭图理论方法 22 7.1. 主定理的箭图理论解释 22$_1$

7.2. 反常 Schober 与范畴反常层 23 7.3. Harder-Katzarkov 关于环面 $\mathbb{P}^1$-丛的 CCC 25 7.4. 环面 $\mathbb{P}^n$-丛的 CCC 箭图理论方法 26 参考文献 32

## 1. Introduction

**1.1. 镜像对称与相干-可构造对应**。同调镜像对称（HMS）是两个几何起源看似不同的范畴之间的一种等价。其中一个范畴是复代数簇 $X$ 上相干层的导出范畴。另一个则是另一个看似无关的代数簇 $X$ 的 Fukaya 型范畴，或势函数 $W : Y \to \mathbb{C}$ 的 Fukaya 型范畴；其对象大致为拉格朗日子流形，其态射为这些子流形的交集。后一范畴中态射的复合通过计数伪全纯曲线来定义。

另一方面，已知正合辛流形的 Fukaya 范畴本质上具有层论性质。例如，Nadler-Zaslow 定理 [NZ09, Nad09] 指出，实解析流形 $Z$ 的余切丛上的无穷小 Fukaya 范畴与 $Z$ 上可构造层的范畴之间存在等价。Kontsevich [Kon09] 猜想，对于 Weinstein 流形，其拉格朗日骨架上存在一个范畴的（余）层，其整体截面等价于该 Weinstein 流形的 Fukaya 范畴。Nadler 的工作提出，这个范畴的（余）层应由微局部层的范畴或其 wrapped 版本建模 [Nad16]。得益于 Ganatra-Pardon-Shende 的工作 [GPS20a, GPS19, GPS20b]，这一结论现已在许多情形下成为定理。

相干-可构造对应（CCC）是环面簇的 HMS 的一种形式，它与 Fukaya 范畴的层论描述相交织。该对应最初由 Bondal 猜想 [Bon06], ，其等变版本由 Fang-Liu-Treumann-Zaslow 证明 [FLTZ11]。非等变版本的一些特殊情形已在 [Tre10, SS16, Kuw17], 中得到证明；如今它已成为一个定理，并且可以推广到环面栈 [Kuw20, Zho19], ，具体如下所述。

从格 $\Sigma$ 中的扇数据 $N$ 出发，可以构造一个 $n$ 维环面簇 $X_\Sigma$，以及一个奇异拉格朗日骨架

$$\Lambda_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} (\sigma^\perp) \times (-\sigma) \subseteq T^* M_T.$$

这里 $M_T = N^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq T^n$ 是对偶环面。接下来，我们可以研究由奇异支撑包含于 $\Lambda_\Sigma$ 的可构造层组成的范畴 $\mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma}(T^n)$。

**定理 1.1** (CCC [Kuw20])。存在一个 $\infty$-范畴之间的等价

$$\mathrm{Coh}(X_\Sigma) \simeq \mathrm{Sh}^w_{\Lambda_\Sigma}(T^n),$$

其中，$\mathrm{Coh}(X_\Sigma)$ 是 $X_\Sigma$ 上相干层的有界导出范畴，而 $\mathrm{Sh}^w_\Lambda(T^n)$ 是缠绕层[1]范畴。

[1]缠绕层范畴是无界层范畴中由紧对象构成的全子范畴（其奇异支撑包含于 $\Lambda$）。

我们具体说明这与同调镜像对称的关系。[2] 根据 [NZ09、Nad09、GPS20b], 的工作，层范畴 $\mathrm{Sh}_\Lambda(M)$ 等价于部分包裹 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(T^*M,\ \Lambda)$。对于环面簇，也可以考虑其镜像朗道-金兹堡模型 $W:(\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{C}$，它可以利用扇数据显式写出。在这种情况下，我们想要考虑的 Floer理论范畴是福柯-赛德尔范畴的一种变体 $\mathcal{W}((\mathbb{C}^\times)^n,\ W^{-1}(\infty))$。注意，在辛意义下 $(\mathbb{C}^\times)^n \simeq T^*T^n$，并且 [RSTZ14、Zho20], 证明，在这一识别下，超曲面 $W^{-1}(\infty)$ 存在一个 Liouville拉格朗日骨架，它由 FLTZ 骨架 $\Lambda_\Sigma$（的接触无穷远部分）给出。最后注意，根据 [GPS20a], , 用其 Liouville 骨架替换停止集 $W^{-1}(\infty)$ 不会改变部分包裹 Fukaya 范畴。由此可见，范畴 $\mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma}(T^n) \simeq \mathcal{W}((\mathbb{C}^\times)\ W^{-1}(\infty))$ 实际上是 $X_\Sigma$ 的镜像朗道-金兹堡模型的福柯-赛德尔范畴的一种层论体现。

1.2. **相对情形下的 CCC**。 在 Kashiwara- Schapira 的微局部层论中 [KS90], , 存在一个定义在 $T^*M$ 上的范畴层 $\mu sh_\Lambda$，称为 Kashiwara- Schapira 层叠；其整体截面的范畴恢复了可构造层的范畴 [STW16，命题 3.5]:

$$\mathrm{Sh}_\Lambda(M) \simeq \Gamma(\Lambda, \mu\mathrm{Sh}_\Lambda).$$

通过取 Ind 完备化，相干-可构造对应可表述为

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(X_\Sigma) \simeq \Gamma(\Lambda_\Sigma, \mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma}).$$

若考虑环面簇与另一代数簇 $S$ 的乘积，根据 K¨unneth 公式，我们有

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(X_\Sigma \times S) \simeq \Gamma(\Lambda_\Sigma, \mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma}) \otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(S) \simeq \Gamma(\Lambda_\Sigma, \mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma} \otimes_k \underline{\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(S)}),$$

其中，$\underline{\text{Ind Coh}(S)}$ 是茎为 IndCoh($S$) 的范畴的常值层。这里的张量积是 $k$-线性稳定 $\infty$-范畴（的层）的张量积，见 2.1.3。

本文的主题是将这一等价从笛卡尔积 $X_\Sigma \times S$ 的情形推广到 $S$ 上的 主环面纤维化（见 3.1）的情形。给定任意扇数据 $\Sigma$ 和线丛序列 $\mathcal{E} = (\mathcal{L}_1, \ldots\ldots, \mathcal{L}_n)$，便可定义这样的主环面纤维化，其纤维是与扇 $\Sigma$ 相关联的环面簇 $X_\Sigma$。线丛 $\mathcal{E}$ 产生了 $T^n$ 上的范畴局部系统 $\Phi(\mathcal{E})$，沿 $\pi_1(T^n)$ 的第 $i$ 个生成元的单值化 $\simeq \mathbb{Z}^n$ 由 $-\otimes \mathcal{L}_i^\vee$ 给出（见注记 3.4，以及第 3.1、3.2 节的详细讨论。）

在主环面纤维化的情形下，我们将证明，只要用茎为 IndCoh($S$) 的范畴局部系统 $\Phi(\mathcal{E})$（见定义 3.12）替代常值层，这个等价仍然成立。更准确地说，我们的主定理如下:

**定理 1.2** (定理 3.14)。 设 $\mathcal{X}_{\Sigma,\ \mathcal{E}}$ 是由扇 $\Sigma$ 和线丛序列 $\mathcal{E}$ 构造的、以 $S$ 为底空间的（叠）主环面纤维化（因此其纤维为环面簇 $X_\Sigma$）。那么存在一个等价。

[2]为简便起见，我们将所有对象都视为模 Morita 等价，并且不区分小范畴及其 Ind完备化。这是可行的，因为 ind 完备化函子给出了小 dg-范畴范畴（在 Morita 等价处局部化）与余完备 dg-范畴范畴之间的等价。

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}_{\Sigma,\mathcal{E}}) \simeq \Gamma(\Lambda_\Sigma, \mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})).$$

**1.3. 曲面上的反常 Schober。** 关于环面纤维化的 CCC 思想可追溯至 Harder-Katzarkov 的工作 [HK19]。设 $\mathcal{O}$ 是代数簇 $X$ 的结构层，$\mathcal{L}$ 是 $X$ 上的线丛。那么，$\mathbb{P}_X(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L})$，即秩 2 向量丛 $\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}$ 的射影化，是 $X$ 上的环面 $\mathbb{P}^1$-丛。 [3] 用我们的记号，他们的定理可以改述如下。

**定理 1.3** ([HK19] 定理 4.9)。 存在一个 $k$-线性稳定$\infty$-范畴之间的等价。

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathbb{P}_X(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L})) \simeq \Gamma(T^*T^1, \mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^1}}} \otimes_k \Phi(\mathbb{P}_X(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L})))$$

事实上，[HK19] 中表述的定理 4.9 与上述内容不同。他们采用了自己对曲面上范畴反常层的定义，该定义源自 Kapranov-Schechtman [KS15]提出的反常 Schober 概念。除了他们的定理之外，人们还猜想 CCC 应当存在一个适用于环面纤维丛的版本。我们的主定理实现了这一猜想。

Harder-Katzarkov 并未对他们的猜想作出精确表述。不过，他们的观点为可构造侧范畴 $\Gamma(T^*T^n,\ \mu$层范畴$_{\Lambda_\Sigma}\otimes\Phi(\mathcal{X}_\Sigma))$ 的箭图论描述提供了动机。这样的箭图论描述能够用底空间和纤维的导出范畴来描述环面纤维丛的导出范畴。这一点或许本身就有独立的意义。作为这一方法的应用，我们在第7节给出环面 $\mathbb{P}^n$-丛情形下主定理的箭图论证明。

**1.4. 关于 Fukaya 范畴。**我们简要说明，对于我们结果的 Floer 理论对应版本，我们应有怎样的预期。 [4] HK19 的第 4 条注记中也在 [8] 情形下讨论了这一点。我们将采用 GPS20a [中的刘维尔扇区]，在这些扇区上，包裹 Fukaya 范畴具有更好的函子性。请注意，带有超曲面停止集的部分包裹 Fukaya 范畴，与移除停止集（的一个邻域）后得到的刘维尔扇区的包裹 Fukaya 范畴相同。

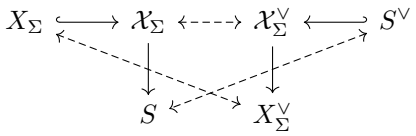
从这一角度来看，将镜像 Landau-Ginzburg 模型映到环面簇 $X_\Sigma$所得的扇区记为 $X_\Sigma^\vee$，并假设我们有一个镜像对 $(S,\ S^\vee)$，使得

$$\operatorname{Coh}(S) \simeq \mathcal{W}(S^\vee).$$

进一步，假设存在一个 $\mathcal{X}_\Sigma^\vee$ Liouville 扇区在 $X_\Sigma^\vee$ 上的纤维化，其纤维在适当意义下为 $S^\vee$，使得辛单值化通过等价传递到凝聚侧后，经由皮卡群 Pic($S$) 作用。根据这些单值化数据，可以构造一个主环面纤维化 $\mathcal{X}_\Sigma$，使其在 $S$ 上作为 $\mathcal{X}_\Sigma^\vee$ 的镜像。于是，$\Gamma(\mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma}\otimes_k\Phi(\mathcal{E}))$ 应通过下降解释为 $\mathcal{W}(\mathcal{X}_\Sigma^\vee)$

[3]事实上，$X$ 上的任意环面 $\mathbb{P}^1$丛都具有这种形式[4]我们提醒读者，本节中的论述都带有推测性，严格来说只是“在道理上成立”；据我们所知，不同类型的 Fukaya-Seidel 范畴之间的等价尚未得到确立，此外还有其他微妙之处。不过，我们相信，一旦这些技术问题得到解决，具备足够辛几何专业知识的人便能够为这些论断给出完整证明。

在 [GPS19], 中发展的包裹 Fukaya 范畴性质，因此应当预期 $\mathrm{Coh}(\mathcal{X}_\Sigma) \simeq \mathcal{W}(\mathcal{X}_\Sigma^\vee)$。这种关系概括如下。



因此，在这种情形下，镜像对称体现了纤维-底空间对偶。

作为合理性检验，我们以一个例子结束讨论。在 [Han19], 中，研究了福柯-赛德尔范畴上的一种特定单值化作用，并证明它与皮卡群在镜像环面簇上的作用互为镜像。具体而言，考虑由格[5] $K$上的扇数据 $\Xi$ 所指定的环面簇，并令 $A \subseteq K \simeq \mathbb{Z}^n$ 为本原生成元。镜像 Landau-Ginzburg 模型由超势给出

$$W_\Xi = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha,$$

其中 $c_\alpha \in \mathbb{C}^\times$。

**定理 1.4** ([Han19])。 通过绕 0 变化 $c_\alpha$ 一周而在福柯-赛德尔范畴上得到的单值化作用，对应于 $\mathrm{Coh}(X_\Xi)$ 上的 $-\otimes \mathcal{O}(D_\alpha)$。

设 $B \subseteq A$，并记 $l = |B|$。注意，在上述公式中将 $c_\beta$ （$\beta \in B$）视为变量后，$W_\Xi$ 可扩展为定义在 $(\mathbb{C}^\times)^n \times (\mathbb{C}^\times)^B \simeq (\mathbb{C}^\times)^{n+l}$ 上的函数，记为 $\widetilde{W_\Xi} : (\mathbb{C}^\times)^{n+l} \to \mathbb{C}$。可以看出，刘维尔扇区 $\mathbb{C}^{n+l} \backslash \widetilde{W_\Xi}^{-1}(\infty)$ 纤维化于 $(\mathbb{C}^\times)^l$ 之上，其纤维为 $(\mathbb{C}^\times)^n \backslash W_\Xi^{-1}(\infty)$；定理 1.4 指出，单值化作用映射 $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \to \mathrm{Pic}(X_\Xi)$ 将第 $i$ 个生成元映为 $\mathcal{O}(D_{\alpha_i})$。

另一方面，注意到 $\mathbb{C}^\times \simeq T^*S^1$ 的镜像是 $\mathbb{A}^1 - 0$。令 $\Sigma$ 为 $(\mathbb{A}^1 - 0)^l$ 的扇，它仅由 $\mathbb{Z}^l$ 内的原点构成，并设

$$\mathcal{E} = (\mathcal{O}(-D_{\beta_1}), \dots, \mathcal{O}(-D_{\beta_l})).$$

由这些数据构造的主环面纤维化 $\mathcal{X}_{\Sigma,\ \mathcal{E}} \to X_\Sigma$ 不过就是以下纤维积

$$E(\mathcal{O}(D_{\beta_1}))\backslash Z_{X_\Xi} \times_{X_\Xi} \cdots \times_{X_\Xi} E(\mathcal{O}(D_{\beta_l}))\backslash Z_{X_\Xi}$$

去掉零截面后的线丛 $\mathcal{O}(D_\beta)$ 的全空间的纤维积。于是有 $\mathcal{X}_{\Sigma,\ \mathcal{E}}$ 是 $((\mathbb{C}^\times)^{k+l},\ \widetilde{W_\Xi})$ 的镜像。

**1.5. 论文概要。** 在第2节中，我们回顾关于$\infty$-范畴和层论的必要背景。在第3节中，我们介绍本文的研究对象——主环面纤维化及其相关的系数局部系统，以及陈述定理所需的其他相关定义。第4节致力于证明仿射情形下的定理——即环面纤维为 $\mathbb{A}^k \times (\mathbb{A}^1 - 0)^{n-k}$的情形；在第5节中，我们将进一步将其推广到纤维为商叠 $[\mathbb{A}^k \times (\mathbb{A}^1 - 0)^{n-k}/H]$、其中 $H$为某个有限阿贝尔群的情形。随后，我们在第6节中证明，一般情形可以通过下降论证从仿射情形得到，即从纤维为

[5]这里我们避免使用字母 $\Sigma$ 和 $N$，因为正如我们将看到的，这里的扇数据所起的作用与先前讨论中的扇数据不同。

仿射的局部片段进行粘合。在第7节中，当环面纤维为 $\mathbb{P}^n$时，我们按照 ` Harder-Katzarkov的方式给出定理的另一种表述。

ACKNOWLEDGEMENTS

YH 感谢 Qingyuan Bai 就本工作的技术方面进行了详细讨论，感谢 Wenyuan Li 和 Dogancan Karabas 讨论层理论，感谢 Diogo Fonseca 讨论 $\infty$-范畴，感谢 Qingyuan Bai、Bohan Fang 和 Mingyuan Hu 多年来进行的各种讨论，并感谢 Zhenyi Chen 和 Ben Zhou 在本手稿准备之前对本工作的关注。项目启动时，YH 感谢 Bohan Fang 邀请他作为访问学者到北京大学交流。YH 感谢 Eric Zaslow 仔细阅读了早期草稿并提出许多宝贵建议。最后，YH 想向 Gus Schrader 表达感谢，感谢他阅读了多份草稿，并提出了无数建议和反馈；若没有他持续不断的鼓励与支持，本文就无法达到目前的形式。

本工作源自第二作者的博士论文。PS 衷心感谢他的导师 Eric Zaslow，感谢他的耐心指导。此外，PS 感谢 Nicol`o Sibilla 和 Hiro Lee Tanaka 解答了许多有关含系数范畴中的箭图表示的问题。

## 2. NOTATIONS AND GENERALITIES

### 2.1. **范畴**。

**2.1.1.** ***dg* 范畴。** 设 $k$ 是一个特征零的代数闭域。在本文中，我们研究小型 dg 范畴 $dgCat_k$ 在 $k$ 上的（其底层 $\infty$-范畴），并赋予其 Morita模型结构。换言之，我们只将这些范畴视为直到 Morita 等价为止。特别地，我们只考虑幂等完备小微分分次范畴。[6] 事实证明，由以下结果可知，这等价于研究（紧生成的可呈现） $k$-线性稳定 $\infty$- 范畴。

**定理2.1** ([Coh13，推论 5.7])。 存在一个 $\infty$-范畴等价

$$N(\mathrm{dgCat}_k)[W^{-1}] \simeq \mathbf{Mod}_{Hk-mod}((Pr^L_{st,\omega})^{\otimes}).$$

这里，左侧是小型 $k$-dg-范畴范畴在 Morita 等价下的 $\infty$-局部化（即上述模型范畴的底层 $\infty$-范畴），而右侧是由保持紧对象和余极限的函子构成的紧生成可呈现 $k$-线性稳定 $\infty$-范畴的 $\infty$-范畴。

注记 2.2. 如 [GR19, 10.3], 所述，这也是由连续函子构成的 $\infty$-范畴 $\mathrm{DGCat}_k$：其对象为（大型）余完备的 $k$-dg-范畴，且这些函子保紧对象。给定幂等完备小 dg-范畴之间的一个正合函子，取 Ind 完备化即可得到余完备 dg-范畴之间一个保紧对象的连续函子。此外，将小 dg-范畴映到其 Ind 完备化的函子实际上是 $\infty$-范畴的一个等价

$$\mathrm{Ind} : \mathrm{dgCat}_k^{\mathrm{ex}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{DGCat}_k^{\mathrm{cont}}.$$

[6]这是可行的，因为小的微分分次范畴总是与其幂等完备化 Morita 等价。

注记 2.3. 这里 $\mathcal{D}(k) := Hk-mod$ 是 $\infty$-模的导出稳定 $k$-范畴，它是余完备的，并带有一种对称幺半结构，使其成为 [Lur17] 意义下的交换代数。

$\infty$-范畴理论为我们提供了一个自然的环境，使我们能够以同伦相干的方式考虑问题；事实证明，在研究 dg-范畴赋值的函子性行为时，这种方式极为有用。权威参考文献为 [Lur09][Lur17]。为适应我们的用法，我们采用 [GR19 第 1] 章中的处理方式。

我们经常需要在两种视角之间切换：dg-范畴与 $k$-线性稳定 $\infty$-范畴；切换时不作明确说明，今后我们也将如此。为方便起见，我们还将 $\mathcal{C}at_k$ 写作 **模**$_{Hk-mod}((Pr^L_{st,\omega})^{\otimes})$，表示由小型 $k$-dg 范畴 / 余完备 $k$-dg 范畴及保持紧对象的连续函子构成的 $\infty$-范畴。

2.1.2. 极限与余极限。 当我们说 dg 范畴图表的极限/余极限，即函子 $p: K \to \mathcal{C}at_k$ 的极限/余极限时，始终指 $\infty$-范畴意义下的极限/余极限。当 $K$ 实际上是一个 1-范畴（的神经）时，这等价于在模型范畴意义下考虑同伦极限/余极限。

下面的引理指出，在某些条件下，极限可以通过余极限计算，反之亦然；这在后文中会很有用。

**引理 2.4** ([Lur09, 推论 5.5.3.4][DG15, 命题 1.7.5][GR19, I, 第 1 章, 8.4.3])。 设 $I$ 是一个小范畴， $\Psi: I \to \mathcal{C}at_k$ 是一个函子，并记 $C_i = \Psi(i)$。假设对于任意 $i \to j$, $\Psi(i \to j)$都有一个左伴随 $\phi_{ij}$。那么存在一个函子 $\Phi: I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at_k$ ，使得 $\Phi(i) = C_i$， $\Phi(i \to j) = \phi_{ji}$。此外，还存在一个典范等价

$$\operatorname{colim}\Psi = \operatorname*{colim}_{i\in I} C_i \simeq \lim \Phi = \lim_{i\in I^{\mathrm{op}}} C_i.$$

2.1.3. *dg* 范畴的张量积。 范畴 $\mathcal{C}at_k$ 具有由 Lurie[Lur17, 4.5.2]定义的对称幺半结构。这里我们遵循 [GR19, 1.10.3]中的阐述。根据定义，两个 dg 范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的张量积是 $\mathcal{C}\otimes_k\mathcal{D} :=\mathcal{C}\otimes_{Hk-mod}\mathcal{D}$ 相对张量积，其中 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 被视为 $Hk-mod$模。特别地，取值于 $\mathcal{C}at_k$ 的层范畴继承了一个张量积，也记作 $-\otimes_k -$。下面的引理在后文中会很有用。

**引理 2.5.** 设 $\Gamma$是一个 1-范畴， $\mathcal{C}$ 是一个余完备 dg 范畴。存在一个典范等价

$$\mathrm{Fun}(\Gamma, \mathcal{D}(k)) \otimes_k \mathcal{C} \simeq \mathrm{Fun}(\Gamma, \mathcal{C}).$$

证明。 在 [GR19, 1.8.5.7], 中，取 $\mathcal{A} = k\Gamma$ $k$-线性化 $\Gamma$ 和$\mathbf{M} = \mathcal{C}$。 □

2.2. **Kashiwara-Schapira 层叠**。 这里我们简要介绍适用于本文设定的可构造层与微局部层理论。本文所考虑的层也称为取值于 $k$-模的无界链复形的可构造层。

**定义 2.6**。 $M$ 上的 $k$-模的预层 是一个函子

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}(M)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}(k),$$

并且我们用 PSh($M$; $\mathcal{D}(k)$) 表示 $k$-模的预层范畴。

**定义 2.7.** 我们所说的 $k$-模的层，是指取值于 $\mathcal{D}(k)$ 且满足（Čech）下降条件的预层。

在不会造成混淆时，我们省略 $\mathcal{D}(k)$，并简写为 $\mathrm{PSh}(M)$ 和 $\mathrm{Sh}(M)$。我们也可以写作 $\mathrm{Sh}^{\circ}(M)$，以强调我们讨论的是无界复形的层。

注2.8。此定义与经典做法一致，即考虑阿贝尔群层的导出范畴。

注2.9。包含 $\mathrm{Sh}(M;\mathcal{D}(k)) \to \mathrm{PSh}(M;\mathcal{D}(k))$ 有一个左伴随，即层化函子，记作 $a\colon \mathrm{PSh}(M;\mathcal{D}(k)) \to \mathrm{Sh}(M;\mathcal{D}(k))$，它将 $\mathrm{Sh}(M;\mathcal{D}(k))$ 展示为 $\mathrm{PSh}(M;\mathcal{D}(k))$ 的可及局部化。

大部分基础结果可见于 [KS90]，而一些改写到 $\infty$-范畴语境中的结果可见于 [RS18]。

注2.10。在 [RS18], 中，作者讨论的是超完备层。不过，在我们的语境下，这一要求是多余的，因为流形上的每个 $k$-模层都是超完备的。这是因为 $k$-模层超完备，当且仅当其底层谱层超完备；而这又当且仅当取 $\Omega^{\infty}$ 所得到的空间层超完备。然而，流形上的空间层总是超完备的，参见 [Lur09, 7.2]。

**定义 2.11.** 设 $\mathcal{S} = \coprod S_\alpha$ 是 $M$的一个分层。 $k$-模的 $\mathcal{S}$-可构造层是满足以下条件的层 $\mathcal{F}$： 对于任意 $\alpha$，$\mathcal{F}|_{S_\alpha}$ 都是一个局部系统。

设 $\mathcal{F}$是一个 $\mathcal{S}$–可构造层。对于任意余方向 $p = (x,\xi) \in T^*M$，存在 $\mathcal{F}$ 在 $(x,\xi)$ 处的微局部茎 $\mu\mathrm{stk}_p(\mathcal{F})$。为描述这个函子，我们选取一个（芽意义下的）莫尔斯函数 $f$，使得 $df|_x = \xi$，并取 $x$ 的一个小邻域 $U$。微局部茎是以下对象的余纤维:

$$\mathcal{F}(U \cap f^{-1}(\epsilon)) \to \mathcal{F}(U \cap f^{-1}(-\epsilon)),$$

对于足够小的 $\epsilon > 0$。粗略地说，某个余方向处的微局部茎衡量了一个层沿该余方向不为常值的程度。

**定义 2.12.** $\mathcal{F}$ 的奇异支撑 $\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ 是满足 $\mu\mathrm{stk}_p(\mathcal{F})$ 非零的余方向 $p$ 所成集合的闭包。

记 $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{S}} := N^*\mathcal{S} = \coprod N^*S_\alpha$ 为该分层的余法丛。对于每个层 $i_\alpha : S_\alpha \hookrightarrow M$，可以关联一个层 $k_\alpha := i_{\alpha *}k$。我们有如下结论。

**引理 2.13.** $\mathrm{SS}(k_\alpha) \subseteq \Lambda$. □

将 $\mathcal{S}$ 视为偏序集，其中当且仅当 $S_\alpha \subseteq S_\beta$ 时存在映射 $\alpha \to \beta$；限制映射与赋值 $\alpha \mapsto k_\alpha$ 共同给出一个函子 $\mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sh}_\Lambda(M)$。以下是众所周知的结论，参见例如 [GPS19, 3.1]。

**定理 2.14**。 如果 $\mathcal{S}$ 中的所有分层都是可缩的，那么 $\mathrm{Sh}_\Lambda(M) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{S},\ \mathcal{D}(k))$。该等价由以下左 Kan 延拓给出。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Sh}(M) \\ \downarrow{\scriptstyle よ} & \overset{\simeq}{\nearrow}_{\mathrm{LKan}} & \\ \mathrm{Fun}(\mathcal{S}, \mathcal{D}(k)) & & \end{array}$$

换言之，层范畴 $\mathrm{Sh}_{\Lambda}(M)$ 由余表示对象 $k_\alpha$ 紧生成，其自同态代数为 $k[\mathcal{S}^{\mathrm{op}}]$。

**定理2.15**。 [GPS20b，定理4.13] 设 $X \subset T^*M$ 是闭锥形的，且 $\Lambda \subset T^*M \backslash X$ 是闭锥形次解析各向同性的。包含 $\mathrm{Sh}_X(M) \to \mathrm{Sh}_{X\cup\Lambda}(M)$ 是由 $S$-右正交对象构成的全子范畴，因此存在一个左伴随，将前者表示为一个局部化。这里， $S$ 是 $\Lambda$的拉格朗日点处微局部茎函子的余代表对象集合。

可以定义范畴层 $\mu\mathrm{Sh}$，通常称为微局部层或 Kashiwara-Schapira 层叠，它是以下预层在$T^*M$ 上关于锥拓扑的层化：

$$\mu\mathrm{Sh}^{pre} : U \mapsto \mathrm{Sh}(M)/\,\mathrm{Sh}_{T^*M\backslash U}(M).$$

这个定义可追溯至 [KS90，第 6] 节，并且在所谓的微局部同态空间研究中发挥着重要作用（见 [KS90，定义4.1.1]）层之间的同态。到目前为止，我们基本上省略了理论的这一方面，但想借下述定理说明这个定义的动机。

**定理2.16**。 [KS90，定理6.1。2][Gui12，推论5。5] 设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是 $M$ 上的层，并用相同的名称表示它们在 $\mu\mathrm{Sh}(U)$中的像。存在一个典范等价

$$\hom_{\mu\mathrm{Sh}(U)}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \simeq \mu\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{G}).$$

对于 $\mathcal{F} \in \mu\mathrm{Sh}(U)$，存在定义良好的奇异支撑概念，使我们能够考虑“支撑”于 $\Lambda$上的微局部层。

**定义2.17**。 与 $\Lambda$ 相关联的*Kashiwara-Schapira* 栈 $\mu\mathrm{Sh}_\Lambda$ 是 $\mu\mathrm{Sh}$的子层，定义为

$$\mu\mathrm{Sh}_{\Lambda} : U \mapsto \{\mathcal{F} \in \mu\mathrm{Sh}(U) : \mathrm{SS}(\mathcal{F}) \subseteq \Lambda\}.$$

## 3. Principal toric fibrations

**3.1. 叠化主环面纤维化**。 本文考虑一类特殊的带有环面纤维的纤维化 $\mathcal{X} \to Y$，称为叠化主环面纤维化。叠化主环面纤维化是环面栈 [BCS05、Iwa09、FMN10、Tyo12]的相对版本（更准确地说，是 [Tyo12]意义下的环面栈）。

我们回顾用于定义环面栈的堆叠扇这一概念。

**定义 3.1.** 一个堆叠扇 [BCS05] 记作 $(\hat{\Sigma}, \beta)$，由以下数据构成

- 有限余核的有限秩自由阿贝尔群之间的一个映射 $\beta\colon\ L \to N$，
- 位于 $M_{\mathbb{R}}$ 内的一个由有理严格凸锥组成的扇 $\Sigma := N^\vee_{\mathbb{R}}$，
- 位于 $L^\vee_{\mathbb{R}}$ 内的一个由有理严格凸锥组成的扇 $\hat{\Sigma}$。

此外，我们按照 [Kuw20]，假设

**^假设 3.2**。 $\beta_{\mathbb{R}}$ 在两个扇 $\Sigma$ 和 $\Sigma$之间诱导出一个同构。

现在， $\beta$ 诱导出代数环面之间的一个满态射

$$\beta_{k^\times} : L_{k^\times} \to N_{k^\times}. \tag{3.1}$$

我们设 $G_\beta := \ker \beta_{k^\times}$。堆叠扇的信息使我们能够定义一个环面栈

$$X_{\Sigma,\beta} = \left[\operatorname*{colim}_{\hat{\sigma}\in\hat{\Sigma}} k[\sigma^\vee \cap L^\vee]/G_\beta\right],$$

其中 $\hat{}\sigma^\vee := \{v \in L^\vee_{\mathbb{R}} :\ v(x) \geq 0,\ \ \forall x \in \sigma\}$ 是对偶锥。

为了将这一构造推广到相对情形，需要说明纤维如何在底空间上变化。我们考虑的情形是，单值化可以由以下数据编码。

**定义 3.3.** 一个*Ikari* [7] 是阿贝尔群的一个态射 $\mathcal{E} :\ L^\vee \to \mathrm{Pic}(Y)$.

注 3.4. 一个 Ikari 非典范地等价于在 $Y$ 上选取 $n =$ 个线丛（考虑顺序），其中 $L$ 表示秩。

给定 $L^\vee$ 的任意子幺半群 $S$，便有一个 $\mathcal{O}_Y$-代数

$$\mathcal{E}[S] := \oplus_{s\in S}\mathcal{E}(s), \tag{3.2}$$

其中代数结构由显然的态射 $\mathcal{E}(s_1)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{E}(s_2) \xrightarrow{\simeq}\mathcal{E}(s_1+s_2)$ 给出。

**例 3.5.** 设 $S = \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \subset L^\vee = \mathbb{Z}^n$, $\mathcal{E} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)$。那么 $\mathcal{E}[S] \simeq \mathcal{S}ym_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n)$，且 $\mathcal{S}\mathrm{pec}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}[S]) = E(\mathcal{L}_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n^\vee)$，即$\mathcal{L}_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n^\vee$的全空间。

接着定义

$$X_{\hat{\Sigma},\mathcal{E}} := \operatorname*{colim}_{\hat{\sigma}\in\hat{\Sigma}} \mathcal{S}\mathrm{pec}_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{E}[\hat{\sigma}^\vee \cap L^\vee]. \tag{3.3}$$

注意，代数 $\mathcal{E}[S]$ 带有一个典范的 $G_\beta$-作用，描述如下。

**引理 3.6.** $G_\beta$ 典范地同构于 $\mathrm{Spec}\, k[\mathrm{coker}(\beta^\vee)]$。

证明。 注意

$$\beta_{k^\times} : L_{k^\times} = \mathrm{Spec}\, k[L^\vee] \to N_{k^\times} = \mathrm{Spec}\, k[N^\vee].$$

$\ker \beta_{k^\times}$ 因此由单位元处的纤维给出，即

$$\mathrm{Spec}\, k[L^\vee/N^\vee] = \mathrm{Spec}\, k[\mathrm{coker}(\beta^\vee)].$$

□

**推论 3.7.** $\mathcal{E}[S]$ 具有一个典范的 $G_\beta$-作用，由以下映射给出

$$\mathcal{E}[S] \to \mathcal{E}[S]\otimes k[\mathrm{coker}(\beta^\vee)],$$

其中第二个因子上的映射由 $S \hookrightarrow L^\vee \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(\beta^\vee)$ 诱导。

注记 3.8. 或者，也可以将 $\mathrm{coker}(\beta^\vee)$ 视为 $G_\beta$ 的特征格。于是，$G_\beta$-作用的权由投影 $S \to \mathrm{coker}(\beta^\vee)$ 给出。

**定义 3.9**。 与堆叠扇 $\hat{}(\Sigma, \beta)$ 及 Ikari $\mathcal{E}$ 相关联的栈化主托里纤维化 是商叠

$$\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta,\mathcal{E}} := \left[X_{\hat{\Sigma},\mathcal{E}}/G_\beta\right] = \left[\operatorname*{colim}_{\hat{\sigma}\in\hat{\Sigma}} \mathcal{S}\mathrm{pec}_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{E}[\hat{\sigma}^\vee \cap L^\vee]/G_\beta\right]. \tag{3.4}$$

[7] 意为“锚点”。

3.2. **系数系统** $\Phi(\mathcal{E})$。 对于 Ikari $\mathcal{E}$，我们引入拓扑环面 $M_T = M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 上的 ($k$-线性稳定 $\infty$-)范畴局部系统 $\Phi(\mathcal{E})$。回顾以下事实。

**引理 3.10.** 对于任意（拓扑）环面 $T$，存在一个典范等价 $T \simeq B\pi_1(T)$。□

将此等价应用于 $M_T$，得到 $M_T \simeq B\pi_1(M_T) \simeq BM$。回想一下，我们有映射

$$M \xrightarrow{\beta^\vee} L^\vee \xrightarrow{-\mathcal{E}} \operatorname{Pic}(Y),$$

它们在分类空间上诱导出映射

$$BM \to BL^\vee \to B\operatorname{Pic}(Y).$$

另一方面，我们考虑皮卡群 $\mathrm{Pic}(Y)$ 在层范畴上的作用。考虑群胚 $B\mathrm{Pic}(Y)$ 以及以下赋值

$$* \mapsto \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(Y),$$

$$* \xrightarrow{\alpha} * \mapsto \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(Y) \xrightarrow{\otimes \mathcal{L}_\alpha} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(Y),$$

其中 $\mathcal{L}_\alpha$ 是 $\mathrm{Pic}(Y)$ 中与 $B\mathrm{Pic}(Y)$ 内的态射 $\alpha$ 相对应的线丛。

**命题 3.11.** 此赋值构成一个函子

$$B\operatorname{Pic}(Y) \to \mathcal{C}at_k.$$

证明。 同理，我们有一个 1-范畴函子

$$B\operatorname{Pic}(Y) \to dgCat_k,$$

它将唯一的对象映至相干层的 dg 范畴 $\mathrm{Coh}(Y)$。注意，限制到其对象恰好由每个同构类各一个对象组成的全子范畴后，可以使一切严格可交换，从而避免任何 2-范畴问题。因此，此函子是良定义的。现在复合

$$B\operatorname{Pic}(Y) \to N(dgCat_k) \to N(dgCat_k)[W^{-1}] \simeq \mathcal{C}at_k$$

就是所需的函子。 □

**定义 3.12。** 与 $\mathcal{E}$ 相关联的系数系统 $\Phi(\mathcal{E})$ 由以下复合函子给出

$$M_T \simeq BM \to BL^\vee \xrightarrow{B(-\mathcal{E})} B\operatorname{Pic}(Y) \to \mathcal{C}at_k.$$

注 3.13。 非正式地说，这是由基本群 $\pi_1(M_T) \simeq M \xrightarrow{\beta^\vee} L^\vee \xrightarrow{-\mathcal{E}} \mathrm{Pic}(Y) \xrightarrow{\otimes} \mathrm{Aut}(\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(Y))$ 的表示所给出的局部系统。

3.3. **主定理。** 有了这些技术要素，我们现在可以陈述主定理。

**定理 3.14。** 存在一个 $k$-线性稳定 $\infty$-范畴的等价，

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta,\mathcal{E}} \simeq \Gamma\left(\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}}} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})\right).$$

注 3.15。 由于该层支撑在 $\Lambda_{\hat{\Sigma},\,\beta}$ 上，在 $\Lambda_{\hat{\Sigma},\,\beta}$、 $T^*M_T$ 以及 $M_T$ 上取整体截面并无区别。

## 4. Affine case

我们的首要目标是证明关于非堆叠仿射环面纤维化的主定理。设 $\Sigma = \Sigma(\sigma)$ 是一个正则扇，它由 $N$ 中某个有理严格凸锥 $\sigma$ 的面构成。我们将证明如下结论。

**定理 4.1.** 存在一个 $k$-线性稳定 $\infty$-范畴之间的等价，

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}\mathcal{X}_{\Sigma(\sigma),\mathcal{E}} \simeq \Gamma\left(\Lambda_{\Sigma(\sigma)}, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\Sigma(\sigma)}} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})\right).$$

**4.1. 可构造层的描述。** 我们先对层 $\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma}$ 作局部组合描述。

首先注意， $\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma}$ 在 0 处的茎就是 $\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma}(M_{\mathbb{R}})$。由 $\Sigma$ 的正则性可知， $\sigma$ 的生成元可以补充成（或本身就是） $N$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。注意，FLTZ 骨架的构造不依赖于基的选择。特别地，我们可以假设 $N = \mathbb{Z}^n$ 和 $\Sigma$ 由 $e_0$、..... $e_{k-1}$ 生成。于是，在 0 附近，骨架由 $(\top)^k \times (-)^{n-k}$ 给出，其中 $\top$ 表示 $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R} \subseteq T^*\mathbb{R}$，而 $-$ 表示零截面 $0 \times \mathbb{R} \subseteq T^*\mathbb{R}$。因此，我们可以运用 K¨unneth 论证得到结论。 [8]

不过，为了更好地说明问题，我们选择通过仔细考察骨架，直接计算范畴层 $\mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma}$。注意，对于每个生成元 $\tau \in \Sigma(1)$， $\tau^\perp$ 将空间 $M_{\mathbb{R}}$ 分为三个部分，即左侧、中心（即 $\tau^\perp$）和右侧，分别记为 $\tau_l$， $\tau_c$， $\tau_r$；我们采用这样的定向，使余向量 $\tau \in M^\vee_{\mathbb{R}}$ 从左指向右。 $M_{\mathbb{R}}$ 于是具有诱导的分层，

$$\mathcal{S} = \coprod_{\phi \in \{l,c,r\}^{\Sigma(1)}} \bigcap_{\tau \in \Sigma(1)} \tau_{\phi(\tau)}.$$

此后，若不会引起混淆，我们就把 $\mathcal{S}$的分层与 $\{l,c,r\}^{\Sigma(1)}$ 等同起来。显然， $N^*\mathcal{S}$ 包含 $\Lambda_\Sigma$。于是，一个关于 $\mathcal{S}$可构造的层可表示为函子 $\mathcal{F} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{S},\ \mathcal{D}(k)) \simeq \mathrm{Sh}_{\mathcal{S}}(M_{\mathbb{R}})$。

接下来需要在函子范畴上施加奇异支撑条件。注意，作为偏序集， $\mathcal{S} \simeq (\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet)^{\Sigma(1)}$。设 $\mu, \nu \in \mathcal{S}$，当且仅当存在一个 $W \subseteq \Sigma(1)$，使得对于 $\tau \in W$，有箭头 $\mu \to \nu$，且 $\mu(\tau) = c, \nu(\tau) \in \{l,r\}$，并且对于 $\tau \in \mathcal{S} - W$，$\mu(\tau) = \nu(\tau)$。假设 $|W| = 1$, $W = \{\tau_0\}$，若 $\mu(\tau) = c, \nu(\tau) = l$，我们断言 $\mathcal{F}(\mu) \simeq \mathcal{F}(\nu)$。为此，任取一点 $p \in \mu$。注意，$\Lambda_\Sigma|_p = \bigcup_{\tau_0 \supseteq \tau \in \Sigma}(-\tau) \times p$。因此，余向量 $(\tau_0, p) \notin \Lambda_\Sigma$，因为 $\sigma$ 是严格凸的。在 $(\tau_0, p)$ 处微局部茎的消失便推出所需的同构。现在，任取一个 $\mu \to \nu$，若它分解为序列 $\mu = \kappa_0 \to \kappa_1 \to \cdots \to \kappa_l = \nu$，且满足 $|W(\kappa_i, \kappa_{i+1})| = 1$，则 $\mathcal{F}(\mu) \simeq \mathcal{F}(\nu)$。满足这些关系的函子恰好是那些经由.....分解的函子

$$\mathcal{S} \simeq (\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet)^{\Sigma(1)} \to (\bullet \to \bullet)^{\Sigma(1)} \to \mathcal{D}(k).$$

反过来，很容易看出，满足这些关系的可构造层的奇异支撑包含于 $\Lambda_\Sigma$中。总之，我们得到一个拉回

[8]这一论证归功于 Vivek Shende；我们感谢 Wenyuan Li 传达这一想法并解释相关细节。

范畴图表，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}_{\Lambda_\Sigma}(M_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Fun}\left((\bullet\to\bullet)^{\Sigma(1)}, \mathcal{D}(k)\right) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathrm{Sh}_{\mathcal{S}}(M_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Fun}\left((\bullet\leftarrow\bullet\to\bullet)^{\Sigma(1)}, \mathcal{D}(k)\right). \end{array}$$

因此我们已经证明，

**引理 4.2.** $\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma}$ 在 $0\in T^n$ 处的茎由函子 $\mathrm{Fun}\left((\bullet\to\bullet)^{\Sigma(1)}, \mathcal{D}(k)\right)$ 给出。此外，沿点 $\bullet\to(\bullet\to\bullet)^{\Sigma(1)}$ 拉回表示，恰好就是到其相应层的限制函子。□

可以用两个开区间 $\mathcal{U}=\{U,V\}$ 覆盖 $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，即 $U=(-1/4,1/4)$、$V=(1/8,7/8)$，其 Čech 神经由下图 $I=C(\mathcal{U})$ 给出：

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ *_l & & & & *_r \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & V & & \end{array}.$$

这些区间的乘积给出 $T^n\simeq M_T$ 的一个覆盖，其 Čech 神经是前一个图的 $n$ 次幂。图中的一个顶点由元素 $\kappa\in\{U,V,l,r\}^{[n]}$ 标记，记作 $O_\kappa=\prod_{i=0}^{n-1}\kappa(i)\subset T^n$。通过与前述论证完全类似的论证，可以证明

**引理 4.3.** $\mu$层范畴$^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma}(O_\kappa)$ $\simeq$函子 $\left((\bullet\to\bullet)^{\Sigma(1)\cap\kappa^{-1}(U)}\mathcal{D}(k)\right)$，其中我们将 $\Sigma(1)$ 视为 $\{0,\dots,n-1\}$ 的子集 $\{0,\dots,k-1\}$。□

换言之，函子 $\mu$层范畴$^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma}: I^n\to\mathrm{Cat}_k$ 等价于 $I^n\to\mathrm{sSet}$ 和 $\mathrm{Fun}(-,\mathcal{D}(k)):\mathrm{sSet}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Cat}_k$ 的复合，其中映射的前 $k$ 个分量由 $k$ 重积给出

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ *_l & & & & *_r \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & V & & \end{array} \;\to\; \begin{array}{ccccc} & & \Delta^1 & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \Delta^0 & & & & \Delta^0 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \Delta^0 & & \end{array},$$

而最后的 $n-k$ 个分量正在收缩到一个点。因此，$\Gamma(T^n,\ \mu$层范畴$^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma}\otimes_k\Phi(\mathcal{E}))$ 由下图的极限给出。

$$\begin{array}{ccc} \text{函子}((\Delta^1)^{\Sigma(1)},\ \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(Y)) & \longrightarrow & \prod_i \text{函子}((\Delta^1)^{\Sigma(1)\cap[n]-i},\ \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(Y)) \\ \downarrow & \nearrow_{\prod_i\otimes\mathcal{L}_i} & \\ \prod_i \text{函子}((\Delta^1)^{\Sigma(1)\cap[n]-i},\ \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(Y)) & & \end{array}$$

4.2. **相干层**。 我们汇集了 [GR19], 的一些基础结果，参见前引文献，以了解全面的论述。

**引理 4.4** (K¨unneth)。 [GR19，第 4 章，引理 6.3。2] 若 $X_1$， $X_2 \in \mathrm{Sch}_{\mathrm{aft}}$，则存在一个范畴等价

$$\boxtimes\colon \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(X_1) \otimes \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(X_2) \simeq \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(X_1 \times X_2).$$

**引理 4.5** (Zariski 下降)。 [GR19，第 4 章，4。2] 若 $U = \coprod U_\alpha$ 是 $Y$的 Zariski 覆盖，则存在一个等价

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(Y) \simeq \lim_{I \in C(U)} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_I).$$

令 $U = \coprod U_\alpha \to Y$ 为一个平凡化线丛 $\mathcal{L}_i$的 Zariski 覆盖。记作$\mathcal{X}|_{U_\alpha} \cong (\mathbb{A}^k \times \mathbb{G}_m^{n-k}) \times U_\alpha$。 由 K¨unneth,

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}|_{U_\alpha}) \simeq \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathbb{A}^k \times \mathbb{G}_m^{n-k}) \otimes \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha). \tag{4.1}$$

注意，我们有如下等价 [9]

**引理 4.6**。

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathbb{A}^k \times \mathbb{G}_m^{n-k}) \simeq \operatorname{Fun}(\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0}^k \times \mathfrak{B}\mathbb{Z}^{n-k}, \mathcal{D}(k)),$$

其中， $\mathfrak{B}\mathbb{Z}$ （分别地， $\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0}$）是仅含一个对象、其自态射空间由 $\mathbb{Z}$ （分别地， $\mathbb{Z}_{\geq 0}$）给出的范畴。[10]

证明。 为简化起见，我们假设 $n = k = 1$；一般情形可由完全相同的论证或 K¨unneth 推出。因此，我们需要将 $\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathbb{A}^1)$ 与 $\operatorname{Fun}(\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathcal{D}(k))$ 等同起来。前者可识别为 $\mathcal{D}(k[x])$，而后者作为函子范畴，由于 $\mathcal{D}(k)$ 是余完备的，因而也是余完备的。注意，$\operatorname{Fun}(\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathcal{D}(k)) \simeq \operatorname{Fun}_k(k\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathcal{D}(k))$ 有一个紧生成元，记作 $\mathbf{1}$ ，它由点 $* \in (\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathrm{op}}$的（富化）米田嵌入给出。可以看出 $\operatorname{End}(\mathbf{1}) \simeq k[x]$ ，由 Schwede-Shipley 识别原理可得结论（参见 [Lur17, 7.1.2.1]）。□

因此

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}|_{U_\alpha}) \simeq \operatorname{Fun}(\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0}^k \times \mathfrak{B}\mathbb{Z}^{n-k}, \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha)) \tag{4.2}$$

由引理 2.5。注意，我们也可以用区间群胚 $I$ 将后者写作

$$\operatorname{Fun}((\Delta^1/\partial\Delta^1)^k \times (I/\partial I)^{n-k}, \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha)), \tag{4.3}$$

或者等价地，写作图的极限

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Fun}((\Delta^1)^k \times I^{n-k}, \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha)) & \longrightarrow & \prod_i \operatorname{Fun}(K_i, \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha)) \\ \downarrow & \nearrow_{\mathrm{id}} & \\ \prod_i \operatorname{Fun}(K_i, \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha)), & & \end{array}$$

其中， $K_i$ 是将（$\Delta^1$）$^k \times I^{n-k}$ 的第 $i$个分量替换为一个点所得的图，而竖直（分别为水平）映射由沿着 $K_i \to$（$\Delta^1$）$^k \times I^{n-k}$ 在第 $i$个坐标中包含左（分别为右）端点的拉回给出。

[9]我们感谢 Qingyuan Bai 进行了大量讨论，并基本上提出了这个证明。[10]我们使用 $\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而非 $B\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ，以强调它是一个范畴，但 $not$ （必然）是一个$\infty$-群胚，因为后者通常用于表示其 $\infty$-群胚完备化。特别地，$\mathfrak{B}\mathbb{Z}_{\geq 0} \not\simeq \mathfrak{B}\mathbb{Z} \simeq B\mathbb{Z} \simeq B\mathbb{Z}_{\geq 0}$。

尽管这个识别在 $U_\alpha$中并非自然，但可以通过张量积一个扭曲使其变得自然

$$\phi \in \mathrm{Fun}((\Delta^1)^k \times I^{n-k}, \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(Y))$$

定义如下。将顶点 $\lambda \in (\Delta^1)^k \times I^{n-k}$ 记为由序列 $\{\lambda_i\}$ 给出的顶点，其中$\lambda_i = 0, 1$。令 $\phi(\lambda) := \otimes_i \mathcal{L}_i^{-\lambda_i}$，且态射 $\mathcal{O} \to \mathcal{L}_i^\vee$ 由平凡化截面给出。本节的关键观察如下。

**命题 4.7.** 与 $\phi$ 作张量积后，同构 $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(\mathcal{X}|_{U_\alpha}) \simeq \mathrm{Fun}((\Delta^1/\partial\Delta^1)^k \times (I/\partial I)^{n-k}, \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}((U_\alpha))$ 与平凡化的选择无关。

证明。 不失一般性，可以假设 $n = k = 1$。记 $\mathcal{X}|_{U_\alpha} \simeq U_\alpha \times \mathbb{A}^1$和 $p\colon \mathcal{X} \to Y$。回顾一下，$\mathcal{X}$是 $\mathcal{L}^\vee$ 的全空间。给定 $\mathcal{X}|_{U_\alpha}$上的一个层 $\mathcal{F}$，相应的图由 $p_*\mathcal{F} \xrightarrow{p_*x} p_*\mathcal{F}$ 给出。与 $\phi$ 作张量积后，它变为

$$\begin{array}{ccc} p_*\mathcal{F} & \xrightarrow{p_*x \otimes s_\alpha} & p_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^\vee \\ \| & & \| \\ p_*\mathcal{F} & \xrightarrow{p_*s} & p_*(\mathcal{F} \otimes p^*\mathcal{L}^\vee) \end{array},$$

其中， $s$ 是 $p^*\mathcal{L}^\vee$的典范截面，且与平凡化的选择无关。□

注意， $\phi$ 的定义恰好编码了局部系统$\Phi(\mathcal{E})$的单值化。因此，上述命题可改述如下。

**命题 4.8.** 设 $\Phi_\alpha(\mathcal{E})$是一个局部系统，其单值化与 $\Phi(\mathcal{E})$的单值化相同，但茎为 $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha)$。则存在一个关于 $U_\alpha$函子性的等价：

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(\mathcal{X}|_{U_\alpha}) \simeq \Gamma(\mu\mathrm{Sh}^\diamond_{\Lambda_{\tilde{\Sigma}}} \otimes_k \Phi_\alpha(\mathcal{E})).$$

□

因此，我们得到如下关于 $U_\alpha$函子性的图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}((\Delta^1)^k \times I^{n-k}, \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha)) & \longrightarrow & \prod_i \mathrm{Fun}((K_i, \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha)) \\ \downarrow & \nearrow_{\prod_i \otimes \mathcal{L}_i} & \\ \prod_i \mathrm{Fun}(K_i, \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha)). & & \end{array}$$

现在，这个等价的函子性使我们能够通过粘合局部描述 $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha)$ 来证明该定理。对 $U_\alpha$ 取极限，由 Zariski 下降可得：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}((\Delta^1)^k \times I^{n-k}, \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(Y)) & \longrightarrow & \prod_i \mathrm{Fun}((K_i, \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(Y)) \\ \downarrow & \nearrow_{\prod_i \otimes \mathcal{L}_i} & \\ \prod_i \mathrm{Fun}(K_i, \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(Y)). & & \end{array}$$

于是定理得证。 □

4.3. **一种抽象描述**。对于谨慎的读者，我们对命题 4.7 给出一种抽象处理，其中函子性显而易见。 [11] 对前面的论证感到满意的读者可以跳过本节。

为简化记号，我们考虑 $n = k = 1$ 的情形，并指出一般情形几乎可以逐字照搬。

令 $\mathcal{A} := \mathcal{S}ym_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L})$ 为相对对称代数，它是 Ind Coh($Y$) 中的一个交换代数对象。因此，我们可以考虑 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}$(Ind Coh($Y$))，即 Ind Coh($Y$) 中的 $\mathcal{A}$-模范畴。

记 $\mathcal{X} = \mathcal{S}\mathrm{pec}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{A}) \xrightarrow{p} Y$（ $\mathcal{L}^\vee$ 的全空间）。给定一个层 $\mathcal{F} \in$Ind Coh $\mathcal{X}$， $p_*\mathcal{F}$ 是一个典范的 $\mathcal{A}$-模，其结构映射由伴随 [12] 给出

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} p_*\mathcal{F} \simeq p_*p^*p_*\mathcal{F} \to p_*\mathcal{F}.$$

这给出了一个函子 [13]

$$p_* : \mathrm{Ind\,Coh}(\mathcal{X}) \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Ind\,Coh}(Y)).$$

给定一个 $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{M}$，我们有由 $\mathcal{L} \to \mathcal{A}$ 诱导的图

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{M}.$$

在两侧与 $\mathcal{L}^\vee$ 张量化可得

$$\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^\vee.$$

这给出一个函子，从 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}$(Ind Coh($Y$)) 到

$$\lim \left( \begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{Ind\,Coh}(Y)) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\Delta^0, \mathrm{Ind\,Coh}(Y)) \\ \downarrow & \nearrow_{-\otimes\mathcal{L}} & \\ \mathrm{Fun}(\Delta^0, \mathrm{Ind\,Coh}(Y)) & & \end{array} \right) \simeq \Gamma(\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})).$$

它与 $p_*$ 的复合给出了所需的函子

$$\mathrm{Ind\,Coh}(\mathcal{X}) \to \Gamma(\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_\Sigma} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})).$$

现在，命题 4.7 是一个计算结果，说明限制到 $U_\alpha$ 后，它是一个等价。由于两侧都满足 Zariski 下降，因此它在全局上也是一个等价。这证明了定理 4.1。

## 5. Affine stacky case

考虑由单个有理严格凸锥 $\hat{}\sigma$ 在 $L$ 中的各个面给出的光滑仿射托里克扇 ($\hat{}\Sigma, \beta$)。

此情形下的 FLTZ 骨架由 b 给出 y

$$\Lambda_{\hat{\Sigma}} = \bigcup_{\tau \in \hat{\Sigma}} \bigcup_{\chi \in M_{\tau,\beta}/M} (-\tau) \times (\tau^\perp + \chi) \subset T^*M_T.$$

---

[11] 我们感谢 Qingyuan Bai 提出了这种处理方式。[12] 特别地，由于 $\mathcal{A} \simeq \oplus_{i \geq 0} \mathcal{L}^i$，我们有一个映射 $\mathcal{L} \otimes p_*\mathcal{F} \to p_*\mathcal{F}$，等价地说，有一个映射 $p_*\mathcal{F} \to p_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^\vee$。这与命题 4.7 的证明中所用的映射相同。[13] 伴随对

$$p^* : \mathrm{Ind\,Coh}(\mathcal{X}) \rightleftarrows \mathrm{Ind\,Coh}(Y) : p_*$$

给出 Ind Coh($Y$) 上的单子 $T = p_*p^*$。代数对象 $\mathcal{A}$ 恰好是将单子 $T$ 作用于幺半群单位元 $\mathcal{O}_Y$ 所得。因此，**模**$_{\mathcal{A}}$(Ind Coh($Y$)) $\simeq$ **模**$_T$(Ind Coh($Y$))。构造 $p_*$ : Ind Coh($Y$) $\to$ **模**$_T$(Ind Coh($\mathcal{X}$))，参见 [Lur17, 4.7.3]。

5.1. **绝对情形**。 首先假设底空间为 Spec $k$ ，并聚焦于点处的堆栈现象，这很有启发性。

**引理 5.1**。 设$\check{}$ $H_\beta$ 为 $H_\beta$的特征格。我们有$\check{}H_\beta \simeq M_{\sigma,\ \beta}/M$。

**引理 5.2**。 [Kuw20，引理 7。2]

$$\mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\hat{\sigma}),\beta} := [\operatorname{Spec} k[\sigma^\vee \cap L^\vee]/G_\beta] \simeq [\operatorname{Spec} k[\sigma^\vee/\sigma^\perp \cap M_{\sigma,\beta}]/H_\beta].$$

**引理 5.3**。 在识别$\check{}H_\beta \simeq M_{\sigma,\ \beta}/M$下，$k[\sigma^\vee/\sigma^\perp \cap M_{\sigma,\beta}]$ 中元素的权由投影 $\sigma^\vee/\sigma^\perp \cap M_{\sigma,\ \beta} \hookrightarrow M_{\sigma,\ \beta} \to M_{\sigma,\ \beta}/M$给出。

$\check{}$ 给定交换幺半群 $\Lambda$ 及幺半群态射 $\pi\colon \Lambda \to H$，其中 $\check{}H$ 是有限阿贝尔群 $H$ 的特征格，我们定义范畴 $\Gamma_{\Lambda,\ H}$ 如下。

- 对象为特征 $\chi \in \check{H}$
- 对于任意两个特征 $\chi$，$\chi'$，同态$(\chi,\ \chi') = \pi^{-1}(\chi' - \chi)$。

**引理 5.4.** 设 $\Lambda$ 如上定义。对于由 $\pi$指定的 $H$ 在 Spec $k[\Lambda]$上的作用，我们有

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}[\operatorname{Spec} k[\Lambda]/H] \simeq \operatorname{Fun}(\Gamma_{\Lambda,H}, \mathcal{D}(k)).$$

证明。 注意， $\{\mathcal{O}_\chi\colon \chi \in \check{}H\}$ 生成 IndCoh[Spec $k[\Lambda]/H$]。因此我们有

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}[\operatorname{Spec} k[\Lambda]/H] \simeq \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}(k)),$$

其中

$$\mathcal{A} := \operatorname{RHom}(\oplus_{\chi\in\check{H}}\mathcal{O}_\chi, \oplus_{\chi\in\check{H}}\mathcal{O}_\chi)$$

是 $\mathbf{1} := \oplus_{\chi\in\ \check{}H}\mathcal{O}_\chi$ 的自同态代数。直接计算 [14] 表明

$$\operatorname{RHom}(\mathcal{O}_{\chi_1}, \mathcal{O}_{\chi_2}) = k[\pi^{-1}(\chi_2 - \chi_1)].$$

因此， $\mathcal{A}$ 与由 $k$-线性化的 $\Gamma_{\Lambda,H}$ 所构成的微分分次代数相同，从而

$$\operatorname{Fun}(\Gamma_{\Lambda,H}, \mathcal{D}(k)) \simeq \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}(k)) \simeq \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}[\operatorname{Spec} k[\Lambda]/H].$$

□

特别地，我们取 $\Lambda = \Lambda(\hat{\Sigma}(\sigma)) := \sigma^\vee/\sigma^\perp \cap M_{\sigma,\beta}$ 和 $H = H_\beta$。另一方面，我们有层范畴的如下描述。

**引理 5.5**。

$$\operatorname{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}}}(M_T) \simeq \operatorname{Fun}(\Gamma_{\Lambda_{\hat{\Sigma}},H_\beta}, \mathcal{D}(k))$$

证明。 这可以通过粘合围绕每个特征 $\chi \in M_{\sigma,\beta}/M \subset M_T$的 $\mu\overset{\diamond}{\operatorname{Sh}}{}^{\Lambda}{}_{\hat{\Sigma},\beta}$ 的局部描述得到。更确切地说，这可以由如下事实推得：$\overset{\diamond}{\operatorname{Sh}}{}^{\Lambda}{}_{\hat{\Sigma},\beta}(M_T) \simeq$ Ind Coh $\mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\hat{\sigma})}$，如 [Kuw20] 中所示。□

[14]这是 [Kuw20，命题 7.4] 的一个特例，重述如下。

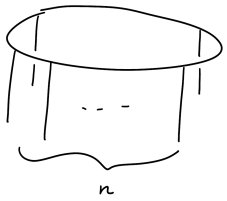



FIGURE 1. $[\mathbb{A}^1/\mu_n]$的 FLTZ 骨架

例 5.6. 若 $\mathcal{X} = [\mathbb{A}^1/\mu_n]$，则 $M_{\sigma,\beta} = \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$，且 $H_\beta \simeq \check{} H_\beta \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。在此情形下，幺半群 $\Lambda(\hat{}\Sigma) = \frac{1}{n}\mathbb{Z}_{\geq 0}$，映射 $\Lambda(\hat{}\Sigma) \to \check{} H_\beta$ 由 $\frac{i}{n} \mapsto i$ 给出。现在，范畴 $\Gamma_{\Lambda,H}$ 有与 $\mu_n$ 的特征相对应的 $n$ 个对象。$i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 之间的同态空间由 $(\frac{j-i}{n} + \mathbb{Z}) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 给出。考虑一个有 $n$ 个顶点的循环箭图，可以看出，这个同态空间与从 $i$ 到 $j$ 的路径集合相同，而该范畴中态射的复合对应于路径的连接。因此，$\Gamma_{\Lambda,H}$ 是由循环箭图自由生成的范畴，即其路径范畴。函子 $\mathsf{Fun}(\Gamma_{\Lambda,H}, \mathcal{D}(k))$ 因而可视为循环箭图的表示。$\mu_n$-等变 $k[x]$-模 $M$ 随后可视为该箭图表示，其中顶点 $\chi \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 映至 $M_\chi$，即 $M$ 的 $\chi$-等型分量；而 $\chi$ 与 $\chi + 1$ 之间的箭映至 $M_\chi \xrightarrow{x} M_{\chi+1}$。另一方面，可构造层范畴也可视为同一循环箭图的表示，见图 1。

5.2. **相对情形**。沿用前面的记号，设 $U = \coprod U_\alpha \to Y$ 是使这些线丛平凡化的 Zariski 覆盖。令 $\Phi_\alpha(\mathcal{E})$ 为与 $\Phi(\mathcal{E})$ 具有相同单值化的范畴的局部系统，但其茎为 $\mathsf{IndCoh}(U_\alpha)$，则 $\Phi(\mathcal{E}) \simeq \lim_\alpha \Phi_\alpha(\mathcal{E})$。

注 5.7。局部系统 $\Phi_\alpha(\mathcal{E})$ 是平凡的，但其平凡化并非规范的。其平凡化由这些线丛的平凡化给出。

**命题 5.8**。我们有如下关于 $U_\alpha$ 函子性的等价：

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(\mathcal{X}|_{U_\alpha}) \simeq \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^\diamond_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}} \otimes_k \Phi_\alpha(\mathcal{E})).$$

证明。由 K¨unneth 公式和绝对情形可知，左边等价于 $\mathrm{Sh}^{\Lambda_{\hat{\Sigma}}}(M_T) \otimes_k \mathsf{Ind\ Coh}(U_\alpha) \simeq \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^\diamond_{\Lambda_{\hat{\Sigma}}} \otimes_k \mathsf{Ind\ Coh}(U_\alpha)) \simeq \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^\diamond_{\Lambda_{\hat{\Sigma}}} \otimes_k \Phi_\alpha(\mathcal{E}))$。最后一个等价由注 5.7 中的同构诱导。由命题 4.7 的证明可知，这个复合等价不依赖于平凡化的选择，并且关于 $U_\alpha$ 是函子性的。□

**定理 5.9**。令 $\mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\sigma),\ \beta}$ 为由单个有理严格凸锥 $\sigma$ 的堆叠化$\hat{}$扇 $(\Sigma(\sigma)\ \beta)$ 定义的主环面纤维化。则有

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(\mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta}) \simeq \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^\diamond_{\Lambda_{\hat{\Sigma}}} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})).$$

证明。取 $\{U_j\}_{j\in J}$ 为 $M_T$ 的一个足够细的有限覆盖，使得所有交集都是可缩空间的（有限个的并），并且

$$\Gamma(U_j, \mu\mathrm{Sh}^\diamond_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}} \otimes_k \Phi_\alpha(\mathcal{E})) \simeq \Gamma(U_j, \mu\mathrm{Sh}^\diamond_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}) \otimes_k \Gamma(U_j, \Phi_\alpha(\mathcal{E})).$$

注意，ind-相干层的拉回 $f^*$ 有一个右伴随 $f_*$ （参见 [GR19, II, Chapter 4, 3.1.6]），而将微局部层 $i^*$ 限制到开子集上是余连续的。因此，引理 2.4 适用，我们可以如下计算。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta}) &\simeq \lim_{\alpha\in C(A)} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}|_{U_\alpha}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\alpha\in C(A)^{\mathrm{op}}} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}|_{U_\alpha}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\alpha\in C(A)^{\mathrm{op}}} \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}} \otimes_k \Phi_\alpha) \\
&\simeq \lim_{j\in C(J)} \operatorname*{colim}_{\alpha\in C(A)^{\mathrm{op}}} \Gamma(U_j, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}) \otimes_k \Gamma(U_j, \Phi_\alpha(\mathcal{E})) \\
&\simeq \lim_{j\in C(J)} \Gamma(U_j, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}) \otimes_k \operatorname*{colim}_{\alpha\in C(A)^{\mathrm{op}}} \Gamma(U_j, \Phi_\alpha(\mathcal{E})) \\
&\simeq \lim_{j\in C(J)} \Gamma(U_j, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}) \otimes_k \lim_{\alpha\in C(A)} \Gamma(U_j, \Phi_\alpha(\mathcal{E})) \\
&\simeq \lim_{j\in C(J)} \Gamma(U_j, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}) \otimes_k \Gamma(U_j, \Phi(\mathcal{E})) \\
&\simeq \lim_{j\in C(J)} \Gamma(U_j, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})) \\
&\simeq \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})).
\end{aligned}$$

□

## 6. Descent

本节将使用下降论证，在一般情形下证明主定理。证明思路如下：局部来看，主环面纤维化是一个笛卡尔积；对于纤维化平凡的任意 Zariski 开集，可以通过沿纤维方向粘合，证明该定理成立——也就是说，归结为环面纤维为仿射的局部情形；接下来，我们将说明还可以沿底空间方向进一步粘合，并以此证明主定理。

**6.1. 环面下降。** 首先，我们将描述“沿纤维方向的下降”，即沿环面扇数据所给出的覆盖进行下降。

注意，我们可以将 $\hat{\Sigma}$ 识别为其最高维锥集合的 Cech nerve $C(\hat{\Sigma})$。设 $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\} \subset \Sigma_0$ 为一组最高维锥。记 $|\boldsymbol{\sigma}| = \cap_i \sigma_i$，它是一个余维 $k$ 锥，并令

$$\Lambda_{\boldsymbol{\sigma}} := \Lambda_{\hat{\Sigma}(|\boldsymbol{\sigma}|),\beta}.$$

于是我们有

$$\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta} = \bigcup_{\boldsymbol{\sigma}\in C(\Sigma)} \Lambda_{|\boldsymbol{\sigma}|}.$$

现在，给定一个面的包含 $\sigma_1 \subset \sigma_2$，可以定义一个函子

$$I^{\sigma_2\sigma_1} : \mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}(\sigma_2),\beta}}(M_T) \to \mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}(\sigma_1),\beta}}(M_T),$$

定义为

$$(-) \mapsto (-) * \Theta(\sigma_1, 0),$$

其中 $\Theta(\sigma,0) := p_! k_{\mathrm{int}(\sigma^\vee)}[n]$ 是与 $\sigma$ 相关联的“余标准层”。

回忆一下，函子 $\kappa$ 定义于 [FLTZ11, Tre10, Kuw20]，其定义为

$$\Theta'(\sigma,\chi) = j_{X_\sigma *}\mathcal{O}_{X_\sigma}(\chi) \mapsto \Theta(\sigma,\chi) = p_! k_{\mathrm{int}\,(\sigma^\vee+\chi)}[n],$$

我们注意到以下几点。

**引理 6.1.** 结合引理 5.4 和 5.5 所建立的对应关系 $\kappa$再经过 $-n$ 的次数平移。

证明。 层 $\Theta'(\sigma,0) = \mathcal{O}_{X_{\hat{\Sigma}(\hat{\sigma}),\beta}}$ 被识别为 $k[(\sigma^\vee/\sigma^\perp)\cap M_{\sigma,\beta}]$，视为其自身上的一个 $H_\beta$- 等变模。将其视为 $\mathrm{Fun}(\Gamma_{\Lambda_{\hat{\Sigma}},H_\beta},\mathcal{D}(k))$ 中的元素时，它由以下公式给出

$$\chi \mapsto \mathrm{RHom}(\mathcal{O}(\chi),\mathcal{O}) = k[(\sigma^\vee/\sigma^\perp)\cap M_{\sigma,\beta}]_\chi = k[(\sigma^\vee/\sigma^\perp)\cap(\chi+M)],$$

也就是说，顶点 $\chi$ 上的 $k$-模是 $k[(\sigma^\vee/\sigma^\perp)\cap M_{\sigma,\beta}]$的 $\chi$-等型分量。另一方面，层 $p_!k_{\mathrm{int}(\sigma^\vee)}$ 在特征 $\chi\in H_\beta = M_{\sigma,\beta}/M\subseteq M_T$ 处的茎可典范地识别为以下 $k$-模

$$k[(\sigma^\vee/\sigma^\perp)\cap(\chi+M)],$$

通过考察 $M_{\mathbb{R}}\to M_T$ 在 $\chi$ 处的纤维。

由此可见，我们的识别将 $\Theta'(\sigma,0)$ 映至 $p_!k_{\mathrm{int}(\sigma^\vee)}$。类似地，它将 $\Theta'(\sigma,\chi)$ 映至 $p_!k_{\mathrm{int}(\sigma^\vee+\chi)}$。因此，它与 $\kappa$ 相差一个 $-n$ 的次数平移。□

我们有如下函子性结果。

**定理 6.2** ([FLTZ11, Tre10][Kuw20, 推论 12.8])。 赋值 $\sigma\mapsto$层范畴$^{\diamond}\Lambda_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta}$ 连同上文定义的 $I$，给出一个函子 $C(\Sigma)\to\mathcal{C}at_k$。此外，该赋值与 ind-相干层的限制相容。换言之，对于面的包含 $\tau\subset\sigma$，下图交换。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta}(M_T) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(X_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta}) \\
\downarrow{\scriptstyle *\Theta(\tau,0)} & & \downarrow{\scriptstyle \iota^*_{\tau\sigma}} \\
\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\hat{\Sigma}(\tau),\beta}(M_T) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(X_{\hat{\Sigma}(\tau),\beta}).
\end{array}$$

注 6.3。 在 同上中，水平箭头是 $\kappa$，与上图所示箭头的区别在于次数平移。唯一的区别是，我们的等价不再出于显然的原因与张量积和卷积积相互交织；这对我们的应用无关紧要。

现在我们可以证明命题 5.8 的如下整体版本。

**ˆ命题 6.4.** 假设 $\Sigma$ 是光滑的。存在一个关于$U_\alpha$函子性的等价。我们有以下关于 $U_\alpha$ 函子性的等价:

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta,\mathcal{E}}|_{U_\alpha})\simeq\Gamma(M_T,\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}\otimes_k\Phi_\alpha(\mathcal{E})).$$

证明. 与定理 5.9 类似，我们有以下一系列等价。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta,\mathcal{E}}) &\simeq \lim_{\sigma\in C(\hat{\Sigma})} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta,\mathcal{E}}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\sigma\in C(\hat{\Sigma})^{\mathrm{op}}} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta,\mathcal{E}}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\sigma\in C(\hat{\Sigma})^{\mathrm{op}}} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(X_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta}) \otimes_k \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha) \\
&\simeq \left(\operatorname*{colim}_{\sigma\in C(\hat{\Sigma})^{\mathrm{op}}} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(X_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta})\right) \otimes_k \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha) \\
&\simeq \left(\lim_{\sigma\in C(\hat{\Sigma})} \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(X_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta})\right) \otimes_k \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha) \\
&\simeq \mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}}(M_T) \otimes \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha) \\
&\simeq \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}} \otimes_k \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(U_\alpha)) \\
&\simeq \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}} \otimes_k \Phi_\alpha(\mathcal{E})).
\end{aligned}$$

最后两行成立，是因为可以取足够精细的覆盖，并如定理 5.9 的证明中那样，将极限转化为余极限，反之亦然。由于 $\Sigma$ 是光滑的，命题 5.8 适用于每个局部部分，因此我们知道该等价关于 $U_\alpha$ 是函子性的。□

6.2. **非光滑情形**。现在假设 $\hat{\Sigma}(\hat{\sigma})$ 是仿射的，但不光滑。我们选取 $\hat{\ }$˜一个光滑细分 $\Sigma(\hat{\sigma}) \subset \Sigma$，并将相应的环面栈之间的态射记为 $f : \mathcal{X}_{\tilde{\Sigma},\ \beta,\ \mathcal{E}} \to \mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\sigma),\ \beta,\ \mathcal{E}}$。滥用记号，我们也将纤维之间的映射记为 $f : X_{\tilde{\Sigma},\ \beta} \to X_{\hat{\Sigma}(\sigma),\ \beta}$。

令 $I$: 层范畴$^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}(\hat{\sigma})}}(M_T) \hookrightarrow$层范畴$^{\diamond}_{\Lambda_{\tilde{\Sigma}}}(M_T)$ 为该包含。

**定理 6.5** ([Kuw20，推论 12.7])。下图是交换图。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}(\hat{\sigma})}}(M_T) & \xhookrightarrow{\ I\ } & \mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\tilde{\Sigma}}}(M_T) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(X_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta}) & \xrightarrow{\ f^*\ } & \operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(X_{\tilde{\Sigma},\beta})
\end{array}$$

现在我们可以证明:

**命题 6.6.** 假设 $\hat{\Sigma}(\hat{\sigma})$ 是仿射的，但不一定光滑。存在一个关于 $U_\alpha$函子性的等价。我们有如下关于$U_\alpha$函子性的等价。

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Coh}(\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta,\mathcal{E}|_{U_\alpha}}) \simeq \Gamma(M_T, \mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma},\beta}} \otimes_k \Phi_\alpha(\mathcal{E})).$$

证明. 由定理 6.5，我们有如下交换图，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}(\hat{\sigma})}}(M_T)\otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha) & \xrightarrow{I\otimes 1} & \mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\tilde{\Sigma}}}(M_T)\otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(X_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta})\otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha) & \xrightarrow{f^*\otimes 1} & \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(X_{\tilde{\Sigma},\beta})\otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha). \end{array}$$

应用引理 2.4，我们可以证明这等价于

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M_T,\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}(\hat{\sigma})}}\otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha)) & \xrightarrow{I\otimes 1} & \Gamma(M_T,\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\tilde{\Sigma}}}(M_T)\otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha)) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(X_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta})\otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha) & \xrightarrow{f^*\otimes 1} & \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(X_{\tilde{\Sigma},\beta})\otimes_k \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(U_\alpha). \end{array}$$

注意，根据 [GR19, 1.10.5.8]，水平箭头是全忠实的，因为 $I$ 也是如此。应用由线丛的平凡化给出的等价 $\Phi_\alpha(\mathcal{E}) \simeq \mathsf{IndCoh}(U_\alpha)$。我们有

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M_T,\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}(\hat{\sigma})}}\otimes_k \Phi_\alpha(\mathcal{E})) & \xrightarrow{I\otimes 1} & \Gamma(M_T,\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\tilde{\Sigma}}}\otimes_k \Phi_\alpha(\mathcal{E})) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(\mathcal{X}_{\hat{\Sigma}(\sigma),\beta,\mathcal{E}}) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}(\mathcal{X}_{\tilde{\Sigma},\beta,\mathcal{E}}). \end{array}$$

现在，由定理 6.4，右侧的垂直箭头是关于 $U_\alpha$的函子性等价，因此根据全忠实性，左侧的箭头也如此。□

6.3. **主定理的证明**。利用命题 6.6，并沿用命题 6.4 中完全相同的思路（但现在我们的仿射分量可能是奇异的），我们证明

**定理 6.7**。设 $(\hat{\Sigma},\beta)$ 是一个堆叠扇，不一定光滑或仿射，并满足假设 3.2。存在一个 $k$-线性稳定 $\infty$-范畴之间的等价，

$$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Coh}\,\mathcal{X}_{\hat{\Sigma},\beta,\mathcal{E}} \simeq \Gamma\left(M_T,\mu\mathrm{Sh}^{\diamond}_{\Lambda_{\hat{\Sigma}}}\otimes_k \Phi(\mathcal{E})\right).$$

□

## 7. Quiver theoretic apporach for toric $\mathbb{P}^n$-bundles

7.1. **主定理的箭图理论解释**。Harder-Katzarkov 的工作中首次出现了环面丛的 CCC 版本 [HK19]。接下来的各节旨在阐明他们的工作与我们的主定理之间的关系。作为副产品，我们将找到一种替代性的、基于箭图理论的证明，从而证明环面 $\mathbb{P}^n$-丛的 CCC。

Harder-Katzarkov 定义了一种范畴反常层，其构想受到 Kapranov-Schechtman 提出的反常 Schober 概念启发 [KS15]。这些概念本质上具有箭图理论的性质；沿着这一思路，可以借助箭图研究主环面纤维化的 CCC。这一点颇为自然，因为

微局部层范畴可以通过组合方式计算 [Nad17], ，而当骨架呈现组合性质时，这类范畴具有良好的箭图模型；FLTZ 骨架正是如此。

例如，考虑 $\mu\mathrm{Sh}^{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}$。这个范畴层支撑在 $\Lambda_{\mathbb{P}^1}$ 上，事实上，在 $\Lambda_{\mathbb{P}^1}$上可构造。也就是说，将 $\Lambda_{\mathbb{P}^1}$ 视为一个分层空间（其分层为一个点、一个开区间和两条半射线）， $\mu\mathrm{Sh}^{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}$ 在这些可缩的层上局部常值（事实上是常值）。因此，要描述 $\mu\mathrm{Sh}^{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}$，我们需要以下信息：与 $\mu\mathrm{Sh}^{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}$ 在每个层上的茎相对应的四个范畴，以及每个层包含所对应的余限制态射。

$\mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_{\mathbb{P}^1}} \otimes_k \Phi(\mathcal{E})$的情形类似，不同之处在于它受到由 $\Phi(\mathcal{E})$诱导的单值化作用。Harder-Katzarkov 通过扭曲范畴之间的态射来纳入这种单值化，从而得到定义 7.7。

取 $\mu\mathrm{Sh}^{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}$ 的整体截面，我们得到下述箭图的表示范畴；它恰好是 $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}^2)$ 的 Beilinson 箭图：

$$b \leftarrow a \rightarrow b$$

对于环面 $\mathbb{P}^1$-丛 $\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L})$， $\Phi(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}))$ 是一个局部系统，其绕 $S^1$ 的单值化为 $-\otimes\mathcal{L}$。因此，我们预期 $\mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_{\mathbb{P}^1}} \otimes_k \Phi(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}))$ 的整体截面是下述箭图的表示范畴，

$$b \leftarrow a \rightarrow b \otimes \mathcal{L},$$

这与 Harder-Katzarkov 在范畴的反常层背景下所研究的对象一致。
Harder-Katzarkov 定理（定理 7.9）断言，这个范畴实际上等价于 $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}))$。

我们可以这样理解：经过单值化 $-\otimes\mathcal{L}$ 后，当我们绕 $S^1$ 一周时，左侧的 $b$ 变为 $b\otimes\mathcal{L}$。

尽管目前尚未建立高维空间上反常 Schober 的完整理论，但类似于上述 $\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L})$ 的情形，对于 $\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M})$，我们可以预期， $\mu\mathrm{Sh}^{\Lambda_{\mathbb{P}^2}}$ 和 $\mu\mathrm{Sh}_{\Lambda_{\mathbb{P}^2}} \otimes_k \Phi(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}))$ 的整体截面可以用图 2 中箭图表示范畴来描述。在图 2 中，我们用每条边都彼此识别的蓝色正方形表示 $T^2$ ，整幅蓝色图则表示（扰动后的） $\Lambda_{\mathbb{P}^2}$。现在， $\Phi(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}))$ 是 $T^*T^2$ 上的一个局部系统，其单值化分别为 $-\otimes\mathcal{L}$ 和 $-\otimes\mathcal{M}$。因此，当我们沿水平方向的 $S^1$ 绕行时， $a$ 变为 $a\mathcal{L}$；沿垂直方向的 $S^1$ 绕行时， $a$ 变为 $a\mathcal{M}$。类似地，我们有 $b\mathcal{M}$ 和 $b\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$。

作为定理 7.9 的类比，我们预期此类箭图表示的范畴等价于 $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}))$。事实上，我们可以证明这一点（定理 7.10），并将其推广到任意 toric $\mathbb{P}^n$-bundles 的情形（定理 7.11），这一结果独立于我们的主定理，其证明思路遵循 Harder-Katzarkov 对定理 7.9 的证明。在本章余下部分，我们将详细回顾 Harder-Katzarkov 的结果，并将他们的证明推广到 $\mathbb{P}^n$-bundles 的情形。

7.2. **反常 Schober 与范畴反常层**。 在 [HK19], 中，作者将曲面上的范畴反常层定义为反常 Schober 的推广，是反常层 [KS15] 的范畴化。

回忆一下，单位圆盘 $D$ 中由原点及其补集分层得到的反常层范畴 $\mathrm{Coh}(D,\ 0)$ 有一个箭图描述。

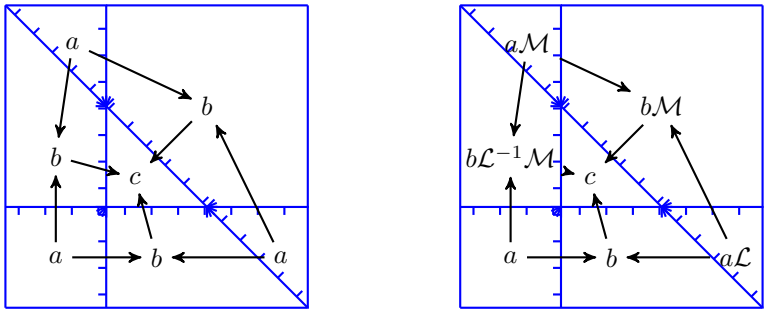



FIGURE 2. $\mu$层范畴$_{\mathbb{P}^2}$ 与 $\mu$层范畴$_{\Lambda}$ $\otimes\Phi(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}))$

**定理 7.1.** [GGM85] Perv($D$,0) 等价于由四元组 $(V,W,\phi,\psi)$ 构成的范畴，其中 $V,W$是向量空间， $\phi\colon V\to W$, $\psi\colon W\to V$是线性映射，且 $\mathrm{id}_V-\psi\circ\phi$ 和 $\mathrm{id}_W-\phi\circ\psi$ 可逆。

为了理解这一点，取 $D$边界上的一点 $b$，并选取一条连接原点与 $b$的弧 $K$。注意， $K$ 是 $D$的骨架。于是，对 $\mathcal{F}\in$Perv($D$, 0)，我们关联 $V(\mathcal{F})=\mathbb{H}^1_K(\mathcal{F})_0$ 以及 $W(\mathcal{F})=\mathbb{H}^1_K(\mathcal{F})_b$。这里， $\mathbb{H}^1_K$ 表示在 $K$上带支撑的第一超上同调，而 $\phi$ 是可构造层 $\mathbb{H}^1_K(\mathcal{F})$的余限制映射； $\psi$ 则是 $\mathcal{F}_b$ 的逆时针延拓与微分的复合

$$H^0(\Delta-K,\mathcal{F})\to\mathbb{H}^1_K(\Delta,\mathcal{F}).$$

事实证明，这个过程给出了一个范畴等价。

受此定理启发， [KS15] 提出了关于层范畴 $D$ bethenotion 的围层球面函子的自然范畴化:

**定义 7.2** ([AL15])。 设 $S:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是 dg 三角范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$之间的正合函子。假设 $S$ 有左伴随函子和右伴随函子 $L$ 和 $R$。于是我们有四个自然变换

$$SR\to\mathrm{id}_{\mathcal{D}},LS\to\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$$
$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to RS,\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\to SL.$$

我们将这些自然变换的锥记为

$$T=\mathrm{Cone}(SR\to\mathrm{id}_{\mathcal{D}}),C'=\mathrm{Cone}(LS\to\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$$
$$C=\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to RS)[-1],T'=\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\to SL)[-1].$$

$S$ 若满足以下条件，则称为球面函子[15]:

(1) $T$ 是等价。(2) 复合 $R\to RSL\to CL[1]$ 是同构。(3) $C$ 是等价。(4) 复合 $LT[-1]\to LSR\to R$ 是同构。

在多个标记点的情形下，类似结果仍然成立。设$\Sigma=\{p_1,\cdots,p_n\}$是 $D$中的一组标记点。由 $\Sigma$ 及其补集分层的 $D$ 上的反常层范畴 Perv($D$, $\Sigma$)可作如下描述。

[15]事实上，其中任意两个条件都蕴含另外两个条件，参见 [AL15]。

**定理 7.3** ([GMV96])。Perv($D$, $\Sigma$)等价于由向量空间 $V$, $W_1$, $\cdots$, $W_n$ 以及线性映射 $\phi_i$: $V \to W_i$, $\psi_i$: $W_i \to V$构成的图表范畴，其中 $\mathrm{id}_V - \psi_i \circ \phi_i$ 和 $\mathrm{id}_{W_i} - \phi_i \circ \psi_i$ 均可逆。

对 Perv($D$, $\Sigma$) 的这一描述启发了下面的定义。

**定义 7.4.** 在 ($D$, $\Sigma$) 上的 $K$-坐标化反常 Schober 是由一组范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}_1$, $\cdots$, $\mathcal{D}_n$ 以及球函子 $S_i$: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}_i$ 构成的系统。

7.3. **Harder-Katzarkov 关于环面 $\mathbb{P}^1$-丛的 CCC**。 本节回顾 Harder-Katzarkov 关于环面 $\mathbb{P}^1$-丛的 CCC 定理。本节的参考文献为 [HK19]。

受反常 Schober 定义的启发， [HK19] 如下定义曲面 $S$ 上的范畴反常层。

令 $S$ 为一个实二维紧连通定向曲面，其有 $n$ 个边界分量和 $k$ 个标记点 $\Sigma$。

**定义 7.5**。 曲面 $S$ 内的图 $K$ 是由以下部分组成的集合:

- 曲面 $S$ 内部的一个有限子集 $Vert(K)$,
- 一组嵌入于 $S$ 的闭区间构成的有限集合 $Edge(K)$，其端点要么是顶点，要么位于 $S$ 的边界上，且至少有一个端点是顶点，

还需满足以下条件：边的内部位于 $S$ 的内部，且任意两条边仅在 $K$ 的顶点处相交。

构造 7.6。令 $A_n(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 上 $A_n$-箭图的表示范畴。它带有 $n+1$ 个自然函子，我们将它们记作 $f_1$、$\cdots$、$f_{n+1}$，从 $A_n(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$。例如，若 $n = 2$，则 $A_2(\mathcal{C})$ 的一个对象大致是指：对于 $x$，有 $x \xrightarrow{a} y$； $y \in ob(\mathcal{C})$，以及 $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$。于是，函子 $f_i$: $A_2(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 由以下方式给出：$f_1(x \xrightarrow{a} y) = x$， $f_2(x \xrightarrow{a} y) = y$， $f_3(x \xrightarrow{a} y) =$锥$(a)$。$A_n(\mathcal{C})$ 的详细构造以及 $f_i$ 可见 [HK19]。

**定义 7.7**。 在 ($S$, $\Sigma$) 上的 $K$-坐标化范畴反常层由以下数据组成：选择 $S$ 的一个骨架 $K$ 、一个预三角 dg 范畴 $\mathcal{C}$、对所有 $v \in Vert(K)$ 的一族预三角 dg 范畴 $\mathcal{A}_v$ ，以及对所有边 $e \in Edge(K)$ 的函子 $F_{v,\,e}$: $\mathcal{A}_v \to \mathcal{C}$ ，并配备一个单值化表示 $\pi_1(S^\circ,\ v_1) \to \mathrm{Aut}(H^0\mathcal{C})$，满足以下条件:

(1) $K$ 是 $S$ 的生成图，即 $K$ 是 $S$ 内与其自身同伦的一个图。此外，我们要求每个标记点都是 $K$ 的单价顶点，并且不存在二价顶点。(2) 对于 $Vert(K)$ 中的每个顶点 $v$ ，指定一个范畴 $\mathcal{A}_v$ ；对于 $Edge(K)$ 中的每条边 $e$ ，指定一个固定范畴 $\mathcal{C}$ 。若 $v$ 不属于 $\Sigma$，则指定 $\mathcal{A}_v = A_n(\mathcal{C})$，其中 $n+1$ 是 $v$ 的度。(3) 若边 $e$ 与顶点 $v$ 相接，则指定一个函子 $F_{v,e}$: $\mathcal{A}_v \to \mathcal{C}$。若 $v$ 是 $n+1$-价的，则对于与 $v$ 相接的边的一种逆时针排序，记为 $e_1, \cdots e_{n+1}$，有 $F_{v,e_i} = \phi_{v,e_i} \circ f_i$，其中 $e_i$ 是 $\mathcal{C}$ 的某个自等价。若 $v \in \Sigma$，则假设 $F_{v,e}$ 是球形的。

一个由 $K$ 坐标化的范畴反常层 $\mathcal{F}$ 诱导出一个范畴图：将范畴 $\mathcal{A}_v$ 指派给每个顶点 $v$ ，并将函子 $F_{v,\,e}$ 指派给每条边 $e$。该图的同伦极限记作 $\Gamma(K,\ \mathcal{F})$，称为 $\mathcal{F}$ 的整体截面。

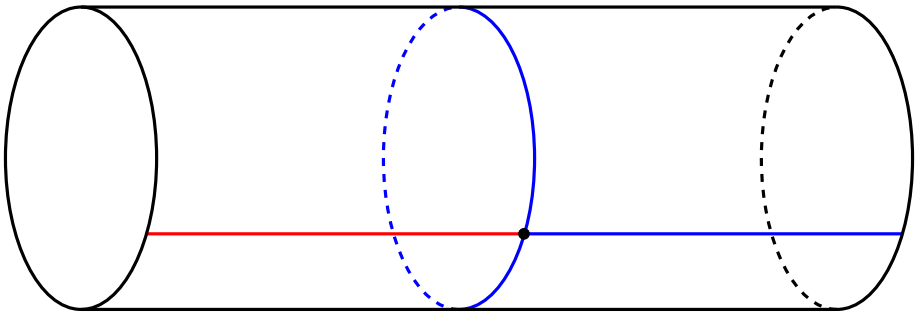


FIGURE 3. $\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^1}}$

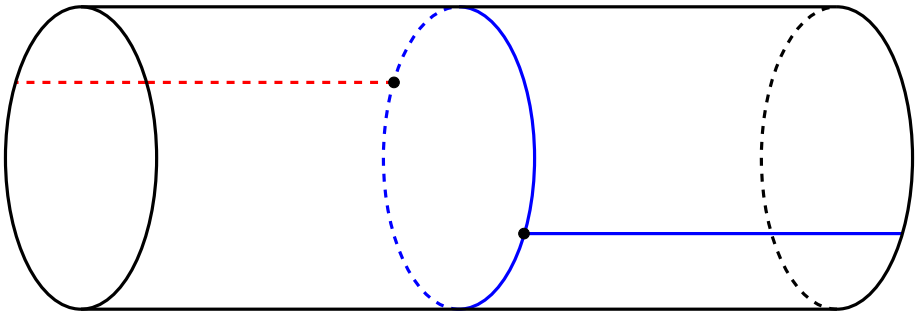


FIGURE 4. $\widetilde{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbb{P}^1}}$

例 7.8. 设 $\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^1}}$ 是 $T^*T^1$ 在 CCC 下与 $\mathbb{P}^1$ 关联的锥形拉格朗日骨架（图 3），$\widetilde{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbb{P}^1}}$ 是其在图 4 中所示的扰动。[16]设 $\mathcal{L}$ 是代数簇 $X$ 上的线丛。我们如下定义 $_{\sim}\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ 上的范畴反常层。设 $v_1$ 是图 4 中的上顶点，$v_2$ 是下顶点。此外，我们分别用 $e_1$ 和 $e_2$ 表示连接 $v_1$ 与 $v_2$ 的上、下半圆。设 $e_3$ 为红色直线，$e_4$ 为蓝色直线。我们令 $\mathcal{A}_{v_1} = \mathcal{A}_{v_2} = A_2(\mathcal{C})$，并将从顶点到边的函子定义为 $F_{v_1}$、$_{e_1} = F_{v_2}$、$_{e_1} = f_1$、$F_{v_1}$、$_{e_2} = f_2$、$F_{v_2}$、$_{e_2} = (- \otimes \mathcal{L}) \circ f_2$、$F_{v_1}$、$_{e_3} = F_{v_2}$、$_{e_4} = f_3$。[17]

显然，$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L})$ 是一个以 $X$ 为底、纤维为 $\mathbb{P}^1$ 的主环面纤维化。令 $\mathcal{C} = \mathrm{D}^b(X)$，如上例所示。Harder-Katzarkov 证明了以下定理。

**定理 7.9**。（针对环面 $\mathbb{P}^1$-丛的 CCC）[HK19，定理 4.5] dg 范畴 $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}))$ 与 $\Gamma(\widetilde{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbb{P}^1}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$ 拟等价。

**7.4. 环面 丛的 CCC 箭图理论方法**。显然，Harder-Katzarkov 的方法本质上是箭图理论方法。他们定义的范畴反常层 $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ 可以看作 $\mu\mathrm{Sh}(\Lambda_{\mathbb{P}^1}) \otimes \Phi(\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus_{\sim} \mathcal{L}))$ 的具体模型。$\Gamma(\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^1}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$ 是箭图表示范畴的一个子范畴

$\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$ 系数取自 $\mathrm{D}^b(X)$，由如下形式的对象组成：$a \leftarrow b \rightarrow a \otimes \mathcal{L}$ 对于 $a,\ b \in ob(\mathrm{D}^b(X))$。

[16]图片鸣谢 [HK19].[17]回顾构造 7.6。

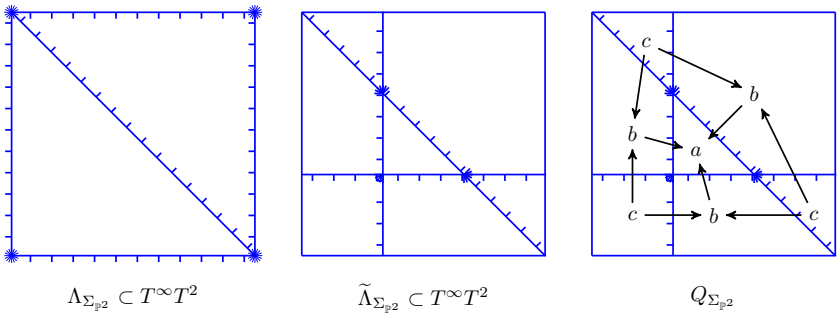



FIGURE 5. $\mathbb{P}^2$的 FLTZ 骨架

他们的方法确实适用于其他环面簇的情形。也就是说，我们可以用箭图表示来表达 $\Gamma(\Lambda_\Sigma,\ \mu$层范畴$(\Lambda_\Sigma) \otimes \Phi(X_\Sigma))$。令$\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^2}}$ 为 $\mathbb{P}^2$ 的 FLTZ 骨架，如图5左侧所示。为了描述这一范畴中的对象，并便于可视化，我们先将 $\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^2}}$扰动为 $\widetilde{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbb{P}^2}}$，如图5所示。现在，$\mathbb{P}^2$ 这一范畴中的一个对象可以表示为图6所示的形式。类似地，$\Gamma(T^*T^2,\ \mu$层范畴$^{\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^2}}})$中的一个对象可由图5中的第三幅图描述，其中 $a,\ b,$ $c \in D^b_{dg}(pt) = Vect$。注意，这恰好是 $\mathbb{P}^2$对应的 Beilinson 箭图的一个表示，只不过其系数取自范畴 $\mathrm{D}^b(X)$，并且还带有一个额外的扭曲。

我们声称，$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{M})$ 的相应范畴（记作 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}},\ \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\})$ 如下。它是 $\mathbb{P}^2$ 的同一箭图的表示范畴的一个全子范畴，我们将其记作 $Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^2}}$，其系数取自 $\mathrm{D}^b(X)$，并由图6所示形式的对象组成。

注意，若 $X$ 是一个点，则 $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{M})$ 就是 $\mathbb{P}^2$。在这种情况下，

$$Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X), \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\})$$

恰好是 $\mathbb{P}^2$ 的 Beilinson 箭图的表示范畴。

对于 toric $\mathbb{P}^2$-丛，我们的主定理可以重新表述如下。

**定理 7.10.** $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}))$ 与 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\})$ 拟等价。

我们以类似于 Harder-Katzarkov 证明定理 7.9 的方式，给出该定理的另一个证明。

证明. 我们首先证明 $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}))$ 嵌入 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\})$。根据 [Orl92], $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}_X(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}))$，存在如下半正交分解。

$$\mathrm{D}^b(Z) \cong \langle p^*\mathrm{D}^b(X), p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(1), p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(2)\rangle,$$

其中，$\mathcal{O}(1)$ 是 $p$ 的相对超平面丛：$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}) \to X$。

我们将右侧视为具有 2 个分量的半正交分解：$A_1 = p^*\mathrm{D}^b(X)$ 和 $A_2 = \langle p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(1)\ p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(2)\rangle$。

根据 [Orl16，第 3.8]号命题，$A_2$ 等价于沿着由下式定义的双模 $R$ 将 $p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(1)$ 与 $p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(2)$ 粘合起来：

$$R(p^*b \otimes \mathcal{O}(2), p^*a \otimes \mathcal{O}(1)) \cong \mathrm{Hom}_{A_2}(p^*a \otimes \mathcal{O}(1), p^*b \otimes \mathcal{O}(2))$$

对于 $a,\ b \in Ob(\mathrm{D}^b(X))$。根据伴随性和投影公式，我们有

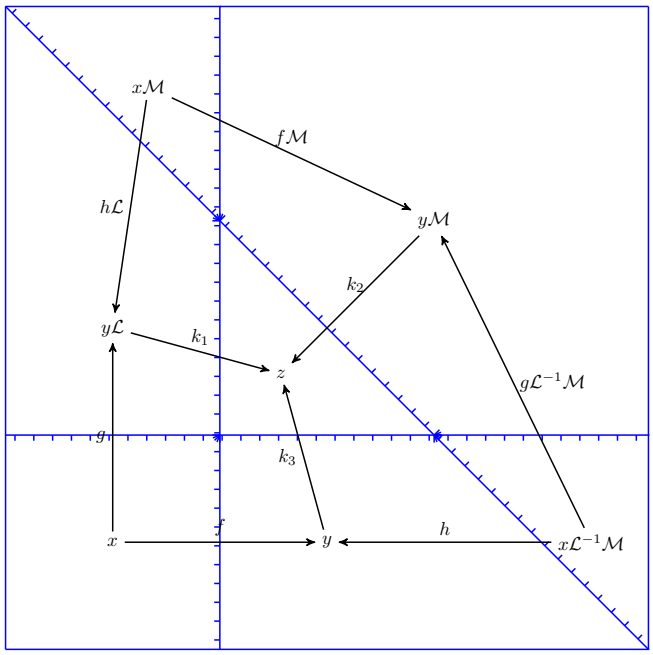



FIGURE 6. $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\})$ 的一个对象

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A_2}(p^*a \otimes \mathcal{O}(1), p^*b \otimes \mathcal{O}(2)) &\cong \mathrm{Hom}_{A_2}(p^*a, p^*b \otimes \mathcal{O}(1)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(a, Rp_*(p^*b \otimes \mathcal{O}(1))) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(a, b \otimes \mathcal{E}).\end{aligned}$$

此外，$\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}))$ 等价于沿着由下式定义的双模 $S$ 将 $A_1$ 和 $A_2$ 粘合起来

$$S(y, x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}\oplus\mathcal{M})}(x, y)$$

对于 $y \in Ob(A_2)$ 和 $x \in Ob(A_1)$。

回顾一下，如果一个 dg 范畴 $\mathcal{C}$ 具有两个分量 $\langle T_1, T_2\rangle$ 的半正交分解（SOD），那么 $\mathcal{C}$ 中的任意对象都可以写成一个态射的锥，该态射从 $T_1$ 中的一个对象映到 $T_2$ 中的一个对象。因此，对于某个 $b$, $c \in Ob(\mathrm{D}^b(X))$，我们可以将 $A_2$ 中的任意对象 $x$ 写成 $\mathrm{Cone}(p^*b \otimes \mathcal{O}(1) \to p^*c \otimes \mathcal{O}(2))$。此外，我们记 $y = p^*a$。再次由伴随公式可得

$$\begin{aligned}&S(y, x) \\ &= S(p^*a, \mathrm{Cone}(p^*b \otimes \mathcal{O}(1) \to p^*c \otimes \mathcal{O}(2)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(Z)}(p^*a, \mathrm{Cone}(p^*b \otimes \mathcal{O}(1) \to p^*c \otimes \mathcal{O}(2)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(a, Rp_*\mathrm{Cone}(p^*b \otimes \mathcal{O}(1) \to p^*c \otimes \mathcal{O}(2)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(a, \mathrm{Cone}(b \otimes \mathcal{E} \to c \otimes \mathrm{Sym}^2\mathcal{E})).\end{aligned}$$

回忆一下，$\mathcal{D} = Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\})$中的一个对象可以表示为图6，其中 $a$, $b$, $c$是$\mathrm{D}^b(X)$中的对象。

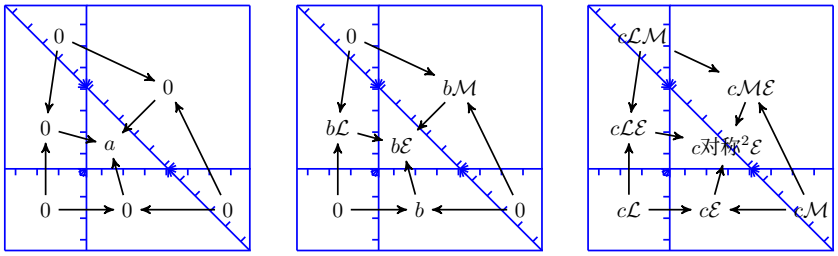



FIGURE 7. 半正交分解的分量

我们将考虑由图 7 所述三种类型的对象生成的 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L},\mathcal{M}\})$的子范畴。

注意，图 7 中由各类对象生成的子范畴同构于 $\mathrm{D}^b(X)$。令 $A$、$B$ 和 $C$ 分别表示图中由形如 $(a')$、$(b')$ 和 $(c')$ 的对象生成的子范畴。

注意，若 $X$ 是一个点，则 $A$，$B$，$C$ 恰好是 $\mathrm{Sh}^{\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^2}}}(T^2)$ 中由对应于 $\mathcal{O}$，$\mathcal{O}(1)$ $\mathcal{O}(2)$ 的对象生成的子范畴；这些对象在通常版本的相干构造对应 $\mathrm{D}^b:\ \mathbb{P}^2) \cong \mathrm{Sh}^{\Lambda_{\mathbb{P}^2}}(T^2)$ 下构成 $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}^2)$ 的例外集。

我们可以看到，它们构成一个半正交集。即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B,\ A)$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C,\ A)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B,\ C)$ 均为 0。

我们有 $\langle B,C\rangle \cong \mathrm{D}^b(X)\times_{R'}\mathrm{D}^b(X)$，其中 $R'(B,C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B,C)$。从 $(b')$ 到 $(c')$ 的任意态射均由 $(b')$ 的下方梯形到 $(c')$ 的下方梯形的态射决定。每个定义域中的所有其他态射均由单值化和直和的泛性质决定。因此 $R'(B,C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B,C) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b}(x)(b, c\otimes\mathcal{E})$。这意味着 $A_2 \cong \langle B,C\rangle$，因为二者都是沿着双模 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b}(x)(b, c\otimes\mathcal{E})$ 粘合两份 $\mathrm{D}^b(X)$ 得到的。此外，我们有

$$\langle A,\langle B,C\rangle\rangle = A\times_{S'}\langle B,C\rangle$$

其中，对于对象 $a'\in Ob(A)$ 和 $x\in Ob\langle B,C\rangle$，有 $S'(x',a') = \text{同态}_{\mathcal{D}}(a',x')$。注意，$x$ 可以写作某个 $b'\in Ob(B)$ 的 $\mathrm{Cone}(b'\to c')$，且 $c'\in Ob(C)$。

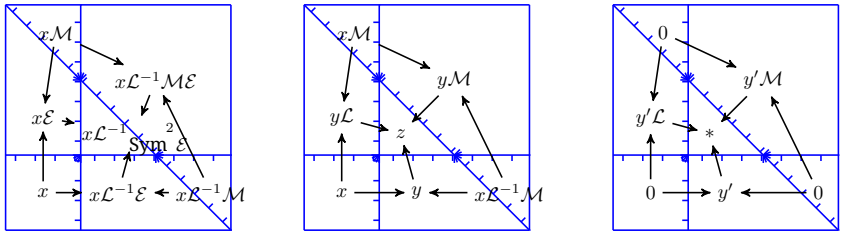
$$\begin{aligned} &S'(x',a')\\ &= S'(\mathrm{Cone}(b'\to c'),a')\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(a',\mathrm{Cone}(b'\to c'))\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(a,\mathrm{Cone}(b\otimes\mathcal{E}\to c\otimes\mathrm{Sym}^2\mathcal{E})). \end{aligned}$$

注意，$\mathrm{D}\ A\cong(X)\cong A_1$。因此，$\mathrm{D}^b(Z) = \langle A_1,A_2\rangle$ 和 $\mathcal{D} = \langle A,\langle B,C\rangle\rangle$ 都是沿着双模将 $\mathrm{D}^b(X)$ 与 $A_2\cong\langle B,C\rangle$ 粘合所得。

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(a,\mathrm{Cone}(b\otimes\mathcal{E}\to c\otimes\mathrm{Sym}^2\mathcal{E})).$$

这证明 $\mathrm{D}^b(X)$ 嵌入 $\mathcal{D} = Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}},\mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L},\mathcal{M}\})$。

为了证明该定理，现在只需证明子范畴 $A,B,C$生成 $\mathcal{D}$。




(1) (2) (3)

FIGURE 8. 来自 $C$ 的锥

我们需要证明，通过从 $A$ 到 $B$ 以及从 $B$ 到 $C$取迭代锥，可以生成 $\mathcal{D}$中的任意对象。等价地，我们需要证明，通过从 $C, B, A$ 到 $\mathcal{D}$中的任意对象取锥，可以得到零对象。

在 $\mathcal{D}$ 中任取一个对象，它由图6（图8中的 (1)）给出。然后，我们通过令 $c = x\mathcal{L}^{-1}$ 属于 ($c'$)，选取一个由 $C$ 给出的对象（图8中的 (2)）。从 (1) 到 (2) 有一个自然态射，由下式给出

$$id_x : x \to x$$
$$id_{x\mathcal{M}} : x\mathcal{M} \to x\mathcal{M}$$
$$id_{x\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}} : x\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M} \to x\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$$

and

$$x\mathcal{L}^{-1}\mathcal{E} = x(\mathcal{L}^{-1} \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}) \to y$$

由 $0 \oplus f \oplus 0$ 给出，其中 $f$ 是从 $x \to y$ 到 (2) 的一个态射。其他从 $x\mathcal{E} \to y\mathcal{L}$、$x\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{E} \to y\mathcal{M}$ 和 $x\mathcal{L}^{-1}\mathrm{Sym}^2\mathcal{E} \to z$ 出发的态射也以类似方式定义。

取从 (1) 到 (2) 的这个态射的锥，我们得到图8中的 (3)，其中 $y' =$ 锥($f : x \to y$)。

然后我们重复这一过程。在图 7 中令 $b = y'$ 属于 ($b'$)，并取到 (3) 的典范态射的锥，即得到一个属于 $A$ 的对象。再次重复同一过程，即得到零对象。证明完毕。□

我们可以将定理 7.10 推广到 $n$ 大于 2 时的环面 $\mathbb{P}^n$-丛。基本思路相同。简言之，定理 7.10 的证明思路是找出 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\})$ 的子范畴，使其同构于 $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}_X(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}))$ 的半正交分解分量，并且具有相同的粘合数据。对半正交分解分量的这一识别受到通常的 CCC 的启发。

对于 $n$ 大于 1，固定一个由 $\{e_1, \cdots, e_n\ -e_1 - \cdots - e_n\}$ 给出的 $\mathbb{P}^n$ 的扇，其中 $e_i$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的第 $i$ 个坐标向量。

如图5所示，我们将对 $\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}$ 进行扰动。我们将用平行边相互粘合的单位超立方体 $[0,1] \times \cdots \times [0,1]$ 来描述 $n$ 维环面$T^n$，其中 $\mathbb{R}^n$。令 $\epsilon$ 为一个小于 1 的充分小正数。于是，通过将 $\{x_1 = 0\}, \cdots, \{x_n = 0\}$ 推入$\{x_1 = \epsilon\}, \cdots, \{x_n = \epsilon\}$，即可得到扰动 $\tilde{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}$。对于 $n = 2$ 的情形，$\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}$ 如图5所示。更准确地说，$\tilde{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}$ 是通过沿 Reeb 流对 $\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}$ 的子集 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma^\perp \times (-\sigma)$ 流动一小段时间得到的。

˜扰动 $\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}$ 将立方体划分为更小的室。我们可以按如下方式对这些室进行分类。存在一个中心，它是 $(\cap_{i=1}^n\{\epsilon < x_i\}) \cap \{x_1 + \cdots + x_n < 1\}$ 的交集。从中心出发，我们可以通过穿过超平面 $\{x_1 = \epsilon\}, \cdots, \{x_n = \epsilon\}$，以及 $\{\sum_{i=1}^n x_i =1\}$, $\cdots\{\sum_{i=1}^n x_i = n-1\}$，到达其他室。在立方体中，从中心出发，通过穿过足够多个超平面，可以到达任意一个室。假设每个超平面至多穿过一次。那么，任意一个室都可以通过穿过至多 $n$ 个超平面到达，我们可以根据从中心出发需要穿过的超平面数量对这些室进行分类。该分类是可行的，因为需要穿过的超平面数量不取决于穿越超平面的顺序。如果需要穿过 $k$ 个超平面才能到达某个室，我们就称该室为 $k$ 步（类型）的室。按照惯例，中心是 0 步室。

只有一个 0 步室，即中心。若 $1 \leq k \leq n-1$，则 $k$ 步室的数量为 $\binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{0}$。$n$ 步室的数量为$\binom{n}{n} + \cdots + \binom{n}{1}$。

我们可以按以下方式为每个室编号。$(X_1, \cdots, X_n, a)$，其中 $X_i \in \{S, L\}$ 且 $a \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$。若 $X_i = S$，室中的任意点的第 $i$ 个坐标都小于 $\epsilon$。若 $X_i = L$，则室中的任意点的第$i$ 个坐标都大于 $\epsilon$。 $a$ 是穿过的斜超平面的数量$\{\sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, $\cdots\{\sum_{i=1}^n x_i = n-1\}$。中心室为 $(L, \cdots, L, 0)$。若$n = 2$, 例如，$(S, S, 0)$ 是左下方的正方形，而 $(L, L, 1)$ 是右上方的五边形。

如果（$m_1, \cdots, m_i$）是（$X_1, \cdots, X_n, a$）的第 $m_i$ 个条目，则将该 chamber 记为（$\{m_1, \cdots, m_i\}, a$）。˜

$\Lambda_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}$ 确定一个箭图 $Q_{\tilde{\Lambda}_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}}$。如果 $n = 2$，相应的箭图就是图6中所画的那个。

**定理 7.11.** $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n))$ 拟等价于 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}_1 \cdots, \mathcal{L}_n\})$。

证明. 根据 [Orl92], , 我们知道

$$\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n))$$

允许一个半正交分解

$$\langle p^*\mathrm{D}^b(X), p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(1), \cdots, p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(n)\rangle.$$

我们将描述 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}_1 \cdots, \mathcal{L}_n\})$ 的子范畴，它们分别等价于 $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n))$ 的各个半正交分解分量。

第一个半正交分解分量 $p^*\mathrm{D}^b(X)$ 等价于以下对象所构成的子范畴

$$Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X), \{\mathcal{L}_1 \cdots, \mathcal{L}_n\})$$

由以下对象组成:

- 中心室： $a_1 \in \mathrm{D}^b(X)$
- 其他室：0

第二个半正交分解分量 $p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(1)$:

- 中心室： $a_2\mathcal{E}$
- 1步室：$(S, L, \cdots, L, 0)$ : $a_2(L, S, \cdots, L, 0)$ : $a_2\mathcal{L}_1$

$$\cdots$$
$$(L, L, \cdots, S, 0) : a_2\mathcal{L}_{n-1}$$
$$(L, L, \cdots, L, 1) : a_2\mathcal{L}_n$$

- $2 \sim n$步室：0

第 $k$ 个半正交分解分量 $p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(k-1)$:

- 中心室： $a_k Sym^{k-1}\mathcal{E}$
- 1 步室:

$$(S, L, \cdots, L, 0) : a_k\mathcal{L}_1 Sym^{k-2}\mathcal{E}$$
$$\cdots$$
$$(L, \cdots, L, S, 0) : a_k\mathcal{L}_n Sym^{k-2}\mathcal{E}$$
$$(L, \cdots, L, 1) : a_k Sym^{k-2}\mathcal{E}$$

- $i$ 步室:

$$\text{For } 1 \le j \le i, (\{m_1, \cdots, m_j\}, i-j) : a_k\mathcal{L}_{m_1}\cdots\mathcal{L}_{m_j} Sym^{k-i-1}\mathcal{E}$$
$$\text{For } j = 0$$
$$(L, L, \cdots, L, i) : a_k Sym^{k-i-1}\mathcal{E}$$

第 $n+1$ 个半正交分解分量 $p^*\mathrm{D}^b(X) \otimes \mathcal{O}(n)$:

- 中心室： $Sym^n\mathcal{E}$
- 1-步室:

$$(S, L, \cdots, L, 0) : \mathcal{L}_1 Sym^{n-1}\mathcal{E}$$
$$\cdots$$
$$(L, \cdots, L, S, 0) : \mathcal{L}_n Sym^{n-1}\mathcal{E}$$
$$(L, \cdots, L, 1) : Sym^{n-1}\mathcal{E}$$

- $k$-步室:

$$(\{m_1, \cdots, m_j\}, i-j) = \mathcal{L}_{m_1}\cdots\mathcal{L}_{m_j} Sym^{k-i-1}\mathcal{E}$$

完全按照定理 7.10 证明中的步骤，可以证明这些子范畴都与 $\mathrm{D}^b(X)$ 等价，并在相同的双模作用下粘合在一起，生成 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}_1 \cdots, \mathcal{L}_n\})$。因此，$\mathrm{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n))$ 与 $Rep(Q_{\Sigma_{\mathbb{P}^n}}, \mathrm{D}^b(X)\ \{\mathcal{L}_1 \cdots, \mathcal{L}_n\})$ 拟等价。

□

## References

[AL15] Rina Anno 和 Timothy Logvinenko, *Spherical dg-functors*, 2015年, arxiv:1309.5035。[BCS05] Lev Borisov、Linda Chen 和 Gregory Smith, *The orbifold chow ring of toric deligne-mumford stacks* **18** 2005 1, 193 , 《美国数学会杂志》（），第 – 215 期。[Bon06] Alexey Bondal, *Derived categories of toric varieties*, 《奥伯沃尔法赫报告》**3**（2006年），284–286。[Coh13] Lee Cohn, *Differential graded categories are k-linear stable infinity categories*, arXiv 预印本 arXiv:1308.2587（2013年）。[DG15] V Drinfeld 和 D Gaitsgory, *Compact generation of the category of D-modules on the stack of G-bundles on a curve* **3** 2015 , 《剑桥数学杂志》（），第 1 期，19 125–。[FLTZ11] Bohan Fang 、 Chiu-Chu Melissa Liu 、 David Treumann 和 Eric Zaslow, *A categorification of morelli's theorem* **186** 2011 1, 79 114 , 《数学新进展》（），第 – 期。

[FMN10] Barbara Fantechi、Etienne Mann 和 Fabio Nironi, *Smooth toric deligne-mumford stacks.* ¨ **2010** 2010 648 , 《纯粹与应用数学杂志》（），第 期。[GGM85] Andr´e Galligo、Michel Granger 和 Philippe Maisonobe, *D-modules et faisceaux per-vers dont le support singulier est un croisement normal*, 《傅里叶研究所年刊》35（1985年），第 1 期，1–48（法文）。MR 88b:32027[GMV96] Sergei Gelfand、Robert Macpherson 和 Kari Vilonen, *Perverse sheaves and quivers*, 《杜克数学杂志》83（1996年），第 3 期，621–643（美式英语）。[GPS19] Sheel Ganatra、John Pardon 和 Vivek Shende, *Sectorial descent for wrapped fukaya categories* 2019 1809 03427 , , arxiv: 。[GPS20a] Sheel Ganatra、John Pardon 和 Vivek Shende, *Covariantly functorial wrapped Floer theory on Liouville sectors*, 《高等科学研究所数学出版物》131（2020年），73–200。MR 4106794[GPS20b] Sheel Ganatra、John Pardon 和 Vivek Shende, *Microlocal morse theory of wrapped fukaya categories* 2020 1809 08807 , , arxiv: 。[GR19] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum, *A study in derived algebraic geometry: Volume i: correspondences and duality* 221, 2019 , 第 卷，美国数学会，。[Gui12] St ´ ephane Guillermou, , arXiv 预印本 arXiv: (), *Quantization of conic lagrangian submanifolds of cotangent bundles* 1212 5818 2012 [Han19] Andrew Hanlon, *Monodromy of monomially admissible fukaya-seidel categories mirror to toric varieties* **350** 2019 662 746 , 《数学进展》（），–。[HK19] Andrew Harder 和 Ludmil Katzarkov, *Perverse sheaves of categories and some applications* **352** 2019 1155 1205 , 《数学进展》（），–。[Iwa09] Isamu Iwanari, *The category of toric stacks*, 《数学汇编》145（2009年），第 3 期，718–746。[Kon09] Maxim Kontsevich, *Symplectic geometry of homological algebra*, 见 https://www.ihes.fr/maxim/TEXTS/Symplectic AT2009.pdf。[KS90] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, 《数学科学基础原理》丛书 [第 292 卷，Springer-Verlag，柏林，1990年，附有 Christian Houzel 撰写的法文一章。MR 1074006[KS15] Mikhail Kapranov 和 Vadim Schechtman, *Perverse schobers*, 2015年，arxiv:1411.2772。[Kuw17] Tatsuki Kuwagaki, *The nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric surfaces* **107** 2017 2, 373 393 3707647 , 《微分几何杂志》（），第 – 期。MR [Kuw20] , *The nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric stacks*, 《杜克数学杂志》169（2020年），第 11 期，2125–2197。[Lur09] Jacob Lurie, *Higher topos theory (am-170)*, 普林斯顿大学出版社，2009年。[Lur17] , *Higher algebra*。[Nad09] David Nadler, *Microlocal branes are constructible sheaves*, 《精选数学》（新系列）15（ 2009 4, 563 619 2565051 ），第 – 期。MR Nad David Nadler, [ 16] *Wrapped microlocal sheaves on pairs of pants*, 2016年，arxiv:1604.00114。[Nad17] David Nadler, *Arboreal singularities*, 《几何与拓扑》21（2017年），第 2 期，1231–1274。MR 3626601[NZ09] David Nadler 和 Eric Zaslow, *Constructible sheaves and the Fukaya category*, 《美国数学会杂志》**22** 2009 1, 233 286 2449059 （），第 – 期。MR Orl D. O. Orlov, , [ 92] *Projective bundles monoidal transformations and derived categories* , , 《俄罗斯科学院数学系列》（），第 期。MR 1208153[Orl16] Dmitri Orlov, *Smooth and proper noncommutative schemes and gluing of DG categories* **302** 2016 59 105 3545926 , 《数学进展》（），–。MR[RS18] Marco Robalo 和 Pierre Schapira, *A lemma for microlocal sheaf theory in the ∞-categorical setting*, 《数学科学研究所出版物》54（2018年），第 2 期，379–391。[RSTZ14] Helge Ruddat、Nicolo Sibilla、David Treumann 和 Eric Zaslow, *Skeleta of affine hypersurfaces* **18** 2014 3, 1343 1395 , 《几何与拓扑》（），第 – 期。[SS16] Sarah Scherotzke 和 Nicol ` o Sibilla, , 《精选数学》（新系列）（），第 – 期。MR 3437841 *The non-equivariant coherent-constructible correspondence and a conjecture of King* **22** 2016 1, 389 416

[STW16] Vivek Shende、David Treumann 和 Harold Williams, *On the combinatorics of exact lagrangian surfaces* 2016 1603 07449 , , arxiv: 。。[Tre10] David Treumann, *Remarks on the nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric varieties* 1006 5756 2010 , arXiv 预印本 arXiv: 。（）。[Tyo12] Ilya Tyomkin, *Tropical geometry and correspondence theorems via toric stacks*，数学年鉴 **353** (2012)，第 3 期，945–995。[Zho19] Peng Zhou, *Twisted polytope sheaves and coherent-constructible correspondence for toric varieties* **25** 2019 3905367 ，《精选数学》(新系列)（），第 1 期，论文编号 1，23。MR[Zho20] , *Lagrangian skeleta of hypersurfaces in* $(\mathbb{C}^*)^n$, 《数学精选》**26** (2020)，第 2 期，1–33。

Department of Mathematics, Northwestern University, 2033 Sheridan Road, Evanston, IL 60208, USA*Email address*: yhu@math.northwestern.edu

Department of Mathematics, Lady Shaw Building, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., Hong Kong*Email address*: pyongwonsuh@cuhk.edu.hk