arXiv:2304.00833v1 [math-ph] 3 Apr 2023

关于 k-接触拉格朗日场方程、对称性和耗散定律的一些研究

Xavier Rivas[a,*]，Modesto Salgado[b,c,†] 和 Silvia Souto[b,c,‡]

[a]高等工程与技术学院，拉里奥哈国际大学，洛格罗尼奥，西班牙。[b]圣地亚哥-德孔波斯特拉大学几何与拓扑系，15782 圣地亚哥-德孔波斯特拉，西班牙。[c]加利西亚数学研究与技术中心（CITMAga），15782 圣地亚哥-德孔波斯特拉，西班牙。

2023年4月4日

摘要

众所周知， k-接触几何是处理非保守场论的合适框架。本文研究了 k-接触欧拉–拉格朗日方程的解、对称性、耗散定律与牛顿型向量场之间的一些关系。我们回顾了用k-向量场和截面表示的接触欧拉–拉格朗日方程，并给出了联系两种方法下解的新结果。我们还根据对称性所保持的结构，研究了不同类型的对称性：自然对称性（保持拉格朗日函数）、动力学对称性（保持解）和 k-接触对称性（保持底层几何结构）。对于其中一些对称性，我们给出了联系对称性与耗散定律的诺特型定理。我们还分析了 k-接触对称性与牛顿型向量场之间的关系。全文将以阻尼振动弦作为主要示例。

关键词：耗散定理、对称性、拉格朗日场论、耗散律、 k-接触结构。

MSC 2020年分类代码：70S05, 70S10, 70G45, 53C15, 53D10, 35R01

*xavier.rivas@unir.net ORCID：0000-0002-4175-5157

†modesto.salgado@usc.es ORCID：0000-0003-3982-1845

‡silviasouto.perez@usc.es ORCID：0000-0003-0755-1211

目录

1 引言 2 2 预备知识 3 2.1 k-向量场与积分截面.3 2.2 k^1-速度切丛.4 2.3 二阶偏微分方程.6 **3** k-接触欧拉–拉格朗日方程 7 4 几何 k-接触拉格朗日方程 10 5 解与拉格朗日 k-向量场之间的关系 13 6 耗散定律 15 7 对称性 18 7.1 自然对称性.18 7.2 动力学对称性.19 7.3 k-接触对称性.20 7.4 由非对称向量场给出的耗散定律.21 7.5 牛顿型向量场.22 8 结论与进一步研究 24 9 致谢 25 参考文献 25

1 引言

自 20 世纪 50 年代以来，几何方法一直被用于描述力学系统和场论，并在数学、物理学、工程学等领域有诸多应用。几何力学和场论中最常用的几何结构包括辛、k-辛或多重辛流形（参见 [7, 17, 43] 及其中的参考文献）。一般而言，所有这些几何方法都应用于保守系统，即在拉格朗日和哈密顿框架下均不存在耗散或能量损失。

近十年来，对能量耗散系统进行几何化的兴趣大幅增长。接触几何 [1, 25, 32] 是描述多种阻尼类型 [2, 4, 8, 13, 21, 35]的合适几何框架。这一表述已被证明在热力学[3, 45], 、量子力学 [10], 、电路理论 [26], 、李系统 [18] 和控制理论 [40] 等领域 [5, 11, 15, 16, 27, 28]十分有用。此外，为描述非保守场论，人们还对接触几何进行了多种推广，即 k-接触 [20, 22, 29]、 k-余接触 [41] 和多重接触 [12] 表述。通过这些形式体系得到的场方程称为 k-接触欧拉–拉格朗日方程，与近期提出的广义赫尔格洛茨原理[23]所得到的方程一致。

研究动力系统的对称性具有重要意义，因为它能够为寻找守恒律（或耗散律）提供新途径。此外，对于已知其对称群的系统，可以通过约化过程简化对系统的描述。自 E. Noether 的开创性工作以来 [38] （另见 [33, 37]），对称性与守恒量之间的关系一直是数理物理和动力系统领域的重要课题。自几何力学兴起以来，许多论文致力于研究哈密顿系统和拉格朗日系统的对称性与守恒量 [9, 19, 36, 39, 46]。近年来，这项研究已拓展到接触系统和余接触系统 [14, 21, 24], ，其中守恒量的概念必须由耗散量的概念取代。

本文旨在运用 k-接触形式，深入研究非保守自治场论的对称性。根据所保持的结构不同，对称性有多种类型。本文聚焦于自然对称性（保持拉格朗日函数的对称性）、动力学对称性（保持解的对称性）以及 k-接触对称性（保持底层几何结构的对称性）。其中一些对称性可依循 E. Noether 的思路导出耗散定律。全文采用了若干示例，尤其是阻尼振动弦。

本文的结构安排如下。第2 节回顾本文所需的一些基本概念，包括k-向量场、积分截面和 SOPDE，这些都是本文的基本工具。粗略地说， SOPDE 是一个 k-向量场，其积分截面是定义在底流形上的映射的一阶延拓。此外，我们利用函数与向量场的提升理论，引入了流形 k^1切速度上的一些几何结构。要发展几何 k-接触方程，就需要这些结构。第3 节中，我们介绍 k-接触欧拉–拉格朗日方程，即赫格洛茨–欧拉–拉格朗日方程，并给出若干此类系统的例子。第4 节旨在说明如何通过庞加莱´e–嘉当形式从几何角度导出这些方程。我们给出了几何 k-接触拉格朗日方程的一个例子。第5 节讨论 k-接触欧拉–拉格朗日方程的解与接触拉格朗日 k-向量场之间的关系，该关系由几何 k-接触方程给出。

在第6 节中引入了耗散律的概念，并给出了一些例子。引理6.5 对这些耗散律的刻画，为本文后续研究耗散律提供了一种新工具。第7 节旨在介绍若干类型的对称性，具体取决于它们所保持的结构。本节给出了若干将对称性与耗散定律联系起来的诺特型定理。最后，我们将牛顿型向量场的概念从 [6], -辛几何推广到 k-接触情形，并给出若干将牛顿型向量场与 k-接触对称性联系起来的结果。 k k k

本文中的所有流形均为实流形、第二可数流形，且属于 $\mathscr{C}^\infty$ 类；所有映射均假定为光滑映射。下文采用爱因斯坦求和约定，对交叉重复指标求和。

2 预备知识

k-向量场的概念在偏微分方程的几何研究中十分重要。本节回顾关于 k-向量场和积分截面的主要概念。此外，我们还介绍 k^1-速度丛的自然结构：刘维尔向量场和典范的 k-切结构。这些结构使我们能够定义二阶偏微分方程的概念。更多信息参见 [17] 及其中的参考文献。

2.1 k-向量场与积分截面

设 M 是一个光滑的 n 维流形。考虑其切丛的 k 重惠特尼和：$\oplus^k \mathrm{T}M = \mathrm{T}M \oplus \overset{k}{\cdots} \oplus \mathrm{T}M$。我们有自然投影

$$\tau_M^k \colon \oplus^k \mathrm{T}M \longrightarrow M\,, \qquad \tau_M^{k,\alpha} \colon \oplus^k \mathrm{T}M \longrightarrow \mathrm{T}M\,, \qquad \alpha = 1, \dots, k\,.$$

流形 M 上的 k-向量场是自然投影 τ_M^k 的一个截面 $\mathbf{X}$: $M \to \oplus^k \mathrm{T}M$。我们用 $\mathfrak{X}^k(M)$ 表示 M 上所有 k-向量场的集合。因此，k-向量场 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k(M)$ 可以理解为一族 k 个向量场 $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$，由 $X_\alpha = \tau^{k,\ \alpha}_{M} \circ \mathbf{X}$ 给出。基于此，我们可以将 $\mathbf{X}$ 记作 $=(X_1, \ldots, X_k)$。光滑映射 $F: M \to N$ 诱导出映射$\oplus^k \mathrm{T}F: \oplus^k \mathrm{T}M \to \oplus^k \mathrm{T}N$，其定义为

$$\oplus^k \mathrm{T}_m F(v_{1m}, \ldots, v_{km}) = (\mathrm{T}_m F(v_{1m}), \ldots, \mathrm{T}_m F(v_{km}))\,,$$

其中 $m \in M$, $v_{1m}, \ldots, v_{km} \in \mathrm{T}_m M$，且 $\mathrm{T}_m F: \mathrm{T}_m M \to \mathrm{T}_{F(m)} N$是 F 的切映射。

给定映射 $\psi: U \subset \mathbb{R}^k \to M$，我们将其到 $\oplus^k \mathrm{T}M$ 的一阶延拓定义为映射 $\psi^{(1)}: U \subset \mathbb{R}^k \to \oplus^k \mathrm{T}M$，其定义如下

$$\psi^{(1)}(t) = \oplus^k \mathrm{T}_t\psi \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\bigg|_t, \ldots, \frac{\partial}{\partial t^k}\bigg|_t \right) = \left(\mathrm{T}_t\psi \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\bigg|_t \right), \ldots, \mathrm{T}_t\psi \left(\frac{\partial}{\partial t^k}\bigg|_t \right) \right), \tag{1}$$

其中 $t = (t^1, \ldots, t^k)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的典范坐标。

与向量场的积分曲线类似，k-向量场的积分截面定义如下。考虑一个 k-向量场 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{X}^k(M)$。$\mathbf{X}$ 的积分截面是一个映射 $\psi: U \subset \mathbb{R}^k \to M$，满足 $\psi^{(1)} = \mathbf{X} \circ \psi$，即对每个 $\alpha = 1, \ldots, k$，都有 $\mathrm{T}_t\psi \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\big|_t \right) = (X_\alpha \circ \psi)(t)$。如果对于 M 的每一点，都存在一个积分截面使该点属于其像，则称 k-向量场 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k(M)$ 可积。

考虑在 $U \subset M$上的坐标系（x^i）中，局部表达式为 $X_\alpha = X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 的 k-向量场 $\mathbf{X} =$（X_α）。那么，$\psi: U \subset \mathbb{R}^k \to M$是 $\mathbf{X}$ 的积分截面，当且仅当它是以下偏微分方程组的解

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^\alpha}\bigg|_t = X_\alpha^i(\psi(t))\,.$$

在 M上的 k-向量场 $\mathbf{X} =$（$X_1, \ldots, X_k$）可积，当且仅当对每个α，都有 $[X_\alpha, X_\beta] = 0\ \beta$；这恰好是上述偏微分方程组 [34]可积的充要条件。考虑一个微分同胚 $\Phi: M \to M$ 以及在 M上的 k-向量场 $\mathbf{X} =$（$X_1, \ldots, X_k$）。如果 ψ是 $\mathbf{X}$ 的积分映射，那么 $\Phi \circ \psi$就是$\Phi_* \mathbf{X} =$（$\Phi_* X_\alpha$）的积分截面。特别地，如果 $\mathbf{X}$ 可积，那么 $\Phi_* \mathbf{X}$ 也可积。

2.2 k^1-速度的切丛

设 $\tau_Q: \mathrm{T}Q \to Q$ 是光滑流形 Q 的切丛。向量丛 $\oplus^k \mathrm{T}Q$ 称为 Q 的 k^1-速度切丛（见 [17]）。

若 (q^i) 是 $U \subseteq Q$ 上的局部坐标，则 $\mathrm{T}U = \tau_Q^{-1}(U)$ 上的自然坐标 (q^i, v^i) 为

$$q^i(v_q) = q^i(q)\,, \qquad v^i(v_q) = v_q(q^i)\,,$$

诱导出（q^i、v_α^i）上的自然坐标，其中 $i = 1$、……、n 以及 $\alpha = 1$、……、k 定义于（τ_Q^k）$^{-1}$（U），其定义如下:

$$q^i(v_{1q}, \ldots, v_{kq}) = q^i(q)\,, \qquad v_\alpha^i(v_{1q}, \ldots, v_{kq}) = v_{\alpha q}(q^i)\,.$$

函数提升。若 f 是 Q 上的可微函数，则 f 的垂直提升 f^V 和 α 提升 $f^{(\alpha)}$ 是定义在 $\oplus^k\mathrm{T}Q$ 上的函数，其定义如下：

$$f^V(v_q) = (\tau_Q^k)^* f(v_q) = f(q)\,, \qquad f^{(\alpha)}(v_q) = v_{\alpha_q}(f) \equiv v_\alpha^i(v_q)\frac{\partial f}{\partial q^i}\Big|_q\,, \quad \text{for every } \alpha = 1,\dots,k\,.$$

由于 $(q^i)^V = q^i$ 和 $(q^i)^{(\alpha)} = v_\alpha^i$，我们推得 $\oplus^k\mathrm{T}Q$ 上的向量场由其对函数的垂直提升和 α-提升的作用所刻画。

向量场提升。给定一个向量场 $X \in \mathfrak{X}(Q)$，垂直的 α-提升 X^{V_α}和完全提升 X^C 是 $\oplus^k\mathrm{T}Q$ 上的向量场，由下式给出

$$\begin{aligned} &X^{V_\alpha}(f^V) = 0, && X^{V_\alpha}(f^{(\beta)}) = \delta_\beta^\alpha (X(f))^V,\\ &X^C(f^V) = (X(f))^V, && X^C(f^{(\alpha)}) = (X(f))^{(\alpha)}\,, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = 1$、……、k.

在 $\oplus^k\mathrm{T}Q$上取适配坐标 (q^i, v_α^i)，若 $X = X^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}$，则

$$X^{V_\alpha} = X^i\frac{\partial}{\partial v_\alpha^i}\,, \qquad X^C = X^i\frac{\partial}{\partial q^i} + v_\alpha^j\frac{\partial X^i}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial v_\alpha^i}\,, \tag{2}$$

并且我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^{V_\alpha} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha^i}\,, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^{C} = \frac{\partial}{\partial q^i}\,. \tag{3}$$

由（2）和（3）可推得，类型为（1，1）的 $\oplus^k\mathrm{T}Q$ 上的张量场由其在这些向量场提升上的作用刻画。

刘维尔向量场 $\Delta \in \mathfrak{X}(\oplus^k\mathrm{T}Q)$ 是由 $\Delta(f^V) = 0$和 $\Delta(f^{(\alpha)}) = f^{(\alpha)}$ 定义的向量场。在适配坐标中，它表示为

$$\Delta = v_\alpha^i\frac{\partial}{\partial v_\alpha^i}\,.$$

注 2.1.

(1) 若 X 是 Q 上的向量场，其局部单参数群为 ϕ_t： $Q \to Q$，则 X^C 是流 $\mathrm{T}\phi_t$： $\oplus^k\mathrm{T}Q \to \oplus^k\mathrm{T}Q$的无穷小生成元。

(2) Δ是流 ϕ： $\mathbb{R} \times \oplus^k\mathrm{T}Q \to \oplus^k\mathrm{T}Q$的无穷小生成元，$\phi(t, (v_{1_q}, \dots, v_{k_q})) = (e^t v_{1_q}, \dots, e^t v_{k_q})$。

典范的 k-切结构是一族类型为 (1, 1) 的张量场 $(J^1, \dots, J^k)$，其定义为 $J^\alpha(X^C) = X^{V_\alpha}$和 $J^\alpha(X^{V_\alpha}) = 0$.在局部适配坐标中，它写作

$$J^\alpha = \frac{\partial}{\partial v_\alpha^i} \otimes \mathrm{d}q^i\,.$$

2.3 二阶偏微分方程

由于 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k\to\oplus^k\mathrm{T}Q$ 是一个平凡向量丛，因此可以将 $\oplus^k\mathrm{T}Q$ 中的典范结构（上述典范k-切结构和刘维尔向量场）以自然的方式延拓到 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$，并仍用相同的记号（$J^\alpha$ 和 Δ）表示。

定义 2.2。设映射 $\phi_s\colon U\subset\mathbb{R}^k\to Q\times\mathbb{R}^k$ with $\phi_s(t)=(\phi(t)\ s^\alpha(t))$，其中 $\phi\colon U\subset\mathbb{R}^k\to Q$。$\phi_s$ 到 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 的一阶延拓是映射 $\phi_s^{(1)}\colon U\subset\mathbb{R}^k\to\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$，定义为

$$\phi_s^{(1)}(t)=(\phi^{(1)}(t),s^\alpha(t))\,,$$

其中

$$\phi^{(1)}(t)=\left(\mathrm{T}_t\phi\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\Big|_t\right),\dots,\mathrm{T}_t\phi\left(\frac{\partial}{\partial t^k}\Big|_t\right)\right)$$

是 ϕ 到 $\oplus^k\mathrm{T}Q$ 在（1）中定义的一阶延拓，且（$t^1,\dots,t^k$）是$\mathbb{R}^k$的典范坐标。

在局部坐标中，若 $\phi(t)=(\phi^i(t))$，则有

$$\phi_s^{(1)}(t)=\left(\phi^i(t),\frac{\partial\phi^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t,s^\alpha(t)\right).$$

定义 2.3. $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 上的 k-向量场 $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ 是一个二阶偏微分方程（或 SOPDE），当且仅当 $J^\alpha(\Gamma_\alpha)=\Delta$。

在局部适配坐标中，SOPDE $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ 表示为

$$\Gamma_\alpha=v^i_\alpha\frac{\partial}{\partial q^i}+\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial v^i_\beta}+\Gamma^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial s^\beta}\,,\qquad\alpha,\beta=1,\dots,k\,,\tag{4}$$

其中 $\Gamma^i{}_{\alpha\beta}$ 并且 Γ^β_α 是定义在 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 上诱导坐标图的定义域内的光滑函数 .

若 $\psi\colon\ U\subset\mathbb{R}^k\to\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$，其局部表示为 $\psi(t)=(\psi^i(t)\ \psi^i_\alpha(t)\ s^\alpha(t))$，是一个积分截面。根据定义 SOPDE $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$，以及定义 2.2 和方程式（4），可得

$$\frac{\partial\psi^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t=\psi^i_\alpha(t)\,,\qquad\frac{\partial\psi^i_\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_t=\Gamma^i_{\alpha\beta}(\psi(t))\,,\qquad\frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_t=\Gamma^\beta_\alpha(\psi(t))\,.$$

于是，我们有

$$\psi(t)=(\psi^i(t),\psi^i_\alpha(t),s^\alpha(t))=\phi_s^{(1)}(t)=(\phi^{(1)}(t),s^\alpha(t))\,,\qquad\frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_t=\Gamma^\beta_\alpha(\phi_s^{(1)})\,,$$

其中 $\phi=\mathrm{pr}_Q\circ\psi\colon U\subset\mathbb{R}^k\xrightarrow{\psi}\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k\xrightarrow{\mathrm{pr}Q}Q$。

因此，我们得到一个 SOPDE 的积分映射如下刻画。

命题 2.4. 设 $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ 是 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 上的一个可积 SOPDE。若 $\psi\colon U\subset\mathbb{R}^k\to\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 是 $\mathbf{\Gamma}$ 的积分截面，则

$$\psi(t)=(\phi^{(1)}(t),s^\alpha(t))=\phi_s^{(1)}(t)\,,$$

且 $\phi_s(t) = (\phi^i(t)\ s^\alpha(t))$ 是以下二阶偏微分方程组的一个解

$$\left.\frac{\partial^2\phi^i}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\right|_t = \Gamma^i_{\alpha\beta}\left(\phi^j(t), \left.\frac{\partial\phi^j}{\partial t^\gamma}\right|_t, s^\gamma(t)\right), \qquad \left.\frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha}\right|_t = \Gamma^\beta_\alpha\left(\phi^j(t), \left.\frac{\partial\phi^j}{\partial t^\gamma}\right|_t, s^\gamma(t)\right). \tag{5}$$

反过来，若 $\phi_s\colon U\subset\mathbb{R}^k\to Q\times\mathbb{R}^k$ 是满足系统 (5) 的映射，则 $\phi_s^{(1)}$ 是 $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ 的积分截面。

定义 2.5。 满足（ $\phi_s\colon U\subset\mathbb{R}^k\to Q\times\mathbb{R}^k$ 5)的映射称为解，对应于 SOPDE 向量场 $\mathbf{\Gamma}$。

3 k-接触欧拉–拉格朗日方程

本节介绍 k-接触欧拉–拉格朗日方程，也称为赫格洛茨–欧拉–拉格朗日方程，并给出若干此类系统的示例。

k-接触欧拉–拉格朗日方程，对于拉格朗日函数 $L\colon \oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$，其形式为

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\circ\phi_s^{(1)}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\circ\phi_s^{(1)} = \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\right)\circ\phi_s^{(1)}, \qquad \frac{\partial s^\alpha}{\partial t^\alpha} = L\circ\phi_s^{(1)}, \tag{6}$$

对于映射 $\phi_s\colon\ U\subset\mathbb{R}^k\to Q\times\mathbb{R}^k$, $\phi_s(t) = (\phi(t)\ s^\alpha(t))$，其中 $\phi\colon\ U\subset\mathbb{R}^k\to Q$。方程（6）可写为

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i_\alpha\partial v^j_\beta}\frac{\partial^2\phi^j}{\partial t^\alpha\partial t^\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial v^i_\alpha}\frac{\partial\phi^j}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial s^\beta\partial v^i_\alpha}\frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}, \qquad \frac{\partial s^\alpha}{\partial t^\alpha} = L, \tag{7}$$

其中 $\phi_s^{(1)}(t) = \left(\phi^j(t)\ \left.\frac{\partial\phi^j}{\partial t^\alpha}\right|_t, s^\alpha(t)\right)$，且 $t\in\mathbb{R}^k$，它表示定义在 $Q\times\mathbb{R}^k$ 上的一个二阶偏微分方程组。

需要指出的是，这些方程可以从两种不同的变分原理 [23] 推导得到：一种是对通常的赫格洛茨变分原理 [31] 的推广，另一种是用于 k-辛欧拉–拉格朗日方程的变分原理 [17,（第 6 节）。本文中，我们将方程（6）的解称为映射 ϕ_s 或 $\phi_s^{(1)}$，两者不作区分，因为我们只考虑作为映射 ϕ_s：$U\subset\mathbb{R}^k\to Q\times\mathbb{R}^k$ 的一阶延拓的解。

注 3.1. 在 $k=1$ 的情况下，方程（6）即为赫格洛茨方程（见 [31]）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\circ\gamma\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\circ\gamma = \left(\frac{\partial L}{\partial s}\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\circ\gamma, \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = L\circ\gamma,$$

对于拉格朗日函数 $L\colon \mathrm{T}Q\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$，其解为 $\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}$ 上的一条曲线 $\gamma(t) = (q^i(t)\ \dot{q}^i(t)\ s(t))$。

注 3.2. 注意，当拉格朗日函数 L 不依赖变量 s^α，对所有 $\alpha=1,\dots,k$ 均如此时，上述方程就是定义在 $\oplus^k\mathrm{T}Q$ 上的自治拉格朗日函数 $L(q^i,v^i_\alpha)$ 对应的欧拉–拉格朗日场方程。

下面来看一些由二阶偏微分方程建模的系统示例，这些系统可以通过 k-接触系统来描述（见 [20]）。

例 3.3。（阻尼振动弦）。众所周知，振动弦可以使用 k-辛拉格朗日形式来描述。考虑表示时间和空间的坐标 (t, x)。设 ϕ 表示弦上某一点相对于其平衡点的位移，因此 v_t 和 v_x 表示 ϕ 关于两个独立变量的导数。该系统的拉格朗日函数 $L_\circ\colon \oplus^2 \mathrm{T}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$L_\circ(q, v_t, v_x) = \frac{1}{2}\rho v_t^2 - \frac{1}{2}\tau v_x^2 , \tag{8}$$

其中 ρ 是弦的线质量密度，τ 是弦的张力。我们假设这些量均为常数。该拉格朗日密度对应的欧拉–拉格朗日方程为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} ,$$

其中 $c^2 = \frac{\tau}{}$，这是一维波动方程。ρ

为了对具有线性阻尼的振动弦进行建模，我们修改拉格朗日函数（8），使其成为一个 k-接触拉格朗日函数 [22]。新的拉格朗日函数 L 定义在相位丛 $\oplus^2\mathrm{T}\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$上，该相位丛带有坐标（$q$，$v_t$，$v_x$，$s^t$，$s^x$），其形式为

$$L(q, v_t, v_x, s^t, s^x) = L_\circ - \gamma s^t = \frac{1}{2}\rho v_t^2 - \frac{1}{2}\tau v_x^2 - \gamma s^t . \tag{9}$$

考虑一个解 $\phi_s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$，其中

$$\phi_s(t, x) = (\phi(t, x), s^t(t, x), s^x(t, x)),$$

其中 $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$。$\phi_s$ 的一阶延拓是映射 $\phi_s^{(1)}\colon \mathbb{R}^2 \to \oplus^2\mathrm{T}\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$，其定义为

$$\phi_s^{(1)}(t, x) = \left(\phi(t, x), \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{(t,x)}, \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{(t,x)}, s^t(t, x), s^x(t, x)\right) .$$

该 k-接触欧拉–拉格朗日方程（7）对于拉格朗日函数 L化为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 , \qquad \frac{\partial s^1}{\partial t} + \frac{\partial s^2}{\partial x} = L \circ \phi_s^{(1)} . \tag{10}$$

第一个方程对应于一条带阻尼的振动弦。

例 3.4。（两条阻尼耦合振动弦）。考虑一个由两条阻尼耦合振动弦组成的系统。该系统的构形流形为 $Q = \mathbb{R}^2$，其坐标为 (q^1, q^2)，其中每个坐标表示一条弦的位移。该系统的拉格朗日相位丛为 $M = \oplus^2\mathrm{T}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$，其自然坐标为 $(q^1, q^2, v_1^t, v_2^t, v_1^x, v_2^x, s^t, s^x)$。考虑拉格朗日函数 $L\colon \oplus^2 \mathrm{T}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，其定义为

$$L(q^1, q^2, v_t^1, v_t^2, v_x^1, v_x^2, s^t, s^x) = \frac{1}{2}\left((v_t^1)^2 + (v_t^2)^2 - (v_x^1)^2 - (v_x^2)^2\right) - C(z) - \gamma s^t ,$$

其中，γ 是摩擦系数，C 是表示两根弦耦合的函数，该函数仅取决于$z = \sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2}$。

映射 $\phi_s^{(1)} = \left(\phi^1, \phi^2, \frac{\partial\phi^1}{\partial t}, \frac{\partial\phi^1}{\partial x}, \frac{\partial\phi^2}{\partial t}, \frac{\partial\phi^2}{\partial x}, s^t, s^x\right)$ 满足 k-接触欧拉–拉格朗日方程（6）的解满足偏微分方程组

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi^1}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial\phi^1}{\partial t} + C'(z)\frac{\phi^1}{z} &= 0\,,\\
\frac{\partial^2\phi^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi^2}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial\phi^2}{\partial t} + C'(z)\frac{\phi^2}{z} &= 0\,,\\
\frac{\partial s^t}{\partial t} + \frac{\partial s^x}{\partial x} &= L\circ\phi_s\,.
\end{aligned}$$

前两个方程对应两条具有耦合函数的阻尼耦合弦 C。该系统的哈密顿表述已在 [22] 中研究。

例 3.5。（电报方程）。均匀电力传输线上的电流和电压由所谓的电报方程 [30, p. 306], [44, p. 653] 描述:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial x} = -L\dfrac{\partial I}{\partial t} - RI\,,\\[2ex]
\dfrac{\partial I}{\partial x} = -C\dfrac{\partial V}{\partial t} - GV\,,
\end{cases}$$

其中， $V(x,t)$ 为电压， $I(x,t)$ 为电流， L 为电感， R 为电阻， C 为电容， G 为电导。该系统可以解耦，得到如下二阶偏微分方程组

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (LG+RC)\dfrac{\partial V}{\partial t} + RGV\,,\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC\dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (LG+RC)\dfrac{\partial I}{\partial t} + RGI\,.
\end{cases}$$

注意，上述系统中的两个方程完全相同，也称为电报方程。它们都可以写成

$$\Box q + \gamma\frac{\partial q}{\partial t} + m^2 q = 0\,, \tag{11}$$

其中

$$\gamma = \frac{LG+RC}{LC}\,, \qquad m^2 = \frac{RG}{LC}\,, \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,.$$

方程（11）是 k-接触欧拉–拉格朗日方程（参见 [29]），对应的拉格朗日函数L： $\oplus^2\mathrm{T}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下

$$L(q, v_t, v_x, s^t, s^x) = \frac{1}{2}v_t^2 - \frac{1}{2LC}v_x^2 - \frac{1}{2}m^2q^2 - \gamma s^t\,.$$

例 3.6。 （阻尼拉普拉斯方程）。众所周知，拉普拉斯方程 i s

$$\Delta\phi := \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n^2} = 0\,,$$

其中 ϕ ： $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，它可以理解为拉格朗日函数$L_\circ$： $\oplus^n\mathrm{T}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 所对应的欧拉–拉格朗日方程，该函数定义为

$$L_\circ(q, v_1, \ldots, v_n) = \frac{1}{2}(v_1^2 + \cdots + v_n^2)\,.$$

现在考虑具有典范坐标（q、v_1、…、v_n、s^1、…、s^n）的相位丛 $\oplus^n\mathrm{T}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$，以及由下式定义的 n-接触拉格朗日函数 L: $\oplus^n\,\mathrm{T}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$L = L_\circ - \gamma_i s^i\,,$$

其中 $\gamma_i\in\mathbb{R}$ar 常数。该 n-接触欧拉–拉格朗日方程（7）对于该拉格朗日函数 L 变为 e

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_n^2}+\gamma_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=0\,,\qquad \frac{\partial s^1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial s^n}{\partial x_n}=L\,, \tag{12}$$

其中 $\phi_s^{(1)}$: $\mathbb{R}^n\to\oplus^n\mathrm{T}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$，是映射 ϕ 的一阶延拓，由 $\phi_s^{(1)}=\left(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\phi}{\partial x_n},s^1,\dots,s^n\right)$ 给出。

请注意，式（12）中的第一个方程是一个椭圆型偏微分方程，可以将其理解为带有一些额外一阶项的拉普拉斯方程。

4 几何 k-接触拉格朗日方程

本节回顾 k-接触拉格朗日形式体系在非保守场论中的若干主要方面，该形式体系最初发表于 [22]。

定义 4.1. 拉格朗日函数是一个函数 $L\in\mathscr{C}^\infty(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$。

- 与 L 相关联的拉格朗日能量是由 $E_L=\Delta(L)-L\in\mathscr{C}^\infty(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 定义的函数。

- 与 L 相关联的庞加莱–嘉当形式为

$$\theta_L^\alpha=\mathrm{d}L\circ J^\alpha\in\Omega^1(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)\,.$$

- 我们定义与 L相关联的以下 1-形式

$$\eta_L^\alpha=\mathrm{d}s^\alpha-\theta_L^\alpha\in\Omega^1(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)\,,$$

称为接触拉格朗日一形式。

请注意，上文引入的接触拉格朗日形式并非接触形式。不过，在适当的条件下，它们定义了 k-接触结构，作用于 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$，这也正是其名称的由来。在自然坐标下，定义4.1 中所引入对象的局部表达式为

$$E_L=v_\alpha^i\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}-L\,, \tag{13}$$

$$\eta_L^\alpha=\mathrm{d}s^\alpha-\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}q^i,\qquad \mathrm{d}\eta_L^\alpha=\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}q^j+\frac{\partial^2 L}{\partial v_\beta^j\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}v_\beta^j+\frac{\partial^2 L}{\partial s^\beta\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}s^\beta. \tag{14}$$

定义 4.2. 若拉格朗日函数 L: $\oplus^k\,\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为正则的：拉格朗日函数 L 关于纤维坐标的海森矩阵，即

$$g_{ij}^{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 L}{\partial v_\alpha^i\partial v_\beta^j}\,,$$

在 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 上具有最大秩 nk。否则，拉格朗日函数是奇异的。

注 4.3. 拉格朗日函数 $L:\ \oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ 是正则的，当且仅当这一族 k 微分1-形式 $\eta_L^1,\dots,\eta_L^k$ 在 k上定义了 -接触结构 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$。在这种情况下，$(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k,\eta_L^\alpha)$ 成为 k-接触流形 (参见 [20])。

利用这些形式 η_L^α 我们可以将方程（6）写成如下形式

$$\begin{cases} i_{\mathrm{T}\phi_s^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)}\mathrm{d}\eta_L^\alpha=\left(\mathrm{d}E_L+\dfrac{\partial L}{\partial s^\alpha}\eta_L^\alpha\right)\circ\phi_s^{(1)}\,,\\ i_{\mathrm{T}\phi_s^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)}\eta_L^\alpha=-E_L\circ\phi_s^{(1)}\,, \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\mathrm{T}_t\phi_s^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right)=\frac{\partial\phi^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\phi_s^{(1)}(t)}+\frac{\partial^2\phi^i}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\Big|_t\frac{\partial}{\partial v_\beta^i}\Big|_{\phi_s^{(1)}(t)}+\frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_t\frac{\partial}{\partial s^\beta}\Big|_{\phi_s^{(1)}(t)}\,.$$

定义 4.4。在 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 上，作用于 k-向量场 $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)$ 的几何 k-接触拉格朗日函数方程为

$$\begin{cases} i_{X_\alpha}\mathrm{d}\eta_L^\alpha=\mathrm{d}E_L+\dfrac{\partial L}{\partial s^\alpha}\eta_L^\alpha\,,\\ i_{X_\alpha}\eta_L^\alpha=-E_L\,. \end{cases} \tag{16}$$

我们将 $\mathfrak{X}_L^k(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$表示为 k-接触拉格朗日函数 k-向量场的集合，即k-向量场 $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)$ 在 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$上满足方程（16）的解。

对于一个局部表达式为

$$X_\alpha=X_\alpha^i\frac{\partial}{\partial q^i}+X_{\alpha\beta}^i\frac{\partial}{\partial v_\beta^i}+X_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial s^\beta}\,,$$

方程（16）可写为

$$0=\left(X_\alpha^j-v_\alpha^j\right)\frac{\partial^2L}{\partial s^\beta\partial v_\alpha^j}\,, \tag{17}$$

$$0=\left(X_\alpha^j-v_\alpha^j\right)\frac{\partial^2L}{\partial v_\beta^i\partial v_\alpha^j}\,, \tag{18}$$

$$0=\left(X_\alpha^j-v_\alpha^j\right)\frac{\partial^2L}{\partial q^i\partial v_\alpha^j}+\frac{\partial L}{\partial q^i}-X_\alpha^\beta\frac{\partial^2L}{\partial s^\beta\partial v_\alpha^i}-X_\alpha^j\frac{\partial^2L}{\partial q^j\partial v_\alpha^i}-X_{\alpha\beta}^j\frac{\partial^2L}{\partial v_\beta^j\partial v_\alpha^i}+\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\,, \tag{19}$$

$$0=L+\left(X_\alpha^j-v_\alpha^j\right)\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}-X_\alpha^\alpha\,. \tag{20}$$

若 L 是正则拉格朗日函数，则方程（18）可得 $X_\alpha^j=v_\alpha^j$，它们是 SOPDE 条件，适用于k-向量场$\mathbf{X}$。此时，（17）恒成立，而（19）和（20）给出

$$X_{\alpha\beta}^j\frac{\partial^2L}{\partial v_\beta^j\partial v_\alpha^i}+v_\alpha^j\frac{\partial^2L}{\partial q^j\partial v_\alpha^i}+X_\alpha^\beta\frac{\partial^2L}{\partial s^\beta\partial v_\alpha^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\,,\qquad X_\alpha^\alpha=L\,. \tag{21}$$

以下引理可直接由方程（18）、（19）和（20）推出。

引理 4.5。设拉格朗日函数 $L\in\mathscr{C}^\infty(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$。

(1) 若 L 是正则拉格朗日函数，则任意 k-向量场 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}^k_L(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 都是一个 SOPDE，其局部表达式由公式 (4) 给出，并满足方程 (21)。此外，若 $\mathbf{X}$ 可积，则其积分截面是解的典范提升 $\phi_s^{(1)}$，这些解满足 k-接触欧拉–拉格朗日方程 (6)。

(2) 若 $\mathbf{X}$ 是 SOPDE 且 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k_L(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 则其局部可由公式 (4) 给出，并满足方程 (21)。

注 4.6。 引理 4.5 的结果是 k-接触拉格朗日形式体系的基础，而方程 (16) 可视为 k-接触欧拉–拉格朗日场方程 (7) 的几何版本。

注 4.7。 请注意，特殊情形 $k = 1$ 给出了具有耗散的力学系统的接触拉格朗日形式体系 [21]。

在以下示例中，我们将求解描述阻尼振动弦的正则拉格朗日函数对应的几何 X_1、$X_2 \in \mathfrak{X}^2_L(\oplus^2 \mathrm{T}\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ 的 k-接触欧拉–拉格朗日方程 (16)，并给出一个可积 SOPDE的解示例。

例 4.8。 我们再次考虑例 3.3中介绍的阻尼振动弦。回忆一下，该系统的拉格朗日函数 $L: \oplus^2\mathrm{T}\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 由式（9）给出，且是正则的。与拉格朗日函数 L 相关联的拉格朗日能量为

$$E_L = \Delta(L) - L = \frac{1}{2}\rho v_t^2 - \frac{1}{2}\tau v_x^2 + \gamma s^t \,,$$

接触 1-形式为

$$\eta^t_L = \mathrm{d}s^t - \theta^t_L = \mathrm{d}s^t - \rho v_t \mathrm{d}q \,, \qquad \eta^x_L = \mathrm{d}s^x - \theta^x_L = \mathrm{d}s^x + \tau v_x \mathrm{d}q \,.$$

现在考虑一个二向量场 $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \mathfrak{X}^2(\oplus^2\mathrm{T}\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$，其局部表达式为

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1 \frac{\partial}{\partial q} + F_{1t} \frac{\partial}{\partial v_t} + F_{1x} \frac{\partial}{\partial v_x} + g_1^t \frac{\partial}{\partial s^t} + g_1^x \frac{\partial}{\partial s^x} \,, \\ X_2 &= f_2 \frac{\partial}{\partial q} + F_{2t} \frac{\partial}{\partial v_t} + F_{2x} \frac{\partial}{\partial v_x} + g_2^t \frac{\partial}{\partial s^t} + g_2^x \frac{\partial}{\partial s^x} \,. \end{aligned}$$

式（16）中的第一个方程为

$$\rho f_1 \mathrm{d}v_t - \rho F_{1t} \mathrm{d}q - \tau f_2 \mathrm{d}v_x + \tau F_{2x} \mathrm{d}q = \rho v_t \mathrm{d}v_t - \tau v_x \mathrm{d}v_x + \gamma \rho v_t \mathrm{d}q \,,$$

由此得到条件

$$\begin{aligned} -\rho\, F_{1t} + \tau F_{2x} &= \gamma \rho v_t && (\text{coefficients in } \mathrm{d}u) \,, \\ f_1 &= v_t && (\text{coefficients in } \mathrm{d}v_t) \,, && (22) \\ f_2 &= v_x && (\text{coefficients in } \mathrm{d}v_x) \,. && (23) \end{aligned}$$

注意，上述方程（22）和（23）是 SOPDE二向量场的条件 $\mathbf{X}$。另一方面，方程（16）中的第二个方程给出条件

$$g_1^t + g_2^x = \frac{1}{2}\rho v_t^2 - \frac{1}{2}\tau v_x^2 - \gamma s^t = L \,.$$

因此，二向量场 X 的解可局部表示为

$$X_1 = v_t\frac{\partial}{\partial q} + \left(\frac{\tau}{\rho}F_{2x} - \gamma v_t\right)\frac{\partial}{\partial v_t} + F_{1x}\frac{\partial}{\partial v_x} + (L - g_2^x)\frac{\partial}{\partial s^t} + g_1^x\frac{\partial}{\partial s^x}\,,$$
$$X_2 = v_x\frac{\partial}{\partial q} + F_{2t}\frac{\partial}{\partial v_t} + F_{2x}\frac{\partial}{\partial v_x} + g_2^t\frac{\partial}{\partial s^t} + g_2^x\frac{\partial}{\partial s^x}\,,$$

其中函数 $F_{1x}, F_{2t}, F_{2x}, g_1^x, g_2^t, g_2^x$ 仍未确定。

为了给出一个可积的 SOPDE方程（16）的解，我们假设

- 函数 $F_{1x} = F_{2t} = g_1^x = g_2^t = 0$,
- 函数 g_2^x 仅依赖于变量 v_x,
- $\dfrac{\partial F_2^x}{\partial s^x} = 0,\ \dfrac{\partial F_{2x}}{\partial v_t} \neq 0,\ \dfrac{\partial F_{2x}}{\partial s^t} \neq 0.$

在这种情况下，对于每个 α, β，可积性条件 $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = 0$ 为

$$\frac{\partial F_{2x}}{\partial v_x} = 0\,, \qquad \frac{\partial g_2^x}{\partial v_x} = -\tau v_x\,, \qquad \frac{\tau}{\rho}F_{2x} - \gamma v_t + L - g_2^x = 0\,.$$

于是，一个可积的 SOPDE (X_1, X_2) 为

$$X_1 = v_t\,\frac{\partial}{\partial q} + \left(-\frac{1}{2}\rho v_t^2 + \gamma s^t\right)\frac{\partial}{\partial v_t} + \left(\frac{1}{2}\rho v_t^2 - \gamma s^t\right)\frac{\partial}{\partial s^t}\,,$$
$$X_2 = v_x\,\frac{\partial}{\partial q} + \left(\frac{\gamma\rho}{\tau}v_t - \frac{\rho^2}{2\tau}v_t^2 + \frac{\gamma\rho}{\tau}s^t\right)\frac{\partial}{\partial v_x} - \frac{1}{2}\tau v_x^2\,\frac{\partial}{\partial s^x}\,,$$

并且根据引理 4.5，(X_1, X_2) 的任意积分截面都是解 ϕ_s 的典范提升，该解满足 k-接触欧拉–拉格朗日方程 (10)。

5 解与拉格朗日函数 k-向量场之间的关系

现在，我们对 $\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k TQ \times \mathbb{R}^k)$ 中 SOPDEs 的集合进行局部和整体刻画。

命题 5.1. 设 $L \in \mathscr{C}^\infty(\oplus^k TQ \times \mathbb{R}^k)$ 是一个拉格朗日函数， $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k(\oplus^k TQ \times \mathbb{R}^k)$ 是一个 k-向量场。则，

(1) $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(\oplus^k TQ \times \mathbb{R}^k)$ 当且仅当它满足这些条件

$$\mathscr{L}_{\Gamma_\alpha}\eta_L^\alpha = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\eta_L^\alpha\,, \qquad i_{\Gamma_\alpha}\eta_L^\alpha = -E_L\,. \tag{24}$$

(2) 此外，如果 $\mathbf{\Gamma}$ 是 SOPDE 在 $\oplus^k TQ \times \mathbb{R}^k$ 上的一个局部表达式为 (4)，上述方程 (24) 可局部写为

$$\Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\,, \qquad \Gamma_\alpha^\alpha = L\,. \tag{25}$$

证明。 (1) 这是由方程（16）和嘉当演算直接得出的。

(2) 利用 SOPDE $\mathbf{\Gamma}$的局部表达式、拉格朗日能量 E_L以及 1-形式η_L^α （（4）、（13）和（14）分别），在局部坐标下直接计算可得

$$0 = i_{\Gamma_\alpha}\eta_L^\alpha + E_L = \left(\mathrm{d}s^\alpha - \frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}q^i\right)(\Gamma_\alpha) + v_\alpha^i\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i} - L = \Gamma_\alpha^\alpha - L$$

and

$$\begin{aligned}
0 &= \mathscr{L}_{\Gamma_\alpha}\eta_L^\alpha - \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\eta_L^\alpha = -\mathrm{d}E_L + i_{\Gamma_\alpha}\mathrm{d}\eta_L^\alpha - \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\eta_L^\alpha \\
&= -\mathrm{d}\left(v_\alpha^i\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i} - L\right) + i_{\Gamma_\alpha}\left(\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\right)\right) - \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\left(\mathrm{d}s^\alpha - \frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}q^i\right) \\
&= -\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}v_\alpha^i + \frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i + \frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}v_\alpha^i + \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\mathrm{d}s^\alpha - \Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\right)\mathrm{d}q^i - \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\mathrm{d}s^\alpha + \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}q^i \\
&= \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\right) + \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\right)\mathrm{d}q^i\,,
\end{aligned}$$

这证明了该结果。

□

现在我们给出解与 k-接触欧拉–拉格朗日方程（6）及 k-接触拉格朗日 k-向量场在 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$之间的新关系。该关系在本文中起着基础性作用。

命题 5.2。设 $L\in\mathscr{C}^\infty(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 是一个拉格朗日函数。

(1) 一个映射 $\phi_s\colon U\subset\mathbb{R}^k\to Q\times\mathbb{R}^k$, $\phi_s(t) = (\phi(t)\ s^\alpha(t))$ 是 k-接触欧拉–拉格朗日方程(7) 的解，当且仅当，

$$g_{ij}^{\alpha\beta}\circ\phi_s^{(1)}\left(\Gamma_{\alpha\beta}^j\circ\phi_s^{(1)} - \frac{\partial^2\phi^j}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial s^\beta\partial v_\alpha^i}\circ\phi_s^{(1)}\left(\Gamma_\alpha^\beta\circ\phi_s^{(1)} - \frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha}\right) = 0\,, \tag{26}$$

$$\Gamma_\alpha^\alpha\circ\phi_s^{(1)} = \frac{\partial s^\alpha}{\partial t^\alpha} = L\circ\phi_s^{(1)}\,, \tag{27}$$

对任意 SOPDE $\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}_L^k(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$，其局部表达式为 (4)。

(2) 若 k-向量场 $\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}_L^k(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 可积，且 $\phi_s^{(1)}\colon\ U\subset\mathbb{R}^k\to\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 是一个积分截面，则 ϕ_s 是 k-接触欧拉–拉格朗日方程 (7)的一个解。

证明。**(1)** 考虑映射 $\phi_s\colon\ U\subset\mathbb{R}^k\to Q\times\mathbb{R}^k$, $\phi_s(t) = (\phi(t)\ s^\alpha(t))$。若 ϕ_s是 k-接触欧拉–拉格朗日方程（7）的解，则有

$$g_{ij}^{\alpha\beta}\circ\phi_s^{(1)}\frac{\partial^2\phi^j}{\partial t^\alpha\partial t^\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial v_\alpha^i}\circ\phi_s^{(1)}\frac{\partial\phi^j}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial s^\beta\partial v_\alpha^i}\circ\phi_s^{(1)}\frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\circ\phi_s^{(1)} = \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\right)\circ\phi_s^{(1)}\,, \tag{28}$$

$$\frac{\partial s^\alpha}{\partial t^\alpha} = L\circ\phi_s^{(1)}\,. \tag{29}$$

利用命题 5.1， SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ 属于 $\mathfrak{X}_L^k(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$，当且仅当它满足方程 equations

$$\Gamma_\alpha^\alpha = L\,, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_\beta^j \partial v_\alpha^i}\Gamma^j_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_\alpha^i} v_\alpha^j + \frac{\partial^2 L}{\partial s^\beta \partial v_\alpha^i}\Gamma^\beta_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\,. \tag{31}$$

现在，将方程 (30) 和 (31) 限制到 $\phi_s^{(1)} = (\phi^{(1)},\ s^\alpha)$ 的像上，可得

$$(g^{\alpha\beta}_{ij}\circ\phi_s^{(1)})(\Gamma^j_{\alpha\beta}\circ\phi_s^{(1)}) + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_\alpha^i}\circ\phi_s^{(1)} + \frac{\partial \phi^j}{\partial t^\alpha}\frac{\partial^2 L}{\partial s^\beta \partial v_\alpha^i}\circ\phi_s^{(1)}(\Gamma^\beta_\alpha\circ\phi_s^{(1)}) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\circ\phi_s^{(1)} = \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\right)\circ\phi_s^{(1)}\,, \tag{32}$$

$$\Gamma^\alpha_\alpha \circ \phi_s^{(1)} = L\circ\phi_s^{(1)}. \tag{33}$$

利用方程（32）和（33），可知 ϕ_s 满足（26）和（27）当且仅当它满足（28）和（29），而后者等价于 k-接触欧拉–拉格朗日方程（7）。

（2）由于 $\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$，可知 $\mathbf{\Gamma}$ 满足方程（17）、（18）、（19）和（20）。若 $\phi_s^{(1)}$是 $\mathbf{\Gamma}$ 的积分映射，则我们知道 $\Gamma^i_\alpha(\phi_s^{(1)}) = v^i_\alpha(\phi_s^{(1)})$；若将方程（19）限制在 $\phi_s^{(1)}$上，则得到 ϕ_s 满足 k-接触欧拉–拉格朗日方程（7）。

□

注 5.3。 方程（26）和（27）并不要求 k-向量场$\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 与解 ϕ_s 之间存在任何关系；该解满足 k-接触欧拉–拉格朗日方程（7）。换言之，可能存在一个解 ϕ_s，它满足 k-接触欧拉–拉格朗日方程（7），但它未必是任何 $\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 对应的解。

注 5.4。 命题 5.1 和 5.2 在本文后续各节中发挥着重要作用。当拉格朗日函数 L 不依赖于变量 s^α，对于 $\alpha=1,\ \ldots,\ k$，函数 L 可定义在丛 $\oplus^k\mathrm{T}Q$上，且前述结果可用 k-辛拉格朗日形式表述（参见 [6]中的命题 2.11 和 2.12）。

6 耗散定律

本节讨论定义在 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 上的拉格朗日函数的耗散定律，并给出它们与 $\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 上的可积 SOPDEs 之间的若干关系。下文中，除非另有说明，L 均表示相位丛 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 上的一个（正则或奇异）拉格朗日函数，而 η^α_L 表示相应的接触拉格朗日一形式。

定义 6.1。若映射 $F=(F^1,\ldots,F^k)$: $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$的散度

$$F\circ\phi_s^{(1)} = (F^1\circ\phi_s^{(1)},\ldots,F^k\circ\phi_s^{(1)})\colon U\subset\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$$

满足

$$\mathrm{Div}(F\circ\phi_s^{(1)}) = \frac{\partial(F^\alpha\circ\phi_s^{(1)})}{\partial t^\alpha} = \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}F^\alpha\right)\circ\phi_s^{(1)}\,,$$

对于 每个解 ϕ_s: $U\subset\mathbb{R}^k\to Q\times\mathbb{R}^k$ 的 k-接触欧拉–拉格朗日方程（6）。

于是，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial(F^\alpha\circ\phi_s^{(1)})}{\partial t^\alpha}\Big|_t &= \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^i}\Big|_{\phi_s^{(1)}(t)}\frac{\partial\phi^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t + \frac{\partial F^\alpha}{\partial v^i_\beta}\Big|_{\phi_s^{(1)}(t)}\frac{\partial^2\phi^i}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\Big|_t + \frac{\partial F^\alpha}{\partial s^\beta}\Big|_{\phi_s^{(1)}(t)}\frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_t\\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}F^\alpha\right)\circ\phi_s^{(1)}(t)\,,\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $\phi_s^{(1)}(t) = \left(\phi^i(t)\ \dfrac{\partial\phi^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t, s^\alpha(t)\right)$。

在下面的例子中，我们给出由拉格朗日函数（9）所描述的阻尼振动弦方程的两条耗散律。

例 6.2。两个映射 $F_1 = (F_1^t, F_1^x)$ $F_2 = (F_2^t, F_2^x)$: $\oplus^2\mathrm{T}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，其 re

a) $F_1^t = \rho v_t, \quad F_1^x = -\tau v_x,$

b) $F_2^t = \dfrac{1}{\rho}s^t - \dfrac{1}{2}qv_t, \quad F_2^x = \dfrac{1}{\rho}s^x + \dfrac{\tau}{2\rho}qv_x,$

给出 k-接触欧拉–拉格朗日方程（10）的耗散律。因此，若 ϕ_s 是方程（10）的一个解，我们可推得

$$\frac{\partial(F_1^t\circ\phi_s^{(1)})}{\partial t} + \frac{\partial(F_1^x\circ\phi_s^{(1)})}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \tau\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\gamma\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial L}{\partial s^t}F_1^t\right)\circ\phi_s^{(1)},$$

其中 $\phi_s^{(1)} = \left(\phi, \dfrac{\partial\phi}{\partial t}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x}, s^t, s^x\right)$。

通过直接计算也可验证 (F_2^t, F_2^x) 满足 (34。

注6.3。 注意，如果拉格朗日函数 L 不依赖变量 s^α，对于 $\alpha = 1,\dots,k$，我们可以考虑 L 以及定义在 F^α 上的函数 $\oplus^k\mathrm{T}Q$，因此上述定义 6.1 就成为 k-辛拉格朗日系统的守恒律定义（见 [42]）。

以下结果给出了耗散定律与 SOPDEs 在 $\mathfrak{X}_L^k(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 上的可积函数之间的首个联系。

引理 6.4。设 $F = (F^1,\dots,F^k)$: $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是一个耗散律。那么，每个可积的SOPDE $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1,\dots,\Gamma_k) \in \mathfrak{X}_L^k(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 都满足

$$\Gamma_\alpha(F^\alpha) = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}F^\alpha\,. \tag{35}$$

证明。由于 $\mathbf{\Gamma}$ 是可积的 SOPDE，对于每个点 $x\in\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$，都存在一个积分截面$\phi_s^{(1)}$: $U\subset\mathbb{R}^k \to \oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$，使得

(1) ϕ_s 是 k-接触欧拉–拉格朗日方程的一个解，因为 $\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}_L^k(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$,

(2) ϕ_s 满足

$$\phi_s^{(1)}(0) = x\,, \qquad (\phi_s^{(1)})_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = \Gamma_\alpha(\phi_s^{(1)}(t))\,,$$

对于每个 $t\in U$ 和 $\alpha = 1,$ ....., k。

上面的条件（2）意味着

$$v_\alpha^i(\phi_s^{(1)}(t)) = \frac{\partial\phi^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t, \qquad \Gamma_{\alpha\beta}^i(\phi_s^{(1)}(t)) = \frac{\partial^2\phi^i}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\Big|_t, \qquad \Gamma_\alpha^\beta(\psi(t)) = \frac{\partial s^\alpha}{\partial t^\beta}\Big|_t\,. \tag{36}$$

由于 $F=(F^1,\dots,F^k)$ 是一个耗散律，利用 34 式，在 $t=0$ 处，以及 36 式，可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}F^\alpha\right)\circ\phi_s^{(1)}(0) &= \frac{\partial(F^\alpha\circ\phi_s^{(1)})}{\partial t^\alpha}\Big|_0\\ &= \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^i}\Big|_{\phi_s^{(1)}(0)}\frac{\partial\phi^i}{\partial t^\alpha}\Big|_0+\frac{\partial F^\alpha}{\partial v^i_\beta}\Big|_{\phi_s^{(1)}(0)}\frac{\partial^2\phi^i}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\Big|_0+\frac{\partial F^\alpha}{\partial s^\beta}\Big|_{\phi_s^{(1)}(0)}\frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_0\\ &= \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^i}\Big|_x v^i_\alpha(x)+\frac{\partial F^\alpha}{\partial v^i_\beta}\Big|_x\Gamma^i_{\alpha\beta}(x)+\frac{\partial F^\alpha}{\partial s^\beta}\Big|_x\Gamma^\beta_\alpha(x)=\Gamma_\alpha(x)(F^\alpha)\,.\end{aligned}$$

□

引理 6.4 的逆命题并不成立，原因是，正如我们从方程（26）和（27）中看到的，我们可能存在这样的解 ϕ_s，它们满足 k-接触欧拉–拉格朗日方程（7），却不满足某个 $\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$。不过，我们将在下面的引理中证明，在对函数 F^α作出某些假设的条件下，这个逆命题成立。

引理 6.5. 设 $L\in\mathscr{C}^\infty(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 是一个拉格朗日函数，并假设存在一个向量场$X\in\mathfrak{X}(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$，使得

$$i_X\mathrm{d}\eta^\alpha_L=\mathrm{d}F^\alpha\,,\quad \textit{for every}\ \alpha=1,\dots,k\,, \tag{37}$$

对于某些函数 $F^\alpha\colon\ \oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$。那么，$F=(F^\alpha)$是 k-接触欧拉–拉格朗日方程 (6) 的耗散律，当且仅当

$$\Gamma_\alpha(F^\alpha)=\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}F^\alpha$$

对于每个可积的 SOPDE $\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$。

*P*证明。 直接蕴含由引理6.4给出。对于逆向蕴含，我们有 t

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial q^i}+X^i_\alpha\frac{\partial}{\partial v^i_\alpha}+X^\alpha\frac{\partial}{\partial s^\alpha}$$

设 $\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 上的一个向量场满足（37）。根据方程（14），可以将方程（37）两边写成

$$\begin{aligned}i_X\mathrm{d}\eta^\alpha_L &= \left[\left(\frac{\partial^2L}{\partial q^i\partial v^j_\alpha}-\frac{\partial^2L}{\partial q^j\partial v^i_\alpha}\right)X^j-g^{\alpha\beta}_{ij}X^j_\beta-\frac{\partial^2L}{\partial s^\beta\partial v^j_\alpha}X^\beta\right]\mathrm{d}q^i+g^{\alpha\beta}_{ij}X^i\mathrm{d}v^j_\beta+\frac{\partial^2L}{\partial s^\beta\partial v^j_\alpha}X^j\mathrm{d}s^\beta\,,\\ \mathrm{d}F^\alpha &= \frac{\partial F^\alpha}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i+\frac{\partial F^\alpha}{\partial v^j_\beta}\mathrm{d}v^j_\beta+\frac{\partial F^\alpha}{\partial s^\beta}\mathrm{d}s^\beta\,,\end{aligned}$$

并且必然有

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial v^j_\beta}=g^{\alpha\beta}_{ij}X^i\,,\qquad\frac{\partial F^\alpha}{\partial s^\beta}=\frac{\partial^2L}{\partial s^\beta\partial v^i_\alpha}X^i\,. \tag{38}$$

现在令 ϕ_s 为以下方程的任意一个解 k-接触欧拉–拉格朗日方程（7）（它未必是任何 $\mathbf{\Gamma}$的解）。由此可得，ϕ_s 满足方程（26）和（27，因为假设 $\mathbf{\Gamma}$ 是一个可积的 SOPDE。

将方程（27）与 $X^i \circ \phi_s^{(1)}$收缩，得到

$$(X^i \circ \phi_s^{(1)})(g_{ij}^{\alpha\beta} \circ \phi_s^{(1)}) \left(\Gamma_{\alpha\beta}^j \circ \phi_s^{(1)} - \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} \right) + (X^i \circ \phi_s^{(1)}) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial s^\beta \partial v_\alpha^i} \circ \phi_s^{(1)} \right) \left(\Gamma_\alpha^\beta \circ \phi_s^{(1)} - \frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha} \right) = 0. \tag{39}$$

如果我们将公式（38）代入方程（39），则有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F^\alpha}{\partial v_\beta^j} \circ \phi_s^{(1)} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^j \circ \phi_s^{(1)} - \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} \right) + \frac{\partial F^\alpha}{\partial s^\beta} \circ \phi_s^{(1)} \left(\Gamma_\alpha^\beta \circ \phi_s^{(1)} - \frac{\partial s^\beta}{\partial t^\alpha} \right) \\ &= -\frac{\partial (F^\alpha \circ \phi_s^{(1)})}{\partial t^\alpha} + \Gamma_\alpha(F^\alpha) \circ \phi_s^{(1)} , \end{aligned}$$

因此我们得出结论

$$\frac{\partial (F^\alpha \circ \phi_s^{(1)})}{\partial t^\alpha} = \Gamma_\alpha(F^\alpha) \circ \phi_s^{(1)} = \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha} F^\alpha \right) \circ \phi_s^{(1)} ,$$

结果由此得证。 □

注 6.6. 请注意，上述引理 6.5 与 [6] 中的引理 3.4 类似，适用于 k-辛拉格朗日形式。

7 对称性

本节将根据所保持的结构，研究 k-接触拉格朗日场论中的几种不同对称性概念：自然对称性（保持拉格朗日函数）、动力学对称性（保持解）以及 k-接触对称性（保持底层几何结构）。我们探讨这些对称性之间的关系，并证明若干诺特型定理，将不同类型的对称性与耗散定律联系起来。

7.1 自然对称性

现在，我们将尝试理解 k-接触拉格朗日系统中由构型空间上的向量场提升得到的对称性。关于 $k = 1$ 情形下这类对称性的一些有趣结果，可参见 [14] 。

对于任意向量场 $Z \in \mathfrak{X}(Q)$，我们用 Z^C、$Z^{V_\alpha} \in \mathfrak{X}(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k$表示其完全提升和垂直$\alpha$提升，它们在第 2.2 节中定义，并以自然方式扩展至 $\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k$。它们的局部表达式与式（2）相同。

定义 7.1. 若向量场 $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ 满足 $Z^C(L) = 0$，则称其为拉格朗日函数 $L \in \mathscr{C}^\infty(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 的无穷小自然对称性。

于是，我们得到以下关于自然对称性与耗散定律之间关系的结果。

定理 7.2. 设 $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ 是拉格朗日函数 L 的无穷小自然对称性。则函数 $F^\alpha = Z^{V_\alpha}(L)$ 给出一条耗散律。

证明。考虑 Z^{V_α}、Z^C 和 $\mathbf{\Gamma}$ 在（2）和（4）中的局部表达式。由（25），并考虑到函数 Z^i 仅依赖于变量 q^i，可得

$$\Gamma_\alpha(Z^{V_\alpha}(L)) = \left(Z^i\frac{\partial}{\partial q^i} + v^j_\alpha\frac{\partial Z^i}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial v^i_\alpha}\right)(L) + \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\left(Z^i\frac{\partial}{\partial v^i_\alpha}\right)(L) = Z^C(L) + \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}Z^{V_\alpha}(L)\,,$$

对所有可积的 SOPDE $\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$。

现在，由于 $Z^C(L)=0$ 我们证明 $\Gamma_\alpha(Z^{V_\alpha}(L)) = \dfrac{\partial L}{\partial s^\alpha}Z^{V_\alpha}(L)$。最后，根据引理 6.5，我们只需验证

$$i_{Z^C}\mathrm{d}\eta^\alpha_L = \mathrm{d}\left(Z^{V_\alpha}(L)\right) \tag{40}$$

从而得出函数 $Z^{V_\alpha}(L)$ 给出一个耗散律。

若将 $\dfrac{\partial}{\partial v^k_\beta}$ 应用于恒等式 $Z^C(L) = Z^i\dfrac{\partial L}{\partial q^i} + v^j_\alpha\dfrac{\partial Z^i}{\partial q^j}\dfrac{\partial L}{\partial v^i_\alpha} = 0$，我们便得到局部坐标下的关系。 (40) □

注 7.3. 当拉格朗日函数 L 不依赖变量 s^α时，对于 $\alpha=1,\dots,k$，函数L 可定义在丛 $\oplus^k\mathrm{T}Q$上；若将函数 [42], 视为恒等于零，则上述结果与 g 中的命题 3.15 类似。在这种情况下，根据系统的性质，函数 F^α 将给出一个守恒律。

接下来我们要研究的是保持某种结构的变换，并区分保持系统解的变换（动力学对称性）与保持几何结构的变换（k-接触对称性）。这些概念在 [21] 中针对情形 $k=1$，以及在 [22] 中针对一般情形 $k\geq 1$引入。

7.2 动力学对称性

我们将首先介绍保持系统解的变换。

定义 7.4。一个拉格朗日动力学对称性是一个微分同胚 $\Phi:\ \oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k\ \to\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$ 使得对于每个 $\phi^{(1)}_s$满足 k-接触欧拉–拉格朗日方程（6）的解，$\Phi\circ\phi^{(1)}_s$也是一个解。

无穷小拉格朗日动力学对称性是一个向量场 $X\in\mathfrak{X}(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$，其局部流由动力学对称性构成。

以下结果可见于[22]。

引理 7.5。设 $X\in\mathfrak{X}(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 是一个无穷小动力学对称性。那么，对于每个$\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$，我们有 $i_{[X,\Gamma_\alpha]}\eta^\alpha_L = 0$.

对于 $k=1$ 的情形，已知动力学对称性会导出耗散量，这些结果称为耗散定理（见 [21]）。

在一般情况下 $k>1$，在[22], 中的定理 3 证明了，若 X 是无穷小动力学对称性，则函数 $F^\alpha=-i_X\eta^\alpha_L$满足（35），并为$\mathbf{\Gamma}\in\mathfrak{X}^k_L$（$\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k$）的积分截面给出耗散律。

下一个结果再次指出，在附加一个条件的情况下，这些函数 F^α 是所有 k-接触欧拉–拉格朗日方程（6）的解所满足的耗散律。

定理 7.6（耗散定理）。设 $L \in \mathscr{C}^\infty(\oplus^k\mathrm{T}Q\times\mathbb{R}^k)$ 是一个拉格朗日函数，并考虑满足以下条件的无穷小动力学对称性 $X \in \mathfrak{X}(\oplus^k\mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$

$$i_X \mathrm{d}\eta_L^\alpha = \mathrm{d}(-i_X\eta_L^\alpha)\,, \tag{41}$$

或者，等价地， $\mathscr{L}_X\eta_L^\alpha = 0$。那么，这些函数

$$F^\alpha = -i_X\eta_L^\alpha$$

为 k-接触欧拉–拉格朗日方程提供了耗散律。

证明。 设 $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(\oplus^k\mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 是一个可积的 SOPDE。根据引理 7.5，我们得到

$$\Gamma_\alpha(-i_X\eta_L^\alpha) = -\mathscr{L}_{\Gamma_\alpha} i_X\eta_L^\alpha = -i_X\mathscr{L}_{\Gamma_\alpha}\eta_L^\alpha - i_{[\Gamma_\alpha,X]}\eta_L^\alpha = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}(-i_X\eta_L^\alpha).$$

现在，由 (4 1）和引理 6.5，我们推得函数 $F^\alpha = -i_X\eta_L^\alpha$ 给出一个耗散律 . □

7.3 k-接触对称性

最重要的对称性之一是保持几何结构不变的对称性。让我们回顾一下关于拉格朗日函数 k-接触对称性的定义 $L \in \mathscr{C}^\infty(\oplus^k\mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$（参见[42]）。

定义 7.7. 微分同胚 $\Phi\colon \oplus^k\mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k \to \oplus^k\mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k$ 称为拉格朗日 k-接触对称性，当且仅当

$$\Phi^*\eta_L^\alpha = \eta_L^\alpha\,, \qquad \Phi^*E_L = E_L\,.$$

向量场 $X \in \mathfrak{X}(\oplus^k\mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$称为无穷小拉格朗日 k-接触对称性 if

$$\mathscr{L}_X\eta_L^\alpha = 0\,, \qquad \mathscr{L}_X E_L = 0\,, \tag{42}$$

也就是说，其局部流由拉格朗日 k-接触对称性组成。

可以如下得到保持几何结构的这些对称性与保持系统解的对称性之间的关系。

命题 7.8。（无穷小）拉格朗日 k-接触对称性是（无穷小）拉格朗日动力学对称性。

证明。 设 $\psi = \phi_s^{(1)}$是（15）的一个解，并且 Φ 是一个拉格朗日 k-接触对称性

$$\Phi^*\eta_L^\alpha = \eta_L^\alpha\,, \qquad \Phi^*E_L = E_L\,. \tag{43}$$

我们需要证明

$$i_{(\Phi\circ\psi)'_\alpha}\mathrm{d}\eta_L^\alpha = \left(\mathrm{d}E_L + \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\eta_L^\alpha\right)\circ(\Phi\circ\psi)\,, \qquad i_{(\Phi\circ\psi)'_\alpha}\eta_L^\alpha = -E_L\circ(\Phi\circ\psi)\,, \tag{44}$$

其中 $(\Phi\circ\psi)'_\alpha = (\Phi\circ\psi)_*\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)$，这是（15）和（43）的结果。

若 X 是无穷小 k-接触对称性，其流 ϕ_t 由局部 k-接触对称性构成，即 $\phi_t^*\eta_L^\alpha = \eta_L^\alpha$ 和 $\phi_t^*E_L = E_L$。因此 ϕ_t 满足（44），进而将解映射为k-接触欧拉–拉格朗日方程的解。 k-接触欧拉–拉格朗日方程。

□

由耗散定理7.6 和命题7.8 可推得

推论 7.9. 若 X 是一个无穷小拉格朗日 k-接触对称性，则函数 $F^\alpha = -i_X \eta_L^\alpha$ 为 k-接触欧拉–拉格朗日方程 (6)给出一个耗散律。

例 7.10. 再次考虑例 3.3 （阻尼振动弦）。向量场 $X = \dfrac{\partial}{\partial q}$ 是一个无穷小拉格朗日 k-接触对称性，因此，由下式给出的映射

$$F = \left(-i_{\frac{\partial}{\partial q}} \eta_L^t, -i_{\frac{\partial}{\partial q}} \eta_L^x\right) = (\rho v_t, -\tau v_x)$$

是一个耗散律。

7.4 由非对称向量场给出的耗散律

最后，考虑任意满足条件的向量场 $Z \in \mathfrak{X}(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$

$$\mathscr{L}_Z \eta_L^\alpha = \mathrm{d}g^\alpha\,, \qquad \mathscr{L}_Z E_L = -g^\alpha \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\,, \tag{45}$$

其中某些函数为 $g^\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$。在下面的结果中，我们将说明如何为这些特定向量场构造耗散律。

定理 7.11. 设 $L:\ \oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 是一个拉格朗日函数，并考虑向量场$Z \in \mathfrak{X}(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 满足条件 (45)。则函数

$$F^\alpha = g^\alpha - i_Z \eta_L^\alpha$$

给出 k-接触欧拉–拉格朗日方程的耗散律。

证明. 考虑一个可积的 SOPDE $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(\oplus \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$。根据命题 5.1， SOPDE $\mathbf{\Gamma}$满足方程 (24)，因此我们计算

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha(F^\alpha) &= \Gamma_\alpha(g^\alpha) - \mathscr{L}_{\Gamma_\alpha} i_Z \eta_L^\alpha = \Gamma_\alpha(g^\alpha) - i_Z \mathscr{L}_{\Gamma_\alpha} \eta_L^\alpha - i_{[\Gamma_\alpha, Z]} \eta_L^\alpha \\ &= \Gamma_\alpha(g^\alpha) - \frac{\partial L}{\partial s^\alpha} i_Z \eta_L^\alpha - i_{[\Gamma_\alpha, Z]} \eta_L^\alpha\,. \end{aligned} \tag{46}$$

将 $\mathscr{L}_Z \eta_L^\alpha$ 与 Γ_α 收缩，并对 α 求和，得到

$$i_{\Gamma_\alpha} \mathscr{L}_Z \eta_L^\alpha = i_{\Gamma_\alpha}(\mathrm{d}g^\alpha) = \Gamma_\alpha(g^\alpha)\,, \tag{47}$$

而在另一方面

$$i_{\Gamma_\alpha} \mathscr{L}_Z \eta_L^\alpha = \mathscr{L}_Z i_{\Gamma_\alpha} \eta_L^\alpha - i_{[Z,\Gamma_\alpha]} \eta_L^\alpha = -\mathscr{L}_Z E_L + i_{[\Gamma_\alpha, Z]} \eta_L^\alpha = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha} g^\alpha + i_{[\Gamma_\alpha, Z]} \eta_L^\alpha\,. \tag{48}$$

因此，由（47）和（48）可推得

$$\Gamma_\alpha(g^\alpha) = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha} g^\alpha + i_{[\Gamma_\alpha, Z]} \eta_L^\alpha\,.$$

最后，将上述表达式代入方程（46）可得

$$\Gamma_\alpha(g^\alpha - i_Z \eta_L^\alpha) = \frac{\partial L}{\partial s^\alpha}(g^\alpha - i_Z \eta_L^\alpha),$$

并且根据引理 6.5 函数 $F^\alpha = g^\alpha - i_Z \eta_L^\alpha$ 给出了耗散律。 □

注 7.12。 当函数 $g^\alpha = 0$对每个 $\alpha = 1$、……、 k，方程（45）化为无穷小拉格朗日函数 k-接触对称性的方程（42），上述定理即成为推论 7.9。

为了说明上述定理，我们将给出一个满足条件（45）的向量场。

例 7.13。 我们再次考虑由拉格朗日函数（9）给出的阻尼振动弦模型方程。向量场 $Z = \dfrac{\partial}{\partial q} + \dfrac{\partial}{\partial s^t} + g^x \dfrac{\partial}{\partial s^x}$ 满足

$$\mathscr{L}_Z \eta_L^t = 0\,, \qquad \mathscr{L}_Z \eta_L^x = \mathrm{d}g^x\,, \qquad \mathscr{L}_Z E_L = -\frac{\partial L}{\partial s^t} g^t - \frac{\partial L}{\partial s^x} g^x\,,$$

其中函数 g^t 为常数， $g^t = c$，且 g^x 为任意函数。

根据定理 7.11，相应的耗散律是由下式给出的映射

$$F = \left(k - i_Z \eta_L^t, g^x - i_Z \eta_L^x\right) = (\rho v_t, -\tau v_x)\,,$$

这与示例 $\dfrac{\partial}{\partial q}$ 中给出的耗散律一致7.10。

注 7.14。当拉格朗日函数 L 不依赖变量 s^α（ $\alpha = 1$， …， k）时，函数 L 定义在丛 $\oplus^k \mathrm{T}Q$ 上；并且，如果我们将 Z 视为 $\oplus^k \mathrm{T}Q$上的向量场，则条件（45）现在为

$$\mathscr{L}_Z \mathrm{d}\eta_L^\alpha = 0\,, \qquad \mathscr{L}_Z E_L = 0\,,$$

这就是该 k-辛系统（$\oplus^k \mathrm{T}Q$， $\mathrm{d}\eta_L^\alpha$， E_L）的嘉当对称性的定义，参见[42]。此外，上述定理7.11 即为[42]中的诺特定理 3.13。

7.5 牛顿型向量场

在 [6] 中，牛顿型向量场这一集合是在自治一阶场论的 k-辛表述框架下引入的，扩展了 G. Marmo 和 N. Mukunda 在 [36] 中针对情形 $k = 1$ 所做的工作。本节将在 k-接触框架下引入这类向量场。

在命题 7.16 中，我们证明，对于正则拉格朗日函数 L，无穷小 k-接触对称性是每个对应 SOPDE $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 的牛顿型向量场。最后，我们注意到，一类使拉格朗日函数保持不变的特殊牛顿型向量场也是无穷小 k-接触对称性，因此它们给出耗散定律。

定义 7.15。考虑一个固定的 SOPDE $\boldsymbol{\Gamma}$。向量场 $X \in \mathfrak{X}(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 关于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是牛顿型的，当且仅当 $J^\alpha([\Gamma_\alpha, X]) = 0$。我们用 $\mathfrak{X}_\Gamma$ 表示与 aSOPDE $\boldsymbol{\Gamma}$ 相关联的牛顿型向量场集合。

由于

$$\begin{aligned}[\Gamma_\alpha, X] &= \left[v_\alpha^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v^i_\beta} + \Gamma^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial s^\beta}, X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X^i_\gamma \frac{\partial}{\partial v^i_\gamma} + X^\gamma \frac{\partial}{\partial s^\gamma} \right] \\ &= \left(\Gamma_\alpha(X^i) - X^i_\alpha\right) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\Gamma_\alpha(X^i_\beta) - X(\Gamma^i_{\alpha\beta})\right) \frac{\partial}{\partial v^i_\beta} + \left(\Gamma_\alpha(X^\beta) - X(\Gamma^\beta_\alpha)\right) \frac{\partial}{\partial s^\beta}\,, \qquad (49)\end{aligned}$$

我们推导出，$J^\alpha([\Gamma_\alpha, X]) = 0$ 当且仅当 $\Gamma_\alpha(X^i) = X^i_\alpha$。因此，牛顿型向量场 X可局部写为如下形式

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_\alpha(X^i) \frac{\partial}{\partial v^i_\alpha} + X^\gamma \frac{\partial}{\partial s^\gamma} . \tag{50}$$

由局部表达式（2）和（50可知，形如以下形式的向量场

$$Z^C + X^\alpha \frac{\partial}{\partial s^\alpha} ,$$

其中，$Z^C \in \mathfrak{X}(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 是向量场 $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ 的完全提升，X^α 是 $\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k$ 上的任意函数；对于任意 SOPDE $\mathbf{\Gamma}$，这些都是牛顿型向量场。

在下一个命题中，我们将看到，牛顿型向量场的集合还包含无穷小 k-接触对称性。

命题 7.16. 设 $X \in \mathfrak{X}(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 是由正则拉格朗日函数 $L : \oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 描述的系统的无穷小 k-接触对称性。那么，对于每个 $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$，$X$ 都是牛顿型向量场。

证明。由于 $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 且 L 是正则的，由引理 4.5 可知 $\mathbf{\Gamma}$ 是一个 SOPDE。此外，$\mathbf{\Gamma}$ 是方程组的一个解

$$i_{\Gamma_\alpha} \mathrm{d}\eta^\alpha_L = \mathrm{d}E_L + \frac{\partial L}{\partial s^\alpha} \eta^\alpha_L , \quad i_{\Gamma_\alpha} \eta^\alpha_L = -E_L . \tag{51}$$

由于 $\mathscr{L}_X \eta^\alpha_L = 0$和 $\mathscr{L}_X E_L = 0$，并利用（51）中的第二个方程，可得

$$0 = \mathscr{L}_X E_L = -\mathscr{L}_X i_{\Gamma_\alpha} \eta^\alpha_L = -i_{\Gamma_\alpha} \mathscr{L}_X \eta^\alpha_L - i_{[X,\Gamma_\alpha]} \eta^\alpha_L = -i_{[X,\Gamma_\alpha]} \eta^\alpha_L .$$

现在，若将 $\mathscr{L}_X$ 作用于（51）中第一个方程的两边，并利用交换规则，可得

$$\mathscr{L}_X i_{\Gamma_\alpha} \mathrm{d}\eta^\alpha_L = \mathscr{L}_X \mathrm{d}E_L + \mathscr{L}_X \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha} \eta^\alpha_L \right) = \mathscr{L}_X \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha} \right) \eta^\alpha_L + \frac{\partial L}{\partial s^\alpha} \mathscr{L}_X \eta^\alpha_L = \mathscr{L}_X \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha} \right) \eta^\alpha_L \tag{52}$$

and

$$\mathscr{L}_X i_{\Gamma_\alpha} \mathrm{d}\eta^\alpha_L = i_{\Gamma_\alpha} \mathscr{L}_X \mathrm{d}\eta^\alpha_L - i_{[\Gamma_\alpha, X]} \mathrm{d}\eta^\alpha_L = -i_{[\Gamma_\alpha, X]} \mathrm{d}\eta^\alpha_L . \tag{53}$$

于是，由（52）和（53）可得

$$i_{[\Gamma_\alpha, X]} \mathrm{d}\eta^\alpha_L = -\mathscr{L}_X \left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha} \right) \eta^\alpha_L . \tag{54}$$

现在证明，方程（54）蕴含 $J^\alpha([\Gamma_\alpha, X]) = 0$，因此 X是 $\mathbf{\Gamma}$的牛顿型向量场。利用公式（49），可得

$$[\Gamma_\alpha, X] = V^i_\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + V^i_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v^i_\beta} + V^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial s^\beta} , \tag{55}$$

其中

$$V^i_\alpha = \Gamma_\alpha(X^i) - X^i_\alpha , \quad V^i_{\alpha\beta} = \Gamma_\alpha(X^i_\beta) - X(\Gamma^i_{\alpha\beta}) , \quad V^\beta_\alpha = \Gamma_\alpha(X^\beta) - X(\Gamma^\beta_\alpha) .$$

利用公式（14），可得接触 1-形式 η_L^α 的微分可写为

$$\mathrm{d}\eta_L^\alpha = a_{ij}^\alpha \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j + g_{ij}^{\alpha\beta}\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}v_\beta^j + h_{i\beta}^\alpha \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}s^\beta \,, \tag{56}$$

其中

$$a_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_\alpha^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_\alpha^j}\right), \quad g_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_\alpha^i \partial v_\beta^j}, \quad h_{i\beta}^\alpha = \frac{\partial^2 L}{\partial s^\beta \partial v_\alpha^i}\,.$$

现在，如果我们将公式（55）和（56）代入方程（54），即可得到

$$\left(2a_{ij}^\alpha V_\alpha^j - g_{ij}^{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}^j - h_{i\beta}^\alpha V_\alpha^\beta\right)\mathrm{d}q^i + g_{ij}^{\alpha\beta}V_\alpha^i \mathrm{d}v_\beta^j + h_{i\beta}^\alpha V_\alpha^i \mathrm{d}s^\beta = -\mathscr{L}_X\left(\frac{\partial L}{\partial s^\alpha}\right)\left(\mathrm{d}s^\alpha - \frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}\mathrm{d}q^i\right),$$

这意味着 $g_{ij}^{\alpha\beta}V_\alpha^i = 0$。利用拉格朗日函数 L 是正则的这一事实，可知 $g_{ij}^{\alpha\beta}$ 具有最大秩，因此 $V_\alpha^i = \Gamma_\alpha(X^i) - X_\alpha^i = 0$，这表明 X 是 k-向量场 $\mathbf{\Gamma}$的牛顿型向量场。

□

推论 7.17。设 $L \in \mathscr{C}^\infty(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$ 是一个正则拉格朗日函数。

1. 考虑如下形式的牛顿型向量场 $X \in \mathfrak{X}(\oplus^k \mathrm{T}Q \times \mathbb{R}^k)$

$$X = Z^C + K^\alpha \frac{\partial}{\partial s^\alpha}\,, \quad \textit{with } Z \in \mathfrak{X}(Q)\,,$$

并且满足 $X(L) = 0$，且 K^α 为常数，其中 $\alpha = 1,\dots,k$。那么 X 是一个无穷小k-接触对称性。

2. 函数 $F^\alpha = -i_X \eta_L^\alpha = Z^{V_\alpha}(L) - K^\alpha$ 给出一个耗散律。

证明。 通过在局部坐标中进行直接计算，可以证明 X 是一个无穷小 k-接触对称性，即它满足方程（42）。然后，根据推论 7.9 函数 F^α为 k-接触对称性 X给出一个耗散律。

□

8 结论与进一步研究

本文利用 k-接触框架，介绍了非保守拉格朗日场论中的几类对称性。具体而言，我们引入了自然对称性（拉格朗日函数的对称性）、动力学对称性（保持场方程的解不变）以及 k-接触对称性（保持几何结构不变）。我们研究了这些对称性之间的关系，以及如何由它们导出耗散定律。本文还通过若干物理实例阐释了这一理论。

本文对拉格朗日框架下 k-接触系统的对称性进行了研究，这是深入研究非保守场论对称性的又一步。未来的工作应进一步分析 k-接触形式主义的哈密顿对应形式中的对称性和牛顿型向量场。特别是，当勒让德映射不是微分同胚时，研究奇异拉格朗日函数情形下这两类对称性之间的关系将很有意义。此外，研究这些系统的对称性和牛顿型向量场，并探讨它们与本文所述 k-接触框架中的对称性之间的联系，也将十分有意义。

近年来，人们提出了一种更为一般的非保守场论几何框架（推广了 k-接触 [20] 和 k-余接触 [41] 形式），即所谓的 多接触形式主义 [12]。我们拟按照文献 k-接触与 k-余接触表述与多接触框架之间的关系，并分别在拉格朗日形式体系和哈密顿形式体系下进行分析，[43]。

9 致谢

X. Rivas、M. Salgado 和 S. Souto 感谢西班牙科学、创新与大学部提供的经费支持，项目编号为 PGC2018-098265-B-C33 和 D2021-125515NB-21。

X. Rivas 感谢 Novee Idee 2B-POB II 项目 PSP: 501-D111-20- 2004310 提供的经费支持。该项目由“卓越倡议——研究型大学”（IDUB）计划资助。

参考文献

[1] A. Banyaga 和 D. F. Houenou。《辛流形与接触流形简明导论》，第 15 卷。世界科学出版公司，新加坡，2016年。 DOI: 10.1142/9667.[2] A. Bravetti。接触哈密顿动力学：概念及其应用。《熵》，10(19):535，2017年。DOI: 10.3390/e19100535.[3]A. Bravetti。接触几何与热力学。《国际几何方法与现代物理学杂志》，16(supp01):1940003，2018年。DOI: 10.1142/S0219887819400036.[4] A. Bravetti、H. Cruz 和 D. Tapias。接触哈密顿力学。《物理年鉴》，376:17–39，2017年。 DOI: 10.1016/j.aop.2016.11.003.[5] A. Bravetti、M. de Le´on、J. C. Marrero 和 E. Padr´on。接触哈密顿系统的不变测度：带有接触面包的辛夹心。《物理学杂志A辑：数学与理论》，53:455205，2020年。DOI: 10.1088/1751-8121/abbaaa.[6] L. Bua、I. Bucataru 和 M. Salgado。拉格朗日 k-辛形式体系中的对称性、牛顿型向量场与守恒定律。《数学物理评论》，24(10):1250030，2012年。 DOI:10.1142/S0129055X12500304.[7] J. F. Cari˜nena、M. Crampin 和 L. A. Ibort。关于一阶场论的多辛形式体系。《微分几何及其应用》，1(4):345–374，1991年。DOI: 10.1016/0926-2245(91)90013-Y。[8] J. F. Cari˜nena 和 P. Guha。Li´énard 方程的非标准哈密顿结构与接触几何。《国际几何方法与现代物理学杂志》，16(supp01):1940001，2019年。DOI:10.1142/S0219887819400012.[9] J. F. Cari˜nena、C. Lopez 和 E. Martinez。关于诺特定理逆命题的一种新方法。《物理学杂志A：数学与一般》，22(22):4777–4786，1989年。DOI: 10.1088/0305-4470/22/22/009.[10] F. M. Ciaglia、H. Cruz 和 G. Marmo。接触流形与耗散：经典与量子。《物理年鉴》，398:159–179，2018年。 DOI: 10.1016/j.aop.2018.09.012。

[11] M. de Le´on、J. Gaset、X. Gr`acia、M. C. Mu˜noz-Lecanda 和 X. Rivas。含时接触力学。《数学月刊》，2022年9月。 DOI: 10.1007/s00605-022-01767-1.[12] M. de Le´on、J. Gaset、M. C. Mu˜noz-Lecanda、X. Rivas 和 N. Rom´an-Roy。非保守场论的多重接触形式体系。《物理学杂志A辑：数学与理论》，56(2):025201，2022年。 DOI:10.1088/1751-8121/acb575.[13] M. de Le´on 和 M. Lainz-Valc´azar。接触哈密顿系统。《数学物理杂志》，60(10):102902，2019年。 DOI: 10.1063/1.5096475.[14] M. de Le´on 和 M. Lainz-Valc´azar。接触哈密顿系统中的无穷小对称性。《几何与物理杂志》，153:103651，2020年。DOI: 10.1016/j.geomphys.2020.103651.[15] M. de Le´on、M. Lainz-Valc´azar 和 M. C. Mu˜noz-Lecanda。赫格洛茨原理与瓦科诺米克动力学。载于 F. Nielsen 和 F. Barbaresco 编，《信息几何科学》，计算机科学讲义第 12829 卷，第 183–190 页，Cham，2021年。施普林格国际出版公司。 DOI: 10.1007/978-3-030-80209-7 21.[16] M. de Le´on、M. La´ınz、A. L´opez-Gord´on 和 X. Rivas。自治与非自治接触系统的哈密顿–雅可比理论与可积性。《几何与物理杂志》，187:104787，2023年。 ARXIV: 10.1016/j.geomphys.2023.104787.[17] M. de Le´on、M. Salgado 和 S. Vilari˜no。《经典场论中的微分几何方法》。世界科学出版社，2015年。 DOI: 10.1142/9693.[18] J. de Lucas 和 X. Rivas。接触李系统：理论与应用。 ARXIV: 2207.04038，2022年。[19] D. S. Djukic 和 B. D. Vujanovic。经典非保守力学中的诺特理论。《力学学报》，23(1):17–27，1975年。DOI: 10.1007/BF01177666.[20]J. Gaset、X. Gr`acia、M. C. Mu˜noz-Lecanda、X. Rivas 和 N. Rom´an-Roy。描述耗散场论的接触几何框架。《物理年鉴》，414:168092，2020年。DOI: 10.1016/j.aop.2020.168092.[21] J. Gaset、X. Gr`acia、M. C. Mu˜noz-Lecanda、X. Rivas 和 N. Rom´an-Roy。对耗散力学系统的哈密顿与拉格朗日接触形式体系及其对称性的新贡献。《国际几何方法与现代物理学杂志》，17(6):2050090，2020年。DOI:10.1142/S0219887820500905.[22] J. Gaset、X. Gr`acia、M. C. Mu˜noz-Lecanda、X. Rivas 和 N. Rom´an-Roy。一种用于非保守场论的 k-接触拉格朗日函数表述。《数学物理报告》，87(3):347–368，2021年。DOI: 10.1016/S0034-4877(21)00041-0.[23] J. Gaset、M. Lainz、A. Mas 和 X. Rivas。耗散场论的赫格洛茨变分原理。 ARXIV: 2211.17058，2022年。[24] J. Gaset、A. L´opez-Gord´on 和 X. Rivas。含时接触系统中的对称性、守恒与耗散。ARXIV: 2212.14848，2022年。

[25] H. Geiges。《接触拓扑导论》，《剑桥高等数学研究丛书》第109卷。剑桥大学出版社，2008年。 DOI: 10.1017/CBO9780511611438。

[26] S. Goto。对偶平坦空间上向量场的接触几何描述及其在电路模型和非平衡统计力学中的应用。《数学物理杂志》，**57**（10）：102702，2016年。 DOI: 10.1063/1.4964751。

[27]K. Grabowska 与 J. Grabowski。接触哈密顿量与接触哈密顿–雅可比理论的几何方法。《物理学杂志A辑：数学与理论》，55：435204，2022年。 DOI:10.1088/1751-8121/ac9adb。

[28] K. Grabowska 和 J. Grabowski。接触几何力学：Tulczyjew三元组。 ARXIV:2209.03154，2022年。

[29] X. Gr`acia，X. Rivas 和 N. Rom´an-Roy。用于 k-接触系统的 Skinner–Rusk形式。《几何与物理杂志》，**172**：104429，2022年。DOI: 10.1016/j.geomphys.2021.104429。

[30] W. H. Hayt 和 J. A. Buck。《工程电磁学》。麦格劳-希尔出版公司，纽约，第6版，2018年。[31] G. Herglotz。《接触变换》。哥廷根大学讲座，1930年。[32] A. L. Kholodenko。《物理学中的接触几何与拓扑应用》。世界科学出版社，2013年。 DOI: 10.1142/8514.[33] Y. Kosmann-Schwarzbach。《诺特定理》。数学与物理科学史料与研究。施普林格，纽约，2011年。DOI: 10.1007/978-0-387-87868-3.[34]J. M. Lee。《光滑流形导论》，数学研究生教材第218卷。施普林格纽约、海德堡、多德雷赫特、伦敦，第2版，2013年。DOI:10.1007/978-1-4419-9982-5.[35]Q. Liu、P. J. Torres 和 C. Wang。接触哈密顿动力学：变分原理、不变量、完备性与周期行为。《物理年鉴》，395：26–44，2018年。DOI:10.1016/j.aop.2018.04.035.[36] G. Marmo 和 N. Mukunda。TQ 上拉格朗日形式中的对称性与运动常数：超越点变换。《新物理学评论B辑》，92：1–12，1986年。 DOI: 10.1007/BF02729691.[37] Y. Ne'eman。埃米·诺特定理对21世纪物理学的影响。载于《埃米·诺特的遗产》（拉马特甘，1996年），《以色列数学会议论文集》第12卷，第83–101页。巴伊兰大学，拉马特甘，1999年。[38] E. Noether。不变变分问题。《传输理论与统计物理》，1(3)：186–207，1971年。 DOI:10.1080/00411457108231446.[39] G. Prince。经典力学中动力学对称性的完整分类。《澳大利亚数学学会通报》，32(2)：299–308，1985年。 DOI: 10.1017/S0004972700009977.[40] H. Ramirez、B. Maschke 和 D. Sbarbaro。勒让德子流形上输入输出接触系统的部分稳定化。《IEEE自动控制汇刊》，62(3)：1431–1437，2017年。DOI: 10.1109/TAC.2016.2572403.

[41] X. Rivas。非自治 k-接触场论。《数学物理杂志》，64(3)：033507，2023年。 DOI: 10.1063/5.0131110.[42] N. Rom´an-Roy、M. Salgado 和 S. Vilari˜no。场论的G¨unther$k$-辛形式体系中的对称性与守恒定律。《数学物理评论》，19(10)：1117–1147，2007年。DOI: 10.1142/S0129055X07003188.[43] N. Rom´an-Roy、´Angel M. Rey、M. Salgado 和 S. Vilari˜no。经典场论的 k-辛、 k-余辛及多辛形式体系。《几何与力学杂志》，3(1)：113–137，2011年。DOI: 10.3934/jgm.2011.3.113.[44] S. Salsa。《应用中的偏微分方程：从建模到理论》，Unitext第86卷。Springer 国际出版公司，第2版，2015年。DOI: 10.1007/978-3-319-15093-2.[45] A. A. Simoes、M. de Le´on、M. Lainz-Valc´azar 和 D. Mart´ín de Diego。摩擦作用下简单热力学系统的接触几何。《英国皇家学会会刊 A 辑》，476：20200244，2020年。DOI: 10.1098/rspa.2020.0244.[46] A. J. van der Schaft。具有外力的哈密顿系统的对称性、守恒律与时间可逆性。《数学物理杂志》，24(8)：2095–2101，1983年。DOI: 10.1063/1.525962.