偏心灾变及其应对之道

Nicholas Loutrel[1,2,3,*]

[1] *Dipartimento di Fisica, "Sapienza" Università di Roma & Sezione INFN Roma1, Piazzale Aldo Moro 5, 00185, Roma, Italy*[2] *Dipartimento di Fisica "G. Occhialini", Università degli Studi di Milano-Bicocca, Piazza della Scienza 3, 20126 Milano, Italy*[3] *INFN, Sezione di Milano-Bicocca, Piazza della Scienza 3, 20126 Milano, Italy*(日期：2023年10月4日)

对旋近偏心双星系统产生的引力波进行解析建模，是一项有趣的数学挑战。在频域中构造解析波形时，必须面对这样一个事实：傅里叶积分的相位并非单调变化，因此标准驻相近似会失效。在这项研究中，我们在灾变理论的框架下探讨了这种失效。我们发现，对于偏心开普勒轨道，只要傅里叶频率满足 $f_{\rm min} < f < f_{\rm max}$，驻相近似就成立；其中 $f_{\rm min/max}$ 分别是远心点和近心点频率的整数倍。超出此区间时，相位会发生折叠灾变，从而可用艾里函数近似傅里叶积分。结合这两种不同的近似，我们构造了匹配渐近展开，用于近似束缚轨道上开普勒运动在所有频率下的一般傅里叶积分。这一渐近展开完全解析且具有闭式形式。我们讨论了这项研究及其所得近似的若干应用，具体包括：1）为双黑洞开发并改进有效掠飞波形；2）研究高偏心率极限下的暴发辐射向准圆轨道极限下的波动式辐射的转变，由此建立偏心引力波暴发与玻色–爱因斯坦凝聚体之间的类比；3）用复汉森系数计算偏心双中子星系统及黑洞-中子星双星中的f模振幅。本文提出的技术和近似具有普适性，将有助于未来在后牛顿理论框架下研究偏心双星系统产生的引力波。

arXiv:2304.00836v2 [gr-qc] 3 Oct 2023

I. 引言

由致密天体组成的双星系统通常会因引力波（GWs）的辐射而导致轨道偏心率降低 [1, 2]。孤立双黑洞（BBH）形成通道由两颗共同演化的巨星构成，通常会形成在地面引力波探测器的探测频段内偏心率可忽略不计的双星系统 [3–8],；而在致密恒星环境和活动星系核盘中形成的动力学组装的双黑洞，其轨道偏心率则可以任意大 [9–18]。因此，偏心率能清晰表明致密双星并合（CBC）引力波信号的来源，但也存在与其他相对论性双体效应（如进动 [19], 和探测器噪声 [20]）混淆的可能。事实上，对已探测到的信号重新分析后，在四个已确认的探测事件中发现了偏心率特征，为部分已观测到的源由动力学组装形成提供了首批证据 [21, 22]。

尽管偏心双星系统的波形模板开发历来落后于其他双星源，但这一主题正受到越来越多的关注。研究人员已为偏心率为 $e \lesssim 0.6$ 、达到三阶后牛顿阶（PN 阶）[23, 24], 的双星系统，以及在高偏心率（$e \sim 1$）极限下、处于领头后牛顿阶的双星系统，建立了解析旋近阶段模型（保守动力学和耗散动力学中均称为牛顿阶） $e \lesssim 0.6$ 。此外，将有效单体（EOB）波形推广至任意偏心率 [27–29], ，以及将仅包含旋近阶段的后牛顿波形推广为完整的旋近—并合—振铃（IMR）波形 [30], 也都取得了显著进展。然而，由于缺少"精确"波形，尤其是数值相对论（NR）提供的波形，目前很难准确量化这些波形模型在高偏心率区间的精度。尽管与双黑洞（BBHs）相关的初始数据通常会产生不可忽略的轨道偏心率，但受计算能力限制，过去一直难以对具有中等和高偏心率的双星系统进行超过几个轨道周期的模拟 [31–33]。关于解决这一问题的最新进展，见 [34]。

在后牛顿理论的框架下，偏心双星的解析建模在数学上内涵丰富且颇具挑战。由于傅里叶空间能够降低引力波数据分析的复杂度，解析波形建模的最终目标通常是推导出一个关于频率而非时间的波形模板闭式表达式（即无需对项进行无穷求和或计算数值积分）。即使在时域中，偏心轨道的建模也可能颇具挑战；众所周知，即便在牛顿阶，动力学通常也只能化简为求积 [35]。要获得显式解，则需要采用微扰方法 [36] 或傅里叶级数方法 [23, 37]。

转换到频域时，必须求解一个具有复杂相位行为的振荡函数积分 [23]。求解这类积分的一般方法是

* nicholas.loutrel@unimib.it

应用驻相近似（SPA） [38]。然而，对于偏心双星，驻相近似通常会失效，除非对被积函数进行适当变换，以避免近似中出现奇点，正如 [23, 39, 40]所做的那样。 [25, 41] 也采用了相同的处理方法，开发出有效掠过（EFB）波形，旨在模拟高偏心双星产生的引力波暴发。这些方法对于将低偏心和中等偏心双星的波形模型扩展到高后牛顿阶非常有用，但由于二体问题的后牛顿扩展傅里叶级数描述结构复杂，它们在高偏心双星的情形下失效 [42]。因此， [25, 41] 提出的高偏心率 EFB 波形尚未扩展到领头后牛顿阶以上。

本文旨在推进这一问题的解决，同时阐明偏心双星系统所产生引力波复杂的相位与频率结构。相关傅里叶积分的相位函数形式为 $\Psi = 2\pi ft - mV$，其中时间为 t，频率为 f，轨道的真近点角为 V，谐波数为 m，且仅取整数值。该相位函数与研究偏心致密双星并合完整旋近过程时所遇到的相位函数相似。我们证明，只有满足特定条件时才存在驻点：具体而言，傅里叶频率必须介于远心点频率与近心点频率乘以整数m之间。当傅里叶频率等于其中任一频率时，驻相近似会出现奇点并发散。这种奇点称为灾变，对这类量的研究称为灾变理论 [43–46]。在高频极限下，具体来说，当傅里叶频率高于近心点频率时，驻相近似不再适用，傅里叶积分可用艾里函数响应近似。我们构造了跨越灾变的匹配渐近展开，为开普勒量的一般傅里叶积分提供了闭合形式的解析表达式。

在建立匹配渐近展开之后，我们研究了这一结果的若干应用。首先，我们探讨新型 EFB 波形的构建。通过计算数值后牛顿波形与新型 EFB 波形之间的匹配度（或保真度） [47]，我们发现这些解析波形能够忠实地表征自然界中可能存在的波形。其次，我们通过考察相位函数的临界点 Ψ 来刻画旋近偏心双星所产生引力波的行为，这揭示了一个与玻色–爱因斯坦凝聚体之间引人入胜的联系。最后，我们展示了渐近展开可用于近似汉森系数；这些量出现在通用开普勒轨道量 [48]的傅里叶级数描述中。

本文其余部分安排如下。第 II 节中，我们简要介绍灾变理论，为后续各节所用的方法论作铺垫。第 III 节中，我们定义所研究的傅里叶积分 $E_m^{\pm}(f)$，并分别在第 III A 1 节和第 III A 2 节研究驻相近似和高频极限。我们在第 III B 节推导匹配渐近展开，并在第 IV 节讨论其应用。最后，我们在第 V 节探讨未来的研究方向。在本文中，我们采用的单位制满足 $G = c = 1$.

II. 灾变理论：入门

考虑如下形式的广义傅里叶积分

$$I(x) = \int_a^b A(t) e^{ix\Psi(t)} dt \,, \tag{1}$$

其中， $[A(t)\ \Psi(t)]$ 是关于 t的光滑任意函数。这类积分经常出现在物理应用中，例如一般的衍射问题 [49–52], 射电天文学 [53–56], 以及量子路径积分 [57, 58]。对于某些函数 $[A(t)\ \Psi(t)]$ ，该积分可以显式地写成闭式解。然而，一般情况下并非如此，通常必须寻求近似解。求得这类解的方法属于渐近分析的范畴。最常用的方法是驻相近似（SPA） [38], ，该方法通过寻找相位的驻点来进行分析，相位定义如下：

$$\dot{\Psi}(t_\star) = 0 \tag{2}$$

其中，上方的点表示对时间 t 求导。使该式成立的时间 t 即为驻点 $t_\star$。当驻点存在时，式 (1) 中的积分主要由 $t_\star$ 附近的区域贡献，因此适合对相位和振幅进行泰勒展开，具体如下：

$$\Psi(t) \sim \Psi(t_\star) + \frac{1}{2}\ddot{\Psi}(t_\star)(t - t_\star)^2 + \mathcal{O}\left[(t - t_\star)^3\right] \,, \tag{3}$$

$$A(t) \sim A(t_\star) + \mathcal{O}\left(t - t_\star\right) \,. \tag{4}$$

现在可以将积分限扩展至无穷大来计算该积分。这是合理的，因为在驻点 $t_\star$ 附近区域之外，被积函数快速振荡，因此积分值很小。最终结果为：

$$I(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x|\ddot{\Psi}(t_\star)|}} A(t_\star) e^{ix\left[\Psi(t_\star) + \mathrm{sign}[\ddot{\Psi}(t_\star)]\pi/4\right]} \tag{5}$$

这就是最简单形式的驻相近似。

现在，假设相位函数不仅是时间 t 的函数，也是参数 λ 的函数，即 $\Psi = \Psi(t,\ \lambda)$。我们仍然可以寻找满足以下条件的驻点：

$$\dot{\Psi}(t_\star, \lambda) = 0 \,, \tag{6}$$

但现在，驻点显然将是参数的函数，具体而言为 $t_\star = t_\star(\lambda)$。通常，

这并不是问题，只需将方程（5）中所有关于 $t_\star$ 的函数改为关于 λ 的函数即可。不过，如果存在一个 $\lambda = \lambda_c$ 的值，使得

$$\ddot{\Psi}(\lambda_c) = \ddot{\Psi}[t_\star(\lambda_c), \lambda_c] = 0\,, \tag{7}$$

那么，由方程（5）给出的驻相近似在 λ_c 处发散，形成一个灾变。

与本文主题相关的奇点类型称为折叠突变。一个能阐明这一现象的简单例子是：经典粒子在一维“草帽形”势场中运动

$$V(z, a) = z^4 + az^2\,, \tag{8}$$

其中， a 是一个实值参数， z 是粒子的位置。通过求解下式，可以得到该系统的平衡态

$$V'(z, a) = 4z^3 + 2az = 0\,, \tag{9}$$

其中，撇号表示对 z 求导。平衡态（即驻点）的性质，以及由此决定的粒子动力学，取决于参数 a 的取值。当a为正时，只有一个驻点，即$z = 0$；由于 $V''(0, a) > 0$，该点是稳定的。随着 a 减小并趋近于零，驻点处的势能变得越来越平坦。然而，当 a 为负时，平衡态的行为会发生变化。此时求解平衡态所需的方程为

$$4z^3 - 2|a|z = 0\,, \tag{10}$$

此时系统中已有三个驻点，具体为 $z = 0$ 和 $z = \pm\sqrt{|a|}/2$。新增的两个平衡态是稳定的，而位于 $z = 0$ 处的原有平衡态如今变得不稳定；在小扰动下，粒子将“衰变”到其中一个稳定平衡态。这种系统行为的突变正是将点 $a = 0$ 称为灾变的原因。图 1 直观展示了这一行为，同时底部面板中的分岔图还显示了平衡态如何随参数 a演化。

上述折叠灾变示例是自发对称性破缺的一种基本模型 [59], ，这种现象常见于物理学的许多分支领域，尤其是粒子物理学中的希格斯机制。许多动力系统的行为都可以在灾变理论的框架下得到充分理解。本节的讨论只是对这一主题的简单介绍，旨在为当前问题提供背景。不过，在继续之前，需要指出，灾变理论并未提供一套用于处理傅里叶变换中的奇点的工具。事实上，灾变理论仅提供了一种对动力系统的奇异点进行分类的方法，最终目的是更深入地理解系统的行为。为了通过灾变对动力系统的行为进行一致的近似，通常需要借助渐近分析所提供的工具。由于渐近分析是一个广泛的主题，我们仅向读者推荐以下相关读物 [38]。

III. 偏心灾变

本节将讨论开普勒轨道上的偏心双星系统中灾变的存在。尽管讨论仅限于牛顿（或最低阶后牛顿）阶，但它为在后牛顿理论框架下分析广义相对论（GR）中的双星系统动力学奠定了必要基础。

A. 开普勒轨道与定义

开普勒轨道描述了两个天体在牛顿引力下围绕共同质心运动的情形 [35]。在牛顿引力下，两个点质量的运动具有足够的对称性，因此运动可限制在一个平面内；该平面由坐标 $(r,\ \phi)$ 张成，其法向由轨道角动量矢量 L 描述。运动的一种充分求积解为

$$r_{12} = \frac{p}{1 + e\cos V}\,, \tag{11}$$

$$\dot{V} = \Omega\,(1 + e\cos V)^2\,, \tag{12}$$

其中， r_{12} 表示两个天体之间的径向间距， $V = \phi_{12} - \omega$ 表示真近点角， ϕ_{12} 表示轨道相位， ω 表示近心点经度，$\Omega = (M/p^3)^{1/2}$ 表示双星系统的总质量，而 $(p,\ e)$ 分别表示轨道的半通径和偏心率。在没有摄动的情况下，$(p,\ e)$ 是运动常数，并与轨道能量 E以及轨道角动量的大小 $L = |\vec{L}|$ 直接相关，关系为

$$E = -\frac{\mu M}{2p}(1 - e^2)\,, \qquad L = \mu\,(Mp)^{1/2}\,, \tag{13}$$

其中， $\mu = m_1 m_2/M$ 是双星系统的约化质量，$m_{1,\ 2}$ 是双星组成部分的质量。

现在，考虑以下傅里叶积分，

$$E_m^{\pm}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\ell}{n} e^{\pm imV} e^{2\pi i f t}\,, \tag{14}$$

及其相关积分，

$$C_m(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\ell}{n} \cos(mV) e^{2\pi i f t} = \frac{1}{2}\left[E_m^+(f) + E_m^-(f)\right]\,, \tag{15}$$

$$S_m(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\ell}{n} \sin(mV) e^{2\pi i f t} = \frac{1}{2i}\left[E_m^+(f) - E_m^-(f)\right]\,. \tag{16}$$

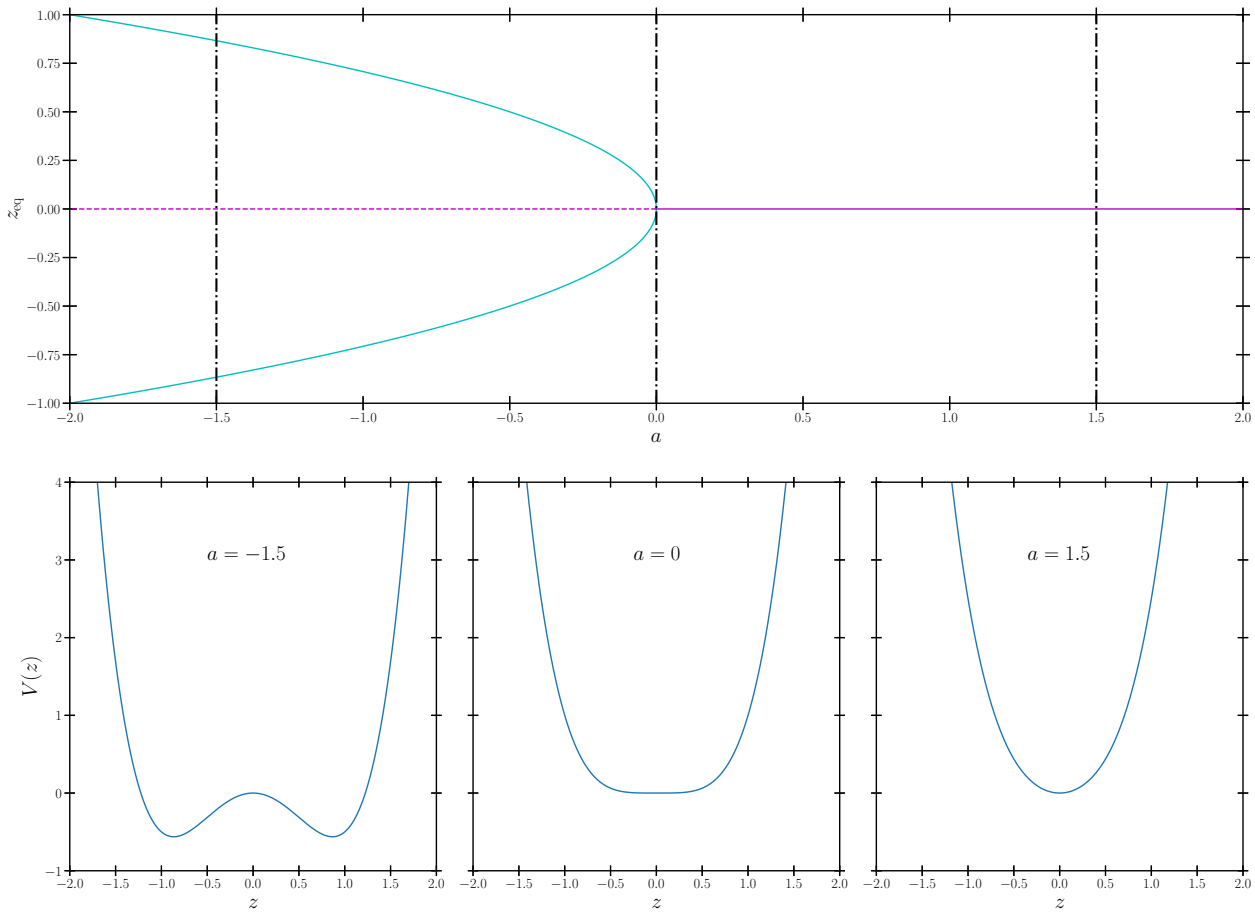

图 1。上图：显示经典粒子在一维势阱中运动时平衡态位置的分岔图 $V(z,\ a) = z^4 + az^2$，其中参数为 a。各曲线的样式表示平衡态是稳定（实线）还是不稳定（虚线）。对于 $a > 0$，仅存在一个平衡态，位于 $z = 0$（洋红色曲线）。对于 $a < 0$，在 $z = \pm\sqrt{|a|/2}$ 处存在两个稳定平衡态（青色曲线），而 $z = 0$ 处的平衡态变得不稳定。 $a = 0$ 处的转变点对应一个折叠灾变。竖直点划线标示了 a 的若干取值，这些取值用于下方的图。下图：参数 a 取不同值时的势能 $V(z,\ a)$ 图，对应于分岔图中的竖直点划线。从左到右， $a = [-1.5, 0, 1.5]$。

在上述表达式中， $\ell = n(t - t_p)$是平近点角，并且我们取 $m > 0$。这些积分可以看作短时傅里叶变换，其时间区间为单个轨道周期，而非全部时间。在后牛顿形式体系 [23, 37],中研究偏心双星时，这类量经常出现；事实上，它们是更一般的汉森系数 [48] 的一个极限，这一点将在第 IV C 节中进一步说明。由于真近点角 $V(t)$的性质复杂，除了 m的一些特殊取值外，这些积分通常没有闭式表达式。因此，我们必须借助近似方法求解式（14）中的积分。

1. *Stationary Phase Approximation*

式（14）中的积分可直接映射为式（1）中的广义傅里叶积分。因此，求解该积分时可采用相同的方法。我们首先寻找由 $\Psi_\pm(t) = 2\pi f t \pm mV(t)$ 定义的相位的任何驻点，其中 $V(t)$ 由式（12）给出。驻点应满足 $\Psi_\pm = 0$，由此得到方程

$$2\pi f \pm m\Omega \left(1 + e\cos V_\star\right)^2 = 0\,, \tag{17}$$

其中 $V_\star = V(t_\star)$ 为驻点。 $V_\star$ 的两个解为

$$V_\star^{(1)} = \cos^{-1}\left[\frac{1}{e}\left(\sqrt{\frac{\mp 2\pi f}{m\Omega}} - 1\right)\right]\,, \qquad V_\star^{(2)} = -V_\star^{(1)}\,. \tag{18}$$

驻点是否存在取决于给定 Ω 时 $(f,\ e)$ 的取值。首先，对于 Ψ_- ，驻点仅在正频率下存在（即式 (18) 中的“+”符号）；对于 Ψ_+ ，驻点仅在负频率下存在（即式 (18) 中的“–”符号）。在接下来的讨论中，我们将聚焦于 Ψ_-，因为 Ψ_+ 的计算步骤相同，但仅适用于负频率。我们在附录 C 中给出了正频率下 $E_m^+(f)$ 的适当近似。

以上讨论表明，式 (18) 中反余弦的自变量必须介于 $[-1,1]$ 之间。对于任意给定的 $(\Omega\ e)$，这意味着频率 f 必须介于 $f_{\min}$ 和 $f_{\max}$ 之间，驻点才会存在，其中

$$f_{\min}=\frac{m\Omega}{2\pi}(1-e)^2\,,\qquad f_{\max}=\frac{m\Omega}{2\pi}(1+e)^2\,. \tag{19}$$

注意，这些分别是远拱点和近心点处傅里叶频率的整数倍。当$f\ =\ f_{\min}$时，驻点位于积分域的边界，具体而言是 $V_\star^{(1)}\ =\ -V_{(2)\star}\ \ =\ \pi$。当 $f\ =\ f_{\max}$时，驻点会合并并成为 $V_\star^{(1)}=V_\star^{(2)}=0$。对于 $f_{\min}<f<f_{\max}$，驻相近似是有效的近似，式 (14) 的计算结果为

$$\left[E_m^-(f)\right]_{\rm SPA}=2\sqrt{\frac{2\pi}{\ddot{\Psi}_{-,\star}}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\Psi_{-,\star}\right)\,, \tag{20}$$

其中

$$\Psi_{-,\star}=2\pi ft\left(V_\star^{(2)}\right)-mV_\star^{(2)}\,, \tag{21}$$

$$\ddot{\Psi}_{-,\star}=4e\Omega^2\left(\frac{2\pi f}{m\Omega}\right)^{3/2}\left[1-\frac{1}{e^2}\left(\sqrt{\frac{2\pi f}{m\Omega}}-1\right)^2\right]^{1/2} \tag{22}$$

我们将两个驻点的贡献相加，得到式 (20)。这便是式 (14) 的驻相近似。

¨很容易证明 $\Psi_{-,\ \star}(f\ \ =f_{\min/\max})\ =0$，因此式 (20) 给出的驻相近似在 $f=f_{\max}$ 和 $f=f_{\min}$处存在奇点。由于$f_{\min}$ 是与远拱点相关联的频率，因此它通常非常小，尤其是在地基探测器探测高偏心率引力波暴源的背景下。本文主要关注发生在 $f\ =\ f_{\max}$处的奇点。值得指出的是，˙ ¨处存在一点，使得 $\Psi_-\neq 0$，但 $\Psi_-=0$，具体来说是鞍点 $V=V_c=0$。当 $f\ =\ f_{\max}$时，驻点与 V_c合并，形成相关的折叠灾变。在更高频率下，驻点消失，而 E_m^- 的积分由鞍点主导。图 2 上图给出了一个分岔图，明确展示了一个示例双星系统中驻点（实线）的演变，其中 $e=0.9$ ，谐波数为 $m=2$。该奇点由蓝色圆圈标出，位于 $f/\Omega\ =1.149$处，其中 V_c 虚线所示。注意， V_c 在所有频率下都存在，但它对 E_m^- 的贡献在 $f_{\max}$以下时占次要地位。

2. *High Frequency Approximation*

既然现在已经明确，当 $f\geq f_{\max}$ 时，SPA 会失效，那么应如何近似方程（14）中积分的行为？我们采用与 SPA 类似的步骤，但改为在 $V\ =0=\ell$ 处的鞍点附近展开，该点对应于 $t=t_p$ （即近心点）。利用对方程（12）反复求导，可以得到近心点附近 V 的展开，具体为

$$V(\psi)=(1+e)^2\psi-e(1+e)^5\frac{\psi^3}{3}+\mathcal{O}(\psi^5)\,, \tag{23}$$

其中 $\psi=\ell/\epsilon^{3/2}=\Omega(t-t_p)$。将其应用于方程后，我们得 (14), 到

$$E_m^-(f)\sim\frac{e^{2\pi ift_p}}{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\ e^{i[\Delta(f)\psi+\sigma\psi^3/3]} \tag{24}$$

with

$$\Delta(f)=\frac{2\pi f}{\Omega}-m(1+e)^2\,,\qquad \sigma=me(1+e)^5\,. \tag{25}$$

注意，由于我们处理的是 $f\geq f_{\max}$ 的极限， $\Delta(f)\ \geq 0$ 。此外，我们按照与 SPA 相同的方式，将积分限取为无穷。方程（24）中的积分可以映射为艾里函数 Ai(x) [60, 61], 的积分定义，因此

$$\left[E_m^-(f)\right]_{\rm high-f}=\frac{2\pi}{\sigma^{1/3}\Omega}e^{2\pi ift_p}{\rm Ai}\left[\Delta(f)/\sigma^{1/3}\right]\,, \tag{26}$$

这为 $f\gg f_{\max}$ 提供了足够的近似。

在继续之前，有必要了解上述表达式的渐近行为。当自变量较大时，艾里函数会呈指数衰减。因此，当 $f\gg f_{\max}$ 时，式（26）变为

$$E_m^-(f)\sim\frac{e^{-(2/3)z^{3/2}}}{z^{1/4}}\,, \tag{27}$$

其中 $z\ =\ \Delta(f)/\sigma^{1/3}$。尽管推导式（26）的方法假设 $f\ \geq\ f_{\max}$，但式（26）在 $f<f_{\max}$ 时是正则的，因此研究这一极限也很有意义。当 $f\ll f_{\max}$ 时，式（26）变为

$$E_m^-(f)\sim\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right)}{|z|^{1/4}} \tag{28}$$

其中 $z<0$。将其与式 (20) 中的驻相近似（SPA）进行比较，我们发现这些近似在函数形式上极为相似。这表明，驻相近似和艾里近似实际上是有效范围彼此重叠的渐近展开。对于具有此类行为的近似，可以通过渐近匹配构造一致（或匹配）渐近展开 [38]。

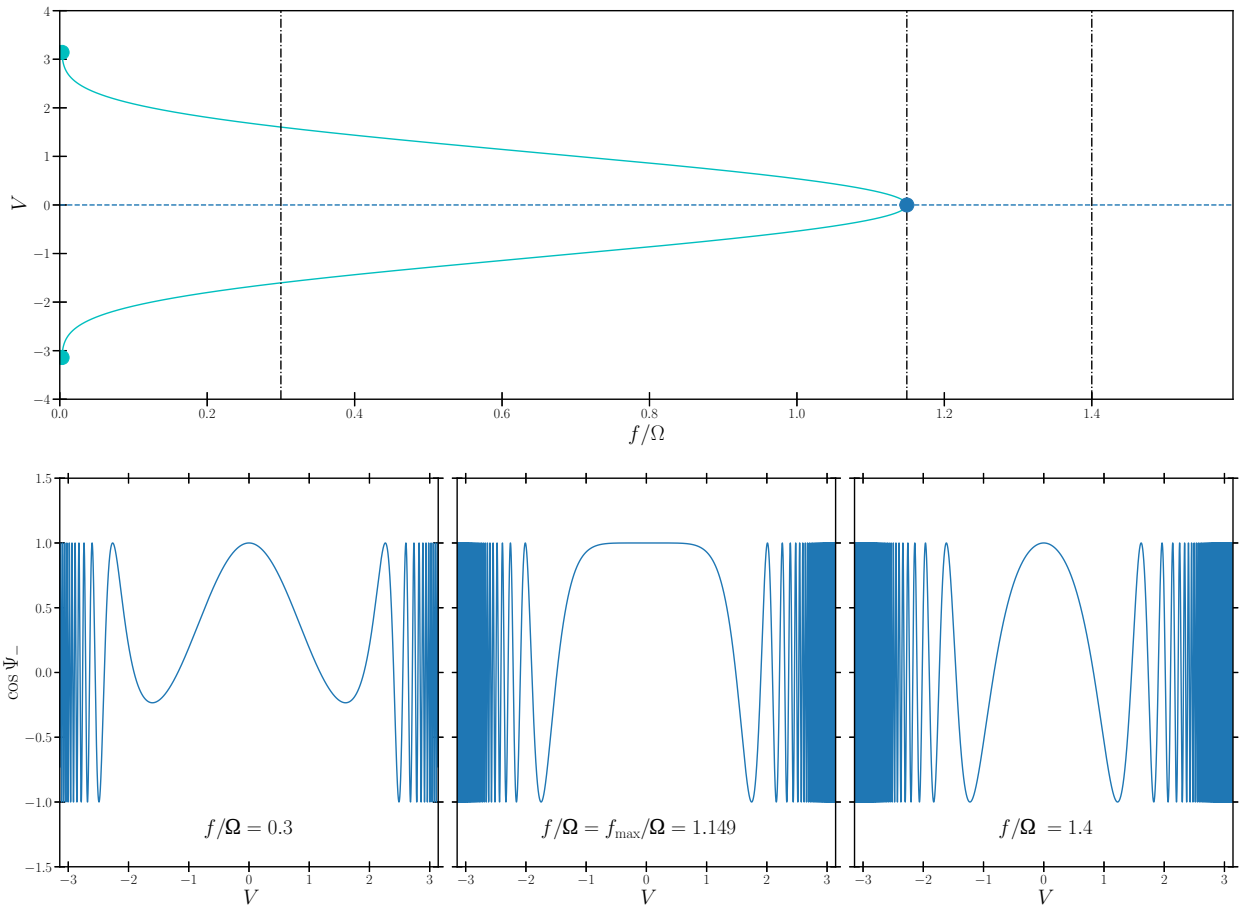

图 2. 上：相位 $\Psi_-(t) = 2\pi f t - mV(t)$ 关于 f/Ω 的分岔图，其中 $m = 2$ 和 $e = 0.9$ 作为函数。驻点（青色线条）在 $f_{\min}$处出现在 $V = \pm\pi$（青色点）。随着频率增加，驻点向原点移动，最终在 $f = f_{\max}$ 时于 $V = 0$ 处合并（蓝色点）。频率更高时，驻点消失，鞍点（蓝色虚线）主导相位。竖直点划线表示 f/Ω 的特定取值，这些取值显示在下方的图中。下：$m = 2$ 时 $\cos\ \Psi_-$ 的图，以及对应于上图黑色点划线的若干 f/Ω 取值下的图，具体而言，从左到右为 $f/\Omega = [0.3, 1.149, 1.4]$。

B. 匹配的渐近展开

现在，我们考虑构造一个匹配渐近展开来近似式 (14)。该方法的形式细节可见例如 [38, 62, 63]，而引力物理学领域中的一些应用可见 [26, 64–71]。在我们的情形中，两种有效范围已在第 III A 1 节和第 III A 2 节中详细说明，匹配区域是围绕$f_{\max}$的区域。下文将介绍匹配步骤的细节，并纳入式 (14) 中有限积分限带来的次主导效应。

1. *A Leading Order Approximation*

根据方程 (20) 和 (26) 中给出的 $E_m^-(f)$ 的渐近行为，我们提出，在临界点处采用合适的匹配渐近展开（MAE）：

$f = f_{\max}$ is

$$\left[E_m^-(f)\right]_{\mathrm{MAE}} = \frac{2\pi}{\sigma^{1/3}\Omega} e^{\alpha(f)} \mathrm{Ai}\left[-\beta_m(f)\right] e^{2\pi i f t_p}\,, \quad (29)$$

其中，$[\alpha(f)\ \beta_m(f)]$ 是待定函数，将通过匹配度确定。为进行匹配度计算，我们定义一个新变量 ζ，使得：

$$f = \frac{m\Omega}{2\pi}\left(1 + e - 2e\zeta\right)^2\,, \quad (30)$$

它将定义域 $f \in [f_{\min}, f_{\max}]$ 映射到 $\zeta \in [1, 0]$。在折叠灾变附近，$\zeta \ll 1$，因此只需对所有相关量在 $\zeta = 0$ 附近进行泰勒展开。据此，我们设

$$\alpha(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^k\,, \qquad \beta_m(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \zeta^k\,. \quad (31)$$

其中系数未知（α_k，β_k）。计算的目标是确定这些系数（α_k，β_k）。

通常，构造匹配渐近展开时，必须在两个有效区间内匹配主函数。然而，由于我们在式（29）中的选择，已经利用了式（24）中的高频展开。因此，所有未知常数（α_k，β_k）都可以通过在区域 $f < f_{\max}$ 中进行匹配来确定，此处驻相近似是首阶近似。将式（29）在 $\beta \to \infty$附近进行渐近展开，取首阶项可得

$$\left[E_m^-(f)\right]_{\mathrm{MAE}} \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{\sigma^{1/3}\Omega}\frac{e^{\alpha(f)}}{\left[\beta_m(f)\right]^{1/4}} \times \cos\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\left[\beta_m(f)\right]^{3/2}\right\} e^{2\pi i f t_p}. \quad (32)$$

这里我们只展开到领先阶，因为 SPA 仅构成区域 $f_{\min} < f < f_{\max}$ 内 $E_m^-(f)$ 的领先阶渐近展开。将式 (32) 与式 (20) 中的 SPA 比较可知，函数 $[\alpha(f)\ \beta_m(f)]$ 直接对应于 SPA 的振幅和相位，具体而言：

$$\alpha(f) = \ln\left[\sigma^{1/3}\Omega\sqrt{\frac{2}{\ddot{\Psi}_{-,\star}}}\left(\frac{3}{2}\Psi_{-,\star}\right)^{1/6}\right], \quad (33)$$

$$\beta_m(f) = \left(\frac{3}{2}\Psi_{-,\star}\right)^{2/3}. \quad (34)$$

因此，一旦知道式 (21) 和式 (22) 中 $[\Psi_{-,\star}, \Psi_{-,\star}]$ 关于 $\zeta = 0$ 的泰勒展开，就可以轻松地将其对应到式 (31)，从而得到 $[\alpha_k, \beta_k]$。附录 A 明确给出了这些对应关系。至此，所有未知量均已确定，式 (29) 中匹配渐近展开的推导也已完成。

继续之前，值得先指出这些结果的几点性质。首先，除整体因子 $e^{2\pi i f t_p}$ 外，式 (20) 中的 SPA、式 (26) 中的高频近似以及式 (29) 中的匹配渐近展开都是实值的，而原始积分式 (14) 看起来是复数。然而，式 (14) 的实部在定义域 $\ell \in [-\pi, \pi]$ 上实际上是偶函数，而虚部是奇函数。因此，计算积分后虚部会消失，$E_m^-(f)$ 变为实值。

其次，我们目前尚未对E_m^+ 重复这些计算。如前所述，原因是对于$f > 0$，E_m^+ 不存在驻点，而且当 $f > f_{\max}$时，$V = 0$处的鞍点也不会主导积分。事实上，与图 2 下方各图所示的行为不同，E_m^+ 的积分表现恰恰相反：在 $V = 0$ 附近会变得高度振荡，而在 $V = \pm\pi$附近振荡则较缓慢。因此，当 $f > 0$时，E_m^+（f）的分析会更简单，我们在附录 C 中给出一种合适的解析近似。然而，对于负频率，E_m^+（f）和 E_m^-（f）的作用会互换。事实上，很容易从式 (14) 得出，E_m^+（$-f$）$= [E_m^-$（f）$]^\dagger$，其中 †对应于复共轭。

2. *Beyond Leading Order*

式 (14) 中的积分响应呈振荡行为，这是由积分限有限所致；而式 (29) 中的匹配渐近展开（MAE）则不呈振荡，因为我们采用渐近近似，将积分限延伸至无穷。因此，MAE 构成了式 (14) 渐近展开的首阶项，振荡则源于次主导效应。在第四节的某些应用中，这些振荡效应十分重要，因此我们将在此给出这些修正项的解析表达式。

首先，我们将公式 (14) 重写为

$$E_m^-(f) = \mathcal{F}\left[e^{-imV}\right] - e^{2\pi i f t_p}\left[\mathcal{R}(f) + \mathcal{R}^\dagger(f)\right] \quad (35)$$

其中，$\mathcal{F}$ 是（全时间）傅里叶变换

$$\mathcal{F}[g] = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ g(t) e^{2\pi i f t}, \quad (36)$$

其中 $g(t)$ 是一个任意函数，而 $\mathcal{R}(f)$ 是余项积分，定义为

$$\mathcal{R}(f) = \int_{\pi}^{\infty} \frac{d\ell}{n} e^{-imV} e^{2\pi i f \ell/n}. \quad (37)$$

公式 (36) 中的傅里叶变换由公式 (29) 中的匹配渐近展开（MAE）近似。与匹配渐近展开的推导过程类似，我们必须理解 $\mathcal{R}(f)$ 的被积函数的临界点。由于我们忽略了辐射反作用，相位在范围 $\ell \in [-\pi, \pi]$ 内是振荡的，并在该范围之外的值处重复。然而，由于我们关注的是单个轨道上的响应，因此只考虑该范围内的临界点。因此，唯一相关的临界点是公式 (18) 中定义的驻点，以及位于 $V = 0$ 和 $V = \pm\pi$ 处的鞍点。当 $f > f_{\min}$ 时，余项积分由位于 $V = \pm\pi$ 处的鞍点主导。注意，$V = -\pi$ 的贡献已由 $\mathcal{R}^\dagger(f)$ 处理，因此只需考虑其中一个点。

将公式（37）的相位在 $V = \ell = \pi$ 附近展开，我们得到

$$\mathcal{R}(f) \sim e^{i\Psi_{-,\pi}} \int_{\pi}^{\infty} \frac{d\ell}{n} e^{i\left[\dot{\Psi}_{-,\pi}(\ell-\pi) + \dddot{\Psi}_{-,\pi}(\ell-\pi)^3/3!\right]} \quad (38)$$

其中

$$\Psi_{-,\pi} = \frac{2\pi^2 f}{(1-e^2)^{3/2}\Omega} - \pi m, \quad (39)$$

$$\dot{\Psi}_{-,\pi} = \frac{2\pi(f - f_{\min})}{n}, \quad (40)$$

$$\dddot{\Psi}_{-,\pi} = -\frac{2me(1-e)^5}{(1-e^2)^{3/2}}. \quad (41)$$

方程（38）中的积分是不完全艾里函数的特例 [72], , 可以通过反复分部积分，或在适当变形积分路径后应用沃森引理 [38]来求得。

然而，通过将方程（38）中的积分与 $\mathcal{R}^\dagger(f)$结合，实际上可以得到该积分的精确解。将总和 $\mathcal{R}(f) + \mathcal{R}^\dagger(f)$重新排列可得

$$\mathcal{R}(f) + \mathcal{R}^\dagger(f) = \frac{2}{n}\cos\Psi_{-,\pi}\int_\pi^\infty d\ell\cos\left[\delta\Psi_\pi(\ell)\right] + \frac{2}{n}\sin\Psi_{-,\pi}\int_\pi^\infty d\ell\sin\left[\delta\Psi_\pi(\ell)\right] \quad (42)$$

其中

$$\delta\Psi_\pi(\ell) = \dot{\Psi}_{-,\pi}(\ell-\pi) + \frac{\dddot{\Psi}_{-,\pi}}{3!}(\ell-\pi)^3 \quad (43)$$

通过适当的变量代换，上面的第一个积分变为艾里函数 Ai(x) 的积分定义，第二个则变为斯科勒函数 Gi(x) 的积分定义， [60, 61, 73],具体而言

$$\mathrm{Gi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt\ \sin(xt + t^3/3) \quad (44)$$

因此，

$$\mathcal{R}(f) + \mathcal{R}^\dagger(f) = \frac{2\pi}{n}\rho(e,m)\Big\{\cos\Psi_{-,\pi}\mathrm{Ai}[\gamma(f)] + \sin\Psi_{-,\pi}\mathrm{Gi}[\gamma(f)]\Big\} \quad (45)$$

其中

$$\rho(e,m) = \left(\frac{2}{|\dddot{\Psi}_{-,\pi}|}\right)^{1/3}, \qquad \gamma(f) = |\dot{\Psi}_{-,\pi}|A(e,m)\,. \quad (46)$$

式（45）中的近似适用于 $f \geq f_{\max}$，但对于低频区间 $f \leq f_{\min}$ 和 SPA 区间$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$，恰当的近似是什么？当 $f \leq f_{\min}$时，不存在临界点，响应由 $V = \pm\pi$ 处的拐点主导。因此，对于$f \leq f_{\min}$，式（14）中的积分可映射为式（42）的形式，但其中 $\Psi_{-,\pi} \to -\Psi_{-,\pi}$。与此同时，在临界区域，响应由式（36）的 SPA 主导，由此得到匹配渐近展开。这对于 $f < f_{\min}$ 并不成立，因此必须采用合适的窗函数。式（20）中的 SPA 形式是将积分限取为无穷大得到的，但仅在余项为 $\mathcal{O}(|\ddot{\Psi}_{-,\star}|^{-1})$ 的精度内成立。这些修正项实际上源于原始积分仅在有限时间窗内进行。此外，与式（45）中的效应相比，这些效应实际上是次主导的，只有 $f = f_{\min}$ 附近的一小段区域例外。因此，式（14）的一个恰当近似式为

$$E_m^-(f) \sim e^{2\pi i f t_p}\Bigg(\left[E_m^-(f)\right]_{\mathrm{UAE}}\Theta\left(f - f_{\min}\right) + \frac{2\pi}{n}A(e,m)\Big\{\cos\Psi_{-,\pi}\mathrm{Ai}\left[B(f)\right] + \mathrm{sign}(f-f_{\min})\sin\Psi_{-,\pi}\mathrm{Gi}\left[B(f)\right]\Big\}\Bigg), \quad (47)$$

其中 $\Theta(x)$ 是 Heaviside阶跃函数。这将构成式（14）的最终渐近展开。

图 3 将式 (47) 中的解析近似与式 (14) 的数值计算结果进行了比较，展示了它们随频率 f 的变化。数值计算是通过利用式 (12) 对式 (14) 中的时间 t 进行变量代换，将其转为真近点角 V 来实现的。这样做的好处是，无需对轨道进行数值积分即可数值求得 $V(t)$。完成变量代换后，我们对式 (14) 中的被积函数取样，使用 2^{24} 个点，并以这些样本的求和近似该积分。点的总数经过选择，以确保精度足够，能够准确确定数值结果与解析结果之间的差异。也可以采用比这里更密的采样，但这会增加计算时间。

图 3 中的每一列代表不同的偏心率值，具体为 $[0.9, 0.7, 0.5]$（左、中、右）；每一行则对应不同的 m 值，具体为 $[2, 5, 8]$（上、中、下）。每幅图的底部面板给出了数值结果与解析结果之间的差异，可据此估计给定频率下解析近似的误差。竖直的点划线表示各情形下的 $f_{\min}$ 值。式（47）的近似式通常能很好地描述式（14），但在两种情况下误差往往会变大：当 $f \sim f_{\min}$ 以及当 $e \to 1$时。前一种情况是由于渐近匹配是在$f = f_{\max}$处进行的，因此，随着频率接近 $f_{\min}$，近似的准确度会降低。后一种情况则是因为，当 $e \to 1$ 和$f \to f_{\min}$时，式（14）的振荡频率和振幅都会增大。因此，推导式（47）时所用近似产生的小误差，在接近抛物线极限时通常会不断放大。我们将在第 IV 节讨论由此产生的实际问题。

IV. 应用

完成对式（14）的近似方法后，我们现在将注意力转向上一节所提出近似方法的一些应用。此处介绍的应用只是其中一小部分，但与研究偏心双星产生的引力波尤其相关，特别是那些通过动力学俘获相互作用形成的双星。

A. 有效掠飞波形

引力波建模当前面临的挑战之一，是生成能够准确描述高偏心率区域的波形；在这一领域，引力波的特征是在近星点通过期间发出的暴发。近期为此开展的一些工作包括 [27, 74], 的有效单体波形和 [25, 41]的 EFB 波形。本文展示了

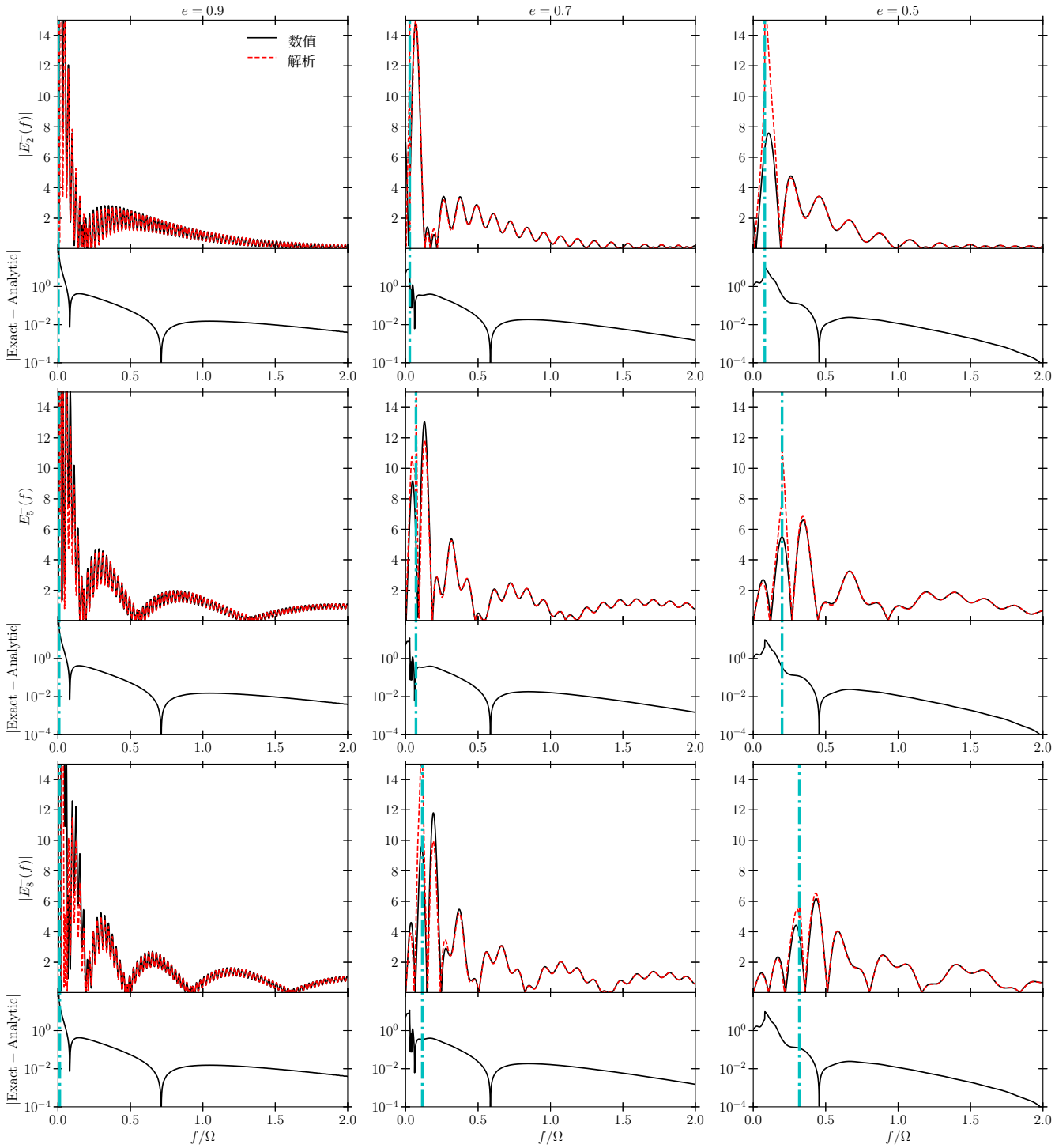

图 3. 对于 $e = [0.9, 0.7, 0.5]$ （左、中、右列）和 $m = [2, 5, 8]$ （上、中、下行），将式（47）中的 $E_m^-(f)$ 的闭式解析近似（红色虚线）与式（14）的数值计算结果（黑色实线）进行比较。每幅图的下方面板显示精确（数值）结果与解析近似之间的差值。点划线表示各情形下式（19）给出的 $f_{\min}$ 值。

第 II 节的方法与重求和过程相比，能够简化 EFB 波形的构建过程，

在 [25] 中介绍的步骤。为简便起见，我们忽略辐射反作用的影响，但将在本节后文讨论如何正确地

加以实现，以及其他后牛顿修正。

第 II 节的分析采用牛顿阶进行。在这一后牛顿阶，引力波偏振由四极矩公式 [35], 描述，在时域中为 [23, 37]

$$h_{+,\times}(t) = -\frac{2\eta M^2}{pD_L}\sum_{m=-3}^{3} A^{(m)}_{+,\times}(e,\iota,\beta)e^{imV(t)} \tag{48}$$

其中，η 是双星系统的对称质量比，ι 是双星系统相对于视线的倾角，β 是任意偏振角。EFB 方法通过将产生引力波爆发的每个轨道视为一次掠飞，而非重复的椭圆轨道，来近似波形。将第 II 节的方法应用于此，相当于对式（48）在单个轨道范围内进行适当加窗的傅里叶变换。数值计算频域波形时，只需对单个轨道范围内的式（48）进行快速傅里叶变换。若要对傅里叶变换进行解析近似，只需应用式（35）。因此，这只需在式（48）中取 $e^{imV} \to E_m^{\mathrm{sign}(m)}(f)$，即

$$\tilde{h}^{\mathrm{EFB}}_{+,\times}(f) = -\frac{2\eta M^2}{pD_L}\sum_{m=-3}^{3} A^{(m)}_{+,\times}(e,\iota,\beta)E_m^{\mathrm{sign}(m)}(f)\,, \tag{49}$$

其中每个 $E_m^{\mathrm{sign}(m)}(f)$ 均由式 (47) 解析给出。

为检验用于得到 $E_m^{-}(f)$ 的式 (47) 和 $E_m^{+}(f)$ 的式 (C4) 所采用的近似的准确性，我们计算匹配度

$$\mathcal{M} = \max_{t_p}\langle \hat{h}^{\mathrm{FFT}}|\hat{h}^{\mathrm{EFB}}\rangle \tag{50}$$

其中 $\langle\,|\,\rangle$ 是波形之间的内积，定义为

$$\langle A|B\rangle = \frac{4}{5}\mathrm{Re}\int_{f_{\mathrm{low}}}^{f_{\mathrm{high}}} df\left[A_+(f)B_+^\dagger(f) + A_\times(f)B_\times^\dagger(f)\right], \tag{51}$$

其中 Re 表示该表达式的实部，$\dagger$ 表示复共轭，$A = A/\sqrt{\langle A|A\rangle}$。式 (51) 中的内积类似于模拟分析研究中常用的天球平均、噪声加权波形内积，不过这里针对的是白噪声探测器 [1]。这里不考虑单个探测器，因为式 (49) 中的波形并不代表我们可能预期从自然界中观测到的波形，因为它们处于牛顿阶并忽略辐射反作用。此外，我们希望匹配分析的结果与探测器无关，因此选择白噪声而不是探测器特定噪声。匹配度的取值范围为 $[0,1]$，在此背景下，匹配度越接近 1，EFB 波形就越接近数值波形，准确度也越高。

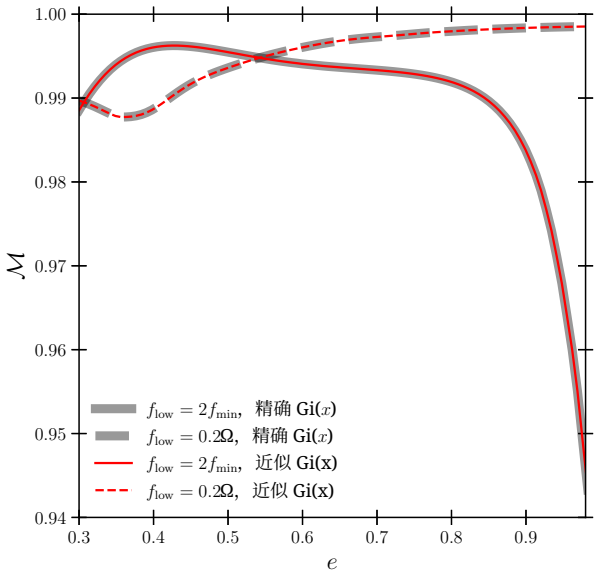

图4。数值快速傅里叶变换波形与公式（49）中的解析 EFB 波形之间的匹配度 $\mathcal{M}$。实线对应于公式（51）中积分下限取为 $f_{\mathrm{low}} = 2f_{\mathrm{min}}$ 的情况，而虚线取 Ω。匹配度通常大于 0.98。但在高偏心率情况下，当 $f_{\mathrm{low}} = 2f_{\mathrm{min}}$ 时，由于 f_{min} 附近解析近似存在误差，匹配度会出现例外。灰线对应于使用 Python 中的 mpmath 模块计算公式（47）中的斯科勒函数的情况，而红线则使用附录 B 中详述的近似。该近似不会导致匹配度出现显著损失。

从实际角度来看，计算式（47）可能颇为困难，因为它依赖特殊函数。艾里函数已有详尽的文献记载，而斯科勒函数则没有；在 Python 中，它仅能通过 mpmath 软件包进行数值计算 [75]。虽然这不会影响求值结果，但由于 mpmath 采用任意精度计算，求解式（47）的速度会因此变慢。为加快计算，我们采用附录 B 中的方法近似斯科勒函数，其求值速度约为 mpmath 中实现的 100 倍，但缺点是结果只是近似值。

由于忽略了辐射，式（50）中对 t_p 的最大化可直接得到 $t_p = -T_{\mathrm{orb}}/2 = \pi/\Omega(1-e^2)^{3/2}$。计算式（51）中的积分时，我们

[1] 偏振为 $h_{+/\times}(t)$ 的引力波（GW）的探测器响应为 $h(t) = F_+(\alpha,\delta,\psi)h_+(t) + F_\times(\alpha,\delta,\psi)h_\times(t)$，其中 (α,δ,ψ) 是源在探测器参考系中的赤经和赤纬，ψ 是偏振角。要建立标准噪声加权内积（例如参见 [47] 中的式 (5.1)）与式 (51) 之间的联系，只需计算对天区和偏振角取平均后的波束模式函数，具体而言，即 $\langle F_+^2\rangle = 1/5 = \langle F_\times^2\rangle$ 和 $\langle F_+F_\times\rangle = 0$。

将 $f_{\rm high} = 3\Omega$ 设为固定值，并允许 $f_{\rm low}$ 变化。前者是因为被积函数在 $f \gg \Omega$ 时呈指数衰减，而且匹配度对高于这一积分上限的取值不敏感。对于后者，我们希望测试式（47）中的近似式在低频处采用人为截断时的准确性。因此，我们计算了两种情况下的匹配度：当 $f_{\rm low} = 2f_{\rm min}$ 时，以及当 $f_{\rm low} = 0.2\Omega$ 时。

匹配计算的结果绘于图4，展示了匹配度随 e 变化的情况，并且对应于 $\eta = 1/4$。实线对应 $f_{\rm low} = 2f_{\rm min}$ 的情况，而虚线对应 $f_{\rm low} = 0.2\Omega$。前一种情况下，匹配度会迅速下降，因为 $e \to 1$；原因与式（47）下文所述相同，具体而言，是该近似在 $f = f_{\rm min}$附近的精度有限。用于推导式（47）的近似所产生的误差，加上高偏心率极限下式（14）的响应快速振荡，导致解析波形与数值波形在低频处出现显著的相位失配。因此，从实际使用式（47）描述偏心爆发波形的角度来看，必须谨慎选择合适的低频截止频率；或者，也可以在式（47）中补充一个适用于 $f = f_{\rm min}$附近区域的近似。不过值得注意的是，本次计算采用了白噪声，而现实中的地面探测器受地震噪声影响，在低频处的灵敏度较低 [76], ，这可能会缓解波形低频截止频率所带来的一些问题。未来工作将利用现实的、更高后牛顿阶波形和探测器噪声，对这一低频截止频率进行更深入的分析。

此外，我们还计算了两组不同 EFB 波形之间的匹配度，具体而言，一组使用 mpmath 软件包计算 Gi(x)（灰线），另一组使用附录 B 中的近似方法（红线）。这两种情况下的匹配度没有显著变化，因此，应优先采用附录 B 中快速的近似方法，而不是更准确但速度更慢的计算方法。

在进入下一个应用之前，我们将简要讨论如何在波形中纳入更高后牛顿阶效应。一般而言，后牛顿双体问题的运动方程具有如下形式： [77]

$$\vec{a} = -\frac{M}{r^2}\vec{n} + \delta\vec{f}_{\rm cons} + \delta\vec{f}_{\rm diss} \tag{52}$$

其中， $\vec{a}$ 是相对加速度， $\vec{n}$ 是相对单位法向量， $\delta f_{\rm cons}$ 是保守后牛顿修正项， $\vec{}$和 $\delta f_{\rm diss}$ 是由辐射反作用引起的耗散性后牛顿修正项。在最低后牛顿阶下，

$$\delta\vec{f}_{\rm cons} = \vec{f}_{\rm 1PN} + \mathcal{O}(c^{-6})\,, \tag{53}$$

$$\delta\vec{f}_{\rm diss} = \vec{f}_{\rm 2.5PN} + \mathcal{O}(c^{-9})\,, \tag{54}$$

$\vec{}$其中 $f_{n\rm PN}$ 表示相对力的第 n 个后牛顿阶修正项， c 为光速。可以说，求解这些方程最有力的方法是密切轨道法 [35, 78, 79]。牛顿二体问题的解为 $V = V(t,\ \mu^a)$ 和 $r = r[V(t)\ \mu^a]$，其运动常数为 μ^a。密切轨道法将 μ^a 视为时间的函数，它们满足密切轨道方程

$$\frac{d\mu^a}{dt} = \mathcal{F}\left[V(t), \mu^b(t)\right]\,, \tag{55}$$

$\vec{}$其中， $\mathcal{F}^a$ 取决于 $\delta f_{\rm cons/diss}$的分量。

一般而言，密切轨道方程是非线性的，不存在精确的闭式解。求解这类方程最常用的方法是采用多尺度分析 [38], ；但在近似计算公式（14）的背景下，更简单的方法是围绕 μ^a 在近心点通过处的取值进行微扰，并将展开截断在公式（52）中所采用的最高后牛顿阶 [80]。第 II 节中的分析仍然成立，但现在驻点会因后牛顿修正而发生漂移。我们在此不进行这项分析，原因有二。首先，为了获得偏心双星引力波暴的最精确模型，需要对公式（48）加入更高后牛顿阶的振幅修正；在足够高的后牛顿阶下，这些修正将包含遗传尾效应和记忆效应贡献 [81–83]。对于高偏心率双星，计算这些贡献，尤其是后者，超出了本文的范围。其次，EFB 波形需要一个能够准确跟踪近心点通过时刻的计时模型 [25, 80], ，其方式类似于脉冲星计时模型，这同样超出了本文的范围。我们计划在未来的工作中处理这两个问题。

B. 从波列到暴发

利用后牛顿理论研究引力波时，最早得出的预测之一便是所谓的旋近双星系统圆化，即引力波会使轨道偏心率逐渐衰减，直至小到可以忽略不计，而双星系统则在最后几圈轨道中进入俯冲态 [1, 2]。由于圆化，随着偏心率衰减，引力波必然会从类似暴发的行为转变为类似波的行为。这里我们将展示，如何利用前文第 II 节的方法来理解这一转变发生的时机。

那么，实际上如何量化这一转变何时发生呢？有人可能会想用近心点通过的时间尺度这一概念来回答，例如式（12） [84], 及其与轨道周期的关系。然而，对于任意给定的偏心率 e，近心点通过的时间尺度总是短于轨道时间尺度，因此这并不能提供任何有用的信息。另一个可能出现的想法是，通过式（36）定义的傅里叶变换，完全转入频域。许多引力波数据分析都是在傅里叶空间中进行的；众所周知，高偏心双星系统产生的引力波暴具有特征性的高频尾部，可由 E_m^-（f）的高频响应近似表示

见式（26）。然而，由于式（36）的积分上下限，所考虑函数（此处为引力波）中的所有时间信息都被积分掉了。在尝试考虑当前问题时，这会带来不利影响，因为偏心率的长期演化行为直接映射到时间上。例如，在四极矩近似下并假设绝热性，偏心率的演化遵循 [2]

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} e \frac{\eta}{M} \left(\frac{M}{p}\right)^4 \left(1-e^2\right)^{3/2} \left(1+\frac{121}{304}e^2\right) . \tag{56}$$

解决方法是使用短时傅里叶变换，例如式（14）中定义的变换，或者更一般的小波变换 [85], ，因为这些变换同时包含时间和频率信息。

在领头后牛顿阶，引力波的偏振可用真近点角 V 的谐波表示，如式（48）所示，其中 $m=2$ 次谐波占主导地位，因为其振幅不受偏心率影响。随后，计算可归结为求解式（14）。此时，了解式（14）在低偏心率下的行为，以及由此得到的波形，是有帮助的。对于 $e \ll 1$，可以对式（12）进行 e 阶摄动求解，得到:

$$V = \ell + 2e\sin\ell + \mathcal{O}(e^2) . \tag{57}$$

那么，保留至 e 的线性阶，

$$E_m^-(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\ell}{n} e^{2\pi i f t - im\ell} \left\{1 + 2iem\sin\ell + \mathcal{O}(e^2)\right\} . \tag{58}$$

$E_m^-(f)$ 的响应取决于 f 的值。如果频率是轨道频率的整数倍，即对于任意整数 k，有 $f = kn/2\pi$ ，那么

$$E_m^-(kn/2\pi) = \frac{2\pi}{n}\left[\delta_{k,m} + em\left(\delta_{k,m+1} - \delta_{k,m-1}\right) + \mathcal{O}(e^2)\right] . \tag{59}$$

此时响应主要由谐波编号为 m、$m+1$ 和 $m-1$ 的谱线主导。次要谱线与主导谐波之间的间隔为轨道频率 $F_{\rm orb} = n/2\pi$。这相当于低偏心率时预期在傅里叶空间中得到的引力波响应。当 f 取其他值时，式（59）中的克罗内克δ将被sinc函数取代。

现在，考虑另一种计算方式：利用第 II 节的结果，在偏心率较小时求得 $E_m^-(f)$。即使偏心率很小，仍然存在可应用 SPA 的驻点，且其定义仍由式（18）给出。SPA 有效的频率区间由 $f \in (f_{\rm min},\ f_{\rm max})$ 定义，其中 $f_{\rm min/max}$ 由式（19）给出。当 $e \sim 0$时，$f_{\rm min} \sim f_{\rm max} \sim mn$均成立，因此 SPA 窗口中只包含一个谐波。此外 $f_{\rm max} - f_{\rm min} \ll n$，所以 SPA 的有效区域很小。然而，随着偏心率增大，$f_{\rm max}$ 增大，而 $f_{\rm min}$ 减小[2] 。在某些偏心率取值下，$f_{\rm min/max}$ 将变得大于/小于式（59）中次要谐波的频率。首次交叉发生在 $f_{\rm max} = (m+1)n/2\pi$ 时，这定义了式（14）的响应不再能由各个轨道谐波的求和来描述的条件。对于引力波，波形的主导谐波为 $m=2$，将其代入该条件可得 $e_{\rm crit} = 0.191059$。

图5展示了这一行为的一个示例。每个图的上图比较了式（48）在一个轨道周期内的数值快速傅里叶变换与式（49）中的EFB近似。波形的值经过归一化，使得 $M/p = 1 = M/D_L$。在低偏心率时，例如 $e=0.05$（左上图），由于有限时间窗的影响，波形近似为一个sinc函数。下图显示了波形中包含的轨道谐波对应的谱线，并以最大轨道谐波的值归一化。虚线表示 $f_{\rm min}$ 和 $f_{\rm max}$ 的取值，它们以第二谐波为中心。当偏心率增至 $e = e_{\rm crit}$（右上图）时，波形开始出现高频尾部，这是因为 $f_{\rm max} = 3n/2\pi$，且第三轨道谐波进入了SPA区间。偏心率更高时，$e=0.3$（左下图）和$e=0.9$（右下图），SPA区间内包含更多谐波，波形尾部也延伸至更高频率。

临界偏心率的数值可能低得令人惊讶，因为即使在 $e = e_{\rm crit}$ 时，实际的波形也不会呈现爆发式特征（例如参见 [28]）。然而，值得注意的是，从爆发式辐射到波动式辐射的转变并非瞬间完成，而是在双星并合过程中随着偏心率衰减而绝热地持续进行。此外，此处的分析仅适用于牛顿阶，而后牛顿修正很可能会改变 $e_{\rm crit}$ 的数值。

我们通过指出暴发的性质与玻色–爱因斯坦凝聚体性质之间一个有趣的类似关系来结束本节。在高偏心率极限下，SPA区间的大小可很好地近似为 $f_{\rm max}$，因为当 $e \to 1$时，$f_{\rm min} \to 0$ 。因此，SPA窗口中包含的轨道谐波数可近似为 $N_{\rm harm} = f_{\rm max}/F_{\rm orb}$，其中回顾一下，$F_{\rm orb} = n/2\pi$。爆发的高频尾部由$\sigma_f = \Omega\sigma^{1/3}/2\pi$表征，其中 σ 由式（25）给出。于是可以定义有效波长 $\lambda = 1/\sigma_f$和有效尺度 $\lambda_{\rm max} = 1/f_{\rm max}$。根据这些定义，SPA区间内的轨道谐波数与 λ 的关系为

$$N_{\rm harm} = 1 - \left(\frac{\lambda_{\rm max}}{\lambda}\right)^3 . \tag{60}$$

[2] 值得注意，在领头后牛顿阶，这些量是与质量比无关。在更高的后牛顿阶，这种关系不再成立，且会微弱地依赖于质量比，这是因为修正项与轨道速度耦合，而后牛顿理论假设 $v/c \ll 1$。

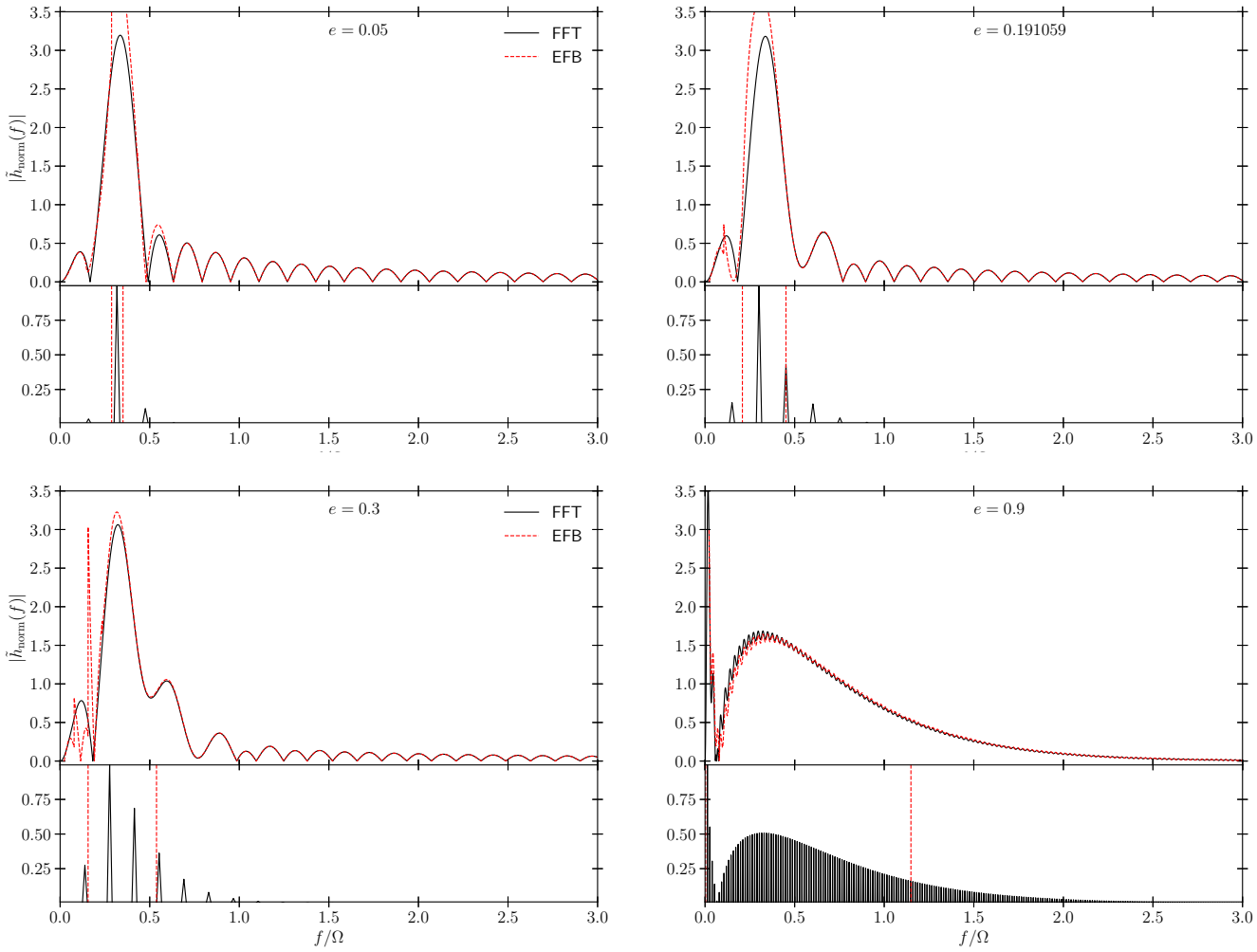

图 5. 上方各图： $e = 0.05$ （左上）、 $e = e_{\rm crit} = 0.191059$ （右上）、 $e = 0.3$ （左下）和 $e = 0.9$ （右下）的快速傅里叶变换波形与解析 EFB 波形的比较。当偏心率增大至超过 $e_{\rm crit}$ 时，会出现具有爆发式辐射特征的指数尾部。下方各图：牛顿波形（式 (48)）中轨道谐波对应谱线的图示。红色虚线给出了每个 e 对应的 $f_{\rm min/max}$ 值，两条虚线之间的区域定义了平稳相位近似窗口。偏心率增大时，平稳相位近似窗口随之扩大。当偏心率达到 $e = e_{\rm crit}$ 时，第三轨道谐波进入窗口，波形尾部开始形成。偏心率进一步增大时，更多谐波进入窗口，尾部延伸至更高频率。

该表达式等价于理想玻色气体基态（或凝聚态）的平均占据数 [86], ，其中 λ 被认为是热德布罗意波长，而 $\lambda_{\rm max}$ 是临界波长。值得注意的是，这种联系仅适用于高偏心率极限，因为式（60）仅在 $e \to 1$时适用。对于较低偏心率，式（60）需要修正。

C. 汉森系数与动力潮汐振幅

汉森系数为描述开普勒型轨道的通用表达式提供傅里叶级数表示。

位 [48, 87]。具体而言，若 r 是两个天体之间的相对径向间距，且 $a = p/(1 - e^2)$ 是轨道的半长轴，则汉森系数定义为

$$X_k^{q,m}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\ell \left(\frac{r}{a}\right)^q e^{imV} e^{-ik\ell}, \qquad (61)$$

它们是级数的系数

$$\left(\frac{r}{a}\right)^q e^{imV} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{q,m}(e) e^{ik\ell}. \qquad (62)$$

在某些特定情况下， $X^{q}{}_{k}{}^{m}(e)$ 系数可用超几何函数 [88], 精确表示，但一般而言，

它们只能通过小偏心率展开获得，或以数值方式计算。汉森系数具有足够的通用性，因此应用范围广泛，包括偏心双星产生的后牛顿波形 [89], 以及偏心轨道中恒星的潮汐响应 [80, 90, 91]。为了说明本文推导的近似如何用于近似汉森系数，我们聚焦于最后一种情况，具体来说，是高度偏心轨道中 f 模的激发。

在 [80], 中已经证明，在采用适当的重求和方案时，f 模响应具有如下形式

$$Q_m(t) = \pi \frac{M}{a^3} \frac{W_m K_m}{in\sqrt{\omega^2-\gamma^2}} e^{-\gamma(t-t_p)} \Big[X^{-3,-m}_{k_+} e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}(t-t_p)} - X^{-3,-m}_{k_-} e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}(t-t_p)} \Big] \tag{63}$$

其中 $m = 0, \pm 2$, K_m 是一个依赖于状态方程（状态方程）的参数，其定义见 [80]的式（12） $k_\pm = (i\gamma \pm \sqrt{\omega^2-\gamma^2})/n$；$(\omega, \gamma)$分别是该模态的频率和阻尼系数，而 W_m 由 [92]的式（24）给出。由于 $k_\pm$ 是复数且非整数，系数 $X^{-3,}{}_{k_\pm}{}^{-m}$ 通过对式（61）进行解析延拓来定义。对于开普勒轨道， r 由式（11）给出。将式（61）中的被积函数展开后，任意 k 对应的 $X^{-3,}{}_{k}{}^{-m}$ 为

$$X^{-3,-m}_k = \frac{\Omega}{2\pi(1-e^2)^{3/2}} \sum_{j=-3}^{3} \rho_j(e) \left[E^{\mathrm{sign}(j-m)}_{|j-m|}(\tilde{k}\Omega) \right]^\dagger \tag{64}$$

其中 $k = kn/2\pi\Omega$,

$$\rho_0 = 1 + \frac{3}{2}e^2\,, \qquad \rho_1 = \frac{3}{2}e + \frac{3}{8}e^3\,,$$
$$\rho_2 = \frac{3}{4}e^2\,, \qquad \rho_3 = \frac{1}{8}e^3\,, \tag{65}$$

且 $\rho_{-j}(e) = \rho_j(e)$。

能否将第 III B 节中的近似应用于此处，以近似式（63）中的复汉森系数？我们认为答案是肯定的，但有几点需要注意。根据式（14）中 $E^\pm_m(f)$ 的定义，将其解析延拓到复平面，即 $f \to f = f_R + if_I$，其中 $f_{R,\ I}$ 分别表示实部和虚部。在这一变换下，式（14）变为

$$E^\pm_m(\tilde{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\ell}{n} e^{-2\pi f_I t} e^{\pm imV} e^{2\pi i f_R t}\,, \tag{66}$$

其受到指数阻尼因子的修正。第 II 节中的许多近似都依赖于应用沃森引理 [38], ，而该引理要求被积函数具有紧支撑。若不满足这一条件，就不能像第 III A 1 节和第 III A2 节中那样将积分限扩展至无穷。式（ 66 ）中的指数因子随 $t \to \infty$ 衰减，但在 $t \to -\infty$ 时增长。因此，看来我们无法进行这种扩展积分限。不过，计算积分时并非必须进行这一步。这只是一个有用的工具，可用于用已知特殊函数来近似最终结果。此外，我们指出，式（37）中的余项积分必然会抵消将这一步应用于式（66）时产生的任何发散。

第二点需要注意的是，在应用第 II 节中的近似时，我们并未假设式（14）的被积函数中存在整体指数因子（或任何振幅因子）。积分的响应会随振幅项的行为而变化。不过，式（14）的驻点和折叠灾变仍然存在。对于当前问题，式（66）中的指数因子会增强其中一个驻点的贡献，同时抑制另一个驻点的贡献。如果增强/抑制效应足够显著，就需要修改第 III B 节的渐近匹配，因为来自各个驻点的积分贡献不再相等，驻相近似也无法写成式（20）的形式。因此，需要注意的是，频率 f_I 的虚部必须足够小（即 ˜），以避免这一问题，或者说 I m$[k] \ll 1$。对于在地面探测频段发射引力波的偏心双星，这通常成立，因为 f 模阻尼时间通常长于轨道周期。

˜在假设 $\mathrm{Im}[k] \ll 1$ 的情况下，我们可以按以下方式近似复频率下 $E^\pm_m(f)$ 的行为。将 $f = k\Omega$ 写成带有 $k = k_R + ik_I$ 的形式后，被积函数中的指数因子可展开为

$$E^\pm_m(\tilde{k}\Omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\ell}{n} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} \left(\tilde{k}_I \tau\right)^q e^{\pm imV} e^{i\tilde{k}_R \tau} \tag{67}$$

其中我们定义了 $\tau = 2\pi\Omega t$。接着利用以下事实:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{k}_R}\right)^q e^{i\tilde{k}_R\tau} = (i\tau)^q e^{i\tilde{k}_R\tau} \tag{68}$$

将方程（67）改写为

$$E^\pm_m(\tilde{k}\Omega) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(i\tilde{k}_I)^q}{q!} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{k}_R}\right)^q E^\pm_m(\tilde{k}_R\Omega)\,. \tag{69}$$

由于积分中的指数因子已被消去，现在可以对 $E^\pm_m(\tilde{k}_R\Omega)$ 应用第 II 节中的近似，从而得到复值 $E^\pm_m(\tilde{k}\Omega)$，前提是 $\tilde{k}_I \ll 1$。方程（69）结合方程（64），为我们提供了汉森系数 $X^{-3,}{}_{k_\pm}{}^{-m}$ 的解析近似。

在图 6–8 中，我们将复汉森系数的解析近似与使用 $k = k_+$ 对式 (61) 进行的数值计算结果进行了比较。k_- 的结果也相近，可通过在式 (69) 中取 ˜ ˜ ˜ $k_I \to -k_I$ 得到。为了选择合适的 k，我们

将其分解为

$$\tilde{k}_R = \mathrm{Re}[\tilde{k}] = \frac{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}{\Omega}\,, \tag{70}$$

$$\tilde{k}_I = \mathrm{Im}[\tilde{k}] = \frac{\gamma}{\Omega}\,, \tag{71}$$

并使用 $\gamma = 1/\tau$，其中 τ 为阻尼时间尺度。量（ω，τ）可通过已发现的“普适”关系计算，这些关系近似不依赖状态方程（EOS）；例如，参见 [93]。具体而言，我们分别使用其中的公式 (3) 和 (5)˜来求取 ω 和 τ。因此，量 $k_{R,\ I}$ 仅取决于中子星（NS）的质量 $M_\star$ 和半径 $R_\star$，以及（p，M）[3]。对于图 6–8 中的分析，我们选择$M_\star = 1.4M_\odot$、$R_\star = 10\,\mathrm{km}$ 和 $M = 11.4M_\odot$，对应于一个黑洞—中子星双星 $\omega = 6.9$ 。在这一质量和半径取值下，f 模频率和阻尼时间分别为 $\omega = 6.9$ kHz 和 $\tau = 9.3$ 秒。我们允许 ˜ p在 $[4, 30]M$之间变化，以改变 $k_{R,\ I}$的取值。

请注意，上述（ω，τ）数值并不代表采用更真实中子星状态方程所得的结果。这是因为我们选择了 $R_\star = 10$ km，而对于真实状态方程，通常无法通过我们对 $M_\star = 1.4M_\odot$ 的选择达到这一数值。不过，我们强调，此处的目标是检验复值汉森系数近似的准确性，而非对真实中子星进行深入分析。本文的计算旨在弥补 [80]，的 f 模模型中汉森系数解析近似的缺失，该模型见式（63）。真实中子星的计算、轨道动力学的修正，以及对合理状态方程约束的研究，将留待未来工作。

图 6–8 中的每条曲线给出了不同 p/M 值对应的结果，因而也对应不同的 k。这些图中选取的 p/M 值与地面探测器的引力波源相关。k 的非零虚部˜通常会使汉森系数产生非平凡振荡。每幅图的上方面板显示了通过第 III B 2 节所述方法计算得到的汉森系数数值。我们没有将解析表达式与这些结果一同绘出，因为差异通常小于 10^{-4}，如下方面板所示。在这三幅图中，误差最大时均有 $\tilde{k} = 3.14 + 4.90 \times 10^{-5} i$，对应于 $p = 4M$。如此小的半通径 p 接近 $e \to 1$ [94] 时史瓦西黑洞周围测地线的稳定性极限。图 3 展示了该情形误差最大的原因：匹配渐近展开的误差在 $f/\Omega >> 1$ 时最小。因此，对于 $|k| >> 1$，这种方法对汉森系数的近似效果更好。然而，即使在 $p = 4M$ 的情形下，误差最多也只有 $\sim 10^{-5} - 10^{-3}$，具体取决于 m 的值。因此，式（69）中的解析表达式能够很好地近似复汉森系数。

本节对汉森系数的研究主要关注偏心双星中子星的 f 模中出现的汉森系数，但只要这些量能够写成 $E^{\pm}_m(f)$ 函数之和，这里采用的方法就适用于所有汉森系数。因此，我们预计，本文提出的解析近似可应用于比本文讨论的少数几种应用更广泛的问题。至此，我们完成了对第 II 节结果之应用的研究。

V. 讨论

在本研究中，我们运用灾变理论分析了一个与偏心开普勒轨道相关的基本傅里叶积分，并构造了其响应的闭式解析近似。本文提出的方法具有足够的通用性，可用于波形建模中出现折叠突变的任何情形；当出现高阶突变时，也有望加以推广。这一点颇为引人注目，因为目前波形建模中处理突变的一般做法是对波形进行变换以避开突变，从而得到一个在实际应用中可以截断的无穷求和 [23, 39, 40, 95]。

此外，有研究提出，可利用灾变理论为准圆轨道双星构建完整的并合-振铃波形 [96]，，尽管迄今尚无在数据分析场景中对该模型进行的实际研究。事实上，仍需开展大量研究，以确定灾变理论方法及其衍生模型的有效性。在偏心双星及本研究的背景下，这类研究的重点是为偏心爆发开发完整的后牛顿波形，具体流程见第 IV A 节。高偏心率双星的近心点速度可能达到光速的相当大一部分，因此有必要将更高后牛顿阶效应纳入本文开发的 EFB 模型。此外，大量研究 [9–16, 97, 98] 表明，高偏心率双星通常并非孤立存在，且往往会受到其形成环境的扰动。在波形建模中纳入这些效应，将有助于从双黑洞的引力波辐射中提取有关其环境的天体物理信息 [3, 4, 99–101]。

超越后牛顿框架后，将第 IV A 节的灾变理论分析扩展到更高后牛顿阶，是一个值得探讨的问题。具体而言，当偏心双星处于动力学强场区域时，是否也存在类似的奇点？牛顿力学框架下在频率 $f_{\min/\max}$ 处存在奇点，这意味着根据式 (19) 存在轨道偏心率。如果数值相对论模拟中也存在同样的情况，并且能够通过数值测得类似的 $f_{\min/\max}$，那么便可估算数值相对论模拟中双星系统的轨道偏心率——

[3] 请注意，[93] 将 M 作为恒星质量，这不应与本文采用的双星总质量混淆。

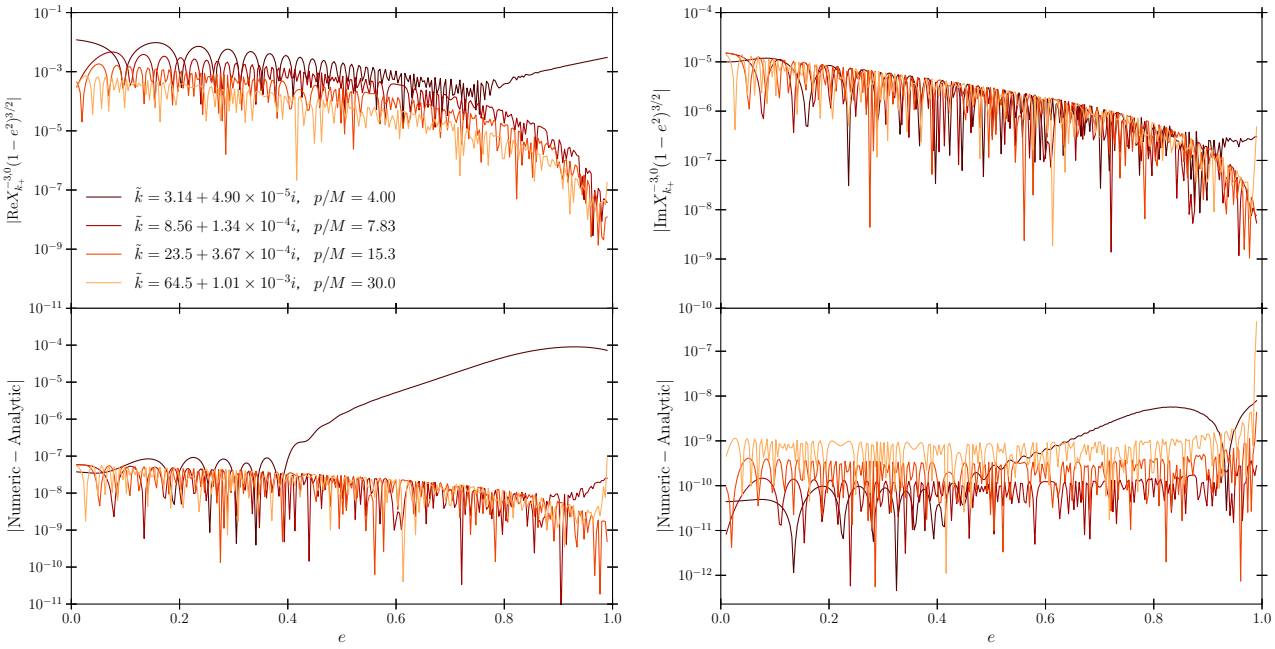

图 6。上图：汉森系数 $X^{-3,0}_{k_+}$ 的实部（左）和虚部（右）的绝对值，作为偏心率 e 的函数。每种颜色对应于 p/M 的不同取值，这会改变 $\tilde{k}$ 的取值。各情形的 f 模频率和阻尼时间均相同，具体为（ω, τ） =(6.9kHz 9.3sec)，对应于半径为 $R_\star = 10$ km 的 $M_\star = 1.4 M_\odot$ 中子星。下图：数值汉森系数与式（64）和（69）中的解析近似之间的差异。

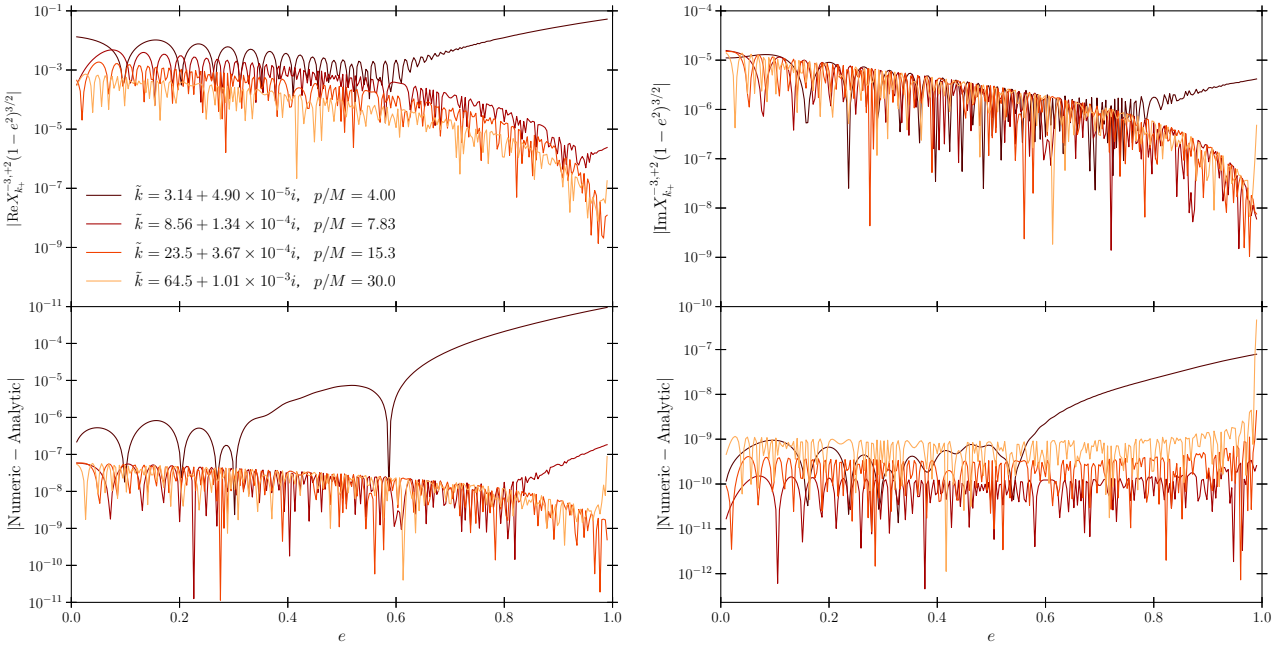

图 7。与图 6 相同，但针对 $X^{-3,+2}_{k_+}$。

率。目前，有多种方法尝试估算数值相对论模拟中的偏心率。本文具体采用的方法

SXS 目录 [34] 需要拟合一个受后牛顿启发、在小偏心率 [102]下线性化的模型。检验数值相对论中是否存在偏心灾变，将会很有意思；

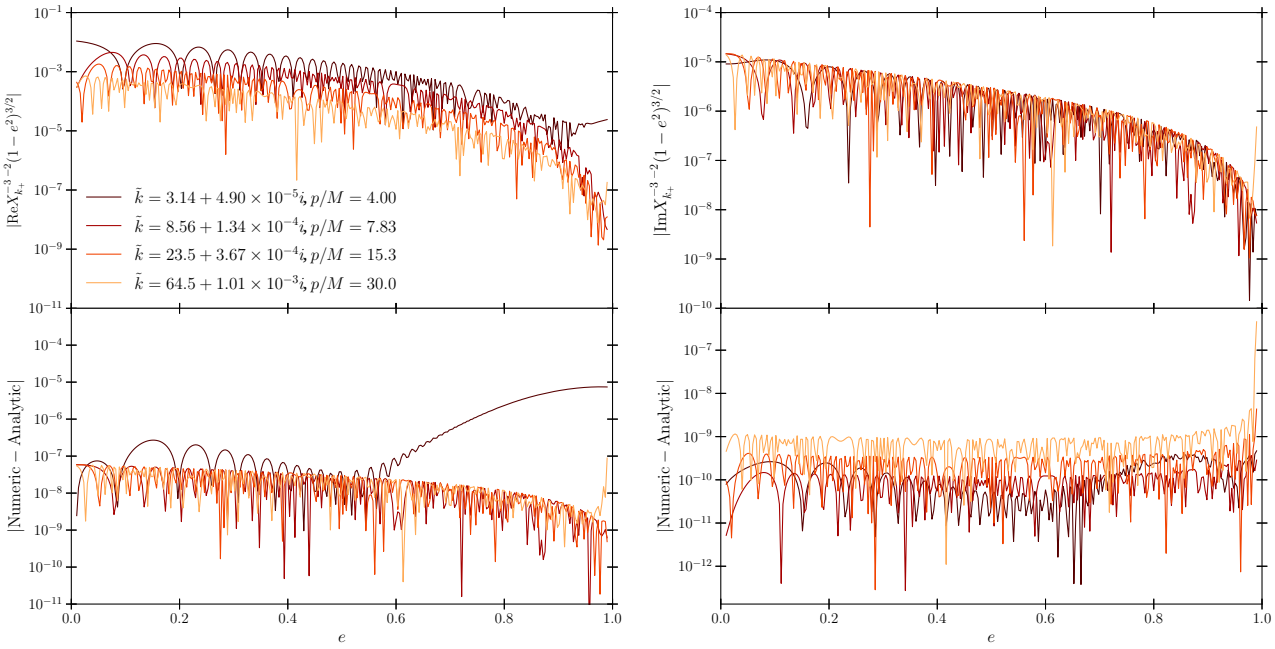

图 8。与图 6 相同，但针对 $X^{-3,-2}_{k_+}$。

并将这些数值相对论波形的偏心率估计与其他测量结果进行比较。

我们计划在未来的工作中探讨这些主题。不过，利用灾变理论理解引力波并开发波形模型的前景确实令人期待。

致谢

N.L. 部分经费来自欧盟 H2020 ERC Starting Grant 协议（编号 DarkGRA-757480）、意大利大学与研究部 PRIN 和 FARE 项目（GW-NEXT，CUP：B84I20000100001），以及由意大利大学与研究部“卓越系所”计划资助的 Amaldi 研究中心（CUP：B81I18001170001）。N.L. 还部分获得 ERC Starting Grant（编号 945155–GWmining）、Cariplo基金会拨款（编号 2021-0555）、意大利大学与研究部 PRIN 拨款（编号 2022-Z9X4XS），以及由 NextGenerationEU 资助的 ICSC 国家研究中心的支持。

附录 A：匹配渐近展开的系数

式（29）中给出的 $E_m^-(f)$的匹配渐近展开取决于两个函数 $[\alpha(f)\ \beta_m(f)],$，它们按式（31）的形式展开为幂级数，其中

$$\zeta = \frac{1}{2e}\left[1+e-\sqrt{\frac{2\pi f}{m\Omega}}\right], \tag{A1}$$

其中 $f \geq 0$。要得到幂级数，只需将式（33）—（34）按 $\zeta \ll 1$展开。系数$[\alpha_k, \beta_k]$ 是轨道偏心率的函数，其形式为

$$\alpha_k = (1+e)^{-k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}e^j \tag{A2}$$

$$\beta_k = 4\left(\frac{me}{1+e}\right)^{2/3}(1+e)^{-k+1}\sum_{j=0}^{k}\beta_{k,j}e^j \tag{A3}$$

到 $k=7$ 为止，$\alpha_{k,\ j}$ 系数为

$$\alpha_{1,0} = \frac{4}{15}, \qquad \alpha_{1,1} = \frac{48}{15}, \tag{A4}$$

$$\alpha_{2,0} = \frac{68}{525}, \qquad \alpha_{2,1} = \frac{142}{525}, \qquad \alpha_{2,2} = \frac{544}{175}, \tag{A5}$$

$$\alpha_{3,0} = \frac{32}{375}, \qquad \alpha_{3,1} = \frac{228}{875}, \qquad \alpha_{3,2} = \frac{2164}{7875}, \qquad \alpha_{3,3} = \frac{32096}{7875}, \tag{A6}$$

$$\alpha_{4,0} = \frac{21424}{336875}, \qquad \alpha_{4,1} = \frac{86512}{336875}, \qquad \alpha_{4,2} = \frac{24356}{61875}, \qquad \alpha_{4,3} = \frac{850592}{3031875}, \qquad \alpha_{4,4} = \frac{6122672}{1010625}, \tag{A7}$$

$$\alpha_{5,0} = \frac{339712}{6703125}, \qquad \alpha_{5,1} = \frac{16743136}{65690625}, \qquad \alpha_{5,2} = \frac{14515376}{28153125}, \qquad \alpha_{5,3} = \frac{104390224}{197071875}, \qquad \alpha_{5,4} = \frac{56901344}{197071875}, \qquad \alpha_{5,5} = \frac{3168735616}{328453125}, \tag{A8}$$

$$\alpha_{6,0}=\frac{871637248}{20692546875}\,,\qquad \alpha_{6,1}=\frac{1750090112}{6897515625}\,,$$
$$\alpha_{6,2}=\frac{2643226928}{4138509375}\,,\qquad \alpha_{6,3}=\frac{3573681952}{4138509375}\,,$$
$$\alpha_{6,4}=\frac{2774609072}{4138509375}\,,\qquad \alpha_{6,5}=\frac{6222893536}{20692546875}\,,$$
$$\alpha_{6,6}=\frac{331908564352}{20692546875} \tag{A9}$$

$$\alpha_{7,0}=\frac{18808049152}{527442890625}\,,\qquad \alpha_{7,1}=\frac{482671223296}{1933957265625}\,,$$
$$\alpha_{7,2}=\frac{896258319728}{1197211640625}\,,\qquad \alpha_{7,3}=\frac{2091159466064}{1676096296875}\,,$$
$$\alpha_{7,4}=\frac{697473501856}{558698765625}\,,\qquad \alpha_{7,5}=\frac{701029684832}{931164609375}\,,$$
$$\alpha_{7,6}=\frac{244815989168}{931164609375}\,,\qquad \alpha_{7,7}=\frac{8524435430416}{310388203125}\,, \tag{A10}$$

而 $\beta_{k,\ j}$ 系数为

$$\beta_{1,0}=1\,, \tag{A11}$$

$$\beta_{2,0}=\frac{1}{15}\,,\qquad \beta_{2,1}=-\frac{1}{5}\,, \tag{A12}$$

$$\beta_{3,0}=\frac{32}{1575}\,,\qquad \beta_{3,1}=\frac{12}{175}\,,\qquad \beta_{3,2}=-\frac{8}{175}\,, \tag{A13}$$

$$\beta_{4,0}=\frac{656}{70875}\,,\qquad \beta_{4,1}=\frac{344}{7875}\,,\qquad \beta_{4,2}=\frac{682}{7875}\,,$$
$$\beta_{4,3}=-\frac{148}{7875}\,, \tag{A14}$$

$$\beta_{5,0}=\frac{419392}{81860625}\,,\qquad \beta_{5,1}=\frac{814832}{27286875}\,,$$
$$\beta_{5,2}=\frac{96176}{1299375}\,,\qquad \beta_{5,3}=\frac{885616}{9095625}\,,$$
$$\beta_{5,4}=-\frac{29584}{3031875}\,, \tag{A15}$$

$$\beta_{6,0}=\frac{50846144}{15962821875}\,,\qquad \beta_{6,1}=\frac{7776512}{354729375}\,,$$
$$\beta_{6,2}=\frac{23501392}{354729375}\,,\qquad \beta_{6,3}=\frac{8203568}{70945875}\,,$$
$$\beta_{6,4}=\frac{4878416}{39414375}\,,\qquad \beta_{6,5}=-\frac{1139792}{197071875} \tag{A16}$$

$$\beta_{7,0}=\frac{10760863744}{5028288890625}\,,\qquad \beta_{7,1}=\frac{727965824}{42976828125}\,,$$
$$\beta_{7,2}=\frac{6698868992}{111739753125}\,,\qquad \beta_{7,3}=\frac{14062619392}{111739753125}\,,$$
$$\beta_{7,4}=\frac{80482816}{459834375}\,,\qquad \beta_{7,5}=\frac{10137438208}{62077640625}\,,$$
$$\beta_{7,6}=-\frac{232181504}{62077640625}\,. \tag{A17}$$

需要指出的是，如果有需要，可以将展开式扩展到 ζ 的更高阶。这里我们就此打住，因为这些近似对于本文的用途已经足够准确，而且更高阶项的表达式会变得越来越复杂。

附录 B：斯科勒函数$\mathrm{Gi}(x)$的近似

Scorer 函数 Gi(x) 和 Hi(x) 是非齐次艾里微分方程的解，

$$\frac{d^2y}{dx^2}-xy=\frac{1}{\pi}\,. \tag{B1}$$

关于这些解的深入讨论见 [61]。式（47）中 $E_m^-(f)$ 的渐近近似依赖于 Gi(x)；该函数已通过 mpmath 软件包在 Python 中实现。这里我们给出该函数的一个解析近似，可显著加快式（47）的数值求值。

起点是 Gi(x) 的渐近展开，具体如下

$$\mathrm{Gi}(x)\sim\frac{1}{\pi x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k)!}{k!(3x^3)^k}\,. \tag{B2}$$

请注意，当 $x\to\infty$ 时，该展开成立，并且函数 Gi(x) 在 $x=0$ 处是正则的。我们的目标是构造一个新函数，使其在区域 $0\le x<\infty$ 内近似 Gi(x) 的行为。可以构造多个函数来拟合这类行为，例如

$$[\mathrm{Gi}(x)]_{\mathrm{approx}}=g_0\left[1-e^{-\sum_{k=1}^{\infty}g_kx^{-k}}\right]\,. \tag{B3}$$

将上述表达式在 $x\to\infty$ 附近展开后，系数 g_k 可以与式（B2）中级数的系数相匹配。至 $k=7$ 阶时，这些系数为

$$g_0=\mathrm{Gi}(0)=\frac{1}{3^{7/6}\Gamma(2/3)}=0.204975542482000\,, \tag{B4}$$

$$g_1=\frac{1}{\pi g_0}\,,\qquad g_2=\frac{1}{2\pi^2g_0^2}\,,\qquad g_3=\frac{1}{3\pi^3g_0^3}\,, \tag{B5}$$

$$g_4=\frac{1}{4\pi^4g_0^4}+\frac{2}{\pi g_0}\,,\qquad g_5=\frac{1}{5\pi^5g_0^5}+\frac{2}{\pi^2g_0^2}\,, \tag{B6}$$

$$g_6=\frac{1}{6\pi^6g_0^6}+\frac{2}{\pi^3g_0^3}\,,\qquad g_7=\frac{1}{7\pi^7g_0^7}+\frac{2}{\pi^4g_0^4}\,, \tag{B7}$$

这构成了我们对 Gi(x) 所采用的近似。图9比较了使用 mpmath 计算的精确函数与解析近似，底部面板显示相对误差。对于第 IV 节所研究的应用，式（B3）求值的速度约为 mpmath 精确函数的一百倍，而且不会造成显著的精度损失。

附录 C：E_m^+ 的渐近展开 (f)

这里给出了 $E_m^+(f)$ 对于$f\ge0$的显式计算。如第 II 节所述，对于负频率$E_m^+(-f)=\ [E_m^-(f)]^\dagger$，因此可用以下方法近似：

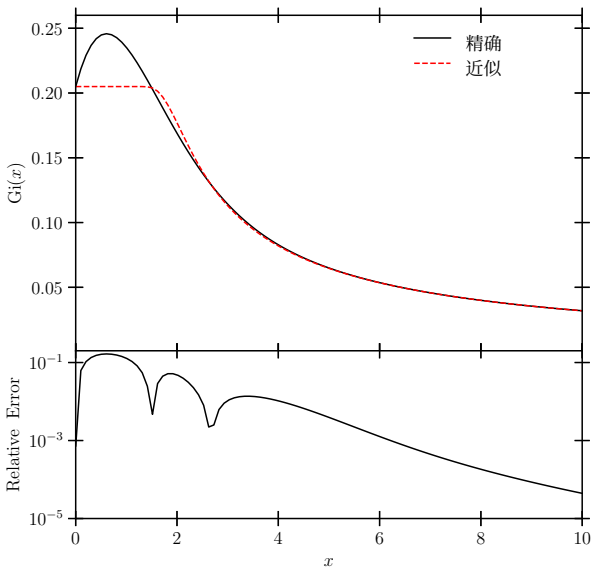

图9。上：精确函数 Gi(x)（实线）及其在式（B3）中的近似。下：精确函数与近似之间的相对误差。

其中的方法。对于正频率，积分域内不存在驻点，而 $V = 0$处的鞍点变为次要项，因为

式（14）中的被积函数在该点附近的区域内变得高度振荡。与 $E_m^-(f)$ 的行为相反，积分实际上主要来自 $V = \pm\pi$ 附近的区域。要对 $E_m^+(f)$ 进行解析近似，将积分改写为以下形式会很有用：

$$E_m^+(f) = 2\int_0^\pi \frac{d\ell}{n}\cos\left[\Psi_m^+(t,f)\right]\,, \tag{C1}$$

with

$$\Psi_m^+(t,f) = 2\pi f t + mV(t)\,. \tag{C2}$$

由于积分域内没有驻点，可以采用渐近展开，通过反复分部积分来计算该积分，方法与第 III B 2 节所述相同。然而，与 $\mathcal{R}(f)$ 的情况不同，无需对 Ψ_m^+ 进行泰勒展开。利用以下事实即可直接计算该积分：

$$\cos\left[\Psi_m^+(t,f)\right] = \frac{1}{\dot\Psi_m^+(t,f)}\frac{d}{dt}\sin\left[\Psi_m^+(t,f)\right]\,. \tag{C3}$$

在最低阶近似下，

$$E_m^+(f) \sim \frac{\sin\left(m\pi + \frac{2\pi^2 f}{n}\right)}{\pi(f+f_{\rm min})} + \mathcal{O}\left[(f+f_{\rm min})^{-4}\right]\,. \tag{C4}$$

W t在最低阶处截断展开是有道理的，因为高阶修正构成发散级数，而且纳入这些修正并不一定能提高近似的精度。

[1] P. C. Peters 和 J. Mathews, Phys. Rev. **131**, 435 (1963). [2] P. C. Peters, Phys. Rev. **136**, B1224 (1964). [3] M. Mapelli, Frontiers in Astronomy and Space Sciences **7**, 38 (2020), arXiv:2105.12455 [astro-ph.HE]. [4] M. A. Sedda, M. Mapelli, M. Spera, M. Benacquista 和 N. Giacobbo, 《天体物理学杂志》**894**, 133 (2020), arXiv:2003.07409 [astro-ph.GA]. [5] K. Belczynski, S. Repetto, D. E. Holz, R. O'Shaughnessy, T. Bulik, E. Berti, C. Fryer 和 M. Dominik, 《天体物理学杂志》**819**, 108 (2016年), arXiv:1510.04615 [astro-ph.HE]. [6] K. Belczynski, V. Kalogera 和 T. Bulik, 《天体物理学杂志》**572**, 407 (2001), arXiv:astro-ph/0111452. [7] M. Grudzinska *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **452**, 2773 2015 1504 ( ), arXiv: . 03146 [astro-ph.HE]. [8] I. Kowalska, T. Bulik, K. Belczynski, M. Dominik 和 D. Gondek-Rosinska, Astron. Astrophys. **527**, A70 (2011), arXiv:1010.0511 [astro-ph.CO]. [9] H. Tagawa, B. Kocsis, Z. Haiman, I. Bartos, K. Omukai 和 J. Samsing, Astrophys. J. Lett. **907**, L20 (2021), arXiv:2010.10526 [astro-ph.HE]. [10] H. Tagawa, B. Kocsis, Z. Haiman, I. Bartos, K. Omukai 和 J. Samsing, 《天体物理学杂志》**908**, 194 (2021), arXiv:2012.00011 [astro-ph.HE].

[11] J. Samsing and E. Ramirez-Ruiz, 《天体物理学杂志快报》**840**，L14（2017年），arXiv:1703.09703 [astro-ph.HE]。[12] J. Samsing、M. MacLeod 和 E. Ramirez-Ruiz, 《天体物理学杂志》**784**，71（2014年），arXiv:1308.2964 [astro-ph.HE]。[13] J. Samsing，Phys. Rev. D **97**，103014（2018年），arXiv:1711.07452 [astro-ph.HE]。[14] J. Samsing 和 D. J. D'Orazio，Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **481**，5445（2018年），arXiv:1804.06519 [astro-ph.HE]。[15] J. Samsing、D. J. D'Orazio、A. Askar 和 M. Giersz，（2018年），arXiv:1802.08654 [astro-ph.HE]。[16] J. Samsing、I. Bartos、D. J. D'Orazio、Z. Haiman、B. Kocsis、N. W. C. Leigh、B. Liu、M. E. Pessah 和 H. Tagawa, arXiv 预印本，arXiv:2010.09765（2020年），arXiv:2010.09765 [astro-ph.HE]。[17] J. Samsing 和 K. Hotokezaka，arXiv 预印本，arXiv:2006.09744（2020年），arXiv:2006.09744 [astro-ph.HE]。[18] V. Gayathri、Y. Yang、H. Tagawa、Z. Haiman 和 I. Bartos, Astrophys. J. Lett. **920**，L42（2021年），arXiv:2104.10253 [gr-qc]。[19] I. M. Romero-Shaw、D. Gerosa 和 N. Loutrel, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **519**，5352（2023年），arXiv:2211.07528 [astro-ph.HE]。[20] Y. Xu 和 E. Hamilton，（2022年），arXiv:2211.09561 [gr-qc]。

[21] I. M. Romero-Shaw、P. D. Lasky 和 E. Thrane，Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 490，5210（2019年），arXiv:1909.05466 [astro-ph.HE]。[22] I. Romero-Shaw、P. D. Lasky 和 E. Thrane，《天体物理学杂志快报》921，L31（2021年），arXiv:2108.01284 [astro-ph.HE]。[23] B. Moore、T. Robson、N. Loutrel 和 N. Yunes，《经典与量子引力》35，235006（2018年），arXiv:1807.07163 [gr-qc]。[24] B. Moore 和 N. Yunes，《经典与量子引力》36，185003（2019年），arXiv:1903.05203 [gr-qc]。[25] N. Loutrel，《经典与量子引力》37，075008（2020年），arXiv:1909.02143 [gr-qc]。[26] L. Gallouin、H. Nakano、N. Yunes 和 M. Campanelli，《经典与量子引力》**29**, 235013 2012 1208 6489 ( )，arXiv: . [ ] gr-qc 。[27] A. Nagar、P. Rettegno、R. Gamba 和 S. Bernuzzi，《物理评论D》103，064013（2021年），arXiv:2009.12857 [gr-qc]。[28] A. Ramos-Buades、A. Buonanno、M. Khalil 和 S. Ossokine，《物理评论D》105，044035（2022年），arXiv:2112.06952 [gr-qc]。[29] X. Liu、Z. Cao 和 Z.-H. Zhu，《经典与量子引力》39，035009（2022年），arXiv:2102.08614 [gr-qc]。[30] G. Cho、S. Tanay、A. Gopakumar 和 H. M. Lee，《物理评论D》105，064010（2022年），arXiv:2110.09608 [gr-qc]。[31] B. C. Stephens、W. E. East 和 F. Pretorius，Astro- phys. J. Lett. 737，L5（2011年），arXiv:1105.3175 [astro- ph.HE]。[32] W. E. East、F. Pretorius 和 B. C. Stephens，《物理评论D》85，124009（2012年），arXiv:1111.3055 [astro- ph.HE]。[33] W. E. East 和 F. Pretorius，Astrophys. J. Lett. 760，L4（2012年），arXiv:1208.5279 [astro-ph.HE]。[34] M. Boyle *et al.*，《经典与量子引力》36，195006（2019年），arXiv:1904.04831 [gr-qc]。[35] E. Poisson 和 C. Will，*Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*（剑桥大学出版社，英国剑桥，2014年）。[36] N. Yunes、K. G. Arun、E. Berti 和 C. M. Will，《物理评论D》**80**, 084001 2009 [89, ( )，勘误: 109901 2014 0906 Phys.Rev.D ( )], arXiv: .0313 [gr-qc]。[37] C. Moreno-Garrido、E. Mediavilla 和 J. Buitrago，《皇家天文学会月刊》274，115 1995( ), h t t p s:// a c a d e mic.o up.com/mnras/article-pdf/274/1/115/18539844/mnras274-0115.pdf。[38] C. M. Bender 和 S. Orszag，*Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*（施普林格，纽约，NY，1999年）。[39] B. Moore、M. Favata、K. G. Arun 和 C. K. Mishra，《物理评论D》93，124061（2016年），arXiv:1605.00304 [gr-qc]。[40] A. Klein、N. Cornish 和 N. Yunes，《物理评论D》90，124029 2014 1408 ( )，arXiv: .5158 [gr-qc]。[41] N. Loutrel，《经典与量子引力》38，015005（2021年），arXiv:2003.13673 [gr-qc]。[42] Y. Boetzel、A. Susobhanan、A. Gopakumar、A. Klein 和 P. Jetzer，《物理评论D》96，044011（2017年），arXiv:1707.02088 [gr-qc]。[43] R. Thom，*Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models*（Addison-Wesley，1989年）。[44]P. Roopnarine，载于 *Encyclopedia of Ecology*，S. E. J ̃A、rgensen 和 B. D. Fath 编（Academic Press，牛津，2008），第531–536 页。[45] V. Arnold，*Catastrophe Theory, 3rd ed.*（施普林格出版社，1992）。[46] M. Golubitsky，《SIAM评论》20，352（1978）。[47] A. Buonanno、B. Iyer、E. Ochsner、Y. Pan 和 B. S. Sathyaprakash，《物理评论D》80，084043（2009），arXiv:0907.0700 [gr-qc]。[48] P. Hansen，*Abhandlungen der Mathematisch-Physischen Class der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* 2 1855 181 218 ，第 Vol. 卷（莱比锡，），第 – 页。[49] M. V. BERRY 和 J. F. NYE，《自然》267，34（1977）。[50] M. V. Berry，《物理学杂志A：数学与通论》10，2061（1977）。[51] M. V. Berry、J. F. Nye 和 F. J. Wright，伦敦皇家学会哲学汇刊。A辑：数学与物理科学 291，453（1979）。[52] M. Berry 和 C. Upstill（爱思唯尔，1980），第 257–346 页。[53] J. M. Cordes、I. Wasserman、J. W. T. Hessels、T. J. W. Lazio、S. Chatterjee 和 R. S. Wharton，《天体物理学杂志》842，35（2017），arXiv:1703.06580 [astro-ph.HE]。[54] R. Main、I.-S. Yang、V. Chan、D. Li、F. X. Lin、N. Mahajan、U.-L. Pen、K. Vanderlinde 和 M. H. van Kerkwijk，《自然》557，522（2018），arXiv:1805.09348 [astro-ph.HE]。[55] J. Feldbrugge、U.-L. Pen 和 N. Turok，Annals Phys. 451，169255（2023），arXiv:1909.04632 [astro-ph.HE]。[56] D. B. Melrose 和 P. G. Watson，《天体物理学杂志》647，1131（2006）。[57] Y. Tanizaki 和 T. Koike，Annals Phys. 351，250（2014），arXiv:1406.2386 [math-ph]。[58] A. Behtash、G. V. Dunne、T. Sch ̈afer、T. Sulejmanpasic 和 M. ̈Unsal，Ann. Math. Sci. Appl. 02，95（2017），arXiv:1510.03435 [hep-th]。[59] A. J. Beekman、L. Rademaker 和 J. van Wezel，Sci-Post Phys. Lect. Notes **11**, 1 2019 1909 01820 （），[ ] arXiv: . hep-th . [60] I. Abromowitz S., Stegun，*Handbook of Mathematical Functions* 1970 （Dover出版社，）。[61] DLMF，“*NIST Digital Library of Mathematical Functions* 1 1 9 2023 ”，https://dlmf.nist.gov/，发布版本 . .，日期为 - 03-15，f. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。[62] F. Verhulst，*Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics* 2005 （施普林格出版社，）。[63] R. Dingle，*Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation* 1973 （Academic Press，）。[64] G. Comp`ere 和 L. K ̈uchler，SciPost Phys. 13，043（2022），arXiv:2112.02114 [gr-qc]。[65] H. Nakano、B. Ireland、M. Campanelli 和 E. J. West，《经典与量子引力》33，247001（2016），arXiv:1608.01033 [gr-qc]。[66] B. Ireland、B. C. Mundim、H. Nakano 和 M. Campanelli，《物理评论D》**93**, 104057 2016 1512 05650 [ ] （），arXiv: . gr-qc . [67] W. G. Dixon，（2013），arXiv:1311.6028 [gr-qc]。[68] B. C. Mundim、H. Nakano、N. Yunes、M. Campanelli、S. C. Noble 和 Y. Zlochower，《物理评论D》89，084008（2014），arXiv:1312.6731 [gr-qc]。

[69] N. Yunes、W. Tichy、B. J. Owen 和 B. Bruegmann，《物理评论D》74，104011（2006），arXiv:gr-qc/0503011。[70] N. Yunes 和 W. Tichy，《物理评论D》74，064013（2006），arXiv:gr-qc/0601046。[71] O. Poujade 和 L. Blanchet，《物理评论D》65，124020（2002），arXiv:gr-qc/0112057。[72] L. Levey 和 L. B. Felsen，《无线电科学》4，959（1969）。[73] F. W. J. Olver，*Asymptotics and Special Functions*（A. K. Peters，马萨诸塞州韦尔斯利，1997），第 xviii+572 页；重印本，附修正项，原版由 Academic Press 于 1974 年出版。[74] A. Ramos-Buades、S. Tiwari、M. Haney 和 S. Husa，《物理评论D》102，043005（2020），arXiv:2005.14016 [gr-qc]。[75] T. mpmath 开发团队，*mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 1.3.0)* 2023 （），http://mpmath.org/。[76] T. L. S. 合作组，《经典与量子引力》32，074001（2015）。[77] L. Blanchet，《相对论生活评论》17，2（2014）。[78] C. W. Lincoln 和 C. M. Will，《物理评论D》42，1123（1990）。[79] T. Mora 和 C. M. Will，《物理评论D》69，104021（2004），[修正：Phys.Rev.D 71, 129901（2005）], arXiv:gr-qc/0312082。[80] J. N. Arredondo 和 N. Loutrel，《经典与量子引力》38，165001（2021），arXiv:2101.10963 [gr-qc]。[81] C. K. Mishra、K. G. Arun 和 B. R. Iyer，《物理评论D》91，084040（2015），arXiv:1501.07096 [gr-qc]。[82] Y. Boetzel、C. K. Mishra、G. Faye、A. Gopakumar 和 B. R. Iyer，《物理评论D》100，044018（2019），arXiv:1904.11814 [gr-qc]。[83] M. Ebersold、Y. Boetzel、G. Faye、C. K. Mishra、B. R. Iyer 和 P. Jetzer，《物理评论D》100，084043（2019），arXiv:1906.06263 [gr-qc]。[84] M. Turner，《天体物理学杂志》216，610（1977）。[85] C. Torrence 和 G. P. Compo，《美国气象学会通报》79，61（1998）。[86] F. Reif，*Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* 1965 （Waveland Press, Inc.，）。[87] S. Hughes，《天体力学》25，101（1981）。[88] S. Y. Sadov，《天体力学与动力天文学》100，287（2008年）。[89] B. Mik´oczi、P. Forg´acs 和 M. Vas´uth，Phys. Rev. D 92，044038（2015），arXiv:1502.00276 [gr-qc]。[90] H. Yang、W. E. East、V. Paschalidis、F. Pretorius 和 R. F. P. Mendes，Phys. Rev. D 98，044007（2018年），arXiv:1806.00158 [gr-qc]。[91] H. Yang，Phys. Rev. D 100，064023（2019年），arXiv:1904.11089 [gr-qc]。[92] W. H. Press 和 S. A. Teukolsky，《天体物理学杂志》213，183 1977年( )。[93] C. Chirenti、G. H. de Souza 和 W. Kastaun，Phys. Rev. D 91，044034（2015），arXiv:1501.02970 [gr-qc]。[94] R. O. Hansen，《天体物理学杂志》170，557（1971）。[95] K. Chatziioannou、A. Klein、N. Yunes 和 N. Cornish，Phys. Rev. D 95，104004（2017年），arXiv:1703.03967 [gr- qc]。[96] J. L. Jaramillo 和 B. Krishnan，（2022年），arXiv:2206.02117 [gr-qc]。[97] M. A. S. Martinez、G. Fragione、K. Kremer、S. Chatter- jee、C. L. Rodriguez、J. Samsing、C. S. Ye、N. C. Weath- erford、M. Zevin、S. Naoz 和 F. A. Rasio，《天体物理学杂志》903，67（2020），arXiv:2009.08468 [astro-ph.GA]。[98] C. L. Rodriguez、P. Amaro-Seoane、S. Chatterjee、K. Kremer、F. A. Rasio、J. Samsing、C. S. Ye 和 M. Zevin，Phys. Rev. D 98，123005（2018年），arXiv:1811.04926 [astro-ph.HE]。[99] I. M. Romero-Shaw、N. Loutrel 和 M. Zevin，Phys. Rev. D 107，122001（2023年），arXiv:2211.07278 [gr-qc]。[100] S. Stevenson、F. Ohme 和 S. Fairhurst，《天体物理学杂志》810，58（2015），arXiv:1504.07802 [astro-ph.HE]。[101] S. Vitale、R. Lynch、R. Sturani 和 P. Graff，《经典与量子引力》34，03LT01（2017年），arXiv:1503.04307 [gr- qc]。[102] A. Buonanno、L. E. Kidder、A. H. Mroue、H. P. Pfeiffer 和 A. Taracchini，Phys. Rev. D 83，104034（2011），arXiv:1012.1549 [gr-qc]。