arXiv:2304.00840v2 [math.AP] 4 Apr 2023

纳维–斯托克斯方程齐次解在L^p-扰动下的渐近稳定性

ZHIWEN ZHAO 和 XIAOXIN ZHENG

Abstract. 众所周知，三维纳维–斯托克斯方程中具有可能奇异射线的所有（-1）齐次轴对称无旋解已得到分类。本文的主要目的是证明，在这类解中，除兰道解外最不奇异的解在 L^3-扰动下渐近稳定。此外，我们为任意 $q > 3$建立了带有显式衰减率和最佳常数的 L^q 衰减估计。为此，我们首先研究小初值下扰动方程解在 L^3_σ 空间中的整体适定性，以及对于 $p \geq 3$，任意初始数据在L^p_σ 空间中的局部适定性。

1. Introduction and main results

稳态不可压黏性流体在 $\mathbb{R}^3$ 中的运动可由以下稳态纳维–斯托克斯方程建模:

$$\begin{cases} -\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \mathrm{div} u = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， u 是表示速度的向量场， p 表示压力。由于方程在缩放变换 $u(x) \to \lambda u(\lambda x)$ 和 $p(x) \to \lambda^2 p(\lambda x)$下保持不变，其中$\lambda > 0$，因此寻找在该缩放下保持不变的解是自然的。根据$u$的齐次性，这些解称为$(-1)$-齐次解，尽管 p 是(-2)-齐次的。

利用球极坐标(r, θ, ϕ)，我们将向量场 u 表示为以下形式

$$u = u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_\phi e_\phi,$$

其中

$$e_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad e_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这里， r 表示到原点的径向距离， θ 表示正 x_3轴与径矢之间的极角， ϕ 是绕 x_3 轴的方位角。若向量场 u 的 u_r、 u_θ 和 u_ϕ 仅依赖于 r 和 θ，则称其为轴对称；若 $u_\phi = 0$，则称其为无旋。

Date: 2023年4月5日。

引入新函数和变量： $U_r := u_r r\sin\theta$， $U_\theta := u_\theta r\sin\ \theta$， $U_\phi := u_\phi r\sin\ \theta$ 以及 $y := \cos\theta$后，方程(1.1)的(-1)次齐次轴对称无旋解可化为以下常微分方程（见 [23, 41]）

$$(1-y^2)U_\theta' + 2yU_\theta + \frac{1}{2}U_\theta^2 = c_1(1-y) + c_2(1+y) + c_3(1-y^2),\ \text{in}\ (-1,1), \quad (1.2)$$

其中， $c := (c_1, c_2, c_3) \in J := \{c \in \mathbb{R}^3 | c_1 \geq -1, c_2 \geq -1, c_3 \geq \bar{c}_3(c_1, c_2)\}$ 与$\bar{c}_3(c_1, c_2) := -\frac{1}{2}(\sqrt{1+c_1} + \sqrt{1+c_2})(\sqrt{1+c_1} + \sqrt{1+c_2} + 2)$。文献[24] 已证明，存在 $\gamma^\pm \in C^0(J; \mathbb{R})$，使得对于任意$(c, \gamma) \in J \times [\gamma^-(c)\ \gamma^+(c)]$, 常微分方程（1.2）均存在唯一解 $U^{c,\gamma}_\theta$，属于 $C^\infty(-1, 1) \cap C^0[-1, 1]$ 且满足 $U^{c,\gamma}_\theta(0) = \gamma$，其中 $\gamma^+(c)$和 $\gamma^-(c)$满足：若 $\gamma^+(c) > \gamma^-(c)$，则 $c_3 > \bar{c}_3(c_1, c_2)$；若 $\gamma^+(c) = \gamma^-(c)$，则 $c_3 = \bar{c}_3(c_1, c_2)$。 $U^{c,\gamma}_\theta(\pm 1)$的值由下式给出：

$$U^{c,\gamma}_\theta(-1) = \begin{cases} 2 + 2\sqrt{1+c_1}, & \text{if } \gamma = \gamma^+(c), \\ 2 - 2\sqrt{1+c_1}, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$U^{c,\gamma}_\theta(1) = \begin{cases} -2 - 2\sqrt{1+c_2}, & \text{if } \gamma = \gamma^-(c), \\ -2 + 2\sqrt{1+c_2}, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

记

$$u^{c,\gamma} = u^{c,\gamma}_r e_r + u^{c,\gamma}_\theta e_\theta = \frac{(U^{c,\gamma}_\theta)'}{r} e_r + \frac{U^{c,\gamma}_\theta}{r\sin\theta} e_\theta,$$

$$p^{c,\gamma} = u^{c,\gamma}_r - \frac{1}{2}(u^{c,\gamma}_\theta)^2 = \frac{1}{r}\left((U^{c,\gamma}_\theta)' - \frac{(U^{c,\gamma}_\theta)^2}{2r\sin^2\theta}\right).$$

则 $\{(u^{c,\ \gamma}, p^{c,\ \gamma}) | (c, \gamma) \in J \times [\gamma^-(c)\ \gamma^+(c)]\}$ 构成了 $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{x' = 0'\})$ 中纳维-斯托克斯方程 (1.1) 的所有 (-1) 次齐次轴对称无旋解。下文中，我们通过添加上标撇号来表示二维变量，例如$x' = (x_1, x_2)$。根据奇异性的不同，这些解可分为以下三类：

类型 1. 满足 $0 < \limsup_{|x|\to 0} |x||u^{c,\ \gamma}| < \infty$ 的 Landau 解；类
型 2. 满足 $0 < \limsup_{|x|=1,\ x'\to 0'} (-\ln|x'|)^{-1}|u^{c,\ \gamma}| < \infty$ 的解；
类型 3. 满足 $0 < \limsup_{|x|=1,\ x'\to 0'} |x'||u^{c,\ \gamma}| < \infty$ 的解

注意，若 $|c| = 0$ 和 $\gamma \neq 0$, $u^{c,\ \gamma}$ 则成为 Landau 解，见 [23] 中的定理B。第二类和第三类解在所有 x_3-轴附近都表现出各向异性奇点。这与 Landau 解不同：Landau 解 [18]，的奇点是各向同性的，并且仅集中在原点附近的一个小邻域内。关于 Landau 解，Tian 和 Xin [45] 证明，(1.1) 的所有 (-1)-齐次轴对称非零解，在 $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ 中都是 Landau 解。Šver´ak [43] 证明，(1.1) 的所有 (-1)-齐次非平凡光滑解，在 $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ 中都是 Landau 解。近年来，Li、Li 和 Yan [23–25] 系统研究了 (1.1) 的 (-1)-齐次轴对称解，这些解在 $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{x' = 0'\})$ 中可能具有奇异射线 $\{x' = 0'\}$。具体而言，他们在 [23, 24] 中对这类无旋解给出了完整分类，并在 [23, 25] 中证明了这类具有非零旋流的解存在。关于更早期的 (-1)-齐次解研究，可参见 [10, 35–37, 41, 42, 47, 49] 及其中的参考文献。

本文关注第二类奇异解，即这些解中除 Landau 解之外奇异性最弱的解。记 $M:=\{(c,\gamma)|\, c_1=c_2=0, c_3>-4, \gamma^+(c)>\gamma>\gamma^-(c)\}$。Li 和 Yan [26] 证明，存在一个小常数 $\mu_0>0$，使得对于任意 $(c,\gamma)\in M\cap\{|(c,\gamma)|<\mu_0\}$，$(u^{c,\gamma}, p^{c,\gamma})$ 是如下带奇异力的定常纳维–斯托克斯方程的弱解：

$$\begin{cases} -\Delta u^{c,\gamma}+u^{c,\gamma}\cdot\nabla u^{c,\gamma}+\nabla p^{c,\gamma}=f^{c,\gamma},\\ \mathrm{div}\, u^{c,\gamma}=0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $f^{c,\gamma}=(4\pi c_3\ln|x_3|\partial_{x_3}\delta_{(0,0,x_3)}-b^{c,\gamma}\delta_0)e_3$，$e_3=(0,0,1)$，$\delta_0$ 是狄拉克测度，而 $b^{c,\gamma}$ 由下式给出

$$b^{c,\gamma}=\int_{-1}^{1}\left(y[(U_\theta^{c,\gamma})']^2-\frac{2-y^2}{1-y^2}U_\theta^{c,\gamma}-\frac{y}{1-y^2}(U_\theta^{c,\gamma})^2\right)\to 0,\quad \text{as } |(c,\gamma)|\to 0.$$

方程 (1.3) 的弱解按如下意义理解：对于每个测试函数 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u_j^{c,\gamma}\nabla\varphi-u_j^{c,\gamma}u^{c,\gamma}\cdot\nabla\varphi-p^{c,\gamma}\partial_{x_j}\varphi)\\ &=\begin{cases}0, & j=1,2,\\ 4\pi c_3\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x_3|\partial_{x_3}\varphi(0,0,x_3)dx_3-b^{c,\gamma}\varphi(0), & j=3,\end{cases}\end{aligned}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^3}u^{c,\gamma}\cdot\nabla\varphi=0.$$

由 [26], 中的推论 2.1 可得，对于 $x\in\mathbb{R}^3\setminus\{x'=0'\}$，

$$|u^{c,\gamma}|=\frac{2|c_3|}{|x|}\ln\frac{|x|}{|x'|}+O(1)\frac{|(c,\gamma)|}{|x|},\quad |\nabla u^{c,\gamma}|=\frac{2|c_3|}{|x'||x|}+\frac{O(1)|(c,\gamma)|}{|x|^2}\ln\frac{|x|}{|x'|}. \tag{1.4}$$

令 $\dot H^1(\mathbb{R}^3)$ 为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ 在范数 $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ 下的闭包。对于任意 $1\le p<\infty$，引入以下空间：

$$L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^p(\mathbb{R}^3)|\,\nabla\cdot u=0\},\quad \dot H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)=\{u\in\dot H^1(\mathbb{R}^3)|\,\nabla\cdot u=0\},$$

其范数为

$$\|u\|_{L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)}:=\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},\quad \|u\|_{\dot H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)}=\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

对于 $w_0\in L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$，考虑如下在 $\mathbb{R}^3\times(0,\infty)$中的不可压 Navier–Stokes 方程的柯西问题：

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=f^{c,\gamma},\\ \mathrm{div}\, u=0,\\ u(x,0)=u^{c,\gamma}+w_0,\end{cases}$$

其中 $u^{c,\gamma}$ 和 $f^{c,\gamma}$ 由 (1.3) 给出。记 $w(x,t)=u(x,t)-u^{c,\gamma}(x)$ 和 $\pi(x)=p(x)-p^{c,\gamma}(x)$。则 $(w(x,t)\ \pi(x))$ 满足以下扰动方程

$$\begin{cases}\partial_t w-\Delta w+w\cdot\nabla w+w\cdot\nabla u^{c,\gamma}+u^{c,\gamma}\cdot\nabla w+\nabla\pi=0,\\ \mathrm{div}\, w=0,\\ w(x,0)=w_0.\end{cases} \tag{1.5}$$

Li 和 Yan [26] 运用 [15], 中的相同论证，得到了问题 (1.5) 的解 w 的渐近稳定性; Karch 和 Pilarczyk [15] 证明，小 Landau 解在 L^2 扰动下仍保持渐近稳定。具体而言，利用 (1.4) 以及 [27], 中建立的各向异性 Caffarelli-Kohn-Nirenberg不等式，可得以下关键事实

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}(w\cdot\nabla u^{c,\gamma})\cdot w\right| \leq K(c,\gamma)\|\nabla w\|_{L^2}^2, \text{ with } K(c,\gamma)\to 0, \text{ as } |(c,\gamma)|\to 0$$

若成立，则关于 [15] 中 Landau 解渐近稳定性的证明可直接应用于问题 (1.5)。2017年，Karch、Pilarczyk 和 Schonbek [16]进一步推广了 [15] 中的工作，并提出了一种新方法，可为一大类全局时间解确立 L^2-渐近稳定性，尤其涵盖 Landau 解。此外，他们的结果还推广了一系列关于纳维–斯托克斯方程中零解 [2, 14,34,38,39,48] 或非平凡定常解 [3] 的 L^2-渐近稳定性研究。定义如下线性算子:

$$\mathcal{L}w = -\Delta w + \mathbb{P}((w\cdot\nabla)u^{c,\gamma}) + \mathbb{P}((u^{c,\gamma}\cdot\nabla)w), \tag{1.6}$$

其中， $\mathbb{P}$ 是投影到无散向量场上的 Leray 投影算子。关于算子 $\mathcal{L}$的性质，当 $u^{c,\gamma}$ 在 (1.6) 中被 Landau 解替代时，Karch 和 Pilarczyk [15] 证明了 $-\mathcal{L}$ 是作用于 $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 上的有界线性算子解析半群的无穷小生成元。最近，Li、Zhang 和 Zhang [28] 进一步将该结果推广到带有 $1<q<\infty$ 的 $L^q_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 上。利用 (1.6) 和 Duhamel 原理，方程 (1.5) 的解 w 可改写为如下积分形式

$$w(x,t) = e^{-t\mathcal{L}}w_0 - \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{L}}\mathbb{P}\mathrm{div}(w\otimes w)ds := a + N(w,w). \tag{1.7}$$

结合 (1.4) 和各向异性的 Caffarelli-Kohn-Nirenberg不等式，由 [27], 中定理 3.1 的证明稍作修改可知，$e^{-t\mathcal{L}}$ 对任意 $1<q<\infty$ 都是作用于 $L^q_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 上的有界线性算子解析半群。根据 Fabes-Jones-Rivi`ere [9], 的工作，由于只要求解属于 $L^q_tL^p_x$ 且满足 $p,q\geq 2$，因此 (1.7) 中积分形式的解等价于非常弱解。这些解称为温和解。

本文旨在阐明第二类奇异解在 L^3-扰动下对纳维–斯托克斯方程的渐近稳定性。为此，我们首先要处理扰动方程 (1.5) 解的适定性问题。本文采用的方法基于扰动理论，该方法近期已在关于 Landau 解的工作 [28] 中提出。其核心思想是将非线性部分 $N(w,w)$ 视为 (1.7) 中线性部分 a 的扰动，并通过强收敛的逐次逼近求解这两部分。然后结合压缩映射原理，我们得到 L^3 温和解在 L^3_σ 中小初值下的整体适定性结果，以及 L^p 温和解在 L^p_σ 中任意初始数据下对于 $p\geq 3$ 的局部适定性（见定义 1.1）。由于这些温和解具有唯一性和更好的正则性，因此实际上可将其视为一类特殊的强解。

作为对 [26, 28], 的延续，本文的结果并非简单的推广。一方面，与 [28], 相比，我们将更清楚地阐明

在通过更完整、严谨的证明来解决解的适定性问题时，扰动方法的应用。另一方面，我们通过引入一个特殊的精度参数 τ，在定理 1.7 的渐近稳定性结果中得到了一个精确常数。该参数可视为控制奇异解 $u^{c,\gamma}$ 所产生扰动效应的阈值。事实上，从方程 (1.5) 的结构来看，扰动方程 (1.5) 与纳维–斯托克斯方程的区别在于，方程 (1.5) 的第一个方程中多出了两个扰动项 $w\cdot\nabla u^{c,\gamma}$ 和 $u^{c,\gamma}\cdot\nabla w$。通过减小 (1.4) 中 $|(c,\gamma)|$ 的值，可以减弱这两个扰动项所造成的影响。此外，我们将在下文第 5 节证明，对于取自 $L^p_\sigma\cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 的初始数据，(1.5) 的唯一 L^p 温和解同时也是 L^2 弱解（见定义 5.1）。这一事实不仅表明，本文为 [26], 中的结果提供了另一种证明，也保证了对于 $p\geq 3$，在小初值下全局 L^2 弱解的唯一性，或对于 $L^p_\sigma\cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 中的任意初始数据，局部 L^2 弱解的唯一性。

除扰动理论外，研究解的存在性还有另一种经典方法，即能量方法。能量方法基于建立先验估计，并通过取弱极限来构造大范围且全局的弱解。自 Leray 的重要工作以来，纳维–斯托克斯方程弱解的存在性早已为人所知；在该工作中， [20] Leray 构造了具有无散初始数据 $u_0\in L^2(\mathbb{R}^3)$ 的弱解 $u\in L^\infty_t L^2\cap L^2_t H^1$。这些解称为 Leray-Hopf 弱解，并满足能量不等式。随后，Hopf[12] 针对光滑有界区域内满足 Dirichlet 边界条件的方程，得到了类似结果。然而，在二维以上，Leray-Hopf 弱解的唯一性和正则性问题仍未解决，并被视为流体力学中最重要的问题之一。近期，Buckmaster 和 Vicol [6] 运用凸积分方法，证明了有限能量的三维纳维–斯托克斯方程弱解具有非唯一性。值得指出的是，目前尚不清楚 [6] 中构造的弱解是否属于 Leray-Hopf 弱解。关于稳态纳维–斯托克斯方程弱解的非唯一性，参见 [29]。此外，凸积分方案已被用于证明流体动力学中其他偏微分方程解的非唯一性，参见 [4, 5] 及其中的参考文献。

为准确陈述我们的结果，现在给出扰动问题 (1.5) 的 L^p温和解的精确定义。

定义 1.1. 设 $3\leq p<\infty$ 和 $T>0$。对于任意给定的初始数据 $w_0\in L^p(\mathbb{R}^3)$，若函数 w 满足以下条件，则称其为方程 (1.5) 在 $[0,T]$上的 L^p 温和解：

$$w\in C([0,T];L^p_\sigma(\mathbb{R}^3))\cap L^{\frac{4p}{3}}([0,T];L^{2p}_\sigma(\mathbb{R}^3)),\tag{1.8}$$

and

$$w(x,t)=e^{-t\mathcal{L}}w_0-\int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{L}}\mathbb{P}\mathrm{div}(w\otimes w)ds.\tag{1.9}$$

此外，若对于任意 $0<T<\infty$，条件 (1.8)–(1.9) 均成立，则该解为整体解。

首先，我们列出以下具有任意 $p\geq 3$ 的扰动问题 (1.5) 的 L^p 温和解的局部适定性结果。

定理 1.2. 对于 $p \geq 3$ 和 $w_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$，存在两个小的正常数 $\delta = \delta(p)$ 和 $T = T(p, \|w_0\|_{L^p})$，使得对于任意的 $(c,\gamma) \in M \cap \{|(c,\gamma)| \leq \delta\}$，问题 (1.5) 在 $[0,T]$ 上存在唯一的 L^p 温和解 w，且满足 $\nabla|w|^{\frac{p}{2}} \in L^2([0,T];\, L^2(\mathbb{R}^3))$。此外，

$$\|w\|_{C_T L^p_x \cap L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} + \|\nabla|w|^{\frac{p}{2}}\|^{\frac{2}{p}}_{L_T^2 L_x^2} \leq C(p,c,\gamma)\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.10}$$

备注 1.3. 如定理 1.2 所示，局部 L^p温和解 w 的存在性和唯一性已得到证明。关于解 w 对初始数据 w_0的连续依赖性，采用 [28], 定理 1.3 中相同的证明方法可得，存在一个小的 $\varepsilon > 0$，使得对于任意的 $v_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$，若$\|w_0 - v_0\|_{L^p} < \varepsilon$，则存在唯一的 L^p 温和解 v，定义在 $[0,T]$ 上，且初始数据为 v_0。此外，

$$\|w - v\|_{C_T L^p_x \cap L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} + \big\|\nabla|w-v|^{\frac{p}{2}}\big\|^{\frac{2}{p}}_{L_T^2 L_x^2} \to 0, \quad \text{as } \|w_0 - v_0\|_{L^p} \to 0.$$

备注 1.4. 关于将时空估计方法应用于包括纳维–斯托克斯方程在内的更一般耗散方程的适定性问题，参见 [30–32]。

其次，小初值下的整体适定性结果表述如下。

定理 1.5. 对于 $p \in [3, \frac{9}{2}]$，存在两个小的正常数 ε_0 和δ_0，使得对于任意的 $(c,\ \gamma) \in M \cap \{|\ (c,\ \gamma)\ |\ \leq\ \delta_0\}$ 以及 $w_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap L^3_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap \{\|w_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon_0\}$，问题 (1.5) 存在唯一的整体 L^p 温和解 w，且满足$\nabla|w|^{\frac{p}{2}} \in L^2([0,\infty);\ L^2(\mathbb{R}^3))$。此外，(1.10) 成立，其中积分范围$[0,T]$ 替换为 $[0,\infty)$。

备注 1.6. 尽管小初值下 L^3 温和解的整体存在性结果是否意味着其对任意初始数据也整体存在仍是一个开放问题，但我们可以借助 [28], 中的一个思路，为 $L^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 中的任意初始数据构造一个整体 $L^2 + L^3$ 弱解；这一思路实际上受到先前工作 [7, 16, 40] 的启发。具体而言，我们首先将初始数据 $w_0 \in L^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 分解为以下两部分：$w_0 = w_{01} + w_{02}$，其中 $w_{01} \in L^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 满足$\|w_{01}\|_{L^3} < \varepsilon_0$，而 $w_{02} \in L^2_\sigma \cap L^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$。通过扰动理论，我们得到问题 (1.5) 在小初值 w_{01} 下的唯一整体 L^3 温和解 w_1。然后，我们利用能量方法构造一个弱解$w_2 \in C_w([0,\infty);\ L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,\infty);\ \dot{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^3))$，使其满足以下方程

$$\begin{cases} \partial_t w_2 - \Delta w_2 + w_2 \cdot \nabla w_2 + w_2 \cdot \nabla(u^{c,\gamma} + w_1) + (u^{c,\gamma} + w_1) \cdot \nabla w_2 + \nabla \pi_2 = 0, \\ \mathrm{div} w_2 = 0, \\ w_2(x,0) = w_{02}. \end{cases}$$

那么，$w := w_1 + w_2$ 构成扰动问题 (1.5) 的一个全局 $L^2 + L^3$ 弱解，其中包括一个 L^3 温和解 $w_1 \in C_t L^3_x \cap L^4_t L^6_x$，其初始数据 $w_{01} \in L^3_\sigma$ 较小；以及一个 L^2 弱解 $w_2 \in C_w L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$，其初始数据为$w_{02} \in L^2_\sigma \cap L^3_\sigma$。

基于定理 1.5 得到的整体适定性结果，我们进一步研究问题 (1.5) 的整体 L^3 温和解的渐近稳定性，相关结果如下。

定理 1.7. 设定理 1.5 中给出的 ε_0 和 δ_0，且 w 是问题 (1.5) 在 $w_0 \in L^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 条件下的唯一整体L^3 温和解。则

(*i*) 对于 $q = 3$，若 $(c,\gamma) \in M \cap \{|(c,\gamma)| \le \delta_0\}$ 且 $\|w_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} < \frac{\varepsilon_0}{2}$，则可得

$$\lim_{t\to\infty} \|w(t)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} = 0;$$

(*ii*) 对于 $q > 3$ 及任意 $0 < \tau < 1$，存在两个充分小的正常数$\delta = \delta(\tau, q) \le \delta_0$ 和 $\varepsilon = \varepsilon(\tau, q) \le \varepsilon_0$，使得若 $(c,\gamma) \in M \cap \{|(c,\gamma)| \le \delta\}$ 且$\|w_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon$，则有

$$\|w(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \le \mathcal{C}_q \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{q}\right)^{\frac{3}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{q})} t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{q})} \|w_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}, \quad \text{for a}^{\text{对所有}}_{t>0,} \tag{1.11}$$

其中

$$\mathcal{C}_q = 3^{-\frac{7}{4}} q^{\frac{3}{q}} (q-2)^{\frac{3}{2q}} \left(\frac{q}{q-2}\right)^{\frac{3}{4}} (4\pi(1-\tau))^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{q})} e^{-6(\frac{1}{3}-\frac{1}{q})}. \tag{1.12}$$

注 1.8. 在定理 1.7 中，引入参数 τ 以定量描述方程 (1.5) 中这两项 $w\cdot\nabla u^{c,\gamma}$和 $u^{c,\gamma}\cdot\nabla w$产生的扰动效应，并将其限制在由 τ确定的给定范围内。对于任意给定的精度参数 $0 < \tau < 1$，我们可以找到两个充分小的正常数 $\delta(\tau, q)$ 和 $\varepsilon(\tau, q)$，从而精确计算 $\mathcal{C}_q$ 的值。根据 (1.12)，可知常数 $\mathcal{C}_q$ 关于 q是光滑的，并且

$$\lim_{q\to 3^+} \mathcal{C}_q = 1, \quad \lim_{q\to+\infty} \mathcal{C}_q = \frac{1}{3^{\frac{7}{4}} e^2 \sqrt{4\pi(1-\tau)}}.$$

这一事实还表明，常数 $\mathcal{C}_q$ 是尖锐的，因为先令 $q \to 3^+$ 再令 $t \to 0^+$，(1.11) 中便取到等号。基于以上事实，我们认为，这个精确常数将在未来的工作中对数值分析和模拟解的渐近稳定性性质发挥重要作用。

注 1.9. 根据定理 1.5 中的整体存在性结果，在更强的假设条件 $p \in (3, \frac{9}{2}]$ 下，我们可以将定理 1.7 中的稳定性结果推广到 $w_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap L^3_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap \{\|w_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon\}$ 的情形，其中 ε. 为某个充分小的正常数。事实上，由于 $3 < p \le \frac{9}{2}$ 的整体存在性结果可由 $p = 3$ 的整体存在性结果结合 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式直接推出，因此本文主要关注 $p = 3$情形下的渐近稳定性问题。

本文结构安排如下。第 2 节介绍一些预备知识，并列出后文将用到的一些结果。第 3 节致力于研究扰动方程 (1.5) 的 L^p 温和解的适定性。随后，我们在第 4 节研究具有小初值的全局 L^3 温和解的渐近稳定性。最后，在第 5 节阐明扰动问题 (1.5) 的 L^p 温和解与 L^2 弱解之间的关系。

2. Preliminaries

本节主要陈述一些将在后续证明中用到的结果。正如引言中所指出的，我们将利用 [27] 中得到的各向异性 Caffarelli-Kohn-Nirenberg不等式来处理涉及奇异解 $u^{c,\gamma}$ 的项。为方便读者，我们列出各向异性

Caffarelli-Kohn-Nirenberg不等式如下。对于 $n \geq 2$，设 θ 和s_i, α_i, β_i, $i = 1, 2, 3$ 为满足以下条件的实数

$$s_1, s_3 > 0, \quad s_2 \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{s_i} + \frac{\alpha_i}{n-1} > 0, \\ \beta_i \geq 0, \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \frac{1}{s_i} + \frac{\alpha_i}{n-1} > 0, \\ \beta_i < 0, \\ \frac{1}{s_i} + \frac{\alpha_i+\beta_i}{n} > 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{n} = \theta \left(\frac{1}{s_2} + \frac{\alpha_2 + \beta_2 - 1}{n} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{1}{s_3} + \frac{\alpha_3 + \beta_3}{n} \right), \tag{2.3}$$

$$\beta_1 \leq \theta\beta_2 + (1 - \theta)\beta_3, \tag{2.4}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq \theta(\alpha_2 + \beta_2) + (1 - \theta)(\alpha_3 + \beta_3), \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{\alpha_1}{n-1} \geq \theta \left(\frac{1}{s_2} + \frac{\alpha_2 - 1}{n-1} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{1}{s_3} + \frac{\alpha_3}{n-1} \right), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s_1} \leq \frac{\theta}{s_2} + \frac{1-\theta}{s_3}, \text{ if } \frac{1}{s_1} + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{n} = \frac{1}{s_2} + \frac{\alpha_2 + \beta_2 - 1}{n} = \frac{1}{s_3} + \frac{\alpha_3 + \beta_3}{n}, \\ &\text{or } \theta = 0 \text{ or } \theta = 1 \text{ or } \frac{1}{s_1} + \frac{\alpha_1}{n-1} = \theta \left(\frac{1}{s_2} + \frac{\alpha_2 - 1}{n-1} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{1}{s_3} + \frac{\alpha_3}{n-1} \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

于是我们有

引理2.1（ [27]中的定理 1.1）。对于 $n \geq 2$，设 θ和 s_i、 α_i、 β_i、 $i = 1$、2、3 是满足条件（2.1）–（2.2）的实数。则存在某个正常数$C = C$（s_1、 s_2、 s_3、 α_1、 α_2、 α_3、 β_1、 β_2、 β_3、 θ），使得

$$\| |x'|^{\alpha_1} |x|^{\beta_1} u \|_{L^{s_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| |x'|^{\alpha_2} |x|^{\beta_2} u \|^{\theta}_{L^{s_2}(\mathbb{R}^n)} \| |x'|^{\alpha_3} |x|^{\beta_3} u \|^{1-\theta}_{L^{s_3}(\mathbb{R}^n)}$$

当且仅当（2.3）–（2.7）成立时，对任意 $u \in C_c^\infty$（$\mathbb{R}^n$）均成立。此外，在满足（2.1）–（2.2）的参数范围内任意紧子集上， C 是有界常数。

注2.2. 条件（2.2）称为测度条件，使得

$$\| |x'|^{\alpha_i} |x|^{\beta_i} u \|_{L^{s_i}(\mathbb{R}^n)} < \infty, \quad i = 1, 2, 3, \text{ for any } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

这可通过使用 [33]中的引理2.1得到。

直接应用引理2.1可得以下推论。

推论 2.3. 对于任意的 $0 \leq \alpha < 1$ 和 $u \in C_c^\infty$（$\mathbb{R}^3$），有

$$\| |x'|^{-\alpha} |x|^{\alpha-1} u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(\alpha) \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

注2.4. 如推论 2.3 所示，我们将 α 的取值范围限制在 $[0, 1)$ 内，并排除 $\alpha = 1$ 的情况，因为 $\alpha = 1$ 的情况不满足测度条件 (2.2)。

对于 $\rho > 0$，定义如下的锥：

$$\Omega_\rho := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x'| \le \rho |x|\}. \tag{2.8}$$

由 (1.4)，我们得到

引理 2.5. 设 $u^{c,\,\gamma}$ 如 (1.4) 所示。则有

$$\begin{cases} \| |x'|^{\frac{1}{2}} |x|^{\frac{1}{2}} u^{c,\gamma} \|_{L^\infty(\Omega_{e^{-1}})} \le K(c,\gamma), \\ \| |x| u^{c,\gamma} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{e^{-1}})} \le K(c,\gamma), \end{cases} \tag{2.9}$$

and

$$\| |x'| |x| \nabla u^{c,\gamma} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le K(c,\gamma), \tag{2.10}$$

其中 $\Omega_{e^{-1}}$ 是由 (2.8) 定义的锥，$K(c,\gamma)$ 满足 $K(c,\gamma) \to 0$，当 $|(c,\gamma)| \to 0$ 时。

证明. 首先，对于任意 $x \in \Omega_{e^{-1}}$，有 $-\ln \frac{|x'|}{|x|} \ge 1$。再结合 $|t^\alpha \ln t| \le (\alpha e)^{-1}$ 在 $[0,1]$ 中且满足 $0 < \alpha \le 1$ 这一事实，可得

$$\frac{1}{|x|} \le -\frac{1}{|x|} \ln \frac{|x'|}{|x|} \le \frac{2}{e} |x'|^{-\frac{1}{2}} |x|^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.11}$$

结合 (1.4) 和 (2.11)，我们推得

$$\| |x'|^{\frac{1}{2}} |x|^{\frac{1}{2}} u^{c,\gamma} \|_{L^\infty(\Omega_{e^{-1}})} \le K(c,\gamma).$$

另一方面，对于任意 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{e^{-1}}$，我们有 $-\ln \frac{|x'|}{|x|} \le 1$。由此可由 (1.4) 得出

$$\| |x| u^{c,\gamma} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{e^{-1}})} \le K(c,\gamma).$$

最后，由于

$$-\frac{1}{|x|^2} \ln \frac{|x'|}{|x|} \le \frac{1}{e} \frac{1}{|x'||x|}, \quad \text{for any } x \in \mathbb{R}^3,$$

那么由 (1.4) 可得 (2.10) 成立。证明完毕。

□

定义 2.6. 设 $1 < q < \infty$ 和 $n \ge 2$。若存在正常数 $C = C(n,q,w)$ 使得，则称 w 为一个 A_q-权。

$$\fint_B w dx \left(\fint_B w^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} \le C(n,q,w), \quad \text{with } \fint_B = \frac{1}{|B|} \int_B,$$

对于任意 B 中的球 $\mathbb{R}^n$。

对于 $n \ge 2$ 和 $q > 1$，定义以下索引集：

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \{(\theta_1,\theta_2) : \theta_1 > -(n-1),\, \theta_2 \ge 0\}, \\ \mathcal{B} = \{(\theta_1,\theta_2) : \theta_1 > -(n-1),\, \theta_2 < 0,\, \theta_1 + \theta_2 > -n\}, \\ \mathcal{C}_q = \{(\theta_1,\theta_2) : \theta_1 < (n-1)(q-1),\, \theta_2 \le 0\}, \\ \mathcal{D}_q = \{(\theta_1,\theta_2) : \theta_1 < (n-1)(q-1),\, \theta_2 > 0,\, \theta_1 + \theta_2 < n(q-1)\}. \end{cases}$$

回顾定理 2.6，如下所示。

引理 2.7（ [33]中的定理 2.6）。设 $1 < q < \infty$ 和 $n \ge 2$。若 $(\theta_1,\theta_2) \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{C}_q \cup \mathcal{D}_q)$，则 $w = |x'|^{\theta_1} |x|^{\theta_2}$ 是一个 A_q-权重。

现在我们引入压缩映射定理（参见 [1]中的引理 5.5），这是应用扰动理论的核心工具。

引理 2.8. 设 E 是一个巴拿赫空间， N 是从 $E\times E$ 到 E 的连续双线性映射，且 α 是满足以下条件的正实数:

$$\alpha<\frac{1}{4\|N\|},\quad \|N\|:=\sup_{\|u\|,\|v\|\le 1}\|N(u,v)\|.$$

那么，对于 E 中任意的 $a\in B(0,\alpha)$（即中心为 0、半径为 α），存在唯一的 $x\in B(0,2\alpha)$，使得

$$x=a+N(x,x).$$

3. Well-posedness for solutions to the perturbed equations

在使用引理 2.8 证明定理 1.2 和 1.5 之前，我们首先需要分别研究 (1.7) 中线性部分 a 和非线性部分 N 的适定性。由 [9], 中的定理 2.1 可知，线性部分 a 是以下方程的解:

$$\begin{cases}\partial_t a-\Delta a+(a\cdot\nabla)u^{c,\gamma}+(u^{c,\gamma}\cdot\nabla)a+\nabla\pi_1=0,\\ \mathrm{div}a=0,\\ a(x,0)=w_0(x).\end{cases}\tag{3.1}$$

也就是说，对于任意满足 $\mathrm{div}\varphi=0$ 的 $\varphi\in C_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3}w_0\varphi dx+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}\left(a(\partial_t\varphi+\Delta\varphi+u^{c,\gamma}\cdot\nabla\varphi)-(a\cdot\nabla)u^{c,\gamma}\varphi\right)dxdt=0.$$

关于线性部分 a，我们有

引理 3.1. 对于 $p\ge 2$ 和 $w_0\in L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$，存在一个小常数 $\delta_p>0$，使得若 $(c,\gamma)\in M\cap\{|(c,\gamma)|\le\delta_p\}$，则方程 (3.1) 存在唯一的全局时间$_p$ $_{3p}$解 $a\in C_tL^p_x\cap L^{\frac{\alpha}{}}_tL^{\overline{3-2\alpha}}_x$，对任意 $0<\alpha\le 1$ 均成立。此外，该解满足

$$\|a(\cdot,s)\|_{L^p}\le\|a(\cdot,t)\|_{L^p},\quad \textit{for any } 0\le t\le s<\infty,\tag{3.2}$$

并且，对任意 $0<\alpha\le 1$,

$$\|a\|_{C_tL^p_x\cap L^{\frac{p}{\alpha}}_tL^{\frac{3p}{3-2\alpha}}_x}+\left\||\nabla|a|^{\frac{p}{2}}\right\|^{\frac{2}{p}}_{L^2_tL^2_x}\le C(p,\alpha,c,\gamma)\|w_0\|_{L^p}.$$

注 3.2. 我们将结合能量估计和归纳法证明引理 3.1 和 3.3。

证明. 首先，我们利用经典的皮卡迭代格式证明 a 的存在性。令 $a_0=0$，并构造一个满足以下方程的迭代序列 $\{a_k\}$: 对 $k\ge 1$,

$$\begin{cases}\partial_t a_k-\Delta a_k=-\mathrm{div}(u^{c,\gamma}\otimes a_{k-1}+a_{k-1}\otimes u^{c,\gamma})-\nabla\pi_{k-1},\\ \mathrm{div}a_k=0,\\ \pi_{k-1}=(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(u^{c,\gamma}\otimes a_{k-1}+a_{k-1}\otimes u^{c,\gamma}),\\ a_k(x,0)=w_0.\end{cases}\tag{3.3}$$

步骤 1. 声称对于 $k\ge 1$, $a_k\in L^\infty([0,\infty);\ L^p(\mathbb{R}^3))\cap L^{\frac{p}{\alpha}}([0,\infty);\ L^{\frac{3p}{3-2\alpha}}(\mathbb{R}^3))$, 任意 $0<\alpha\le 1$ 均成立，且 $\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\in L^2([0,\infty);\ L^2(\mathbb{R}^3))$。对于 $k=1$，不妨假设

其为光滑函数。然后将方程 (3.3) 乘以 $|a_1|^{p-2}a_1$with $p \geq 2$, 由分部积分可得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla a_1\|_{L^2}^2 = 0, & p = 2, \\ \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|a_1\|_{L^p}^p + \frac{4(p-2)}{p^2}\|\nabla|a_1|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 + \||\nabla a_1||a_1|^{\frac{p-2}{2}}\|_{L^2}^2 = 0, & p > 2, \end{cases}$$

这意味着

$$\|a_1\|_{L_t^\infty L_x^p} + \big\|\nabla|a_1|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} \leq \|w_0\|_{L^p} \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, & p = 2, \\ 1 + \sqrt[p]{\frac{p-2}{4p}}, & p > 2. \end{cases}$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式，我们得到，对于 $0 <\alpha \leq 1$,

$$\|a_1\|_{L_t^{\frac{p}{\alpha}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} \leq C(p,\alpha)\|a_1\|_{L_t^\infty L_x^p}^{1-\alpha}\big\|\nabla|a_1|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2\alpha}{p}}.$$

于是我们推得，对于 $0 < \alpha \leq 1$,

$$\|a_1\|_{L_t^\infty L_x^p \cap L_t^{\frac{p}{\alpha}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} + \big\|\nabla|a_1|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} \leq C(p,\alpha)\|w_0\|_{L^p}. \tag{3.4}$$

假设存在某个常数 $C = C(p,\alpha,c,\gamma) > 0$，使得将 (3.4) 中的 a_1 替换为 a_{k-1} 后，对于 $k \geq 3$, (3.4) 仍然成立；也就是说，对于 $0 < \alpha \leq 1$,

$$\|a_{k-1}\|_{L_t^\infty L_x^p \cap L_t^{\frac{p}{\alpha}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} + \big\|\nabla|a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} \leq C\|w_0\|_{L^p}. \tag{3.5}$$

接下来我们证明 (3.5) 对 a_k 也成立。假设 a_k 光滑。将 (3.3) 乘以 $|a_k|^{p-2}a_k$ 并分部积分，可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|a_k\|_{L^p}^p + \frac{4(p-2)}{p^2}\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 + \||\nabla a_k||a_k|^{\frac{p-2}{2}}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (u^{c,\gamma} \otimes a_{k-1} + a_{k-1} \otimes u^{c,\gamma}) \cdot \nabla(|a_k|^{p-2}a_k) + \int_{\mathbb{R}^3} \pi_{k-1}\mathrm{div}(|a_k|^{p-2}a_k). \end{aligned} \tag{3.6}$$

应用推论 2.3 和引理 2.5，由 H¨older 不等式和杨氏不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^3}(u^{c,\gamma}\otimes a_{k-1}+a_{k-1}\otimes u^{c,\gamma})\cdot\nabla(|a_k|^{p-2}a_k)\right|\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}||a_k|^{\frac{p}{2}-1}|a_{k-1}||u^{c,\gamma}|\\
&= C\int_{\Omega_{e^{-1}}}|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}|\frac{|a_k|^{\frac{p-2}{2}}}{(|x'||x|)^{\frac{p-2}{2p}}}\frac{|a_{k-1}|}{(|x'||x|)^{\frac{1}{p}}}(|x'||x|)^{\frac{1}{2}}|u^{c,\gamma}|\\
&\quad+C\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{e^{-1}}}|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}|\frac{|a_k|^{\frac{p-2}{2}}}{|x|^{\frac{p-2}{p}}}\frac{|a_{k-1}|}{|x|^{\frac{2}{p}}}|x||u^{c,\gamma}|\\
&\le CK(c,\gamma)\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|a_k|^p}{|x'||x|}\right)^{\frac{p-2}{2p}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|a_{k-1}|^p}{|x'||x|}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+CK(c,\gamma)\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|a_k|^p}{|x|^2}\right)^{\frac{p-2}{2p}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|a_{k-1}|^p}{|x|^2}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le C_0K(c,\gamma)\big\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^2}^{\frac{2(p-1)}{p}}\big\|\nabla|a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}\\
&\le\frac{C_0(p-1)K(c,\gamma)}{p}\big\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^2}^2+\frac{C_0K(c,\gamma)}{p}\big\|\nabla|a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^2}^2,
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

其中 $\Omega_{e^{-1}}$ 是由 (2.8) 定义的锥。

利用引理 2.7，我们推得 $(|x'||x|)^{\frac{p-2}{2}}$ 和 $|x|^{p-2}$ 都是 A_p-权。由于 $(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j$ 是 Calder´on-Zygmund 算子，因此根据加权 L^p 空间上黎斯变换的有界性（见 [11]中的定理 9.4.6）、H¨older 不等式、杨氏不等式、推论 2.3 和引理 2.5，可得

(*i*) 若 $p=2$，则

$$
\int_{\mathbb{R}^3}\pi_{k-1}\mathrm{div}a_k=0;\tag{3.8}
$$

(*ii*) 如果 $p>2$，则

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\pi_{k-1}\mathrm{div}(|a_k|^{p-2}a_k)\le C\int_{\mathbb{R}^3}|\pi_{k-1}||\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}||a_k|^{\frac{p}{2}-1}\\
&\le C\big\|(|x'||x|)^{\frac{p-2}{2p}}|a_{k-1}\otimes u^{c,\gamma}|\big\|_{L^p(\Omega_{e^{-1}})}\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}\left\|\frac{|a_k|^{\frac{p-2}{2}}}{(|x'||x|)^{\frac{p-2}{2p}}}\right\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}}\\
&\quad+C\big\||x|^{\frac{p-2}{p}}|a_{k-1}\otimes u^{c,\gamma}|\big\|_{L^p(\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{e^{-1}})}\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}\left\|\frac{|a_k|^{\frac{p-2}{2}}}{|x|^{\frac{p-2}{p}}}\right\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}}\\
&\le C_0K(c,\gamma)\big\|\nabla|a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^p}^{\frac{2}{p}}\big\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^2}^{\frac{2(p-1)}{p}}\\
&\le\frac{C_0(p-1)K(c,\gamma)}{p}\big\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^2}^2+\frac{C_0K(c,\gamma)}{p}\|\nabla|a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^p}^2.
\end{aligned}\tag{3.9}
$$

然后将 (3.7)–(3.9) 代入 (3.6)，我们得到存在一个足够小的常数$\delta_p > 0$，使得如果 $|(c,\gamma)| < \delta_p$，则

$$C_0K(c,\gamma) < \begin{cases} 1, & p = 2, \\ \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2(p-2)}{p^2}\right\}, & p > 2, \end{cases} \tag{3.10}$$

因此，

$$\frac{d}{dt}\|a_k(t)\|_{L^p}^p + \|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 \le \tau_p\|\nabla|a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2, \tag{3.11}$$

其中

$$\tau_p := \begin{cases} C_0K(c,\gamma), & p = 2, \\ \frac{C_0K(c,\gamma)}{\min\{\frac{1}{2}, \frac{2(p-2)}{p} - C_0(p-1)K(c,\gamma)\}}, & p > 2. \end{cases} \tag{3.12}$$

因此，对任意 $T > 0$，将 (3.11) 从 0 积分到 T，由 (3.5) 可得

$$\|a_k(T)\|_{L^p}^p + \|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L_T^2L_x^2}^2 \le \tau_p\|\nabla|a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\|_{L_T^2L_x^2}^2 + \|w_0\|_{L^p}^p \le (1 + C\tau_p)\|w_0\|_{L^p}^p,$$

结合插值不等式可知，对于 $0 < \alpha \le 1$,

$$\|a_k\|_{L_t^\infty L_x^p \cap L_t^{\frac{p}{\alpha}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} + \left\|\nabla|a_k|^{\frac{p}{2}}\right\|_{L_t^2L_x^2}^{\frac{2}{p}} \le C(p,\alpha,c,\gamma)\|w_0\|_{L^p}. \tag{3.13}$$

$_p$ $_{3p}$步骤 2。现在证明，对于任意 $0 < \alpha \le 1$，$\{a_k\}$ 是 $L_t^\infty L_x^p \cap L_t^{\frac{}{\alpha}} L_x^{\overline{3-2\alpha}}$ 中的柯西序列。对于 $k \ge 1$，$a_{k+1} - a_k$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t(a_{k+1} - a_k) - \Delta(a_{k+1} - a_k) \\ = -\mathrm{div}(u^{c,\gamma} \otimes (a_k - a_{k-1}) + (a_k - a_{k-1}) \otimes u^{c,\gamma}) - \nabla(\pi_k - \pi_{k-1}), \\ \mathrm{div}(a_{k+1} - a_k) = 0, \\ \pi_k - \pi_{k-1} = (-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(u^{c,\gamma} \otimes (a_k - a_{k-1}) + (a_k - a_{k-1}) \otimes u^{c,\gamma}), \\ (a_{k+1} - a_k)(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

不失一般性，设 $\{a_k\}$ 是一个光滑序列。将上式乘以 $|a_{k+1} - a_k|^{p-2}(a_{k+1} - a_k)$ 并分部积分，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|a_{k+1} - a_k\|_{L^p}^p + \frac{4(p-2)}{p^2}\|\nabla|a_{k+1} - a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 + \||\nabla(a_{k+1} - a_k)||a_{k+1} - a_k|^{\frac{p-2}{2}}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (u^{c,\gamma} \otimes (a_k - a_{k-1}) + (a_k - a_{k-1}) \otimes u^{c,\gamma}) \cdot \nabla(|a_{k+1} - a_k|^{p-2}(a_{k+1} - a_k)) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} (\pi_k - \pi_{k-1})\mathrm{div}(|a_{k+1} - a_k|^{p-2}(a_{k+1} - a_k)). \end{aligned}$$

采用与 (3.11) 相同的论证，可得

$$\frac{d}{dt}\|(a_{k+1} - a_k)(t)\|_{L^p}^p + \|\nabla|a_{k+1} - a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 \le \tau_p\|\nabla|a_k - a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2,$$

其中 τ_p 由 (3.12) 给出。根据 (3.10)，我们知道 $\tau_p < 1$。因此，我们得到

$$\begin{aligned} &\|a_{k+1} - a_k\|_{L_t^\infty L_x^p} + \|\nabla|a_{k+1} - a_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L_t^2L_x^2}^{\frac{2}{p}} \\ &\le \sqrt[p]{\tau_p}\big(\|a_k - a_{k-1}\|_{L_t^\infty L_x^p} + \|\nabla|a_k - a_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\|_{L_t^2L_x^2}^{\frac{2}{p}}\big), \end{aligned}$$

这意味着 $\{a_k\}$ 在此范数下是一个柯西序列。因此，存在一个极限 $a \in L_t^\infty L_x^p$ 满足 $\nabla|a|^{\frac{p}{2}} \in L_t^2 L_x^2$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k - a\|_{L_t^\infty L_x^p} + \|\nabla|a_k - a|^{\frac{p}{2}}\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} = 0.$$

结合 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式可得，对于 $0 < \alpha \leq 1$,

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k - a\|_{L_t^\infty L_x^p \cap L_t^{\frac{p}{\alpha}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} + \|\nabla|a_k - a|^{\frac{p}{2}}\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} = 0.$$

然后将 $k \to \infty$ 代入 (3.13)，可得

$$\|a\|_{L_t^\infty L_x^p \cap L_t^{\frac{p}{\alpha}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} + \big\|\nabla|a|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} \leq C(p,\alpha,c,\gamma)\|w_0\|_{L^p}.$$

步骤 3。剩下需要证明 $a \in C([0,\infty); L_x^p)$。由于时间平移不变性，只需证明 a 在 $t = 0$. 附近的连续性。为此，只需证明对于任意序列 $t_i \to 0$，当 $i \to \infty$ 时，有

$$\lim_{i\to\infty} \|a(\cdot, t_i) - w_0\|_{L^p} = 0. \tag{3.15}$$

由 (3.2) 可知

$$\|a(\cdot, t_i)\|_{L^p} \leq \|w_0\|_{L^p}, \quad \text{for each } i \geq 1. \tag{3.16}$$

根据自反巴拿赫空间的弱紧性，可推得存在子序列 $\{t_{i_j}\}$，使得

$$a(\cdot, t_{i_j}) \rightharpoonup w_0 \quad \text{weakly in } L^p, \text{ as } j \to \infty.$$

由此可得

$$\|w_0\|_{L^p} \leq \liminf_{j\to\infty} \|a(\cdot, t_{i_j})\|_{L^p}.$$

另一方面，利用式 (3.16) 中 $\{\|a(\cdot, t_i)\|_{L^p}\}$ 的有界性，可得

$$\limsup_{j\to\infty} \|a(\cdot, t_{i_j})\|_{L^p} \leq \|w_0\|_{L^p}.$$

于是我们得到

$$\lim_{j\to\infty} \|a(\cdot, t_{i_j})\|_{L^p} = \|w_0\|_{L^p}.$$

由于 $\|a(\cdot, t_i)\|_{L^p}$ 随着 i 的增大而递减，因此我们还可进一步推出该结论同样 (3.15) 成立。证明完毕。

□

对于任意满足 $T > 0$ 的 $w_1, w_2 \in L^{\frac{4p}{3}}([0,T]; L_x^{2p}(\mathbb{R}^3))$，我们将如下估计非线性部分 $N(w_1, w_2)$:

$$N(w_1, w_2) = -\int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{L}} \mathbb{P}\mathrm{div}(w_1 \otimes w_2) ds.$$

为简便起见，记 $z := N(w_1, w_2)$。则 z 满足以下方程

$$\begin{cases} \partial_t z - \Delta z + (z\cdot\nabla)u^{c,\gamma} + (u^{c,\gamma}\cdot\nabla)z + \nabla\pi_2 = -\mathrm{div}(w_1 \otimes w_2), \\ \mathrm{div} z = 0, \\ z(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

也就是说，对于任意 $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ 且 $\mathrm{div}\varphi = 0$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (z(\partial_t\varphi + \Delta\varphi + u^{c,\gamma}\cdot\nabla\varphi) + (w_1\otimes w_2)\cdot\nabla\varphi - (z\cdot\nabla)u^{c,\gamma}\varphi)\,dxdt = 0.$$

引理 3.3. 设 $p \geq 3$ 和 $T > 0$。对于任意 $w_1, w_2 \in L^{\frac{4p}{3}}([0,T];\, L^{2p}(\mathbb{R}^3))$，存在一个足够小的常数 $\delta_p > 0$，使得如果 $(c,\gamma) \in M \cap \{|(c,\gamma)| \leq \delta_p\}$，那么方程 (3.17) 对任意 $0 < \alpha \leq 1$ 均有唯一解 $z \in C_T L_x^p \cap L_T^{\frac{\alpha}{2}} L_x^{\frac{3}{3-2\alpha}}$。此外，该解满足：对于任意 $0 < \alpha \leq 1$,

$$\|z\|_{C_T L_x^p \cap L_T^{\frac{\alpha}{2}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} + \left\||\nabla|z|^{\frac{p}{2}}\right\|_{L_T^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} \leq C(p,\alpha,c,\gamma) \begin{cases} \|w_1\|_{L_T^{\frac{4p}{2p-3}} L_x^{2p}} \|w_2\|_{L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}}, \\ T^{\frac{p-3}{2p}} \|w_1\|_{L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} \|w_2\|_{L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}}. \end{cases}$$

证明. 与引理 3.1 类似，我们将使用经典的皮卡迭代格式来证明 z 的存在性。取 $z_0 = 0$。对于任意给定的 $w_1, w_2 \in L^{\frac{4p}{3}}([0,T];\, L^{2p}(\mathbb{R}^3))$，我们构造一个迭代序列 $\{z_k\}$，使其满足以下方程：对于 $k \geq 1$,

$$\begin{cases} \partial_t z_k - \Delta z_k = -\mathrm{div}(u^{c,\gamma}\otimes z_{k-1} + z_{k-1}\otimes u^{c,\gamma} + w_1\otimes w_2) - \nabla\pi_{k-1}, \\ \mathrm{div} z_k = 0, \\ \pi_{k-1} = (-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(u^{c,\gamma}\otimes z_{k-1} + z_{k-1}\otimes u^{c,\gamma} + w_1\otimes w_2), \\ z_k(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

步骤 1. 断言对于任意 $0 < \alpha \leq 1$, $k \geq 1$, $z_k \in L^\infty([0,T];\, L^p(\mathbb{R}^3)) \cap L^{\frac{p}{\alpha}}([0,T];\, L^{\frac{3p}{3-2\alpha}}(\mathbb{R}^3))$，以及 $\nabla|z_k|^{\frac{p}{2}} \in L^2([0,T];\, L^2(\mathbb{R}^3))$。对于 $k = 1$，假设 z_1 是光滑的。将方程 (3.18) 乘以 $|z_1|^{p-2}z_1$ （其中 $p \geq 3$），由分部积分可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|z_1\|_{L^p}^p + \frac{4(p-2)}{p^2}\|\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 + \||\nabla z_1||a_1|^{\frac{p-2}{2}}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (w_1\otimes w_2)\cdot\nabla(|z_1|^{p-2}z_1) + \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(w_1\otimes w_2)\mathrm{div}(|z_1|^{p-2}z_1) := I_1 + I_2. \end{aligned}$$

对于第一项 I_1，由 H¨older 不等式和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} |I_1| \leq& C\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}||z_1|^{\frac{p}{2}-1}|w_1\otimes w_2| \\ \leq& C\|\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}\|z_1\|_{L^p}^{\frac{p-2}{2}}\|w_1\otimes w_2\|_{L^p} \\ \leq& \frac{4(p-2)}{3p^2}\|\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 + C(p)\|z_1\|_{L^p}^{p-2}\|w_1\otimes w_2\|_{L^p}^2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

由标量黎斯算子的性质（参见 [13] 中的定理 1.1）可知

$$\|(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(w_1\otimes w_1)\|_{L^p} \leq \overline{C}_0 H_p\|w_1\otimes w_2\|_{L^p}, \tag{3.20}$$

其中 $\overline{C}_0$ 是一个与 p 和 $H_p = \cot(\pi/2p)$ 无关的普适常数。由 Hölder 不等式和杨氏不等式再次可得

$$\begin{aligned}|I_2| \leq & \frac{2(p-2)}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(w_1\otimes w_2)||\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}||z_1|^{\frac{p-2}{2}}\\ \leq & \frac{2(p-2)}{p}\overline{C}_0 H_p\|\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}\|z_1\|_{L^p}^{\frac{p-2}{2}}\|w_1\otimes w_2\|_{L^p}\\ \leq & \frac{4(p-2)}{3p^2}\|\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 + C(p)\|z_1\|_{L^p}^{p-2}\|w_1\otimes w_2\|_{L^p}^2, \end{aligned} \tag{3.21}$$

结合上述结果，我们推得

$$\frac{d}{dt}\|z_1\|_{L^p}^p + \frac{4(p-2)}{3p}\|\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 \leq C(p)\|z_1\|_{L^p}^{p-2}\|w_1\otimes w_2\|_{L^p}^2. \tag{3.22}$$

从 0 到 s 积分，并取任意 $0 < s \leq T$，由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}\|z_1(s)\|_{L^p}^p \leq & C(p)\|z_1\|_{L_T^\infty L_x^p}\|w_1\otimes w_2\|_{L_t^2 L_x^p}^2\\ \leq & \frac{1}{2}\|z_1\|_{L_T^\infty L_x^p}^p + C(p)\|w_1\otimes w_2\|_{L_t^2 L_x^p}^p,\end{aligned}$$

由此得到

$$\|z_1\|_{L_T^\infty L_x^p} \leq C(p)\|w_1\otimes w_2\|_{L_t^2 L_x^p}. \tag{3.23}$$

将 (3.23) 代入 (3.22)，并从 0 到 T 积分，可得

$$\|\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}\|_{L_T^2 L^2}^{\frac{2}{p}} \leq C(p)\|z_1\|_{L_T^\infty L_x^p}^{\frac{p-2}{p}}\|w_1\otimes w_2\|_{L_T^2 L_x^p}^{\frac{2}{p}} \leq C(p)\|w_1\otimes w_2\|_{L_T^2 L_x^p}.$$

结合 (3.23) 和插值不等式可知，对于 $0 < \alpha \leq 1$,

$$\|z_1\|_{L_T^\infty L_x^p \cap L_T^{\frac{p}{\alpha}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} + \big\|\nabla|z_1|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_T^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} \leq C(p,\alpha)\|w_1\otimes w_2\|_{L_T^2 L_x^p}. \tag{3.24}$$

假设存在某个常数 $C = C(p,\alpha,c,\gamma) > 0$，使得将 z_1 替换为 z_{k-1} 时，(3.31) 对 $k \geq 3$ 成立，即对于 $0 < \alpha \leq 1$,

$$\|z_{k-1}\|_{L_T^\infty L_x^p \cap L_T^{\frac{p}{\alpha}} L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}} + \big\|\nabla|z_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_T^2 L_x^2}^{\frac{2}{p}} \leq C\|w_1\otimes w_2\|_{L_T^2 L_x^p}. \tag{3.25}$$

接下来我们需要证明 (3.25) 对 z_k 也成立。假设 z_k 光滑。将 (3.18) 乘以 $|z_k|^{p-2}z_k$, 由分部积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|z_k\|_{L^p}^p + \frac{4(p-2)}{p^2}\|\nabla|z_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2 + \||\nabla z_k||a_1|^{\frac{p-2}{2}}\|_{L^2}^2\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}(w_1\otimes w_2)\cdot\nabla(|z_k|^{p-2}z_k) + \int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(w_1\otimes w_2)\mathrm{div}(|z_k|^{p-2}z_k)\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3}(u^{c,\gamma}\otimes z_{k-1} + z_{k-1}\otimes u^{c,\gamma})\cdot\nabla(|z_k|^{p-2}z_k)\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(u^{c,\gamma}\otimes z_{k-1} + z_{k-1}\otimes u^{c,\gamma})\mathrm{div}(|z_k|^{p-2}z_k)\\ &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned} \tag{3.26}$$

完全类似于 (3.19) 和 (3.21)，我们有

$$|I_1+I_2|\leq\frac{8(p-2)}{3p^2}\|\nabla|z_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2+C(p)\|z_k\|_{L^p}^{p-2}\|w_1\otimes w_2\|_{L^p}^2. \tag{3.27}$$

关于项 I_3 和 I_4，由与 (3.7)–(3.9) 相同的论证，从 (3.25) 可得

$$|I_3+I_4|\leq\frac{2C_0(p-1)K(c,\gamma)}{p}\big\|\nabla|z_k|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^2}^2+\frac{2C_0K(c,\gamma)}{p}\big\|\nabla|z_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L^2}^2. \tag{3.28}$$

取一个足够小的常数 $\delta_p>0$，使得若 $|(c,\gamma)|<\delta_p$，则有

$$C_0K(c,\gamma)<\min\Big\{\frac{1}{2},\frac{2(p-2)}{3p^2}\Big\}.$$

然后将 (3.27) 和 (3.28) 代入 (3.26)，可推出

$$\frac{d}{dt}\|z_k(t)\|_{L^p}^p+\|\nabla|z_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2\leq\bar{\tau}_p\|\nabla|z_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\|_{L^2}^2+C\|z_k\|_{L^p}^{p-2}\|w_1\otimes w_2\|_{L^p}^2, \tag{3.29}$$

其中

$$\bar{\tau}_p:=\frac{C_0K(c,\gamma)}{\min\{\frac{1}{2},\frac{2(p-2)}{3p}-C_0(p-1)K(c,\gamma)\}}<1. \tag{3.30}$$

因此，将 (3.29) 从 0 积分至 t，并令 $0<t\leq T$，由 (3.25) 和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}&\|z_k(t)\|_{L^p}^p+\|\nabla|z_k|^{\frac{p}{2}}\|_{L_t^2L_x^2}^2\\&\leq\bar{\tau}_p\|\nabla|z_{k-1}|^{\frac{p}{2}}\|_{L_T^2L_x^2}^2+C\|z_k\|_{L^p}^{p-2}\|w_1\otimes w_2\|_{L^p}^2\\&\leq\frac{1}{2}\|z_k\|_{L_T^\infty L_x^p}^p+C(1+\bar{\tau}_p)\|w_1\otimes w_2\|_{L_t^2L_x^p}^p,\end{aligned}$$

结合插值不等式可得，对于 $0<\alpha\leq1$,

$$\|z_k\|_{L_T^\infty L_x^p\cap L_T^{\frac{p}{\alpha}}L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}}+\big\|\nabla|z_k|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_T^2L_x^2}^{\frac{2}{p}}\leq C(p,\alpha,c,\gamma)\|w_1\otimes w_2\|_{L_T^2L_x^p}. \tag{3.31}$$

步骤 2. 由于 $z_{k+1}-z_k$ 也满足方程 (3.14)，其中 a_i 由 z_i、$i=k-1$、k、$k+1$替换，因此，按照引理 3.1 中证明的步骤 2 的相同方法，$_p$ $_{3p}$我们推得 $\{z_k\}$是 $L_T^\infty L_x^p\cap L_T^{\frac{\alpha}{}}L_x^{\overline{3-2\alpha}}$中的柯西序列，对任意 $0<\alpha\leq1$均成立。$_p$ $_{3p}$此外，存在一个极限 $z\in L_T^\infty L_x^p\cap L_T^{\frac{\alpha}{}}L_x^{\overline{3-2\alpha}}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\|z_k-z\|_{L_T^\infty L_x^p\cap L_T^{\frac{p}{\alpha}}L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}}+\|\nabla|z_k-z|^{\frac{p}{2}}\|_{L_T^2L_x^2}^{\frac{2}{p}}=0,$$

结合 (3.31) 和 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\|z\|_{L_T^\infty L_x^p\cap L_T^{\frac{p}{\alpha}}L_x^{\frac{3p}{3-2\alpha}}}+\big\|\nabla|z|^{\frac{p}{2}}\big\|_{L_T^2L_x^2}^{\frac{2}{p}}\leq&C(p,\alpha,c,\gamma)\|w_1\otimes w_2\|_{L_T^2L_x^p}\\\leq&C(p,\alpha,c,\gamma)\begin{cases}\|w_1\|_{L_T^{\frac{4p}{2p-3}}L_x^{2p}}\|w_2\|_{L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p}},\\T^{\frac{p-3}{2p}}\|w_1\|_{L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p}}\|w_2\|_{L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p}}.\end{cases}\end{aligned}$$

稍作修改后，按照引理 3.1 证明中的步骤 3，我们也有$z\in C([0,T];\,L^p(\mathbb{R}^3))$。证明完毕。

□

现在，我们将引理 2.8、3.1 和 3.3 结合起来，证明定理 1.2 和 1.5。

定理 1.2 和 1.5 的证明。我们将证明分为以下两部分。

第 1 部分。设 $p \geq 3$。对于 $w_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$ 和 $w_i \in L^{\frac{4p}{3}}([0,T];\, L^{2p}(\mathbb{R}^3))$, $i = 1,\ 2$，由引理 3.1 和 3.3 可得

$$\begin{cases} \|a\|_{L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} \leq C_1 \|w_0\|_{L^p}, \\ \|N(w_1, w_2)\|_{L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} \leq C_2 T^{\frac{p-3}{2p}} \|w_1\|_{L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} \|w_2\|_{L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}}. \end{cases} \tag{3.32}$$

接着，对 $E = L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}$ 应用引理 2.8，存在一个小常数 $T > 0$，使得 $\|a\|_{L_T^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} T^{\frac{p-3}{2p}} < \frac{1}{4C_2}$，因此问题 (1.5) 在 $[0,T]$ 上存在唯一的局部温和解 $L^p\ w$，且满足 (1.10)。

第 2 部分。利用带有 $p = 3$ 的 (3.32)，我们选取 $0 < \varepsilon_0 \leq \frac{1}{4C_1C_2}$，使得 $\|w_0\|_{L^3} < \varepsilon_0$。于是对于任意 $T > 0$，通过对 $E = L_T^4 L_x^6$ 应用引理 2.8，我们得到问题 (1.5) 在 $[0,T]$ 上存在唯一的温和解 $L^p\ w$，满足

$$\|w\|_{C_t L_x^3 \cap L_t^4 L_x^6} + \|\nabla |w|^{\frac{3}{2}}\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2}{3}} \leq C(p, c, \gamma) \|w_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.33}$$

由于 $T > 0$ 是任意的，w 是一个全局时间解。

考虑 $w_0 \in L_\sigma^p \cap L_\sigma^3(\mathbb{R}^3)$ 且 $\|w_0\|_{L^3} < \varepsilon_0$ 的情形，其中 $3 < p \leq \frac{9}{2}$。利用 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式和 (3.33)，我们推得对于 $3 < p \leq \frac{9}{2}$，

$$\|w\|_{L_t^{\frac{4p}{2p-3}} L_x^{2p}} \leq C \|w\|_{L_t^\infty L_x^3}^{\frac{9-2p}{4p}} \|\nabla |w|^{\frac{3}{2}}\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{2p-3}{2p}} \leq C \|w_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}.$$

结合引理 3.1 和 3.3，可得

$$\begin{aligned} \|w\|_{C_t L_x^p \cap L_t^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} \leq & \|a\|_{C_t L_x^p \cap L_t^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} + \|N(w,w)\|_{C_t L_x^p \cap L_t^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} \\ \leq & C \|w_0\|_{L^p} + C \|w\|_{L_t^{\frac{4p}{2p-3}} L_x^{2p}} \|w\|_{L_t^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} \\ \leq & C \|w_0\|_{L^p} + C\varepsilon_0 \|w\|_{L_t^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}}. \end{aligned}$$

如有必要，减小 ε_0，则有 $C\varepsilon_0 < 1$。因此得到

$$\|w\|_{C_t L_x^p \cap L_t^{\frac{4p}{3}} L_x^{2p}} \leq C \|w_0\|_{L^p}.$$

因此，综合以上结果可知，在满足 $w_0 \in L_\sigma^p \cap L_\sigma^3(\mathbb{R}^3)$ 且 $\|w_0\|_{L^3} < \varepsilon_0$ with $p \in [3, \frac{9}{2}]$ 的条件下，w 是问题 (1.5) 的一个全局温和解。

□

4. Asymptotic stability for solutions to the perturbed equations

我们首先介绍下文将要用到的对数 Sobolev 不等式。其证明见 [19] 中的定理 8.14。

引理 4.1. 对任意 $f \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 和 $a > 0$，有

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^2 \ln \frac{f^2}{\|f\|_2^2} dx + 3(1 + \ln a)\|u\|_2^2 \leq \frac{a^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f|^2.$$

现在我们可以给出定理 1.7 的证明了。值得注意的是，定理 1.7 中使用的方法可以追溯到早期工作 [8]，并且近期已被应用于研究 Landau 解的纳维–斯托克斯方程扰动问题解的渐近稳定性 [28]。

定理 1.7 的证明。我们分两个子步骤完成证明。

步骤 1. 考虑 $q>3$ 的情形。令 $T>0$，并记 $r(t)=\frac{1}{T}-{}^{1}\,{}_{(\frac{1}{q}-\frac{1}{3})}\,\overline{t+\frac{1}{3}},$ $t\in[0,T]$。根据标准逼近论证（例如，参见 [17,21,22]），不失一般性，我们可以假设 w 是光滑的。由 (1.5) 可知，直接计算得

$$\begin{aligned}
&r(t)^2\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}^{r(t)-1}\frac{d}{dt}\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}\\
&=\dot r(t)\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)}\ln\big(|w(\cdot,t)|^{r(t)}/\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}^{r(t)}\big)dx\\
&\quad+r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i\partial_j\partial_j w_i dx\\
&\quad+r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i[\partial_j(w_iw_j+w_iu_j^{c,\gamma}+u_i^{c,\gamma}w_j)-\partial_i\pi]dx. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

对于 (4.1) 右端的第二项，由分部积分可得

$$\begin{aligned}
&r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i\partial_j\partial_j w_i dx=-r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j(|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i)\partial_j w_i dx\\
&=-\frac{r(t)^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla|w(t)|^{r(t)-2}\nabla|w|^2dx-r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(t)|^{r(t)-2}|\nabla w|^2dx\\
&=-4(r(t)-2)\big\|\nabla|w(t)|^{\frac{r(t)}{2}}\big\|_{L^2}^2-r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(t)|^{r(t)-2}|\nabla w|^2dx. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

关于 (4.1) 右端的最后一项，我们有如下结论。断言：

$$\begin{aligned}
&\Big|r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i[\partial_j(w_iw_j+w_iu_j^{c,\gamma}+u_i^{c,\gamma}w_j)-\partial_i\pi]dx\Big|\\
&\le C(q,c,\gamma)r^2(K(c,\gamma)+\|w_0\|_{L^3})\|\nabla|w|^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

为简便起见，记

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1=&r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i\partial_j(w_iw_j)dx,\\
\mathcal{A}_2=&r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i\partial_j(w_iu_j^{c,\gamma})dx,\\
\mathcal{A}_3=&r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i\partial_j(u_i^{c,\gamma}w_j)dx,\\
\mathcal{A}_4=&r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w_i\partial_i\pi dx.
\end{aligned}$$

对于第一项 $\mathcal{A}_1$，由分部积分、H¨older 不等式、索博列夫嵌入 $\dot H^1(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$（最佳常数见 [44]）以及式 (3.33)，可得

that

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 =& -r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}w|w|^2dx\\ \leq& r(t)(r(t)-2)\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla|w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\right||w|^{\frac{r(t)}{2}}|w|dx\\ \leq& r(t)(r(t)-2)\left\|\nabla|w|^{\frac{r(t)}{2}}\right\|_{L^2}\left\||w|^{\frac{r(t)}{2}}\right\|_{L^6}\|w\|_{L^3}\\ \leq& C_0r(t)(r(t)-2)\|w_0\|_{L^3}\left\|\nabla|w|^{\frac{r(t)}{2}}\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

对于第二项 $\mathcal{A}_2$，由分部积分、H¨older 不等式、推论 2.3 和引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 =& -\frac{r(t)^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^{c,\gamma}\nabla|w(\cdot,t)|^{r(t)-2}|w|^2dx\\ =& -r(t)(r(t)-2)\int_{\Omega_{e^{-1}}}(|x'||x|)^{\frac{1}{2}}u^{c,\gamma}\nabla|w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\frac{|w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}}{(|x'||x|)^{\frac{1}{2}}}dx\\ & -r(t)(r(t)-2)\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{e^{-1}}}|x|u^{c,\gamma}\nabla|w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\frac{|w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}}{|x|}dx\\ \leq& r(t)(r(t)-2)K(c,\gamma)\left\|\nabla|w|^{\frac{r(t)}{2}}\right\|_{L^2}\left(\left\|\frac{|w|^{\frac{r(t)}{2}}}{(|x'||x|)^{\frac{1}{2}}}\right\|_{L^2}+\left\|\frac{|w|^{\frac{r(t)}{2}}}{|x|}\right\|_{L^2}\right)\\ \leq& C_0r(t)(r(t)-2)K(c,\gamma)\left\|\nabla|w|^{\frac{r(t)}{2}}\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

回顾以下基本不等式:

(1) 对于实数 a_i, $i=1,...,n$, $n\geq 1$,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\leq n\sum_{i=1}^n a_i^2; \tag{4.4}$$

(2) 对于 c、$d\geq 0$、$c+d\geq 1$、$1\leq m\leq\infty$、x_i、$y_i\geq 0$、$1\leq i\leq m$,

$$\sum_{i=1}^m x_i^c y_i^d\leq\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^c\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^d. \tag{4.5}$$

关于第三项 $\mathcal{A}_3$，由推论 2.3、(2.10)、(4.4) 和 (4.5) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3 \leq& 9r(t)^2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|w(\cdot,t)|^{r(t)}}{|x'||x|}(|x'||x||\nabla u^{c,\gamma}|)dx\\ \leq& 9r(t)^2K(c,\gamma)\left\|\nabla|w|^{\frac{r(t)}{2}}\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

请注意，为了对项 $\mathcal{A}_3$ 进行直接而简单的计算，我们使用 (2.10) 而不是 (2.9)。

现在我们继续估计最后一项 $\mathcal{A}_4$。由于 $\pi = (-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j(u^c, {}_i{}^{\gamma} w_j + w_i u^c, {}_j{}^{\gamma} + w_i w_j)$，由分部积分可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4 =& r(t)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i |w(\cdot,t)|^{r(t)-2} w_i \pi dx \\
=& r(t)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i |w(\cdot,t)|^{r(t)-2} w_i (-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j (u_i^{c,\gamma} w_j + w_i u_j^{c,\gamma}) dx \\
&+ r(t)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i |w(\cdot,t)|^{r(t)-2} w_i (-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j (w_i w_j) dx \\
=& : \mathcal{A}_4^1 + \mathcal{A}_4^2.
\end{aligned}$$

与 (3.9) 类似，由于 $(|x'||x|)^{\frac{r-2}{2}}$ 和 $|x|^{r-2}$ 都是 A_r-权重，根据 [11]，中的定理 9.4.6、霍尔德不等式、推论 2.3 和引理 2.5，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^1 \leq& 2r(t)(r(t)-2) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}| |w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}-1} |(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j (u_i^{c,\gamma} w_j + w_i u_j^{c,\gamma})| dx \\
\leq& 4r(t)(r(t)-2) C_r \|(|x'||x|)^{\frac{r-2}{2r}} (u^{c,\gamma} \otimes w)\|_{L^r(\Omega_{e^{-1}})} \left\| \frac{|w|^{\frac{r}{2}-1}}{(|x'||x|)^{\frac{r-2}{2r}}} \right\|_{L^{\frac{2r}{r-2}}} \|\nabla |w|^{\frac{r}{2}}\|_{L^2} \\
&+ 4r(t)(r(t)-2) C_r \||x|^{\frac{r-2}{r}} (u^{c,\gamma} \otimes w)\|_{L^r(\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{e^{-1}})} \left\| \frac{|w|^{\frac{r}{2}-1}}{|x|^{\frac{r-2}{r}}} \right\|_{L^{\frac{2r}{r-2}}} \|\nabla |w|^{\frac{r}{2}}\|_{L^2} \\
\leq& 4r(t)(r(t)-2) C_r K(c,\gamma) \left(\left\| \frac{|w|^{\frac{r}{2}}}{(|x'||x|)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{|w|^{\frac{r}{2}}}{|x|} \right\|_{L^2} \right) \|\nabla |w|^{\frac{r}{2}}\|_{L^2} \\
\leq& 4\overline{C} r(t)(r(t)-2) C_r K(c,\gamma) \|\nabla |w|^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

其中 $\overline{C}$ 是嵌入常数，C_r 由 [11] 中的定理 9.4.6 给出。至于 $\mathcal{A}_4^2$，由 (3.20)、霍尔德不等式和索博列夫嵌入 $\dot{H}_1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$，可推出

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^2 \leq& 2r(t)(r(t)-2) \big\|\nabla |w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\big\|_{L^2} \big\||w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}-1}\big\|_{L^{\frac{6r}{r-2}}} \|(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j w_i w_j\|_{L^{\frac{3r}{r+1}}} \\
\leq& 2r(t)(r(t)-2) \overline{C}_0 H_{\frac{3r}{r+1}} \big\|\nabla |w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\big\|_{L^2} \big\||w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}-1}\big\|_{L^{\frac{6r}{r-2}}} \|w \otimes w\|_{L^{\frac{3r}{r+1}}} \\
\leq& 2r(t)(r(t)-2) \overline{C}_0 H_{\frac{3r}{r+1}} \big\|\nabla |w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\big\|_{L^2} \big\|w(\cdot,t)\big\|_{L^{3r}}^{\frac{r(t)}{2}-1} \|w(\cdot,t)\|_{L^{3r}} \|w(\cdot,t)\|_{L^3} \\
\leq& 2r(t)(r(t)-2) \overline{C}_0 H_{\frac{3r}{r+1}} \big\|\nabla |w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\big\|_{L^2} \big\||w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\big\|_{L^6} \|w(\cdot,t)\|_{L^3} \\
\leq& Cr(t)(r(t)-2) \|w_0\|_{L^3} \big\|\nabla |w(\cdot,t)|^{\frac{r(t)}{2}}\big\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

综合以上结果，可得 (4.3) 成立。

一旦证明了 (4.3)，对于任意 $q > 3$ 和 $1 < \tau < 1$，我们可以选取两个充分小的正常数 $\delta = \delta(q,\tau) \leq \delta_0$ 和 $\varepsilon = \varepsilon(q,\tau) \leq \varepsilon_0$，其中 δ_0 和 ε_0 由定理 1.5 给出，使得如果 $(c,\gamma) \in M \cap \{|(c,\gamma)| \leq \delta\}$ 且 $\|w_0\|_{L^3} < \varepsilon$，那么

$$Cr^2(K(c,\gamma) + \varepsilon) \leq 4\tau(r-2). \tag{4.6}$$

因此，将 (4.2)、(4.3) 和 (4.6) 代入 (4.1)，可得

$$\begin{aligned}
&r(t)^2\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}^{r(t)-1}\frac{d}{dt}\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}\\
&\le \dot r(t)\int_{\mathbb{R}^3}|w(\cdot,t)|^{r(t)}\ln\big(|w(\cdot,t)|^{r(t)}/\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}^{r(t)}\big)dx\\
&\quad -4(r(t)-2)(1-\tau)\|\nabla|w|^{\frac{\tau}{2}}\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

结合引理 4.1，可得对于 $a>0$,

$$\begin{aligned}
&r(t)^2\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}^{r(t)-1}\frac{d}{dt}\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}\\
&\le\left(\frac{a^2}{\pi}\dot r-4(r(t)-2)(1-\tau)\right)\|\nabla|w|^{\frac{\tau}{2}}\|_{L^2}^2-3\dot r(1+\ln a)\big\||w|^{\frac{\tau}{2}}\big\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

通过选取 $a=\big(\frac{4\pi(r(t)-2)(1-\tau)}{\dot r}\big)^{\frac12}$，我们有

$$r(t)^2\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}^{r(t)-1}\frac{d}{dt}\|w(\cdot,t)\|_{r(t)}\le-3\dot r(1+\ln a)\big\||w|^{\frac{\tau}{2}}\big\|_{L^2}^2,$$

即

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{r(t)}\le&\bigg[-\frac{1}{T}\left(\frac13-\frac1q\right)\left(3+\frac32\ln\frac{4\pi(r(t)-2)(1-\tau)}{r^2}\right)\\
&+\frac{3}{2T}\left(\frac13-\frac1q\right)\ln\frac{1}{T}\left(\frac13-\frac1q\right)\bigg]\|w(t)\|_{r(t)}.
\end{aligned}$$

由格朗沃尔不等式，我们推出

$$\|w(T)\|_{L^q}\le\mathcal{C}_q\left(\frac13-\frac1q\right)^{\frac32(\frac13-\frac1q)}T^{-\frac32(\frac13-\frac1q)}\|w_0\|_{L^3},\tag{4.7}$$

其中

$$\mathcal{C}_q=e^{-\frac1T(\frac13-\frac1q)\int_0^T(3+\frac32\ln\frac{4\pi(r(t)-2)(1-\tau)}{r(t)^2})dt}.$$

我们接下来根据 $\mathcal{C}_q$ 的取值进行精确计算。注意,

$$\int_0^T\ln\frac{4\pi(r(t)-2)(1-\tau)}{r(t)^2}dt=\frac{T}{\frac13-\frac1q}\int_3^q\frac{1}{r^2}\ln\frac{4\pi(r-2)(1-\tau)}{r^2}dr,$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_3^q\frac{1}{r^2}\ln\frac{4\pi(r-2)(1-\tau)}{r^2}dr\\
&=\int_3^q\frac{\ln4\pi(1-\tau)}{r^2}dr+\int_3^q\frac{\ln(r-2)}{r^2}dr-\int_3^q\frac{\ln r^2}{r^2}dr.
\end{aligned}$$

经过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_3^q\frac{\ln4\pi(1-\tau)}{r^2}dr=\left(\frac13-\frac1q\right)\ln4\pi(1-\tau),\\
&\int_3^q\frac{\ln(r-2)}{r^2}dr=\left(\frac12-\frac1q\right)\ln(q-2)+\frac12\ln\frac3q,\\
&\int_3^q\frac{\ln r^2}{r^2}dr=2\left(\frac{1+\ln3}{3}-\frac{1+\ln q}{q}\right).
\end{aligned}$$

综合以上计算结果，我们得到

$$\mathcal{C}_q = 3^{-\frac{7}{4}} q^{\frac{3}{2q}} (q-2)^{\frac{3}{2q}} \left(\frac{q}{q-2}\right)^{\frac{3}{4}} (4\pi(1-\tau))^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{q})} e^{-6(\frac{1}{3}-\frac{1}{q})}.$$

步骤 2。考虑 $q=3$ 的情形。由于 $w_0 \in L^3_\sigma$ 和 $L^{\frac{5}{2}}_\sigma \cap L^3_\sigma$ 在 L^3_σ 中稠密，因此存在一个序列 $\{w_{0,k}\}$ 属于 $L^{\frac{5}{2}}_\sigma \cap L^3_\sigma$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \|w_{0,k} - w_0\|_{L^3} = 0. \tag{4.8}$$

这与所假设的条件 $\|w_0\|_{L^3} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ 一起推出：存在某个 $N_0 = N(\varepsilon_0)$，使得当 $k \geq N_0$ 时，我们有 $\|w_{0,\ k} - w_0\|_{L^3} < \frac{\varepsilon_0}{2}$。于是，对于 $k \geq N_0$，我们得到

$$\|w_{0,k}\|_{L^3} \leq \|w_{0,k} - w_0\|_{L^3} + \|w_0\|_{L^3} < \varepsilon_0.$$

然后利用定理 1.5，对于每个 $k \geq N_0$，存在方程 (1.5) 的唯一全局温和解 L^3 mild solution w_k，其初始数据为 $w_{0,\ k} \in L^3_\sigma \cap L^{\frac{5}{2}}_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 和 $\|w_{0,\ k}\|_{L^3} < \varepsilon_0$。对于任意 $T > 0$，通过在 $[0,T]$ 上取 $r_k(t) = \frac{1}{-\frac{t}{15T}+\frac{2}{5}}$，由对 (4.7) 的证明稍作修改可得，对于 $T > 0$,

$$\|w_k(T)\|_{L^3} \leq C_0 T^{-\frac{1}{10}} \|w_{0,k}\|_{L^{\frac{5}{2}}} \to 0, \quad \text{as } T \to \infty, \tag{4.9}$$

其中 C_0 是一个普适正常数。值得强调的是，为确保条件 (4.6) 成立，我们在 (4.9) 右端采用范数 $\|w_{0,\ k}\|_{L^{\frac{5}{2}}}$，而不是 $\|w_{0,\ k}\|_{L^2}$。

对于 $k \geq N_0$，令 $v_k = w - w_k$ 和 $\pi_k = p - p_k$。对于任意 $T > 0$，v_k 是以下方程在 $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ 中的一个 L^3 温和解

$$\begin{cases} \partial_t v_k - \Delta v_k = \operatorname{div}(-v_k \otimes v_k + v_k \otimes w + w \otimes v_k) \\ +\operatorname{div}(u^{c,\gamma} \otimes v_k + v_k \otimes u^{c,\gamma}) + \nabla \pi_k, \\ \operatorname{div} v_k = 0, \\ v_k(x,0) = w_0(x) - w_{0,k}(x), \end{cases} \tag{4.10}$$

其中

$$\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3} < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \text{for } k \geq N_0. \tag{4.11}$$

将引理 3.1 和 3.3 的证明稍作修改后应用于方程 (4.10)，可得

$$\begin{aligned} &\|v_k\|_{C_T L^3_x \cap L^4_T L^6_x} + \left\| \nabla |v_k|^{\frac{3}{2}} \right\|^{\frac{2}{3}}_{L^2_T L^2_x} \\ &\leq C_1(\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3} + \|v_k\|^2_{L^4_T L^6_x}) + C_2 \left(\int_0^T \|v_k\|^2_{L^6} \|w\|^2_{L^6} dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

1 3由插值不等式可知 $\|v_k\|_{L^6} \le \|v_k\|_{L^3}^{\frac{4}{4}} \|v_k\|_{L^{9\infty}}$ 结合 H¨older 不等式和杨氏不等式可得，对于 $\mu > 0$,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T \|v_k\|_{L^6}^2 \|w\|_{L^6}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le & \|v_k\|_{L_T^3 L_x^9}^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^T \|v_k\|_{L^3} \|w\|_{L^6}^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\ \le & \mu \|v_k\|_{L_T^3 L_x^9} + \frac{27}{256\mu^3} \int_0^T \|v_k\|_{L^3} \|w\|_{L^6}^4 dt.\end{aligned}$$

将其代入 (4.12)，由索博列夫嵌入 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ 可得

$$\begin{aligned}&\|v_k\|_{C_T L_x^3 \cap L_t^4 L_x^6} + \big\| \nabla |v_k|^{\frac{3}{2}} \big\|_{L_T^2 L_x^2}^{\frac{2}{3}} \\ &\le C_1 \big(\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3} + \|v_k\|_{L_T^4 L_x^6}^2 \big) + \widetilde{C}_2 \mu \|\nabla |v_k|^{\frac{3}{2}}\|_{L_T^2 L_x^2}^{\frac{2}{3}} + \frac{C_2}{\mu^3} \int_0^T \|v_k\|_{L^3} \|w\|_{L^6}^4 dt.\end{aligned}$$

取 $\widetilde{C}_2 \mu = \frac{1}{2}$，由格朗沃尔不等式可得

$$\begin{aligned}&\|v_k\|_{C_T L_x^3 \cap L_T^4 L_x^6} + \big\| \nabla |v_k|^{\frac{3}{2}} \big\|_{L_T^2 L_x^2}^{\frac{2}{3}} \\ &\le C_1 \big(\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3} + \|v_k\|_{L_T^4 L_x^6}^2 \big) e^{C_2 \int_0^T \|w\|_{L^6}^4 dt}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

根据 (3.33) 和 (4.11)，如有必要，减小 ε_0，我们有

$$\begin{aligned}\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3} \le & \frac{\varepsilon_0}{2} \le \left(4C_1^2 e^{2C_2 C(c,\gamma)\varepsilon_0^4}\right)^{-1} \le \left(4C_1^2 e^{2C_2 C(c,\gamma)\|w_0\|_{L^3}^4}\right)^{-1} \\ \le & \left(4C_1^2 e^{2C_2 \int_0^T \|w\|_{L^6}^4 dt}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

断言，对于任意 $T > 0$,

$$\|v_k\|_{C_T L_x^3 \cap L_t^4 L_x^6} + \big\| \nabla |v_k|^{\frac{3}{2}} \big\|_{L_T^2 L_x^2}^{\frac{2}{3}} \le 2C_1 \|v_k(\cdot,0)\|_{L^3} e^{C_2 \int_0^T \|w\|_{L^6}^4 dt}. \tag{4.15}$$

我们不采用连续性方法（如 [28] 第 25 页所述）来证明 (4.15) 成立，而是在此给出一种新的简洁证明。为简便起见，记

$$\begin{aligned}g(T) :=& \|v_k\|_{C_T L_x^3 \cap L_T^4 L_x^6} + \big\| \nabla |v_k|^{\frac{3}{2}} \big\|_{L_T^2 L_x^2}^{\frac{2}{3}}, \\ a :=& \|v_k(\cdot,0)\|_{L^3}, \ b(T) := e^{C_2 \int_0^T \|w\|_{L^6}^4 dt}.\end{aligned}$$

于是，由（4.13）可得

$$g(T)^2 - \frac{1}{C_1 b(T)} g(T) + a \ge 0. \tag{4.16}$$

因此，利用（4.14），可得如下两个根：

$$g_{\pm}(T) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4ab(T)^2 C_1^2}}{2C_1 b(T)}.$$

只需要求 $g(T) \le g_{-}(T)$ 或 $g(T) \ge g_{+}(T)$，即可使 (4.16) 成立。现在我们说明，$g(T) \ge g_{+}(T)$ 这种情况不成立，必须

排除。事实上，若 $g(T) \geq g_+(T)$ 成立，并令 $T \to 0^+$，则有

$$\begin{aligned} g(0^+) =& \|v_k(\cdot,0)\|_{L^3} \geq g_+(0^+) = \frac{1+\sqrt{1-4ab(0)^2C_1^2}}{2C_1b(0)} \\ \geq& \frac{2-4C_1^2\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3}}{2C_1} = \frac{1}{C_1} - 2C_1\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3}, \end{aligned}$$

结合 (4.11)，可得对于 $k \geq N_0$,

$$\frac{1}{C_1} \leq (2C_1+1)\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3} \leq \frac{(2C_1+1)\varepsilon_0}{2}.$$

这导致矛盾，因为可以将 ε_0 选得足够小，使得$\varepsilon_0 < {C_1}^{2}{}_{(2C_1+1)}$ · 因此，我们有

$$\begin{aligned} &\|v_k\|_{C_TL_x^3\cap L_T^4L_x^6} + \big\|\nabla|v_k|^{\frac{3}{2}}\big\|^{\frac{2}{3}}_{L_T^2L_x^2} \\ &= g(T) \leq g_-(T) = \frac{1-\sqrt{1-4ab(T)^2C_1^2}}{2C_1b(T)} \leq \frac{4ab(T)^2C_1^2}{2C_1b(T)} \\ &= 2C_1\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3}e^{C_2\int_0^T\|w\|_{L^6}^4dt}. \end{aligned}$$

也就是说，(4.15) 成立。令 $T \to \infty$ 趋于无穷，并利用 (3.33)，由 (4.8) 可得

$$\begin{aligned} \|w-w_k\|_{L_t^\infty([0,\infty);L_x^3)} \leq& 2C_1\|v_k(\cdot,0)\|_{L^3}e^{C_2\int_0^\infty\|w\|_{L^6}^4dt} \\ \leq& 2C_1\|w_0-w_{0,k}\|_{L^3}e^{C_0\|w_0\|_{L^3}^4} \to 0, \quad \text{as } k\to\infty. \end{aligned} \tag{4.17}$$

注意，对于 $k \geq N_0$ 和 $t > 0$,

$$\|w(t)\|_{L^3} \leq \|w-w_k\|_{L_t^\infty([0,\infty);L_x^3)} + \|w_k(t)\|_{L^3}.$$

令 $k \to \infty$，然后令 $t \to \infty$，由 (4.9) 和 (4.17) 可得

$$\lim_{t\to\infty}\|w(t)\|_{L^3} = 0.$$

□

5. The relations between L^p mild solutions and L^2 weak solutions

本节旨在阐明扰动问题 (1.5) 的 L^p 温和解与 L^2 弱解之间的关系。首先，我们引入 L^2 弱解的定义如下。

定义 5.1（L^2 弱解）。对于 $T > 0$，若向量值函数 w 满足以下条件，则称其为问题 (1.5) 的 L^2 弱解:

$$w \in C_w([0,T];L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T];\dot{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^3)), \tag{5.1}$$

and

$$\begin{aligned} &(w(s_2),\varphi(s_2)) + \int_{s_1}^{s_2}[(\nabla w,\nabla\varphi) + (w\cdot\nabla w + w\cdot\nabla u^{c,\gamma} + u^{c,\gamma}\cdot\nabla w,\varphi)] \\ &= (w(s_1),\varphi(s_1)) + \int_{s_1}^{s_2}(w,\partial_t\varphi)dt \end{aligned} \tag{5.2}$$

对于任意 $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq T$和 $\varphi \in C([0,\infty);\ H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,\infty);\ L^2_\sigma(\mathbb{R}^3))$，其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示标准的 L^2-内积。当 (5.1)–(5.2) 对任意 $0 < T < \infty$. 成立时，该解是整体的

注 5.2. 这里说明， $C_w([0,T];\, L^2_\sigma(\mathbb{R}^3))$ 表示这样一个空间，其元素由在 t 中弱连续的 $L^2(\mathbb{R}^3)$-值函数构成，即，对于任意 $t_0 \in [0,T]$ 和 $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} w(x,t)v(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^3} w(x,t_0)v(x)dx, \quad \text{as } t \to t_0.$$

注意到，对于 $0 \le t_1 < t_2 \le \infty$ 和 $g \in L^2_t H^1_x$，由 H¨older 不等式、推论 2.3 和引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^3} u^{c,\gamma}\cdot(g\cdot\nabla)g dxdt\right| \\
&\le \int_{t_1}^{t_2} \left\||x'|^{\frac12}|x|^{\frac12}u^{c,\gamma}\right\|_{L^\infty(\Omega_{e^{-1}})} \left\||x'|^{-\frac12}|x|^{-\frac12}g\right\|_{L^2}\|\nabla g\|_{L^2}dt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left\||x|u^{c,\gamma}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{e^{-1}})} \left\||x|^{-1}g\right\|_{L^2}\|\nabla g\|_{L^2}dt \\
&\le CK(c,\gamma)\|\nabla g\|^2_{L^2_tL^2_x},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $\Omega_{e^{-1}}$ 是由 (2.8) 给出的一个锥。利用 (5.3)，并稍作修改后沿用 [28] 中的定理 1.4 和 [46] 中的定理 9.1 的证明，我们得到如下关于问题 (1.5) 的弱强唯一性定理。

定理 5.3. 取一个足够小的常数 $\delta_0 > 0$，使得若 $(c,\gamma) \in M \cap \{|(c,\gamma)| \le \delta_0\}$，则有 $K(c,\gamma) < \frac14$. 对于 $w_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 和 $0 < T \le \infty$，设 u, v 是问题 (1.5) 在 $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ 中满足 $u(x,0) = v(x,0) = w_0$的 L^2 弱解。假设 $u \in L^s([0,T];\, L^q(\mathbb{R}^3))$, $\frac3q + \frac2s = 1$, $q, s \in [2,\infty]$. 则 $u \equiv v$.

备注 5.4. 弱强唯一性定理表明，只有在找到一个强解时，所有满足相同初始数据的其他弱解才会在整个时空域内与之相同。

本节的第一个主要结果是：具有属于 $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 的初始数据的 L^2 问题 (1.5) 的弱解，经过一段时间后将成为a L^p 温和解。

定理 5.5. 设 $(c,\gamma) \in M \cap \{|(c,\gamma)| \le \delta_0\}$，其中 δ_0 如定理 5.3 所给。假设 w 是在 $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ 上问题 (1.5) 的 L^2 弱解，且初始数据为 $w_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$。那么，对任意 $3 \le p \le \frac92$，存在某个 $t_0 > 0$，使得 $w(\cdot + t_0)$ 是方程 (1.5) 的 L^p 温和解，其初始数据为$w(t_0) \in L^p_\sigma \cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$。

证明。利用 [26], 中的定理 1.1 和定理 1.2，我们知道对于任意 $0 \le s \le t$,

$$\|w(t)\|^2_{L^2} + \int_s^t \|\nabla\otimes w(\tau)\|^2_{L^2}d\tau \le \|w(s)\|^2_{L^2}, \quad \lim_{t\to\infty}\|w(t)\|_{L^2} = 0,$$

这意味着

$$\|w(t)\|_{L^2} \le \|w(s)\|_{L^2}, \quad \|\nabla w\|_{L^2_tL^2_x} \le \|w_0\|_{L^2}. \tag{5.4}$$

由插值不等式可得，对于 $2 < p \le 6$、 $0 < \alpha \le 1$,

$$\|w\|_{L^p} \le C\|\nabla w\|^\alpha_{L^2}\|w\|^{1-\alpha}_{L^2}, \quad \text{with } \frac1p = \frac12 - \frac{\alpha}{3}. \tag{5.5}$$

将 (5.5) 从 0 积分至 ∞，由 (5.4) 可得

$$\|w\|_{L_t^{\frac{2}{\alpha}}L_x^p} \leq C\|\nabla w\|_{L_t^2L_x^2}^{\alpha}\|w_0\|_{L^2}^{1-\alpha} \leq C\|w_0\|_{L^2}. \tag{5.6}$$

断言：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在某个 $t^* \geq 0$，使得对任意 $2 < p \leq 6$，都有 $\|w(t^*)\|_{L^p} \leq \varepsilon$。否则，将存在某个 $\bar{\varepsilon} > 0$ 和 $2 < p_0 \leq 6$，使得对所有 $t \geq 0$，$\|w(t)\|_{L^{p_0}} \geq \bar{\varepsilon}$。这与 (5.6) 矛盾。因此，利用 (5.4)，并选取由定理 1.5 给出的 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 和 ε_0，我们可以找到一点 $t_0 \geq 0$，使得对于 $3 \leq p \leq \frac{9}{2}$，$w(t_0) \in L_\sigma^p \cap L_\sigma^2 \cap L_\sigma^3(\mathbb{R}^3)$ 以及 $\|w(t_0)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \varepsilon_0$。然后结合定理 1.5 和定理 5.3，即可证明定理 5.5。

□

第二个主要结果是：对于初始数据属于 $L_\sigma^p \cap L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ 类的问题 (1.5) 的 L^p 温和解，也属于 L^2 弱解。

定理 5.6. 对于 $p \geq 3$，令 w 为定理 1.2 中得到的方程 (1.5) 的唯一 L^p 温和解，其初始数据为 $w_0 \in L_\sigma^p \cap L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$，定义在 $[0,T]$ 上，其中 $T > 0$。则 w 是问题 (1.5) 在 $[0,T]$ 上的一个 L^2 弱解。

注 5.7. 对于 $p \in [3, \frac{9}{2}]$，令 w 为在初始数据 $w_0 \in L_\sigma^p(\mathbb{R}^3) \cap L_\sigma^3(\mathbb{R}^3) \cap L_\sigma^2(\mathbb{R}^3) \cap \{\|w_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon_0\}$ 下，由定理 1.5 得到的方程 (1.5) 的整体 L^p 温和解，其中存在某个小的正常数 ε_0。然后，对定理 5.6 的证明稍作修改，可得 w 是一个整体 L^2 弱解。

注记 5.8. 值得指出的是，定理 5.6 证明的关键在于运用基于引理 3.1 和 3.3 所得估计的自举论证。

证明. 根据 Fabes-Jones-Rivi`ere [9], ，我们知道 w 也是$C([0,T];\ L_\sigma^p(\mathbb{R}^3))$中的非常弱解。于是，为证明该解属于 L^2 弱解，只需证明 $w \in C_w([0,T];\ L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^2\dot{H}_x^1$. 设 $w = a + z$ 如 (1.7) 中所分解。由于 $w_0 \in L_\sigma^p \cap L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$，$p \geq 3$，由引理 3.1 可知 $a \in C_TL_x^p \cap L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p} \cap C_TL_x^2 \cap L_T^2\dot{H}_x^1$ 满足

$$\begin{cases} \|a\|_{C_TL_x^2} + \|\nabla a\|_{L_T^2L_x^2} \leq C(c,\gamma)\|w_0\|_{L^2}, \\ \|a\|_{C_TL_x^p \cap L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p}} \leq C(p,c,\gamma)\|w_0\|_{L^p}. \end{cases} \tag{5.7}$$

因此，接下来我们只需证明 $z \in C_w([0,T];\ L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^2\dot{H}_x^1$.

将方程 (3.17) 乘以 $(w_1, w_2) = (w, w)$，再乘以 z，由分部积分可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla z\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}(z \otimes u^{c,\gamma} + u^{c,\gamma} \otimes z) \cdot \nabla z dx + \int_{\mathbb{R}^3}(w \otimes w) \cdot \nabla z dx. \end{aligned} \tag{5.8}$$

完全同理于（3.7），我们可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}(z \otimes u^{c,\gamma} + u^{c,\gamma} \otimes z) \cdot \nabla z dx \leq C_0K(c,\gamma)\|\nabla z\|_{L^2}^2.$$

利用 Hölder 不等式和柯西不等式，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3}(w\otimes w)\cdot\nabla z dx \le \|w\otimes w\|_{L^2}\|\nabla z\|_{L^2} \le \frac{1}{2}\|\nabla z\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|w\|_{L^4}^4.$$

将这两个方程代入 (5.8)，并对其从 0 积分到 T，得到

$$\|z\|_{C_TL_x^2}+\|\nabla z\|_{L_T^2L_x^2}\le C(c,\gamma)\|w\|_{L_T^4L_x^4}^2,$$

其中我们用到了 $C_0K(c,\gamma)<\frac{1}{2}$ 这一事实。为证明 $z\in C_w([0,T];L^2(\mathbb{R}^3))\cap L_T^2\dot{H}_x^1$.，只需证明 $w\in L_T^4L_x^4$。根据定理 1.2，我们知道 $w\in C([0,T];L_\sigma^p(\mathbb{R}^3))\cap L^{\frac{4p}{3}}([0,T];L_\sigma^{2p}(\mathbb{R}^3))$ 满足

$$\|w\|_{C_TL_x^p\cap L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p}}+\|\nabla|w|^{\frac{p}{2}}\|_{L_T^2L_x^2}^{\frac{2}{p}}\le C(p,c,\gamma)\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

那么，若 $p=4$，则可直接得到 $w\in L_T^4L_x^4$。若 $p\neq 4$，则分三种情况讨论如下。

情形 1. 当 $3\le p<4$ 时，由插值不等式可得

$$\|w\|_{L_T^{\frac{8p}{3(4-p)}}L_x^4}\le\|w\|_{L_T^\infty L_x^p}^{\frac{p}{2}-1}\|w\|_{L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p}}^{2-\frac{p}{2}}\le C\|w_0\|_{L^p}.$$

结合 $\frac{8p}{(4-p)}>4$ 这一事实，可得 $w\in L_T^4L_x^4$。

情形 2。当 $4<p\le 8$ 时，再次使用插值不等式，可得

$$\|w\|_{L_T^{\frac{16p}{3(8-p)}}L_x^8}\le\|w\|_{L_T^\infty L_x^p}^{\frac{p}{4}-1}\|w\|_{L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p}}^{2-\frac{p}{4}}\le C\|w_0\|_{L^p}. \tag{5.9}$$

鉴于 $\frac{16p}{(8-p)}\ge\frac{16}{3}>\frac{16}{5}$，并利用引理 3.3（取 $(w_1,w_2)=(w,w)$），由 (5.9) 和 Hölder 不等式可得

$$\|z\|_{C_TL_x^4\cap L_T^{\frac{16}{3}}L_x^8}\le C(c,\gamma)\|w\|_{L_T^{\frac{16}{5}}L_x^8}\|w\|_{L_T^{\frac{16}{3}}L_x^8}\le C(c,\gamma,T)\|w_0\|_{L^p}^2. \tag{5.10}$$

由于 $a\in C_TL_x^p\cap C_TL_x^2$，由插值不等式可得$a\in C_TL_x^4$。结合 (5.10)，得到 $w\in L_T^4L_x^4$。

情形 3。考虑 $p>8$ 的情形。利用 (1.10)，并将引理 3.3 中的 p 替换为 $\frac{p}{2}$，可推出

$$\|z\|_{C_TL_x^{\frac{p}{2}}\cap L_T^{\frac{2p}{3}}L_x^p}\le C(p,c,\gamma)\|w\|_{L_T^{\frac{2p}{p-3}}L_x^p}\|w\|_{L_T^{\frac{2p}{3}}L_x^p}\le C(p,c,\gamma)\|w_0\|_{L^p}^2.$$

关于 a，由 (5.7) 和插值不等式可得

$$\|a\|_{C_TL_x^{\frac{p}{2}}}\le\|a\|_{C_TL_x^p}^{\frac{p-4}{p-2}}\|a\|_{C_TL_x^2}^{\frac{2}{p-2}}\le C(p,c,\gamma)\|w_0\|_{L^p}^{\frac{p-4}{p-2}}\|w_0\|_{L^2}^{\frac{2}{p-2}},$$

and

$$\begin{aligned}\|a\|_{L_T^{\frac{2p}{3}}L_x^p}\le&\|a\|_{L_T^\infty L_x^2}^{\frac{1}{p-1}}\|a\|_{L_T^{\frac{2p(p-2)}{3(p-1)}}L_x^{2p}}^{\frac{p-2}{p-1}}\le T^{\frac{3}{4(p-1)}}\|a\|_{L_T^\infty L_x^2}^{\frac{1}{p-1}}\|a\|_{L_T^{\frac{4p}{3}}L_x^{2p}}^{\frac{p-2}{p-1}}\\ \le&C(p,c,\gamma)T^{\frac{3}{4(p-1)}}\|w_0\|_{L^2}^{\frac{1}{p-1}}\|w_0\|_{L^p}^{\frac{p-2}{p-1}},\end{aligned}$$

其中我们还使用了 Hölder 不等式。于是得到 $w\in C_TL_x^{\frac{p}{2}}\cap L_T^{\frac{2p}{3}}L_x^p$. 将上述自举论证重复有限次后，我们找到一个指标 $i_0>0$，使得 $w\in C_TL_x^{\frac{p}{2^{i_0}}}\cap L_T^{\frac{p2^{2-i_0}}{3}}L_x^{p2^{1-i_0}}$，其中 $4<\frac{p}{2^{i_0}}\le 8$。接着，根据 $4<p\le 8$ 情形下的论证可知 $w\in L_T^4L_x^4$。证明完毕。

□

致谢。 X. Zheng 得到了中国国家自然科学基金（项目编号：11871087）的部分资助。Z. Zhao 得到了中国博士后科学基金（项目编号：2021M700358）的部分资助。

References

[1] H. Bahouri、J.-Y. Chemin 和 R. Danchin，傅里叶分析与非线性偏微分方程。数学科学基础丛书，343。施普林格，海德堡，2011年。[2] W. Borchers 和 T. Miyakawa，无界区域中纳维–斯托克斯流的 L^2-衰减及其在外部定常流中的应用。《数学分析与力学档案》118 3，273 1992 295 ( )，第 - 期。[3] W. Borchers 和 T. Miyakawa，外部定常纳维–斯托克斯流的稳定性。《数学学报》174（1995年），第2期，311-382。[4] T. Buckmaster、C. De Lellis、L. Jr. Sz´ekelyhidi 和 V. Vicol，可容许弱解的 Vlad Onsager 猜想。《纯粹与应用数学通讯》72（2019年），第2期，229-274。[5] T. Buckmaster、S. Shkoller 和 V. Vicol，SQG 方程弱解的非唯一性。《纯粹与应用数学通讯》72（2019年），第9期，1809-1874。[6] T. Buckmaster 和 V. Vicol，纳维–斯托克斯方程弱解的非唯一性。《数学年刊》（第2辑）189（2019年），第1期，101-144。[7] C.P. Calder´on，初始数据属于 L^p 时纳维–斯托克斯方程弱解的存在性。《美国数学会汇刊》318（1990年），第1期，179-200。[8] E.A. Carlen 和 M. Loss，黏性阻尼守恒律的最优平滑估计与衰减估计及其在二维纳维–斯托克斯方程中的应用。《杜克数学杂志》81（1995年），第1期，135-157。[9] E.B. Fabes、B.F. Jones 和 N.M. Rivi`ere，N. M. 初始数据属于 Lp 时纳维–斯托克斯方程的初值问题。《数学分析与力学档案》45（1972年），222-240。[10] M.A. Goldshtik，纳维–斯托克斯方程的一个悖论解。《应用数学与力学》24（1960年）610-621，译文：《应用数学与力学杂志》（苏联）24（1960年）913-929。[11] L. Grafakos，现代傅里叶分析。第二版。数学研究生教材，250。施普林格，纽约，2009年。[12] E. Hopf，¨关于流体力学基本方程的初值问题。《数学新闻》 4 （ 1951 年），213-231。[13] T. Iwaniec 和 G. Martin，黎斯变换及相关奇异积分。《纯粹与应用数学杂志》473（1996年），25-57。[14] R. Kajikiya 和 T. Miyakawa，纳维–斯托克斯方程弱解的 L^2 衰减。《数学杂志》192（1986年），第1期，135-148。[15] G. Karch 和 D. Pilarczyk，纳维–斯托克斯系统中 Landau 解的渐近稳定性。《数学分析与力学档案》202（2011年），第1期，115-131。[16] G. Karch、D. Pilarczyk 和 M.E. Schonbek，纳维–斯托克斯方程系统中奇异解的 L^2-渐近稳定性，见 $\mathbb{R}^3$。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑 1，14 108 2017 40） ()，第 - 期。[17] H. Kwon 和 T.-P. Tsai，具有缓慢衰减振荡的不衰减初始数据对应的全局纳维–斯托克斯流。《数学物理通讯》375（2020年），第3期，1665-1715。[18] L. Landau，纳维–斯托克斯方程的一个新精确解。《苏联科学院院报》（新辑）43，（1944年），286-288。[19] E. Lieb 和 M. Loss，分析学。第二版。数学研究生教材，14。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2001年。[20] J. Leray，关于充满空间的黏性液体的运动。《数学学报》63(1)，193-248（1934年）。[21] P.G. Lemari´e-Rieusset，纳维–斯托克斯问题的最新进展。Chapman & Hall/CRC 数学研究札记，431。Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2002年。[22] P.G. Lemari´e-Rieusset，21世纪的纳维–斯托克斯问题。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2016年。[23] L. Li、Y.Y. Li 和 X. Yan，单位球面上具有孤立奇点的定常纳维–斯托克斯方程齐次解。I. 一个奇点。《数学分析与力学档案》227（2018年），第3期，1091-1163。

[24] L. Li、Y.Y. Li 和 X. Yan，单位球面上具有孤立奇点的定常纳维–斯托克斯方程齐次解。II. 轴对称无旋解的分类。《微分方程杂志》264（2018年），第10期，6082-6108。[25] L. Li、Y.Y. Li 和 X. Yan，单位球面上具有孤立奇点的定常纳维–斯托克斯方程齐次解。III. 两个奇点。《离散与连续动力系统》39（2019年），第12期，7163-7211。[26] Y.Y. Li 和 X. Yan，不可压缩定常纳维–斯托克斯方程齐次解的渐近稳定性。《微分方程杂志》297（2021年），226-245。[27] Y.Y. Li 和 X. Yan，各向异性 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式。arXiv:2112.00217。[28] Y.Y. Li、J.J. Zhang 和 T. Zhang，Landau 解在 L^p-扰动下对纳维–斯托克斯系统的渐近稳定性。《数学流体力学杂志》25（2023年），第1期，论文编号5，共30页。[29] X. Luo，高维纳维–斯托克斯方程的定常解与弱解非唯一性。《数学分析与力学档案》233（2019年），第2期，701-747。[30] C.X. Miao，一般半线性抛物方程解的时空估计。《东京数学杂志》24（2001年），第1期，245-276。[31] C.X. Miao 和 B. Zhang，Besov 空间中半线性抛物方程的柯西问题。《休斯敦数学杂志》30（2004年），第3期，829-878。[32] C.X. Miao、B.Q. Yuan 和 B. Zhang，分数阶幂耗散方程柯西问题的适定性。《非线性分析》68（2008年），第3期，461-484。[33] C.X. Miao 和 Z.W. Zhao，具有各向异性权重的非线性椭圆与抛物方程的局部正则性。arXiv:2210.10006。[34] T. Ogawa、S. Rajopadhye 和 M. Schonbek，缓变外力作用下纳维–斯托克斯方程弱解的能量衰减。《泛函分析杂志》144（1997年），第2期，325-358。[35] A.F. Pillow 和 R. Paull，圆锥相似黏性流。I. 无旋流中基本守恒原理及轴向源的刻画。《流体力学杂志》 155 （1985年），327-341。[36] R. Paull 和 A.F. Pillow，圆锥相似黏性流。II. 单参数无旋流。《流体力学杂志》155（1985年），343-358。[37] R. Paull 和 A.F. Pillow，圆锥相似黏性流。III. 旋流中轴向源的刻画，以及由均匀半直线源产生的单参数运动学旋流角动量流。《流体力学杂志》155（1985年），359-379。[38] M.E. Schonbek，抛物型守恒律解的衰减。《偏微分方程通讯》5（1980年），第5期，449-473。[39] M.E. Schonbek，纳维–斯托克斯方程弱解的 L^2 衰减。《数学分析与力学档案》88（1985年），第3期，209-222。[40] G. Seregin 和 V. ˇSver´ak，大 L^3 初始数据下纳维–斯托克斯方程柯西问题整体弱解的存在性。《非线性分析》154（2017年），269-296。[41] J. Serrin，旋涡。《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑：数学与物理科学》271（1972年）325-360。[42] H.B. Squire，圆形层流射流。《力学与应用数学季刊》4（1951年），321-329。[43] V. ˇSver´ak，关于纳维–斯托克斯方程的 Landau 解。《数学分析问题》第61号。《数学科学（纽约）》179（2011年），第1期，208-228。[44] C. Swanson，最佳 Sobolev 常数。《应用分析》47（1992年），第4期，227-239。[45] G. Tian 和 Z.P. Xin，纳维–斯托克斯方程的单点奇异解。《拓扑方法与非线性分析》11（1998年），第1期，135-145。[46] T.-P. Tsai，纳维–斯托克斯方程讲义。数学研究生教材，192。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2018年。[47] C.Y. Wang，稳态纳维–斯托克斯方程的精确解。《流体力学年度评论》第23卷，159-177。[48] M. Wiegner，纳维–斯托克斯方程在 $\mathbb{R}^n$ 上的弱解衰减结果。《伦敦数学学会杂志》（第2辑）35（1987年），第2期，303-313。[49] V.I. Yatseyev，黏性流体运动方程的一类精确解。NACA 技术备忘录1953（1953年），第1349号，共7页。

(Z. ZHAO) Beijing Computational Science Research Center, Beijing 100193, China. *Email address*: zwzhao365@163.com (X. ZHENG) School of Mathematical Sciences, Beihang University, Beijing 100191,China*Email address*: xiaoxinzheng@buaa.edu.cn