arXiv:2304.00845v1 [math.RT] 3 Apr 2023

宽余反射子范畴与挠对

LIDIA ANGELERI HÜGEL 和 FRANCESCO SENTIERI

摘要。我们重新考察 Ingalls 和 Thomas 提出的一种构造宽子范畴的方法。对于左阿廷环 R 上有限表示 R-模范畴中的一个挠对，我们在所有 R-模组成的 R-模范畴中赋予两个宽子范畴，并用一个相关联的余倾斜模对它们作出明确描述。事实证明，这些子范畴是余反射的；我们还探讨哪些宽余反射子范畴可以通过这种方式得到。对于温和遗传代数，它们恰好是与纯内射模集合正交的范畴。

1. 引言

若模范畴 R- Mod 的子范畴 $\mathcal{X}$ 满足包含函子 $\mathcal{X} \hookrightarrow R$- Mod 存在左伴随（分别存在右伴随），则称其为反射子范畴（分别称为余反射子范畴）。Gabriel 和 de la Peña 的一项结果刻画了同时为反射和余反射的子范畴：它们恰好是由某个环满同态 $R \to S$ 导出的模范畴 $\mathcal{X} = S$- Mod。若仅满足这两个条件之一，则相关结果少得多，即使将范围限于 R- Mod 的宽子范畴（即正合阿贝尔子范畴）也是如此。

本文旨在重新审视 Ingalls 和 Thomas [25]提出的一种宽子范畴构造。我们将看到，这些宽子范畴往往是余反射的，而且完全由其有限表示模决定。

下面是 这一构造。对于 R- Mod 中的一个挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$，可以关联到子范畴 s

$$\alpha(\mathcal{T}) = \{X \in \mathcal{T} \mid \text{all morphisms } f : T \to X \text{ with } T \in \mathcal{T} \text{ have } \ker(f) \in \mathcal{T}\}$$

以及 $\beta(\mathcal{F})$，后者由对偶方式定义。

当环 R 为左诺特环时，我们关注由有限表示模范畴 R- mod 内的挠对 (t, f) 取直极限闭包而得到的挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$。这类挠对由余倾斜模参数化（定理 2.8），我们将其集合记为 Cosilt(R)。我们根据相应的余倾斜模，对 $\alpha(\mathcal{T})$ 和 $\beta(\mathcal{F})$ 作出明确描述，并证明以下结果。

定理 A (定理 4.6**)** 设 R 为左诺特环。上述构造 $\alpha(\mathcal{T})$ 定义了一个满射 α： $\mathbf{Cosilt}(R) \longrightarrow$ 宽子范畴(R), 其中 宽子范畴(R) 表示 R-Mod 中所有形如 极限$\varinjlim \mathcal{W}$ 的子范畴所成的集合，其中 $\mathcal{W}$ 是 R- mod 的某个宽子范畴。

因此，宽子范畴中的每个子范畴 $\varinjlim \mathcal{W}$ 都是宽子范畴和余反射子范畴，并满足 $\varinjlim \mathcal{W} \cap R$- mod $= \mathcal{W}$。对于左阿廷环上的 β，也有类似结果（定理 4.11）。

映射 α 和 β 的性质，为范畴 Λ- mod 中有限维代数 Λ 上的挠类格 torsΛ 带来了新的认识。特别是，它们为 τ-倾斜有限代数提供了新的刻画。这类有限维代数由 [19] 引入，可通过若干等价条件来定义，这些条件要求某些模类是有限的。例如，若有限维砖模的同构类只有有限多个，或者等价地， Λ - mod 中的挠对只有有限多个，则称 Λ 是 τ-倾斜有限的。我们证明， τ-倾斜有限性也可以用 Λ- Mod 中宽子范畴类的性质来表述。下面给出一个例子。

日期：2023年4月4日。作者感谢项目 *REDCOM*：降低代数、逻辑、组合学的复杂性 的支持，该项目由 *Ricerca Scientifica di Eccellenza 2018* 计划资助，资助方为Fondazione Cariverona。

定理 B（定理 5.9）对于阿廷代数 Λ，下列陈述等价。

(i) Λ 是 τ-倾斜有限的。(ii) Λ- Mod 中每个对余积封闭的宽子范畴都属于 wide(Λ)。(iii) Λ- Mod 中对余积封闭的宽子范畴只有有限多个。

在论文的最后一部分，我们讨论哪些宽余反射子范畴可以通过映射 α 和 β得到。

当 Λ 是克罗内克代数，即克罗内克箭图 Λ 的路径代数 $0\ 1$ 时，这引出了 Krause 和 Stevenson [26]提出的一个开放问题，该问题涉及射影直线上拟凝聚层的导出范畴中的局部化子范畴分类：除了基于我们对紧对象的理解所构造的子范畴之外，是否还存在其他局部化子范畴？这个问题可以改述如下。

问题： 是否每个 Λ-模范畴 $\mathcal{X}$ 的宽余反射子范畴都是某个不可分解纯内射模集合 $\mathcal{P}$ 的（左）正交范畴 ${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{P}$？

我们证明，$\mathcal{X}$ 具有这种形式，当且仅当它通过某些标准构造由范畴 Λ 中的一个宽子范畴 $\mathcal{W}$ 得到；这里 Λ 是由有限维 Λ- 模组成的范畴。我们的结果对任意温和遗传代数都成立。

定理 C（定理 7.1）对于温和遗传代数 Λ 上的宽余反射子范畴 $\mathcal{X}$，以下陈述等价。

（1）存在一个由不可分解纯内射 Λ-模组成的集合 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{X} = {}^{\perp_{0,1}}\mathcal{P}$。（2）存在一个 Λ-模的宽子范畴 $\mathcal{W}$，使得 $\mathcal{X}$ 要么是（右）正交范畴 $\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$，要么是直极限 $\mathcal{W}$ 的直极限闭包 $\varinjlim \mathcal{W}$。

本文最后提出一种可能的途径来探讨上述问题。思路是考察 Kronecker 代数上的泛模 G 的一族子模；这些子模由 Ringel 在 [35] 中构造。它们由 k 的子集索引；对于互不相交的无限子集，这些子模构成大的半砖，即由 Hom-正交的无限维模组成、且自同态环为 k 的集合。如果 B 是这样的一个模，那么它的正交范畴 ${}^{\perp_{0,1}}B$ 是宽子范畴，且不含不可分解纯内射模。这意味着 ${}^{\perp_{0,1}}B$ 包含一个宽余反射子范畴 $\mathcal{X}$，除非它为零，否则无法如上所述由一个 Λ-模的宽子范畴得到。然而遗憾的是，我们无法排除 ${}^{\perp_{0,1}}B = 0$ 这种情况，因此 [26] 中的分类问题仍未解决。

论文结构。第 2 节汇总挠对、纯性、逼近和余倾斜理论方面的一些预备知识。第 3 节引入构造 $\alpha(\mathcal{T})$ 和 $\beta(\mathcal{F})$。第 4 节研究 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 属于 Cosilt(R)的情形，并证明定理 A，同时给出关于映射 α 和 β的其他基本结果。第 5 节探讨这些结果在有限维代数 Λ上的格 torsΛ 中的应用。我们首先证明，映射 α 和 β 决定了 tors(Λ)的哈斯箭图的形状；更确切地说，它们决定了 tors(Λ)中局部极大元或极小元的存在性。文献 [6] 中的极小余倾斜模概念在此处发挥着重要作用。接着，我们讨论τ-倾斜有限性的若干刻画，包括定理 B，并以一些开放问题作为本节的结尾。第 6 节聚焦于遗传环，并重新审视文献 [27]中的 Ext-正交对概念。第 7 节用于证明定理 C。最后，第 8 节讨论上文所述的分类问题。

记号。给定阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象类 $\mathcal{S}$，我们将 Add$(\mathcal{S})$ 记为与 $\mathcal{S}$ 中对象的直和的直和项同构的对象所构成的对象类，将 Prod$(\mathcal{S})$ 记为与 $\mathcal{S}$ 中对象的积的直和项同构的对象所构成的对象类。与 $\mathcal{S}$ 中对象的有限直和的直和项同构的对象所构成的对象类记为 add$(\mathcal{S})$。此外，Cogen$(\mathcal{S})$ 表示与 $\mathcal{S}$ 中对象的积的子对象同构的对象所构成的对象类，而 Gen$(\mathcal{S})$ 则对偶地定义。最后，${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{S}$ 是由

满足如下条件的对象 $X \in \mathcal{A}$ 所构成的子范畴：对于 $i \in \{0、1\}$ 和 $S \in \mathcal{S}$，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,S) = 0$。类似地，可定义 ${}^{\perp_0}\mathcal{S}$、${}^{\perp_1}\mathcal{S}$、$\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ 等。

除非另有说明，R 表示一个任意环。我们用 R- Mod 表示所有左 R-模构成的范畴，用 R- mod 表示有限表示左 R-模构成的范畴。若 $\mathcal{S}$ 是 R- Mod 中的模类，我们用 $\varinjlim \mathcal{S}$ 表示 R- Mod 的全子范畴，其对象是 $\mathcal{S}$中模的有向系统的余极限。当 $\mathcal{S}$ 是一个对有限直和封闭的有限表示模类时，根据 [28, 命题 2.1]，$\varinjlim \mathcal{S}$ 对有向余极限封闭。对于一般的 $\mathcal{S}$，这一结论并不成立，参见 [10, 例 1.1]。

2. 挠对

本节将固定术语，并汇集后文将用到的一些基本概念和结果。我们先回顾挠对的概念，然后重点讨论无挠类对直极限封闭的挠对，并用逼近理论和余倾斜理论来描述它们。由此，我们可以证明，左诺特环上有限表示模范畴中的挠对由余倾斜模参数化。

定义 2.1。设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴。

(1) $\mathcal{A}$ 的两个子范畴 $\mathcal{T}$、$\mathcal{F}$ 构成一个 挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$，如果满足：

(i) 对所有 $F \in \mathcal{F}$，对所有 $T \in \mathcal{T}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T,F) = 0$。(ii) 对所有 $M \in \mathcal{A}$，存在一个短正合列

$$0 \to T \to M \to F \to 0$$

其中 $T \in \mathcal{T}$ 和 $F \in \mathcal{F}$。

在这种情况下，$\mathcal{T}$是一个挠类，而 $\mathcal{F}$ 是一个无挠类。

(2) 设 $\mathcal{A}$ 是一个完备且余完备的阿贝尔范畴。给定 $\mathcal{A}$ 中的一个对象类 $\mathcal{C}$，我们可以构造

- 由 $\mathcal{C}$ 生成的挠对 $(\mathrm{T}(\mathcal{C}),\mathcal{C}^{\perp_0})$；以及 -由 $\mathcal{C}$ 余生成的挠对 $({}^{\perp_0}\mathcal{C},\mathrm{F}(\mathcal{C}))$。

这里，$\mathrm{T}(\mathcal{C}) = {}^{\perp_0}(\mathcal{C}^{\perp_0})$是包含 $\mathcal{C}$ 的最小挠类，而 $\mathrm{F}(\mathcal{C}) = ({}^{\perp_0}\mathcal{C})^{\perp_0}$是包含 $\mathcal{C}$ 的最小无挠类。

对于模范畴，由 $\mathcal{C}$ 生成的挠类和无挠类分别有众所周知的显式描述。我们首先需要以下简单的观察。

引理 2.2. 若 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，且 $\mathcal{A}$ 中的所有对象都是诺特的，则 $\mathcal{A}$ 的子范畴是挠类，当且仅当它对扩张和商封闭。

对偶地，若 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，且 $\mathcal{A}$ 中的所有对象都是阿廷的，则 $\mathcal{A}$ 的子范畴是无挠类，当且仅当它对扩张和子模封闭。

给定一个左凝聚环 R，我们考虑阿贝尔范畴 R-模，并用 $\mathrm{tors}(R)$ 表示 R-模中所有挠对组成的集合。对于 R-模中由某个子范畴 $\mathcal{C}$ 生成的挠类和无挠类，我们分别使用符号 $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{F}(\mathcal{C})$。我们还用 $\mathrm{gen}(\mathcal{C})$ 表示与 $\mathcal{C}$ 中对象的有限直和的某个商同构的对象类，对偶地定义 $\mathrm{cogen}\,\mathcal{C}$，并用 $\mathrm{filt}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 的扩张闭包。

命题 2.3. [29, 引理 3.1] 设 R 是一个环，$\mathcal{C}$ 是 R-模的一个子范畴。

(1) 如果 R 是左诺特的，那么 $\mathbf{T}(\mathcal{C}) = \mathrm{filt}(\mathcal{C})^{\sim}$。*(2)* 如果 R 是左阿廷的，那么 $\mathbf{F}(\mathcal{C}) =$ 由余生成对象滤出的$(\mathcal{C})$。

利用超限扩张，可以得到模范畴 R- Mod 中挠类 $\mathrm{T}(\mathcal{C})$的类似描述，参见 [9, 引理 3.2]。

接下来，我们汇总一些关于可定义类和纯性的知名事实。全面的参考资料见 [32]。

定义 2.4。 (1) R- Mod 中的短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 称为纯正合，若对每个 $U \in R$-mod，序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, N) \longrightarrow 0$$

是阿贝尔群的一个正合序列。在这种情况下，我们称 L 是 M 的纯子模，或者称映射 $L \to M$ 是纯单态。

(2) 若从 E 出发的每个纯正合列都是分裂正合的，则模 E 是纯内射的。(3) 若 R-Mod 的一个子范畴对积、纯子模和直极限封闭，则称其为可定义的。

注意， R- Mod 中的无挠类是可定义的，当且仅当它对直极限封闭，因为它对积和（纯）子模封闭是显然的。此外，可定义的无挠类可以用逼近理论和余倾斜理论来描述。下面回顾相关概念。

定义 2.5。设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴， $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ 是其子范畴。设 $M \in \mathcal{A}$。若态射 $g: S \to M$ 满足 $S \in \mathcal{S}$ ，且每个满足 $S' \in \mathcal{S}$ 的态射 $g': S' \to M$ 都可经由 g 分解，则称其为 $\mathcal{S}$-预覆盖。若此外该映射 g 还是右极小的，即每个满足 $gs = g$ 的 S 的自同态 s 都是同构，则称 g 为 $\mathcal{S}$-覆盖。最后，若 $\mathcal{A}$ 中的每个对象都有一个 $\mathcal{S}$-(预)覆盖，则称子范畴 $\mathcal{S}$ 为（预）覆盖子范畴。对偶地，我们定义 $\mathcal{S}$-(预)包络以及（预）包络子范畴。

当 $\mathcal{A} = \Lambda$-模属于阿廷代数 Λ 时，同时是预覆盖且预包络的子范畴（因此也是覆盖且包络）称为函子有限。

定义 2.6. (1) 若存在内射余表示 $\omega: I_0 \to I_1$ 使得：我们称 R-模 C 为余倾斜。

$$\mathrm{Cogen}(C) = \mathcal{C}_\omega := \left\{ X \in R\text{- Mod} \;\middle|\; \mathrm{Hom}_R(X, \omega) \text{ is surjective} \right\}$$

(2) 若 $\mathrm{Cogen}(C_1) = \mathrm{Cogen}(C_2)$，则称两个余倾斜模 C_1、C_2 为等价。

(3) 若 $\mathrm{Cogen}(C) = {}^{\perp_1}C$，则称模 C 为余倾斜（内射维数至多为一）；等价地，若它相对于一个满射的内射余表示是余倾斜的，也可如此称呼。

倾斜模与倾斜模的定义是对偶的，且其投射维数至多为一。

我们总结余倾斜模的一些重要性质。

定理 2.7。 *(1)* [14, 定理 4。7] 每个余倾斜模都是纯内射的。

(2) [15, 39], [3, 定理 3.8 和推论 3。9] 当且仅当无挠类 $\mathcal{F} \subseteq R - \mathrm{Mod}$ 是可定义的，当且仅当它是覆盖的，当且仅当它等于某个余倾斜模 C 的 $\mathcal{F}$ =余生成(C) 。

根据上述定理，我们将所有无挠类可定义的挠对组成的集合记为 $\mathrm{Cosilt}(R)$ ，并称这类挠对为余倾斜挠对。 R-模中的挠对与余倾斜挠对之间的相互关系基于以下基本结果，该结果可追溯至 [17]。

定理 *2.8*。 *</style}*当 R 是左诺特环时，存在一个双射

$$\mathbf{tors}(R) \leftrightarrow \mathbf{Cosilt}(R).$$

它将 R-模) 中的挠对 $(\mathbf{t}, \mathbf{f}$关联到其直极限闭包 $(\mathcal{T}, \mathcal{F}) := (\text{极限}\longrightarrow \mathbf{t}, \text{极限}\longrightarrow \mathbf{f})$；该闭包与由 $\mathbf{t}$生成的挠对 $(\text{生成 } \mathbf{t}, \mathbf{t}^{\perp_0})$ 一致。此映射的逆映射将余倾斜挠对 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 映射为其在 $(\mathcal{T} \cap R\text{- 模 } \mathcal{F} \cap R$-模)上的限制。

换句话说，左诺特环上 $\mathrm{tors}(R)$ 中的挠对由余倾斜模参数化。在阿廷代数上，有限生成余倾斜模恰好就是 τ^{-1}–倾斜模。因此，我们可以利用 [1] 中的结果得出以下结论。

注 2.9。 假设 Λ 是一个阿廷代数，且 (t, f) 是 $\mathrm{tors}(\Lambda)$中的一个挠对。那么，t 是函子有限的，当且仅当 f 也是如此；而这恰好发生在相应的余倾斜模有限生成时。

注 2.10。 在文献中， τ–倾斜理论通常应用于有限维代数 Λ的情形。然而，我们将从 [1] , [19] 和 [37]中使用的所有结果，在更一般的阿廷代数情形下也都成立。确保这些结果有效的两个关键点是： Λ-模是一个阿贝尔长度范畴；并且对于 Λ-模中的每个挠对 (t, f)，挠类 t 是函子有限的，当且仅当无挠类 f 是函子有限的。

3. 宽子范畴

现在我们介绍 Ingalls 和 Thomas [25]提出的由挠对构造宽子范畴的方法。通过考察诺特环 R上的小挠对与大挠对之间的相互作用，我们推导出 R- mod 和 R- Mod 中构造之间的一些相容性结果。此外，我们证明，由一个挠对得到的宽子范畴中的简单对象，恰好是 [5, 7] 和 [12]研究的对象。

定义 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴。若子范畴 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$对核、余核和扩张封闭，则称其为宽子范畴 。

定义 3.2. 设 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是某个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$中的一个挠对。定义：

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathcal{T}) &= \{X \in \mathcal{A} \mid \text{ for all } T \in \mathcal{T}, f : T \to X, \ker(f) \in \mathcal{T}\} \\
\mathrm{B}(\mathcal{F}) &= \{X \in \mathcal{A} \mid \text{ for all } F \in \mathcal{F}, f : X \to F, \operatorname{coker}(f) \in \mathcal{F}\} \\
\alpha(\mathcal{T}) &= \mathcal{T} \cap \mathrm{A}(\mathcal{T}) \\
\beta(\mathcal{F}) &= \mathcal{F} \cap \mathrm{B}(\mathcal{F})
\end{aligned}$$

引理 3.3. 设 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是 $\mathcal{A}$中的一个挠对。以下陈述成立。

(i) 子范畴 $\mathrm{A}(\mathcal{T})$ 对子对象和扩张封闭。此外， $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{A}(\mathcal{T})$.(ii) $\alpha(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{A}$的一个宽子范畴。它对挠子对象封闭。(iii) $\mathrm{A}(\mathcal{T})$ 由 $\mathcal{A}$ 中出现在短正合列 $0 \to C \to M \to D \to 0$ 中的对象 M 组成，其中 $C \in \alpha(\mathcal{T})$ 且 $D \in \mathcal{F}$。特别地， $\alpha(\mathcal{T}) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{A}(\mathcal{T}) = \mathcal{F}$。

对 $\mathrm{B}(\mathcal{F})$ 和 $\beta(\mathcal{F})$也成立对偶命题。

证明。 (i) 首先，注意到若 $F \in \mathcal{F}$，则对每个 $T \in \mathcal{T}$，$\mathrm{Hom}_R(T, F) = 0$。因此，每个这样的对象 F 显然都是 A($\mathcal{T}$)的一个元素。

令 $X \in \mathsf{A}(\mathcal{T})$，考虑 $Y \leqslant X$。那么，对于每个挠对象 T 以及每个映射 $f\colon T \to Y$， f 的核等于将 f 与一个从 Y 到 X的嵌入复合后所得映射的核。因此， Y 属于 A($\mathcal{T}$)。

设 $0 \longrightarrow X' \longrightarrow Y \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$ 是一个短正合列，其中 X'， $X'' \in \mathrm{A}(\mathcal{T})$。设 $f : T \to Y$ 是某个映射。考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker(g \circ f) & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \mathrm{Im}(g \circ f) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{g} & X'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

根据前一点，$\mathsf{Im}(g \circ f) \in \mathsf{A}(\mathcal{T})$，因此 $\mathsf{ker}(g \circ f) \in \mathcal{T}$。应用蛇引理可得 $\mathsf{ker}(f) = \mathsf{ker}(h)$，这是一个挠模，因为 $X' \in \mathsf{A}(\mathcal{T})$。因此，A($\mathcal{T}$) 对扩张封闭。

(ii) 是命题 2.12]，[25, ，而 (iii) 留给读者完成。 □

我们希望在 $\mathcal{A}$ 是模范畴时研究这些构造。对于左凝聚环 R，除了 R- Mod，我们还可以考虑阿贝尔范畴 R- mod。我们将用符号 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$A、B、 $\tilde{\alpha}$ 和 β 表示 R- mod 中的算子。若 R 是左诺特的，我们可以利用 R- mod 中的挠对与 R- Mod 中的余倾斜挠对之间的相互作用，得到以下相容性结果：

引理 3.4。设 R 是左诺特环。设 $(\mathcal{T},\ \mathcal{F})$ 是 R-Mod 中的余倾斜挠对，其限制为 $(\mathbf{t},\ \mathbf{f})$ 到 R-mod。以下陈述成立。

(i) $\mathsf{A}(\mathcal{T})\cap R$-模 $=\mathsf{A}(\mathbf{t})$ 因此 $\alpha(\mathcal{T})\cap R$-模 $=\tilde{\alpha}(\mathbf{t})$

(ii) $\mathsf{B}(\mathcal{F})\cap R$-模 $=\mathsf{B}(\mathbf{f})$ 因此 $\beta(\mathcal{F})\cap R$-模 $=\beta(\mathbf{f})$。

证明。(i) 显然有 $\mathsf{A}(\mathcal{T})\cap R$-模 $\subseteq\mathsf{A}(\mathbf{t})$。假设 $A\in\mathsf{A}(\mathbf{t})$。设 $f\colon T\to A$ 是一个态射，满足 $T\in\mathcal{T}$。我们需要证明 $K:=$ 核 $f\in\mathcal{T}$。由于 $\mathsf{A}(\mathbf{t})$ 对取子模封闭，我们可以假设 f 是一个满同态。由于该挠对是余倾斜的，我们可以找到一族有限生成的挠模 $\{t_i\}_I$，以及一个满同态 $p\colon\bigoplus_I t_i\to T$。此时，由于 A 是有限生成的，我们可以找到一个有限子集 $J\subseteq I$，使得映射 $f_J:=f\circ(p|_J)$ 是一个满同态。记该映射的核为 K_J，并考虑下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_J & \longrightarrow & \bigoplus_J t_i & \xrightarrow{f_J} & A & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p|J} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & L & = & L & & & &
\end{array}$$

我们有 $L\in\mathcal{T}$，因为它是一个挠模的商。此外，$K_J\in\mathbf{t}$，因为 $\bigoplus_J t_i\in\mathbf{t}$ 和 $A\in\mathsf{A}(\mathbf{t})$。因此，$K\in\mathcal{T}$，如所需。

(ii) 根据定义，$\mathsf{B}(\mathcal{F})\cap R$-模 $\subseteq\mathsf{B}(\mathbf{f})$。因此，假设 $X\in\mathsf{B}(\mathbf{f})$，令 $F\in\mathcal{F}$ 和 $f\colon X\to F$，其余核为 C。为了证明 $X\in\mathsf{B}(\mathcal{F})$，我们需要证明 C 是无挠的。由于 $\mathcal{F}=\mathbf{t}^{\perp_0}$，假设存在一个单射 $T\to C$，其中 $T\in\mathbf{t}$，并考虑以下拉回图：

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \longrightarrow & P & \longrightarrow & T & \longrightarrow & 0\\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
X & \xrightarrow{f} & F & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

根据构造，P 是一个有限生成的无挠模，因此，利用 $X\in\mathsf{B}(\mathbf{f})$ 这一事实，我们必有 $T\in\mathbf{f}$。因此 $T=0$ 既是挠的又是无挠的。□

给定一个左凝聚环 R，我们用 $\mathsf{wide}(R)$ 表示 R-模中宽子范畴的集合。于是我们有映射 $\tilde{\alpha},\beta\colon\mathsf{tors}R\to\mathsf{wide}(R)$。在 [11, 29], 中，这些映射被证明在阿廷代数上是满射的。事实上，只需利用命题 2.3 中算子 T 和 F 的描述即可。

定理 3.5 ([11], [29]). 设 R 为一个环，且 $\mathcal{W}$ 为 R-mod 的一个子范畴。

(i) 若 R 是左诺特环，则当且仅当 $\mathcal{W}$ 是一个宽子范畴时，$\tilde{\alpha}(\mathbf{T}(\mathcal{W}))=\mathcal{W}$。(ii) 若 R 是左阿廷环，则当且仅当 $\mathcal{W}$ 是一个宽子范畴时，$\beta(\mathbf{F}(\mathcal{W}))=\mathcal{W}$。

定义3.6 ([11]). 设 R 为左诺特环。R-Mod 中的一个挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$，以及其在 R-mod 中的限制 $(\mathbf{t},\mathbf{f})$，称为广泛生成的，如果存在一个宽子范畴 $\mathcal{W}\in\mathsf{wide}(R)$，使得 $\mathbf{T}(\mathcal{W})=\mathcal{T}$，或者等价地，使得 $\mathbf{T}(\mathcal{W})=\mathbf{t}$。

下一个结果计算了诺特遗传环上的广泛生成挠对的 β。

引理 3.7。设 R 是一个左诺特环。若 $\mathcal{W}$ 是 R-模 的一个宽子范畴，且由投射维数小于 *1* 的模组成，则

$$\beta(\mathcal{W}^{\perp_0})=\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}.$$

~证明。 注意到 $\mathsf{T}(\mathcal{W}) = \varinjlim \mathsf{T}(\mathcal{W})$，因此由引理 3.4 和定理 3.5(i)可得 $\mathcal{W} \subseteq \alpha(\mathsf{T}(\mathcal{W}))$。我们可以立即验证，模 M 属于 $\mathcal{W}^{\perp_1}$ 时，它属于 $\mathsf{B}(\mathcal{W}^{\perp_0})$；只需注意到，检查内射映射 $0 \to M \to F$（其中 $F \in \mathcal{W}^{\perp_0}$）的条件就足够了（这里需要 $\mathcal{W}^{\perp_1}$ 对商封闭）。

对于 另一种包含关系，取 $M \in \beta(\mathcal{W}^{\perp_0}) = \mathcal{W}^{\perp_0} \cap \mathsf{B}(\mathcal{W}^{\perp_0})$。考虑短正合列 e:

$$0 \to M \to N \to W \to 0$$

其中 $W \in \mathcal{W}$。然后，取 N 的挠部分，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathrm{t}\,N & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \overline{N} & \longrightarrow & \widetilde{W} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

接着，由于 $M \in \mathsf{B}(\mathcal{W}^{\perp_0})$ 且该类对商封闭，$L \in \mathsf{B}(\mathcal{W}^{\perp_0})$。因此，$\widetilde{W}$ 属于 $\mathcal{W}^{\perp_0}$，因为 $\overline{N} \in \mathcal{W}^{\perp_0}$。但是，$\widetilde{W}$是 W的一个商，因此它必为零。

因此 $I = W$，并且由于 $\mathcal{W} \subseteq \alpha(\mathsf{T}(\mathcal{W}))$，我们有 $K \in \mathsf{T}(\mathcal{W})$。然而，$K$ 也是 M 的一个子模，而 M 属于 $\mathcal{W}^{\perp_0}$，因此 $K = 0$，因为它既是挠的又是无挠的。这表明中间正合列分裂。□

最后，我们确定由 α 和 β给出的宽子范畴中的简单对象。

定义 3.8。设 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是 R-Mod 中的一个挠对。非零模 $B \in \mathcal{T}$ 关于 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是挠的、几乎无挠的，若它满足以下条件。

(1) B 的每个真子模都包含于 $\mathcal{F}$ 中。**(2)** 对每个短正合列 $0 \to K \to T \to B \to 0$，若 $T \in \mathcal{T}$，则 $K \in \mathcal{T}$。

对偶地，我们定义 无挠的、几乎挠的模。

这些概念由 [24] 引入，并在 [5, 7] 中得到研究。它们与 [12] 中出现的极小扩张模（分别为极小余扩张模）的概念密切相关。

注 3.9。 [37, 命题 2.11] 设 R 是一个左诺特环。设 (t, f) 是 R-mod 中的一个挠对，且 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是 R-Mod 中相应的余倾斜挠对。那么，所有关于 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 挠的、几乎无挠的模都是有限生成的，并且与 (t, f) 意义下的极小余扩张模一致。此外，关于 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 无挠的、几乎挠的有限生成模，恰好是关于 (t, f) 的极小扩张模。

命题 3.10. 设 R 是一个环。设 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是 R-Mod 中的一个挠对。则：

(i) $\alpha(\mathcal{T})$ 的简单对象恰好是 $\mathcal{T}$ 中挠且几乎无挠的模。(ii) $\beta(\mathcal{F})$ 的简单对象恰好是 $\mathcal{F}$ 中无挠且几乎挠的模。

证明. 我们证明 (i)。注意，定义 3.8 中的条件 (2) 表明 B 属于 $\mathsf{A}(\mathcal{T})$。因此，B 是挠且几乎无挠的，当且仅当它是 $\alpha(\mathcal{T})$ 的一个对象，且 B 的所有真子模都包含于 $\mathcal{F}$ 中。这显然意味着 B 是 $\alpha(\mathcal{T})$ 中的一个简单对象。反过来的蕴含关系也显然成立，因为 $\alpha(\mathcal{T})$ 对挠子模封闭。□

4. Wide subcategories and cosilting modules

对于余倾斜挠对，我们可以明确描述上一节定义的宽子范畴。设 C 为余倾斜模，且 $(\mathcal{T}、\mathcal{F}) = ({}^{\perp_0}C、\mathsf{Cogen}\ C)$ 为其余倾斜挠对。回顾一下，每个模都存在一个 $\mathcal{F}-$ 覆盖，其核属于 $\mathsf{Prod}(C)$。取一个内射余生成元 $E(R)$，并考虑其极小逼近序列

$$0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{g} E(R) \tag{1}$$

引理 4.1. 设 C 为余倾斜模，其逼近序列为 *(1)*，且 $\mathcal{F}=$ 余生成C。下列陈述成立。

(1) C_0 在 $\mathcal{F}$ 中是分裂内射的，即在 $\mathcal{F}$ 中，每个满足 F 的单态射 $C_0\to F$ 都是分裂单态射。此外，$C_0\oplus C_1$ 是一个与 C 等价的余倾斜模。
(2) $\operatorname{Im}(g)=\{x\in E(R)\,|\,\operatorname{Ann}(C)\,x=0\}$ 是 $R/\operatorname{Ann}(C)$ 的内射余生成元。*(3)* $\mathcal{F}={}^{\perp_1}C_1\cap R/\operatorname{Ann}(C)$ - 模。

证明。(1) 由 [15, 引理 3.3 和定理 3.5] 得证。

(2) 注意到 C 是 $R/\mathsf{Ann}(C)$ 上的余倾斜模，见 [3, 定理 3.6]。因此，每个$R/\operatorname{Ann}(C)$–模都有一个满射 $\mathcal{F}$-覆盖，并且显然，所有具有满射覆盖的模都属于 $R/\operatorname{Ann}(C)$- 模（因为它们被 $\operatorname{Ann}(C)$ 消去）。

令 $E=\{x\in E(R)\,|\,\mathsf{Ann}(C)\,x=0\}$。这是属于 $R/\operatorname{Ann}(C)$- Mod 的 $E(R)$ 的最大子模。因此 Im $(g)\subseteq E$。另一方面，正如上文所述，E 存在一个满射 $\mathcal{F}$-覆盖 $C'\to E$。诱导映射 $C'\to E\to E(R)$ 必须经由 g 分解：$C_0\to E(R)$，这表明 $E\subseteq\operatorname{Im}(g)$。现在，对于任意 $M\in R/\operatorname{Ann}(C)$- Mod，都存在一个集合 I，使得 M 嵌入 $E(R)^I$；但由于 M 属于 $R/\mathsf{Ann}(C)$ - Mod，这个嵌入必须经由 E^I 分解。这说明 E 是一个余生成元。关于 $R/\mathsf{Ann}(C)$ 的内射性也显而易见，因为 E 是内射对象 $E(R)$ 的子模，并且从 $R/\operatorname{Ann}(C)$- Mod 中的模到 $E(R)$ 的所有映射都必须经由 E 分解。

(3) 注意到这个序列

$$0\longrightarrow C_1\longrightarrow C_0\longrightarrow\operatorname{Im}(g)\longrightarrow 0$$

是 (1) 中的逼近序列。特别地，模 M 被 C 余生成，当且仅当它被 $\operatorname{Ann}(C)$ 和 $\operatorname{Ext}^1_{R/\operatorname{Ann}(C)}(M,C_1)=0$ 消去。然而 $\mathsf{Cogen}(C)\subseteq\ker\operatorname{Ext}^1_R(-,C_1)\subseteq\ker\operatorname{Ext}^1_{R/\operatorname{Ann}(C)}(-,C_1)$，因此我们得到所需的等式。□

引理 4.2。设 M 是一个具有极小内射余表示 $0\to M\to I_0\xrightarrow{\sigma}I_1$ 的模。那么

(1) $\mathcal{C}_\sigma=\left\{X\in R\text{- 模}\;|\operatorname{Ext}^1(Y,\;M)=0\text{ 对所有 }Y\leqslant X\right\}$ 均成立。*(2)* 若 R 是左阿廷的且 M 是纯内射的，则 $\mathcal{C}_\sigma$ 是一个余倾斜类。

证明。(1) 包含关系 $\subseteq$ 源于 $\mathcal{C}_\sigma$ 对子模封闭且包含于 ${}^{\perp_1}M$ 这一事实。反向包含关系请参见 [39, 引理 4.17] 的证明。

(2) 我们首先证明 $\mathcal{C}_\sigma$ 在 $\varinjlim$ 下封闭。注意，$\mathcal{C}_\sigma={}^{\perp_1}M\cap\mathcal{C}_\varrho$，其中 $\varrho\colon\operatorname{Im}(\sigma)\to I_1$。由于 M 是纯内射的，${}^{\perp_1}M$ 在 $\varinjlim$ 下封闭，因此只需证明 $\mathcal{C}_\varrho$ 在 $\varinjlim$ 下封闭。对于任意单态射 ϱ，这都是成立的。事实上，设 $(X_i、\{\varphi_{ij}\})$ 是 $\mathcal{C}_\varrho$ 中的一个有向系统，并设 $f\colon\varinjlim X_i=X\to I_1$。那么对于每个 $i\in I$，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\varphi_i} & X \\ \vdots{\scriptstyle h_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Im}(\sigma) & \xrightarrow{\varrho} & I_1 \end{array}$$

此外，我们有

$$(\varrho h_j)\varphi_{ij}=f\varphi_j\varphi_{ij}=f\varphi_i=\varrho h_i$$

并且由于 ϱ 是单态射，$h_j\varphi_{ij}=h_i$，因此 $\{h_i\}$ 与该有向系统相容，并由余极限的泛性质诱导出一个分解 $h\colon X\to\operatorname{Im}(\sigma)$。现在 $\varrho h\varphi_i=\varrho h_i=f\varphi_i$，对于所有 $i\in I$，因此，由分解的唯一性可知 $\varrho h=f$ 和 $X\in\mathcal{C}_\varrho$。

现在假设 R 是左阿廷的，还需证明 $\mathcal{C}_\sigma$ 是一个无挠类。但这是显然的，因为它与 $\mathcal{C}_\sigma\cap R$-模的极限闭包一致；根据引理 2.2，$\mathcal{C}_\sigma\cap R$-模中的极限闭包是一个无挠类，因为 $\mathcal{C}_\sigma$ 对扩张和子模封闭。□

现在我们可以描述与余倾斜模 C 相关联的类 $A({}^{\perp_0}C)$。

命题 4.3. 如果 C 是具有逼近序列 *(1)* 的余倾斜模，且 $\mathcal{T} = {}^{\perp_0}C$ 是相关联的挠类，那么

$$\mathrm{A}(\mathcal{T}) = \mathcal{C}_\sigma$$

其中 σ 是 C_0的极小内射余表示。

特别地，若 R 是左阿廷的，则 $\mathrm{A}(\mathcal{T})$ 是一个余倾斜类。

证明。" $\supseteq$ ": 设 $X \in \mathcal{C}_\sigma$。我们证明，对任意 $T \in {}^{\perp_0}C$ 以及任意映射 $f: T \to X$，都有 $\mathbf{ker}(f) \in {}^{\perp_0}C$。

由于 $\mathcal{C}_\sigma$ 对取子模封闭，不妨设 f 是满同态。考虑短正合列 $0 \to \mathbf{ker}(f) \to T \to X \to 0$。将 $\mathbf{Hom}_R(-, C_0)$ 作用于该序列，可得 $\mathbf{Hom}(\mathbf{ker}(f), C_0) = 0$。然而，由于 C_0余生成 $\mathbf{Cogen}(C)$，根据引理 4.1(1)，可知 $\mathbf{Hom}(\mathbf{ker}(f), C) = 0$，证毕。

" $\subseteq$ ": 设 $X \in \mathbf{A}({}^{\perp_0}C)$。根据引理 3.3，该类对子模封闭，因此只需证明 $\mathbf{Ext}^1(X, C_0) = 0$。

设 $0 \to C_0 \to M \xrightarrow{f} X \to 0$ 是一个短正合列。对交换图应用蛇引理:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \mathrm{t}\,M & \longrightarrow & f(\mathrm{t}\,M) = I & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

我们得到

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \mathrm{t}\,M & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M/\mathrm{t}\ M & \longrightarrow & \overline{X} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

由于 I 是 X 的子模，它属于 $\mathbf{A}({}^{\perp_0}C)$，因此 $F \in \mathbf{Cogen}(C) \cap {}^{\perp_0}C = 0$。

这迫使 $L = C_0$。接着，由于 C_0 在 $\mathbf{Cogen}(C)$ 中是分裂内射，且 $M/\mathrm{t}\ M$ 属于 $\mathbf{Cogen}(C)$，第三个短正合列分裂。因此我们得到一个映射 $g: M/\mathrm{t}\ M \to L$。于是映射 $g \circ h$ 是中间正合列的分裂满同态。□

在诺特环上，得益于余倾斜挠对与 R-模中的挠对之间的相互作用，我们再次得到一个相容性结果。

命题 4.4. 设 R 是左诺特环。若 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是 R- 模中的余倾斜挠对，且其限制为 $(\mathbf{t}, \mathbf{f})$，则

$$\alpha(\mathcal{T}) = \varinjlim[\tilde{\alpha}(\mathbf{t})].$$

证明。根据定义，$\mathcal{C}_\sigma$ 在余积下封闭。由引理 3.3 和命题 4.3 可知，$\alpha(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \cap \mathcal{C}_\sigma$ 是宽子范畴且在余积下封闭，因此它在直极限下封闭。由命题 3.4，因 $\tilde{\alpha}(\mathbf{t}) \subseteq \alpha(\mathcal{T})$，可得包含关系“ $\supseteq$ ”。

反过来，若 $X \in \alpha(\mathcal{T})$，则由命题 3.4 可知，其所有有限生成子模都属于 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{t})$。因此，我们可以写成 $X = \varinjlim(X_i)$，其中 $X_i \in \mathbf{A}(\mathbf{t})$。由于 $\mathcal{F}$ 是可定义的，该挠对的挠根与直极限可交换，特别是 $X = t(X) = t(\varinjlim X_i) \cong \varinjlim t(X_i)$.现在，每个 $t(X_i) \in \mathcal{T} \cap \mathbf{A}(\mathbf{t}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{t})$。这证明了包含关系“ $\subseteq$ ”。□

引理与定义4.5。 [18, 推论3.2和注记3。2] R-Mod 的子范畴 $\mathcal{C}$ 是预覆盖的，且对余核封闭，当且仅当包含函子 $\mathcal{C} \hookrightarrow R$-Mod 有右伴随。

具有这些性质的子范畴称为余反射子范畴。我们用 $\mathsf{CWide}(R)$ 表示 R-Mod 的所有宽余反射子范畴组成的类。

定理 4.6。 设 R 为一个诺特环。则赋值 $(\mathcal{T},\ \mathcal{F}) \mapsto \alpha(\mathcal{T})$ 定义了一个映射

$$\alpha : \mathbf{Cosilt}(R) \longrightarrow \mathbf{CWide}(R)$$

其像是 R 宽子范畴(R) 类: 它们是由 R-模中的宽子范畴的直极限闭包得到的 R-模 的子范畴。取限制 res: $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X} \cap R$-模，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cosilt}(R) & \xrightarrow{\alpha} & \overline{\mathbf{wide}}(R) \\ {\scriptstyle \mathrm{res}}\uparrow{\scriptstyle \varinjlim} & & {\scriptstyle \mathrm{res}}\uparrow{\scriptstyle \varinjlim} \\ \mathbf{tors}(R) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathbf{wide}(R) \end{array}$$

特别地 地，对于任意 $\mathcal{W} \in$ 宽子范畴(R)，子范畴 极限$\longrightarrow \mathcal{W}$是宽的，并且 极限$\longrightarrow \mathcal{W} \cap R$-模 $= \mathcal{W}$.

证明。 El Bashir 的一个结果 [21] 指出，模范畴的子范畴是覆盖类，当且仅当它对余积和有向余极限封闭，并且等于某个模集的直极限闭包。特别地，这适用于任意形如 $\varinjlim \mathcal{W}$ （其中~为某个 $\mathcal{W} \in$ 宽子范畴(R)）的类。由定理 3.5 可知， $\mathcal{W} = \tilde{\alpha}(\mathsf{t})$ ，其中 t =T$(\mathcal{W})$。由命题 4.4 可得，对于 $\mathcal{T} = \varinjlim \mathcal{W} = \alpha(\mathcal{T})$，$\varinjlim \mathsf{t}$。因此，$\varinjlim \mathcal{W}$是 R-模中的宽子范畴，并且是覆盖类；特别地，它是预覆盖的，并且对余核封闭，即根据引理 4.5，它是 R-模中的余反射子范畴。我们得出，映射 α: Cosilt$(R) \longrightarrow$ CWide(R) 是定义良好的，并且 wide(R) 是其像。现在应用引理 3.4，可知每个 $\mathcal{W} \in$宽子范畴(R)都满足 $\varinjlim \mathcal{W} \cap R$-模 $= \mathcal{W}$，且该图具有所述性质。□

在阿廷情形下，我们可以判定 $\alpha(\mathcal{T})$ 是否也对积封闭。

推论 4.7。 设 A 是一个左阿廷环，且 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是一个余倾斜挠对，其在 A-mod 中的限制为 $(\mathbf{t}, \mathbf{f})$。那么， $\alpha(\mathcal{T})$ 在 A-Mod 中对直积封闭，当且仅当 $\tilde{\alpha}(\mathbf{t})$ 在 A-mod 中是函子有限的。

换言之，宽子范畴 $\mathcal{W} \in$ 宽子范畴(A) 是函子有限的，当且仅当 极限$\longrightarrow \mathcal{W}$ 是双反射的。

证明。 子范畴 $\tilde{\alpha}(\mathsf{t})$ 协变有限，当且仅当 $\varinjlim \tilde{\alpha}(\mathsf{t}) = \alpha(\mathcal{T})$ 是一个可定义子范畴，见 [17, 第 4 节2]。在此情形下，我们可以证明它也是反变有限的。事实上， $\tilde{\alpha}(\mathsf{t}) = B$-mod，其中某个左阿廷环 B 作为一个模 A–有限生成。

事实上，假设 $\alpha(\mathcal{T})$ 对积封闭，因此是 A-Mod 的双反射子范畴。那么，根据 [23, 定理 1.2],，存在一个环满同态 $A \to B$，使得 $\alpha(\mathcal{T}) \cong B$-Mod。考虑 $\alpha(\mathcal{T})$ 的一个小投射生成元，我们仍将其记作 B。那么 B 可以写成 $\tilde{\alpha}(\mathsf{t})$ 中对象 B_i 的直极限；特别地，它是 $\coprod B_i$ 的一个商。由于 B 在该子范畴中是投射的，因此 B 实际上是 $\coprod B_i$ 的一个直和项。不过， B 在该范畴中也是紧的，因此它是有限生成模有限直和的一个直和项。特别地， B 是有限生成的。这表明 $\tilde{\alpha}(\mathsf{t}) = B$-mod。□

注 4.8. 我们在定理 4.6 中看到，赋值 $\mathcal{W} \mapsto T(\mathcal{W})$ 是映射 α : Cosilt$(R) \longrightarrow$CWide(R) 的右逆。事实上， [9] 证明了，对于任意对余积封闭的宽子范畴 $\mathcal{W}$，都有 $\alpha(\mathsf{T}(\mathcal{W})) = \mathcal{W}$。

现在我们来描述类 B(Cogen C)。

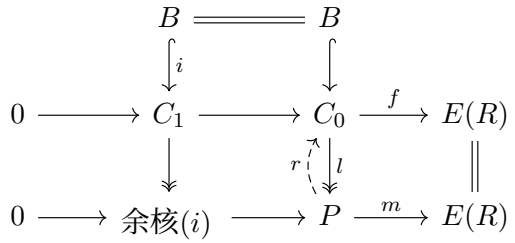
命题 4.9。 若 C 是一个具有逼近序列 *(1)* 的余倾斜模，且 $\mathcal{F} =$ 余生成C，则

$$\mathrm{B}(\mathcal{F}) = {}^{\perp_0}C_1$$

特别地，$\mathrm{B}(\mathcal{F})$ 是 R-模中的一个挠类。

证明。“⊆”：由于 B(余生成(C)) 对商封闭（由引理 3.3 可知），只需证明不存在从某个对象 $B \in$B(余生成(C)) 到 C_1 的非零单态射。

假设我们可以找到一个单态射 $i : B \to C_1$，并考虑以下推出图：



由于 $B \in$ B(Cogen(C))，我们有 $P \in$ Cogen(C)。因此，映射 $m : P \to E(R)$ 必定经由某个 $r : P \to C_0$ 分解通过 f。由此可得 $f = m \circ l = (f \circ r) \circ l$。根据 f 的右极小性，映射 $r \circ l$ 是同构。因此，l 是单态射。这意味着$B = 0$。

“⊇”：设 $X \in {}^{\perp_0}C_1$。我们必须证明，对于 $F \in$ Cogen(C)，每个映射 $X \to F$ 的余核都是无挠的。由于 ${}^{\perp_0}C_1$ 对商封闭，不失一般性，我们只考虑单射。

因此，设 $0 \to X \to F \to M \to 0$ 是一个短正合列。对函子 $\mathrm{Hom}_R(-, C_1)$ 应用后得到的长正合列表明 $\mathrm{Ext}^1_R(M, C_1) = 0$，因为根据引理 4.1，$\mathrm{Ext}^1_R(F, C_1) = 0$ 也是如此。此外，由于 M是 F的一个商，我们有 $M \in R/\mathrm{Ann}(C)$- Mod。因此，M属于 ${}^{\perp_1}C_1 \cap R/\mathrm{Ann}(C)$- Mod；根据引理 4.1，这又等于 Cogen(C)。□

范畴 $\alpha(\mathcal{T})$ 和 $\beta(\mathcal{F})$ 可以视为广义正交范畴；事实上，在余倾斜情形下，它们正是如此。

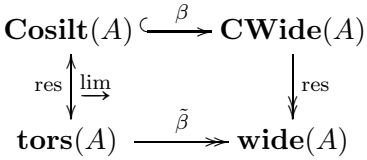
注记 4.10. 当 C 的内射维数至多为一时，我们有 A$(\mathcal{T}) = {}^{\perp_1}C_0$ 和$\alpha(\mathcal{T}) = {}^{\perp_0,\,1}C_0$。如果 C是余倾斜模，我们还有 $\mathcal{F} = {}^{\perp_1}C_1$，因此 $\beta(\mathcal{F}) = {}^{\perp_0,\,1}C_1$。

我们的第二个主要结果是关于映射 β的。

定理 4.11. 设 A 为左阿廷环。那么赋值 $(\mathcal{T},\ \mathcal{F}) \mapsto \beta(\mathcal{F})$ 定义了一个单射

$$\beta : \mathbf{Cosilt}(A) \longrightarrow \mathbf{CWide}(A)$$

将其限制到 $\mathrm{res} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X} \cap A$- 模，我们得到一个交换图



注记 4.12. 在该定理的证明中，我们将用到以下事实：左阿廷环的模范畴中的余倾斜挠对由其无挠且几乎挠模唯一确定。在 [37, 命题 2.20] 中，这一结论是针对有限维代数陈述的。然而，证明仅依赖于小挠对与大挠对之间的相容性结果，以及 Enomoto [22] 关于砖模与无挠类之间联系的一项结果，而该结果对任意阿贝尔长度范畴都成立。因此，这一陈述在左阿廷环的情形下仍然成立。

证明。给定一个余倾斜类 $\mathcal{F}$，由引理 3.3 和命题 4.9 可知，类$\beta(\mathcal{F}) = {}^{\perp_0}C_1 \cap$余生成$(C)$是宽子范畴，且对余积封闭。此外，它也对纯商封闭，因为它是两个对这类商封闭的类的交。由此，根据 [13, 定理 2.5]，$\beta(\mathcal{F})$ 是预覆盖的。由于 $\beta(\mathcal{F})$ 也对余核封闭，我们由引理 4.5 推知，它是余反射的。

因此，映射 β定义良好。此外，若 $\beta(\mathcal{F}) = \beta(\mathcal{F}')$，则 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$根据命题 3.10 具有相同的无挠且几乎挠模。由于 A是左阿廷的，我们得出

由 [37, 命题 2.20] 可知 $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$。进一步注意，该图表由˜引理 3.4 可交换，并且 β 根据定理 3.5(ii)是满射。最后，由于左侧的垂直箭头是双射，右侧的垂直箭头是满射。□

In 在遗传情形下，我们可以刻画 $\beta(\mathcal{F})$ 何时对直积封闭 s.

推论 4.13. 左阿廷遗传环R上的一个余倾斜挠对 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 在 R- 模 中广泛生成，当且仅当 $\beta(\mathcal{F})$ 在 R- 模中对直积封闭。

证明. 若 $\mathcal{F} = \mathcal{W}^{\perp_0}$ 对某个 $\mathcal{W} \in$ 宽子范畴(R)成立，则由引理 3.7 可知 $\beta(\mathcal{F}) = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$对积封闭。反过来，若 $\beta(\mathcal{F})$ 对积封闭，则由 [27, 定理 8.1]可知，存在一个 $\mathcal{W} \in$宽子范畴(R)，使得 $\beta(\mathcal{F}) = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$，而后者由引理 3.7 可知与 $\beta(\mathcal{W}^{\perp_0})$一致。因此，由 β 的单射性可得 $\mathcal{F} = \mathcal{W}^{\perp_0}$。□

下文将给出一个并非广泛生成的余倾斜类。我们还将看到，˜一般而言，映射 β 并非满射，而映射 β 并非单射。

例 4.14. 令 Λ为克罗内克代数，即箭图 0 1在代数闭域 k上的路径代数。记 $\mathbf{p}$、$\mathbf{t}$和 $\mathbf{q}$ 分别为所有不可分解拟投射模、正规模和预内射模的类。回顾一下，$\mathbf{t} = \bigcup_{x\in\mathbb{X}} \mathbf{t}_x$ 其中$(\mathbf{t}_x)_{x\in\mathbb{X}}$ 是管族。

Λ-模中余倾斜挠对有完全分类。它们要么由一个有限维模 $M \in \mathbf{p} \cup \mathbf{q}$ 生成，要么由形如 $\mathbf{t}_P \cup \mathbf{q}$ 的集合生成，该集合由管的子集 $\mathbf{t}_P = \bigcup_{x\in P} \mathbf{t}_x$ 确定，且满足 $P \subseteq \mathbb{X}$。由满足$P \neq \varnothing$的 $\mathbf{t}_P \cup \mathbf{q}$ 生成的挠对具有 $(\mathsf{Gen}\, \mathbf{t}_P, \mathcal{F}_P)$ 的形式。当 $P = \mathbb{X}$ 时，我们只写作 $(\mathsf{Gen}\, \mathbf{t}\ \mathcal{F})$。当 $P = \varnothing$ 时，我们得到由 $\mathbf{q}$ 生成的分裂挠扭对 $(\mathsf{Add}\, \mathbf{q}\ \mathcal{C})$。

注意到，$(\mathsf{Add}\, \mathbf{q}\ \mathcal{C})$ 是唯一一个非宽生成的余倾斜挠对。事实上，$\beta(\mathcal{C}) = {}^{\perp_0, 1}G$ 是泛模 G 的正交类，而且它不对直积封闭。详情请参阅 [6, 例 4.10 和第 6 节4]。

进一步注意到，$\alpha(\mathsf{Add}\, \mathbf{q}) = \tilde{\alpha}(\mathsf{add}\, \mathbf{q}) = 0$。事实上，若我们将 $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$中的模编号，使得 $\dim_k \mathrm{Hom}_A(Q_{n+1}, Q_n) = 2$，则可知每个 Q_n 都同构于 Q_{n+1}/S，其中 S是一个简单正则模，因此它不能属于 $\alpha(\mathsf{Add}\, \mathbf{q})$。这表明 α 和 $\tilde{\alpha}$不是内射的。

对于真子集 $P \subset \mathbb{X}$，现在考虑宽子范畴 $\mathsf{add}\, \mathbf{t}_P$（属于 Λ-模）的直极限闭包 $\mathcal{W}_P = \varinjlim \mathsf{add}\, \mathbf{t}_P$。根据定理 4.6，它是 Λ-模中的宽余反射子范畴；由于 $\mathsf{add}\, \mathbf{t}_P$在 Λ-模中不是协变有限的，因此该子范畴不对直积封闭。因此，$\mathcal{W}_P$ 不可能是某个宽生成挠对的 $\beta(\mathcal{F})$ 形式。此外，$\mathcal{W}_P \neq \beta(\mathcal{C})$, 因为任意满足 $x \in \mathbb{X}\backslash P$ 的简单正则 $S \in \mathbf{t}_x$ 都属于 $\beta(\mathcal{C})\backslash\mathcal{W}_P$。因此，$\mathcal{W}_P$ 不属于 β的像。这表明映射 $\beta : \mathsf{Cosilt}(\Lambda) \hookrightarrow \mathsf{CWide}(\Lambda)$ 不是满射。

最后，我们注意到 $(\mathsf{Gen}\, \mathbf{t}\mathcal{F}) = ({}^{\perp_0}G, \mathsf{Cogen}\ G)$与由泛模 G余生成的挠对重合。因此，G 是其唯一的无挠几乎挠模，而˜ ˜$\beta(\mathcal{F}) \neq 0$同时 $\beta(\mathcal{F}) \cap \Lambda$- 模 $= \beta(\mathsf{add}\, \mathbf{p}) = 0$。所以，映射 β: $\mathsf{tors}(\Lambda) \to \mathsf{wide}(\Lambda)$ 不是单射。此外，我们看到 β 的像不包含于 $\mathsf{wide}(\Lambda)$。

5. τ 倾斜无限阿廷代数的应用

本节中，我们始终假设 Λ 是一个阿廷代数。回顾一下，Λ- mod 的挠类集合 $\mathsf{tors}(\Lambda)$ 上有一个由包含关系给出的自然偏序。如 [20], 所示，由此得到的偏序集具有完备格的结构，并且具有若干良好的格论性质。该格有限的代数称为倾斜有限代数。τ 倾斜无限情形中的一个典型现象是存在非平凡的局部极大元。

定义 5.1。给定 $\mathsf{tors}(\Lambda)$ 中的两个挠类 u 和 t，如果 u $\subset$t，且不存在一个 $\mathsf{tors}(\Lambda)$ 中的 t′，使其真包含 u 且真包含于 t，则称 t 覆盖 u。

若挠类 t $\in\mathsf{tors}(\Lambda)$ 不存在覆盖 t 的 $\mathsf{tors}(\Lambda)$元素，则称 t 为局部极大。此外，若不存在被 t 覆盖的 $\mathsf{tors}(\Lambda)$ 元素，则称 t 为局部极小。

文献 [12] 证明，覆盖 t（分别被 t 覆盖）的挠类与相对于挠对 (t, f) 的极小（余）扩张模的同构类之间存在双射。此外，根据 [7]，覆盖 t 的挠对对应于相关余倾斜模的一次变异；更准确地说，对应于相应的两项余倾斜复形的一次变异。关于 [7], 中引入的余倾斜对象变异概念，我们不再赘述，而采用 [7, 定理 8.8] 中给出的以下等价刻画：

定义 5.2 ([7]). 设 (t, f) 和 (u, v) 是 tors(Λ) 中的挠对。若 u ⊆ t 且 t ∩ v ∈ 宽子范畴(Λ)，则称 (t, f) 是 (u, v)的右变异，并称 (u, v) 是 (t, f)的左变异。

~类 $\tilde{\alpha}$(t) 和 β(f) 决定挠对 (t, f)的变异是否存在。

命题 5.3. 设 $(\mathbf{t}, \mathbf{f})$ 是 $\mathbf{tors}(\Lambda)$ 中的挠对。当且仅当 $\tilde{\alpha}(\mathbf{t}) = 0$时，挠类t 是局部极小的；当且仅当 $(\mathbf{t}, \mathbf{f})$ 时，该挠对不允许真左变异。此外，当且仅当 $\beta(\mathbf{f}) = 0$时，t 是局部~极大的；当且仅当 $(\mathbf{t}, \mathbf{f})$ 时，该挠对不允许真右变异。

证明。 由 [12, 定理 2.3.2] 可知，t 是局部极小的，当且仅当不存在（有限生成的）挠且几乎无挠模。由命题 3.10，这意味着~$\tilde{\alpha}$(t) = 0。此外，根据引理 3.3，后者等价于 f = A(t) 。这就是说~不存在真左变异。事实上， [7, 推论 9.9] 中证明了： ^v =A(t) 是满足 (^u ^v) 为 (t, f)的左变异的最大无挠类。

第二个陈述的证明是对偶的，因为根据 [12, 定理 1.0.2]，t 局部极大当且仅当不存在有限生成的无挠几乎挠模。□

接下来，我们的目标是给出一个挠对上的条件，以确保变异的存在。以下概念见 [6,定义 4.12, 注 4.18]。

定义 5.4. 环 R 上的余倾斜模 C，其余倾斜类为 $\mathcal{F}$ =余生成(C)，逼近序列为 (1)，称为极小，如果

(i) $\beta(\mathcal{F})$ 在 R-模范畴中对直积封闭（因此是一个双反射子范畴），(ii) $\mathrm{Hom}_R(C_0, C_1) = 0$.

人们关注极小余倾斜模，是因为它们与环满同态有关。例如，在交换诺特环或遗传环上，极小余倾斜模与同调环满同态在等价意义下存在一一对应。详情请参见 [6]。

一般而言，要判断某个余倾斜类是否由极小余倾斜模余生成并不容易；然而，对于遗传代数，有一个便捷的判据。

命题 5.5。 设 A 是一个左阿廷遗传环。那么，余倾斜模 C 等价于某个极小余倾斜模，当且仅当由 C 余生成的余倾斜挠对是广泛生成的。

证明。 若 C 是一个极小余倾斜模，则 $\beta(\mathrm{Cogen}\, C)$ 是双反射的，因此根据 [27, 定理 6.1]，它具有 $\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$ 的形式，其中 $\mathcal{W} \in \mathsf{wide}(A)$。由引理 3.7 可推得 $\beta(\mathrm{Cogen}\, C) = \beta(\mathcal{W}^{\perp_0})$，再由定理 4.11 中 β 的单射性即可立即得到结论。

反之，每个挠对 $(\mathrm{T}(\mathcal{W}), \mathcal{W}^{\perp_0})$（其中 $\mathcal{W} \in \mathsf{wide}(A)$）都是余倾斜的，并且 $\beta(\mathcal{W}^{\perp_0}) = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$ 是一个双反射子范畴。现在，定理 4.16 和推论 4.18] 告诉我们，在遗传情形下，该映射将极小余倾斜模与双反射子范畴之间建立双射。因此，存在一个极小余倾斜模 C，使得 $\beta(\mathrm{Cogen}\, C) = \beta(\mathcal{W}^{\perp_0})$；再次应用定理 4.11 即可得到结论。□

我们将证明，在阿廷代数上，除了内射余生成元以外，所有极小余倾斜模都存在某个挠的、几乎无挠的模。以下预备结果对任意环均成立。

引理 5.6。 设 C 是环 R 上的一个余倾斜模，并具有逼近序列 *(1)*，且 $(\mathcal{T}、\mathcal{F}) = ({}^{\perp_0}C、$余生成 $C)$ 是相应的挠对。

(1) 若 $\alpha(\mathcal{T}) = 0$，则 C_0 是余倾斜的。

(2) 若 C 是余倾斜的，则 C_0 是余倾斜的当且仅当 $\alpha(\mathcal{T})=0$。(3) 若 C 是极小余倾斜模，且模 C_0 是余倾斜的，则 $C_1=0$。

证明。 (1) 设 σ 是 C_0 的极小内射余表示。由命题 4.3 可知 $\mathcal{C}_\sigma=\mathsf{A}(\mathcal{T})$；根据引理 3.3，后一个类等于 $\mathcal{F}$，因为根据假设 $\alpha(\mathcal{T})=0$。由于 C_0 属于 $\mathsf{Cogen}(C_0)$，我们得出 C_0 关于 σ 是余倾斜的。

(2) 由注记 4.10 可知 $\alpha(\mathcal{T})={}^{\perp_{0,1}}C_0$。因此，$\alpha(\mathcal{T})=0$ 当且仅当 $\mathsf{Cogen}(C_0)={}^{\perp_1}C_0$，也就是说，当且仅当 C_0 是余倾斜的。

(3) 根据引理 4.1，$\mathsf{Cogen}(C_0)=\mathsf{Cogen}(C)$，因此这两个余倾斜模等价，且 $\mathsf{Prod}(C)=\mathsf{Prod}(C_0)$。所以，$C_1\in\mathsf{Prod}(C_0)$。然而，根据假设，$\mathsf{Prod}(C_0)\subseteq\beta(\mathsf{Cogen}(C))$。但由命题 4.9 可知 $\beta(\mathsf{Cogen}(C))\subseteq{}^{\perp_0}C_1$，因此 $C_1=0$。□

命题 5.7。 设 Λ 是一个阿廷代数，且 C 是一个极小余倾斜模，其相应挠对为 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$。假设 $\mathcal{F}\neq\Lambda\text{-}\mathrm{Mod}$。那么 $\alpha(\mathcal{T})\neq0$，且该挠对含有某个挠的、几乎无挠的模。

证明。 再次考虑逼近序列 (1)。若 $\alpha(\mathcal{T})=0$，则 C_0 是一个余倾斜模，因此 $C_1=0$。这意味着 C_0 是一个有限生成余倾斜模，换言之，C_0 是支撑 $\tau^{-1}-$ 倾斜的。此外，与 C_0 在 $\Lambda\text{-}\mathrm{mod}$ 中余生成的无挠类相对应的（函子有限）挠类 $\mathsf{t}=\mathcal{T}\cap\Lambda\text{-}\mathrm{mod}$ 必须满足 $\tilde{\alpha}(\mathsf{t})=0$，因此根据命题 5.3，它是局部极小的。但若 $\mathsf{t}\neq0$，则根据定理 3.1] ，可以通过变异找到一个被 t 覆盖的挠类 u。因此，我们必须有 $\Lambda\text{-}\mathrm{mod}=$余生成$(C_0)$，这与我们的假设矛盾（根据定理 2.8）。

因此 $\alpha(\mathcal{T})\neq0$，由命题 4.4 可知，$\alpha(\mathcal{T})\geq1$，这等价于它是相对于 $\tilde{\alpha}(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 的~~余有某个简单对象~~的~~，根据命题 3.10~~ 挠类~~，~~~~ 几乎无挠的模。□

换言之，极小余倾斜模总是存在左变异。

推论 5.8. 设 Λ 是一个阿廷代数，且 $(\mathbf{t},\mathbf{f})$ 是 $\Lambda\text{-}\mathrm{mod}$ 中的一个非平凡挠对。若相应的余倾斜挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})=(\text{极限}\longrightarrow\mathbf{t},\text{极限}\longrightarrow\mathbf{t})$ 在 $\Lambda\text{-}\mathrm{Mod}$ 中由一个极小余倾斜模余生成，则 $\mathbf{t}$ 不是局部极小的。

文献 [37] 证明，对于任意 $\tau-$ 倾斜无限阿廷代数，$\mathrm{tors}(\Lambda)$ 中都存在一个局部极大且非函子有限的挠类；对偶地，也存在一个局部极小且非函子有限的挠类。从上面的讨论可以看出，$\mathrm{tors}(\Lambda)$ 的这种“病态”行为与相应余倾斜模的病态行为直接相关：它既保证了大型无挠且几乎挠模的存在（参见 [37, 引理 3.13]），也保证了大型非极小余倾斜模的存在。下面将这些发现归纳起来，给出 $\tau-$ 倾斜有限代数的若干新刻画。

定理 5.9. 对于阿廷代数 Λ，以下陈述等价。

(i) Λ 是 τ-倾斜有限的。(ii) 每个不等价于有限生成模的余倾斜模都是极小的。(iii) Λ-模 中每个在余积下封闭的宽子范畴，都是 Λ- 模中某个宽子范畴的直极限闭包。(iv) 对于每个 $\mathcal{W}\in$宽(Λ)，都存在唯一一个 Λ- 模 的宽子范畴 $\mathcal{X}$，它在余积下封闭，且满足 $\mathcal{W}=\mathcal{X}\cap\Lambda$- 模。(v) 若 $\mathcal{X}$ 是 Λ- 模 的宽子范畴且在余积下封闭，则当且仅当 $\mathcal{X}=0$ 时，$\mathcal{X}\cap\Lambda$- 模 $=0$。(vi) Λ- 模 中在余积下封闭的宽子范畴构成有限集。

证明。 首先，回顾 [9, 定理 4.8]：在 τ-倾斜有限代数上，Λ-模中的所有挠（无挠）类都由有限生成的（余）倾斜模给出。

(i) $\Rightarrow$ (ii) 因此显然成立。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：由推论 5.8 和注 2.9 可知，$\mathrm{tors}(\Lambda)$ 中不存在既局部极小又非函子有限的挠类。因此，根据定理 3.10] 的对偶版本，Λ 是 τ-倾斜有限的。

(ii) $\Rightarrow$(iii)：如果 $\mathcal{X}$ 是 Λ-Mod 的一个对余积封闭的宽子范畴，那么根据注 4.8，$\mathcal{X}=\alpha\mathrm{T}(\mathcal{X})$。此外，由于 Λ 是 τ-倾斜有限的，挠对 $(\mathrm{T}(\mathcal{X}),\mathcal{X}^{\perp_0})$ 是余倾斜挠对，因此根据定理 4.6，$\mathcal{X}\in$宽(Λ)。

(iii) $\Rightarrow$(iv)：根据定理 4.6，限制到 Λ- mod 会在由余积封闭的 Λ- Mod 的宽子范畴与 wide(Λ) 之间诱导一个双射。

(iv) $\Rightarrow$ (v) 显然成立。

(v) $\Rightarrow$(i)：我们应用定理 4.11。给定一个挠对 (t,f) in tors(Λ)，我们知道 $\tilde{\beta}$ 将 $\mathcal{F}=\varinjlim\mathrm{f}$ 映射到一个由余积封闭、且限制为 $\beta(\mathrm{f})$ 的宽子范畴。根据我们的假设，$\tilde{}$这意味着 $\beta(\mathrm{f})=0$蕴含 $\beta(\mathcal{F})=0$，因此由 β 的单射性可得 $\mathcal{F}=0$。由命题 5.3 和 [37, 推论 3.10]，我们推得 Λ 是 τ-tilting 有限的。

(i) $\Rightarrow$ (vi)：当 Λ 是 τ-tilting 有限时，如 [11, 推论 3.11] 所证，映射 $\tilde{\alpha}$ 在 tors(Λ) 与 wide(Λ) 之间诱导一个双射。该结论随后由条件 (iii) 得出。

(vi) $\Rightarrow$ (i)：由定理 4.11 中映射 $\beta:\mathrm{Cosilt}(\Lambda)\longrightarrow$CWide$(\Lambda)$ 的单射性可知，(vi) 蕴含 Cosilt(Λ) 是有限的。现在应用定理 2.8 即可得出结论。□

在 [11, 推论 3.11] 中还证明了，对于一个 τ–倾斜有限代数，Λ-模的每个宽子范畴都是函子有限的。正如推论 4.7 及其证明中所指出的，这意味着 wide(Λ) 中的每个范畴 $\mathcal{X}$ 都对积封闭；事实上，还存在一个从 $\Lambda\to\Gamma$ 到某个阿廷代数 Γ 的环满同态，使得 $\mathcal{X}\cong\Gamma$-模。于是，我们可以将定理 5.9 中 (i) 与 (iii) 的等价性改述如下：

推论 5.10。阿廷代数 Λ 是 τ–倾斜有限的，当且仅当 Λ- 模 中每个对余积封闭的宽子范畴都等价于某个阿廷代数上的模范畴。

我们以一些开放问题结束本节。

问题 5.11. 以下列出的是当 Λ 是τ–倾斜有限阿廷代数时满足的一些必要条件（参见上文讨论和 [9, 定理 4.8]）。其中是否有任何一个是充分条件?

(1) Λ-模的每个宽子范畴都是函子有限的。(2) Λ-模的每个对余积封闭的宽子范畴也对积封闭。(3) 任意环满同态 $\Lambda\to\Gamma$（满足 $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(\Gamma,\Gamma)=0$）的目标都是阿廷代数。

注意，(2) 蕴含 (1)。此外，由推论 5.10 可知，(2) 和 (3) 蕴含 Λ 是 τ–倾斜有限的。

6. Torsion pairs and Ext-orthogonal pairs

本节将介绍遗传环上的 Ext-正交对的一些应用。

定义 6.1 ([27, 定义 2.1]). 设 R 是一个环。若 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是 R-模的两个满子范畴，则称它们构成一个 *Ext*-正交对，如果：

$$X\in\mathcal{X}\iff\forall n\in\mathbb{Z}\ \mathrm{Ext}^n(X,\mathcal{Y})=0$$
$$Y\in\mathcal{Y}\iff\forall n\in\mathbb{Z}\ \mathrm{Ext}^n(\mathcal{X},Y)=0$$

Ext-正交对是完备的，如果对所有 $M\in R$-模，都存在一个正合序列：

$$0\longrightarrow Y_M\longrightarrow X_M\longrightarrow M\longrightarrow Y^M\longrightarrow X^M\longrightarrow 0$$

其中 X_M、$X^M\in\mathcal{X}$ 和 Y_M、$Y^M\in\mathcal{Y}$。

正如 [27], 中所指出的，遗传环上的每个完备 Ext-正交对都会导出一个挠对（以及一个余挠对），并且可以由此恢复。

命题 6.2. 设 A 是遗传环，$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是完备 *Ext*-正交对。那么存在一个（唯一确定的）挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$，属于 A-Mod，使得 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})=(\alpha(\mathcal{T}),\beta(\mathcal{F}))$。

证明。 与 [27], 中一样，我们考虑由 $\mathcal{X}$生成的挠对 $(\mathrm{T}(\mathcal{X}), \mathcal{X}^{\perp_0})$。

我们有 $\mathrm{Cogen}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}^{\perp_0}$，因为后者是一个包含 $\mathcal{Y}$ 的无挠类。此外，若 $L \in \mathcal{X}^{\perp_0}$，则 Ext-正交对的逼近序列给出一个嵌入 $L \to Y^L$，且满足 $Y^L \in \mathcal{Y}$。因此 $\mathrm{Cogen}(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}^{\perp_0}$。类似地，我们可以得到 $\mathrm{T}(\mathcal{X}) = \mathrm{Gen}(\mathcal{X})$。

现在，作为一个 Ext-正交对的左部， $\mathcal{X}$ 是一个对余积封闭的宽子范畴。因此，注 4.8 给出 $\alpha(\mathrm{T}(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$。

此外， $\mathcal{Y}$ 是一个对积封闭的宽子范畴。我们证明 $\beta(\mathrm{Cogen}(\mathcal{Y})) = \mathcal{Y}$。“$\subseteq$”：若 $B \in \beta(\mathrm{Cogen}(\mathcal{Y}))$，则存在某个元素 $Y \in \mathcal{Y}$ 和一个短正合列 $0 \to B \to Y \to F \to 0$，且满足 $F \in \mathrm{Cogen}(\mathcal{Y})$。特别地，由于 F 也可以嵌入某个 $Y' \in \mathcal{Y}$，模 B 可以实现为 $\mathcal{Y}$ 中某个映射的核。

"$\supseteq$": 设 $Y \in \mathcal{Y}$ 和 $Y \to F \to M \to 0$ 构成一个短正合列，其中 $F \in \mathrm{Cogen}(\mathcal{Y})$。再次，我们可以将 F嵌入某个 $Y' \in \mathcal{Y}$中。复合映射 $Y \to F \to Y'$ 的余核 C 于是是 $\mathcal{Y}$中的一个模。对图应用蛇引理

$$\begin{array}{ccccccccc} & & Y & \xrightarrow{f} & F & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}(i \circ f) & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

我们可以看出， M 嵌入 C中。因此， $M \in \mathrm{Cogen}(\mathcal{Y})$ 且 $Y \in \beta(\mathrm{Cogen}(\mathcal{Y}))$。

为证明唯一性，设 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 是一个挠对，且 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\alpha(\mathcal{T}), \beta(\mathcal{F}))$。显然，$\mathrm{T}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{T}$ 且 $\mathrm{Cogen}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{F}$。但挠类的包含关系等价于无挠类的反向包含关系，因此这两个挠对必定相同。□

例 6.3。 并非每个挠对都会导出一个 Ext-正交对。例如，回顾例 4.14，克罗内克代数上的余倾斜挠对 $(\mathrm{Add}\ \mathrm{q}\ \mathcal{C})$ 满足 $(\alpha(\mathrm{Add}\ \mathrm{q}), \beta(\mathcal{C})) = (0, {}^{\perp_0, 1}G)$。

我们可以刻画与具有特定性质的 Ext-正交对相应的挠对。

推论 6.4. 设 A 是左阿廷遗传环，且 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是完备 *Ext*-正交对。当且仅当 $\mathcal{Y}$ 是 A- 模 的双反射子范畴时，相应的挠对由一个（极小）余倾斜模余生成。

证明. $\mathcal{Y}$ 是双反射的，当且仅当它具有 $\mathcal{Y} = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$ 的形式，其中某个 $\mathcal{W} \in$ 是宽子范畴。但此时，由唯一性及引理 3.7，相应挠对必定与 $(T(\mathcal{W}), \mathcal{W}^{\perp_0})$ 一致，因此根据命题 5.5，它由一个极小余倾斜模余生成。

反过来，若该挠对是余倾斜的，则根据命题 4.4，有 $\mathcal{X} = \varinjlim(\mathcal{X} \cap A\text{- 模})$。根据[27, 定理 5.1], ，这意味着 $\mathcal{Y}$ 对余积封闭，因而是双反射的。□

极小余倾斜模有一个对偶概念。极小 silting 模是在一般环上定义的，但这里我们将采用以下更易理解的定义：

定义 6.5 ([8, 定义 5.4])。 设 A是一个遗传环。若 silting A–模 T 具有一个 $\mathrm{Add}(T)$-包络，则称其为极小 *silting* 模。

回顾一下，对于具有逼近序列 **(1)** 的余倾斜挠对 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$，我们有$\alpha(\mathcal{T}) = {}^{\perp_0, 1}C_0$ 当 A 是遗传环时，参见注记 4.10。对偶地，我们可以考虑倾斜挠对 $(\text{生成}(T), T^{\perp_0})$，并证明以下结果。

引理 6.6. 设 T 是遗传环 A上的极小 *silting* 模。设 $A \to T_0 \to T_1 \to 0$是由$\mathrm{Add}(T)$-包络诱导的正合序列。那么 $\beta(T^{\perp_0}) = T_0{}^{\perp_0, 1}$。

由 [8, 定理 5.8] 可知，遗传环上的极小 silting 模与同调环满同态通过映射 α 一一对应。更具体地，给定遗传环 A 上的极小 silting 模 T，宽子范畴 $\alpha(\mathrm{Gen}(T))$ 是双反射的，因此存在环满同态 $\lambda\colon A \to B$，使得 $\lambda^*(B\text{- Mod}) = \alpha(\mathrm{Gen}(T))$。

那么 $\mathsf{Gen}(T) = \mathsf{Gen}({}_AB)$，且诱导的 A–模映射 $A \to {}_AB$ 是一个 $\mathsf{Gen}(B)$–包络，因此 $\beta(T^{\perp_0}) = B^{\perp_{0,\,1}}$。

推论 6.7。 设 A 是一个遗传环，且 $(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$ 是一个完备 *Ext*-正交对。那么，当且仅当 $\mathcal{X}$ 是 A-Mod的双反射子范畴时，相应的挠对由一个极小 *silting* 模生成。

证明。 根据上述观察，我们可以为每个极小 silting 模 T 指定一个具有所需性质的完备 Ext-正交对 $(\alpha(\text{生成}(T)), \beta(T^{\perp_0})) = (\lambda^*(B\text{-}\,\mathsf{Mod}), B^{\perp_{0,\,1}})$ 参见 [27, 命题 3.1]。反过来，若 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是任意一个满足 $\mathcal{X}$双反射条件的完备 Ext-正交对，则对某个环满同态有 $\mathcal{X} = \lambda^*(B\text{-}\,\mathsf{Mod})$。因此，再次利用唯一性和 [27, 命题 3.1], ，该挠对由上述极小 silting 挠对(生成(B), $B^{\perp_0}$)得到。□

现在，我们可以将这些观察与以下事实结合起来：从遗传环 A 出发的同调环上满同态，恰好是 A 在宽子范畴 $\mathcal{W} \in \mathsf{wide}(A)$处的万能局部化 $A \to A_{\mathcal{W}}$。详情见 [27, 定理 6.1] 。以下结果是 [27, 定理 8.1]的一个变体。

定理 6.8。 若 A 是遗传环，则以下对象之间存在双射：

(1) A- 模的宽子范畴；(2) 满足 $\mathcal{Y}$双反射条件的（完备）*Ext*-正交对 $(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$。(3) 满足 $\mathcal{X}$双反射条件的（完备）*Ext*-正交对 $(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$。(4) 极小余倾斜挠对；(5) 极小倾斜挠对。

证明。 这些双射定义如下。

双射	对应关系
$(1) \to (2)$	$\mathcal{W} \mapsto (\text{极限}\overrightarrow{\mathcal{W}}, \mathcal{W}^{\perp_{0,1}})$
$(1) \to (3)$	$\mathcal{W} \mapsto (\overrightarrow{\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}}, A_{\mathcal{W}})$
$(1) \to (4)$	$\mathcal{W} \mapsto (T(\mathcal{W}), \mathcal{W}^{\perp_0})$
$(1) \to (5)$	$\mathcal{W} \mapsto (\text{生成}\ A_{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{\perp_1}, {A_{\mathcal{W}}}^{\perp_{0,1}})$

□

7. 由纯内射对象产生的宽子范畴

在定理 6.8 中，我们描述了由某个遗传环上的宽生成挠对 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 所对应的 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\alpha(\mathcal{T}), \beta(\mathcal{F}))$ 形式的 Ext-正交对。在有限维温和遗传代数上， $\alpha(\mathcal{T})$ 和 $\beta(\mathcal{F})$ 这两个类还有进一步的刻画。事实证明，它们恰好是 Λ-Mod 的宽余反射子范畴，且可由一组纯内射模的正交范畴得到。

定理 7.1。 设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是有限维温和遗传代数 Λ 上的完备 *Ext*-正交对。以下陈述等价。

(1) 存在 Λ-mod 的宽子范畴 $\mathcal{W}$，使得 $\mathcal{X} = \text{极限}\overrightarrow{\mathcal{W}}$ 或 $\mathcal{X} = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$。(2) 存在一组不可分解的纯内射 Λ-模 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{X} = {}^{\perp_{0,1}}\mathcal{P}$。(3) $\mathcal{X}$ 或 $\mathcal{Y}$ 是双反射的。

(1) 与 (3) 的等价性可由定理 6.8 立即得出。为使整体论述更加清晰，(1) 与 (2) 等价性的证明将分为几个步骤。我们先证明较为简单的蕴含关系 (1)⇒ (2)：

引理 7.2. 设 Λ 是一个温和遗传代数。设 $\mathcal{W}$ 是 Λ- 模的一个宽子范畴。那么存在两个由不可分解纯内射 Λ-模组成的族 $\mathcal{P}$， $\mathcal{Q}$，使得 $\mathcal{W}^{\perp_{0,\,1}} = {}^{\perp_{0,\,1}}\mathcal{P}$且 极限$\overrightarrow{\mathcal{W}} = {}^{\perp_{0,\,1}}\mathcal{Q}$。

证明。我们利用余倾斜理论和 AR公式得到该结果。

对于形如 $\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$ 的范畴，回忆一下，对于半砖 $\mathcal{B}$，我们有 $\mathcal{W} = \mathsf{filt}(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{W}^{\perp_{0,1}} = \mathcal{B}^{\perp_{0,1}}$。因此，若 $\mathcal{B}$ 包含任何不可分解投射模 P，则存在相应的不可分解内射模 I，使得 $P^{\perp_{0,1}} = P^{\perp_0} = {}^{\perp_0}I = {}^{\perp_{0,1}}I$。对于所有非投射砖模 B，有 $B^{\perp_{0,1}} = {}^{\perp_{0,1}}\tau B$。总之，我们可以找到一组不可分解有限维模 $\mathcal{B}'$，使得 $\mathcal{W}^{\perp_{0,1}} = {}^{\perp_{0,1}}\mathcal{B}'$。

对于 $\varinjlim \mathcal{W}$ 的情形，考虑 $(\mathcal{T},\mathcal{F}) = (\mathsf{T}(\mathcal{W}),\mathcal{W}^{\perp_0})$，这是由 $\mathcal{W}$ 生成的 Λ-模中的挠对；它是一个余倾斜挠对。特别地，由命题 4.4 可知 $\alpha(\mathcal{T}) = \varinjlim \mathcal{W}$。

现在考虑一个如 (1) 中的逼近序列 $0 \to C_1 \to C_0 \to D\Lambda$，其中 C_0 和 C_1 属于与余倾斜模 C 相关的 $\mathsf{Prod}\, C$。根据注记 4.10，有 $\varinjlim \mathcal{W} = {}^{\perp_{0,1}}C_0$。

现在回忆一下，C 是纯内射的，因此 C_0 和 C_1 也是纯内射的。此外，众所周知，在温和遗传代数上，每个纯内射模 E 都是 $\coprod E_i$ 的纯内射包，其中 E_i（在同构意义下）恰好是 E 的不可分解直和项，参见例如 [16, 命题 2.1]。因此，E 的正交范畴由一族不可分解纯内射 Λ-模确定。证明完毕。□

为了证明反向蕴含关系，我们需要温和遗传代数上的一些分类结果。首先回顾 Λ 的 Auslander-Reiten 箭图的形状。如例 4.14 所示，它由一个前射影分支和一个前内射分支构成，分别记为 p 和 q；此外，还有一族两两正交的管 $\mathsf{t} = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{X}} \mathsf{t}_\lambda$，其中包含正则模。

几乎所有的管秩都为 1。给定一个秩为 $r > 1$ 的例外管 t_λ，以及一个正则长度为 $m < r$ 的模 $X = U[m] \in \mathsf{t}_\lambda$，我们可以考虑 t_λ 的全子箭图 W_X；它同构于类型为 $\mathbb{A}_m$、其中 X 对应于投射-内射顶点的线性定向箭图的 Auslander-Reiten 箭图。集合 W_X 称为 t_λ 的一个 翼，其大小为 m，顶点为 X。

接下来，我们回顾一下不可分解纯内射Λ-模的完全分类：它们包括不可分解有限维模、与简单正则模 S 对应的 adic 模 $S[-\infty]$ 和普吕弗模 $S[\infty]$，以及泛模G。

无限维余倾斜模已在 [16]中完成分类。它们由配对 $(Y、P)$ 参数化，其中 Y 是一个分支模，而 P 是 $\mathbb{X}$ 的子集。更具体地说，以下模构成了所有大型余倾斜 Λ-模在等价意义下的一个完全且无冗余的列表:

$$C_{(Y,P)} = Y \oplus \coprod_{\mu\in P}\{\text{all } S[\infty] \text{ in } {}^{\perp_1}Y \text{ from } \mathbf{t}_\mu\} \oplus G \oplus \prod_{\mu\notin P}\{\text{all } S[-\infty] \text{ in } Y^{\perp_1} \text{ from } \mathbf{t}_\mu\}$$

我们不提供分支模的精确定义，而是着重讨论与本文相关的两种特殊情形。我们将选择分支模 Y，使其由例外管 t_λ 中某条固定射线或某条固定反射线上的模组成。给定一个拟单模 S，记 $S[i]$ 为从 S 出发的射线上正则长度为 i 的模，记$S[-i]$ 为终止于 S 的反射线上正则长度为 i 的模。令 P 为仅含 λ 的单元素集合，或其补集，即可得到以下余倾斜模。

命题 7.3。设 Λ 为温和遗传代数。给定指标 $\lambda \in \mathbb{X}$，使得管$\mathbf{t}_\lambda$ 的秩为 r，并给定拟单模 $S \in \mathbf{t}_\lambda$，则以下模为余倾斜模:

(1) $C_S^+ := S[1] \oplus \cdots \oplus S[r-1] \oplus S[\infty] \oplus G \oplus \prod_{\mu\neq\lambda} M_\mu$，其中每个 M_μ 都是该管$\mathbf{t}_\mu$中所有 *adic* 模的直和。(2) $C_S^- := S[-\infty] \oplus S[-r+1] \oplus \cdots \oplus S[-1] \oplus G \oplus \coprod_{\mu\neq\lambda} N_\mu$，其中每个 N_μ 都是该管$\mathbf{t}_\mu$中所有普吕弗模的直和。

注 7.4。**(1)** 根据 [4, 定理 3.16], ，模 C_S^+和 C_S^-是极小 余倾斜模，且根据命题 5.5，相应的挠对是广泛生成的。

(2) 图 7.4 示意了由余倾斜模 C_S^+ 余生成的挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$。

每个前射影模都是无挠的，而每个前内射模以及管中不同于 t_λ 的每个正则模都是挠的。在管 t_λ 中，所有模

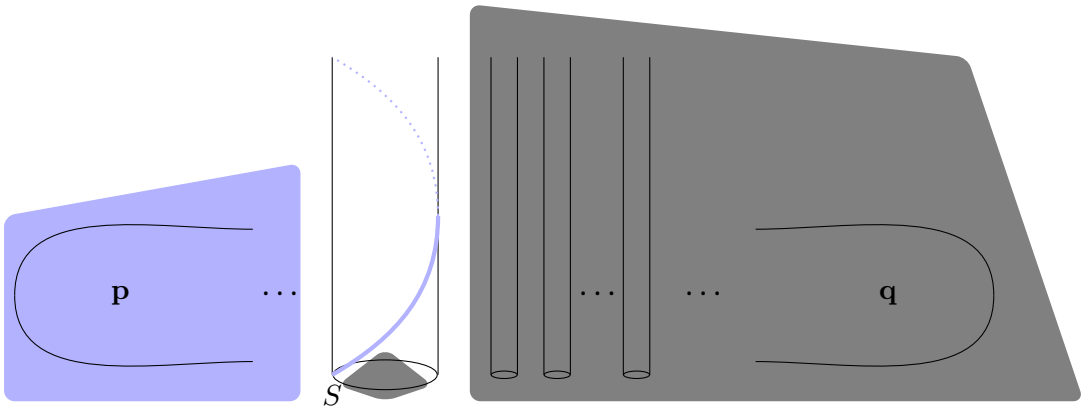


图 1. 余倾斜模 C_S^+ 对应的挠对。蓝色为无挠模，灰色为挠模

位于从 S 出发的射线上的模都是无挠的。由半砖 $\mathcal{S}^+ = \{\tau^- S, \ldots, \tau^{-r+1} S = \tau S\}$ 生成的宽子范畴包含于 $\mathcal{T}$ 中。管中的其他模既不是挠的，也不是无挠的。

现在很容易验证， $\mathcal{W} = \alpha(\mathcal{T}) \cap \Lambda$-mod 由非前内射挠模构成。因此，挠且几乎无挠模恰好是不同于 t_λ 的管中的准简单模，以及半砖 $\mathcal{S}^+$中的模，参见命题 3.10。

接下来，我们断言砖模 $S[r]$是无挠的、几乎挠的。事实上，它是无挠的，而且它的所有真商模都是挠的：它们要么是前内射模，要么是位于终止于 τS 的反射线上的、正则长度至多为 $r-1$的模。考虑一个中项为无挠模 $0 \to S[r] \to F \to N \to 0$的短正合列。根据注 3.9，我们可以假设 F 是有限维的。事实上，由于 $S[r]$到前射影模或不同管中的正则模之间不存在非零映射，我们可以假设 F 是形如 $S[i+r]$ 的模的直和，其中某个 $i \in \mathbb{N}$。

由于加法闭包 t_λ 对余核封闭，模 N 可分解为 t_λ 中模的直和。假设 N 不是无挠的。通过拉回，我们可以将问题归约到 N 是挠的不可分解模的情形，也就是说，它属于由半砖 $\mathcal{S}^+$ 确定的翼。然而，这些模都不能表示为无挠模对 $S[r]$ 的商，因为对于所有这些 N，$\mathrm{Ext}^1(N, S[r]) = 0$。因此， N 必定是无挠的，我们的断言得证。

事实上， $S[r]$ 是唯一的无挠几乎挠模：任何这样的模都必须是砖模，并且根据命题 3.10，必须属于 $\beta(\mathcal{F})$ ；然而，与 $S[r]$ 不同的无挠砖要么具有 $i < r$ 的形式 $S[i]$ ，要么是前射影模；这两种情况下，它们都有一个非零映射指向 $S[r]$ ，其余核不可能是无挠的，参见 [38, XII，引理 3.6]。

(3) 对于由 C_S^- 共生成的挠对，同样有：每个前射影模都是无挠的，每个预内射模都是挠的；此外，除 t_λ 以外的管中的每个正则模都是无挠的，而在 t_λ 中，终止于 $\tau^- S$ 的反射线上的模是挠的，半砖 $\mathcal{S}^- = \{S、\ \tau S、\ \ldots \tau^{r-2} S\}$ 生成的宽子范畴中的模是无挠的。管中的其他模既非挠模，也非无挠模。

用与 (2) 类似的论证，我们看到，无挠的、几乎挠的模恰好是除 t_λ 以外的各管中的准简单模，以及半砖 $\mathcal{S}^-$ 中的模；并且唯一的挠的、几乎无挠的模是模 $\tau^- S[-r]$。

我们先通过计算不可分解纯内射模的正交范畴，开始证明蕴含关系 (2)⇒(1)。

引理 7.5. 设 M 是一个有限维不可分解模。那么，对于某个 $\mathcal{W}$ ，有 ${}^{\perp_{0,1}}M = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$ ，且 $\mathcal{W}$ 属于宽子范畴(Λ)。

证明。 我们区分两种情况。如果 M 是内射的，那么 ${}^{\perp_{0,\,1}}M = {}^{\perp_0}M$ 是一个Serre 子范畴，并且存在一个不可分解投射模 P ，使得 $P^{\perp_0} = {}^{\perp_0}M$ ，因此我们可以取

$\mathcal{W}=\mathsf{filt}(P)$。如果 M不是内射的，我们使用AR公式得到 ${}^{\perp_{0,1}}M=\tau^{-}M^{\perp_{0,1}}$因此，我们可以取 $\mathcal{W}$ 为包含 $\tau^{-}M$的最小宽子范畴。□

引理 7.6。对于泛模 G，我们有 ${}^{\perp_{0,1}}G=$极限$\longrightarrow\mathcal{W}$，其中 $\mathcal{W}=\mathsf{Add}\,\mathsf{t}$ 是由正则模张成的 Λ-模的宽子范畴。

证明。我们考虑由正则模和预内射模分别生成的余倾斜挠对 $(\mathsf{Gen}\,\mathsf{t},\mathsf{t}^{\perp_0})$ 和 $(\mathsf{Gen}\,\mathsf{q},\mathsf{q}^{\perp_0})$。第一个由余倾斜模 $C_{(0,\ \varnothing)}=G\oplus\prod_{\mu\in\mathbb{X}}$给出，其中所有 $S[-\infty]$ 都来自 t_μ，因此可得 $(\mathsf{Gen}\,\mathsf{t},\mathsf{t}^{\perp_0})=({}^{\perp_0}G,\mathsf{Cogen}\ G)$。第二个由 $C_{(0,\ \mathbb{X})}=G\oplus\prod_{\mu\in\mathbb{X}}$给出，其中所有 $S[\infty]$ 都来自 t_μ。若 $0\to C_1\to C_0\to D\Lambda\to 0$ 是如 **(1)** 中的极小逼近序列，则根据 [33, 定理 7.1]，我们知道 C_1 是 G的若干份直和，因此余倾斜类 $\mathcal{C}=\mathsf{q}^{\perp_0}={}^{\perp_1}C_1$等于 ${}^{\perp_1}G$。

由此可得 ${}^{\perp_{0,1}}G=$生成 $\mathsf{t}\cap\mathcal{C}$，根据 [33, §3.4]，它具有所述形式。 □

对于普吕弗模和 adic 模，我们需要 [5]中的一些结果，这些结果使我们能够确定$S[\infty]$ 和 $S[-\infty]$在余倾斜模C_S^+ 和 C_S^- 所给出的极小逼近序列中的位置。

定义 7.7。设 C是一个余倾斜模，其相应挠对为 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$。若存在短正合列 $0\to F\to E\xrightarrow{b}M\to 0$，其中$F$是相对于 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$的无挠几乎挠模，且 E是 F的 $\mathsf{Prod}(C)$–包络，则称模$E\in\mathsf{Prod}\,C$ 为临界的 。此外，若存在短正合列：$0\to E\xrightarrow{b}N\to T\to 0$，其中 T 是相对于 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$的挠的、几乎无挠的模，且 N是 T的 $\mathcal{F}$–覆盖，则称模 $E\in\mathsf{Prod}\ C$为特殊的 。

注 7.8. 这个定义与 [5] 中的原始定义不同，但与之等价。在那里，临界模和特殊模是根据某些（强）左几乎分裂映射的存在性来定义的，这些映射见 $\mathcal{F}$。正如 [5, 引理 4.3], 所示，这类左几乎分裂映射要么是内射的，要么是满射的。临界模是 $\mathsf{Prod}\,C$ 中作为 $\mathcal{F}$ 中某个左几乎分裂满同态之源的模；特殊模是 $\mathsf{Prod}\ C$ 中作为 $\mathcal{F}$ 中某个左几乎分裂单态射之源的模，参见 [5, 推论 5.18 和 5.22]。根据 [5,定理 4.2]，这些恰好就是上文定义的那些模。事实上，定义中的映射 b 正是所需的左几乎分裂态射。

命题 7.9 ([5, 推论 5.23 和引理 6.10])**.** 设 C 是一个余倾斜模，其关联的挠对为 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$，且极小逼近序列 $0\to C_1\to C_0\to D\Lambda\to 0$ 如 ***(1)*** 所示。那么，每个特殊模都是 C_1 的一个直和项，每个临界模都是 C_0 的一个直和项。此外，若 C 是一个极小余倾斜模，则一个不可分解模属于 $\mathrm{Prod}(C)$ 当且仅当它属于 $\mathrm{Prod}(C_0)$ 或 $\mathrm{Prod}(C_1)$，且不同时属于二者。

现在我们转而讨论极小余倾斜模 C_S^+ 和 C_S^- 。我们将看到，普吕弗模 $S[\infty]$ 是 C_S^+ 唯一的临界直和项，而 adic 模 $S[-\infty]$ 是 C_S^-唯一的特殊直和项。这些事实将用于计算 $S[\infty]$ 和 $S[-\infty]$的正交范畴。

引理 7.10. 设 S 是秩为 r 的管中的一个拟单模，并设 $S[\infty]$ 是相应的普吕弗模。则存在一个宽子范畴 $\mathcal{W}$，它包含于宽子范畴(Λ)，由正则模组成，并满足 ${}^{\perp_{0,1}}S[\infty]=$极限$\longrightarrow\mathcal{W}$

证明。记 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$为与 C_S^+相关联的挠对。我们将证明 ${}^{\perp_{0,1}}S[\infty]=\alpha(\mathcal{T})$。为此，只需证明在关于 C_S^+ 的极小逼近序列 $0\to C_1\to C_0\to D\Lambda\to 0$ 中，有 $\mathsf{Prod}(C_0)=\mathsf{Prod}(S[\infty])$。这等价于证明 $S[\infty]$ 是唯一的临界模，并且 C_S^+ 的所有其他直和项要么是特殊的，要么作为直和项出现在由 $S[\infty]$的多个副本构成的积中。

后者适用于泛模 G，已知它属于 $\mathsf{Prod}(S[\infty])$，因此满足 ${}^{\perp_{0,1}}S[\infty]={}^{\perp_{0,1}}(S[\infty]\oplus G)$。

接下来，我们证明 $S[\infty]$ 是临界的。我们在注 7.4 中看到， $S[r]$ 是（唯一的）无挠的、几乎挠的模，因此我们需要证明 $S[\infty]$ 是它的 $\mathsf{Prod}(C_S^+)$– 包络。事实上，这显而易见： $S[\infty]$ 是 $\mathsf{Prod}(C_S^+)$ 中唯一存在来自 $S[r]$ 的非零态射的不可分解模，而该包络由以下短正合列给出：

$$0 \to S[r] \to S[\infty] \xrightarrow{b} S[\infty] \to 0.$$

剩下需要证明的是， C_S^+ 的所有其他直和项都是特殊的。对于有限维直和项，短正合列可以说明这一点：

$$0 \to S[i] \to S[i+1] \xrightarrow{g_i} \tau^{-i}S \to 0,\ 1 \leqslant i < r.$$

注意， g_i是挠的、几乎无挠模 $\tau^{-i}S$的 $\mathcal{F}$-覆盖，因为 $S[i]$属于 $\mathsf{Prod}(C_S^+)$ ，因此是 $\mathcal{F}$中的 Ext-内射。对于 adic 直和项，我们利用以下事实：与 t_λ 不同的管中的每个拟单模都是挠的、几乎无挠的，并且每个 adic 直和项都作为其中一个此类模的 $\mathcal{F}$–覆盖的核出现。以下序列说明了这一点：

$$0 \to S'[-\infty] \to \tau^- S'[-\infty] \xrightarrow{g} \tau^- S' \to 0$$

其中， g 仍然是一个 $\mathcal{F}$-覆盖，因为 $S'[-\infty]$ 在 $\mathcal{F}$中是 Ext-内射。

我们已经证明 $\mathsf{Prod}(C_0)$ =$\mathsf{Prod}(S[\infty])$，由命题 4.4 和注记 4.10 可得

$$^{\perp_{0,1}}S[\infty] = {}^{\perp_{0,1}}C_0 = \alpha(\mathcal{T}) = \varinjlim \mathcal{W}$$

其中， $\mathcal{W} = \alpha(\mathcal{T}) \cap \Lambda$-模 $= {}^{\perp_{0,\ 1}}S[\infty] \cap \Lambda$-模由正则模组成，正如注 7.4 中已经指出的。□

引理 7.11。 设 S 是秩为 r 的一个管中的拟单模，且令 $S[-\infty]$ 为对应的 *adic* 模。则存在一个宽子范畴 $\mathcal{W}$ ，它是宽子范畴(Λ) 的子范畴，由正则模组成，并满足 $^{\perp_{0,\ 1}}S[-\infty] = \mathcal{W}^{\perp_{0,\ 1}}$

证明。 我们对偶地处理普吕弗情形；这里要证明， $S[-\infty]$是余倾斜模 C_S^- 的唯一特殊直和项。

我们考虑由 C_S^-余生成的挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 以及一个极小逼近序列$0 \to C_1 \to C_0 \to D\Lambda \to 0$。首先注意到， C_S^- 的所有有限维直和项和所有普吕弗直和项都包含在 $\mathsf{Prod}(C_0)$ 中。事实上， C_0 余生成无挠类 $\mathcal{F}$，但这些模中没有一个由 C_S^- 的其他直和项余生成。因此，泛模 G作为任意普吕弗模的若干副本之直积中的一个直和项，也属于 $\mathsf{Prod}(C_0)$。

为了证明 $S[-\infty]$是特殊的，我们考虑（唯一的）挠的、几乎无挠的模 $\tau^- S[-r]$。由拉回图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tau^- S[-\infty] & \longrightarrow & P & \longrightarrow & S[-r+1] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tau^- S[-\infty] & \longrightarrow & \tau^- S[-\infty] & \longrightarrow & \tau^- S[-r] & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \tau^- S & = & \tau^- S & &
\end{array}$$

我们得到 $P \simeq S[-\infty]$。因此，我们有一个短正合列

$$0 \to S[-\infty] \to \tau^- S[-\infty] \oplus S[-r+1] \xrightarrow{g} \tau^- S[-r] \to 0$$

它将 adic 表示为一个挠的、几乎无挠模的 $\mathcal{F}$-覆盖的核。此处，g 是由典范投影 $\tau^- S[-\infty] \to \tau^- S[-r]$ 和不可约态射 $S[-r+1] \to \tau^- S[-r]$诱导的映射。它确实是一个 $\mathcal{F}$-预覆盖，因为 $S[-\infty]$在$\mathcal{F}$中是 Ext-内射的；由于其各分量均非零，它还是极小的。

总之，回顾 $(\mathcal{T},\ \mathcal{F})$ 是广泛生成的，并结合注记 4.10 与引理 3.7，可得

$$^{\perp_{0,1}}S[-\infty] = {}^{\perp_{0,1}}C_1 = \beta(\mathcal{F}) = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$$

其中 $\mathcal{W} = \alpha(\mathcal{T}) \cap \Lambda$ - 模 $=$ 滤$(\tau^{-}S[-r]))$ 由正则模组成。 □

对于一般情形，当 $\mathcal{P}$ 是不可分解纯内射模的集合时，我们将用到以下分解结果，它是 Ringel 工作的推论。

命题 7.12 ([34, G 节中的定理、定理 4.4、命题 4.8])。 每个模$M \in$ 极限$\longrightarrow$加性闭包 $\mathbf{t}$ 都有一个分解 $M = \coprod_{\lambda\in\mathbb{X}} M_\lambda$，其中 M_λ 是 M 中属于极限 $\longrightarrow$ 加性闭包 $\mathbf{t}_\lambda$ 的最大子模。此外，对于每个 $\lambda \in \mathbb{X}$，都存在一个纯正合列

$$0 \to A_\lambda \to M_\lambda \to Z_\lambda \to 0$$

其中 A_λ 是$\mathbf{t}_\lambda$中的有限维模的直和，而 Z_λ 是$\mathbf{t}_\lambda$ 中的普吕弗模的直和。

我们还需要以下关于管的加性闭包内宽子范畴的结构结果。

引理 7.13。 设 $\mathcal{A} =$ 加性闭包$\mathbf{t}_\lambda$ 是秩为 r的一个管的加性闭包，我们将其视为阿贝尔长度范畴，其简单对象记为 S_1， $S_2 = \tau^{-}S_1$，……， $S_r = \tau^{-r+1}S$。 $\mathcal{A}$ 的非平凡宽子范畴具有如下形式：加性闭包 $(\mathcal{F} \cup \mathcal{T})$，其中 $\mathcal{F}$ 是某个翼的子集，大小至多为 $r-1$，而 $\mathcal{T}$ 或者为零，或者为 $\mathcal{T} = \{S_i[nr] \mid n \in \mathbb{N}\}$。

证明。 回想一下，阿贝尔长度范畴中的宽子范畴与半砖一一对应。因此，我们考察范畴 $\mathcal{A}$中的砖模。这些恰好是满足 $1 \leqslant i$、 $k \leqslant r$ 条件的模 $S_i[k]$ 。

注意，每个砖模 $S_i[r]$ 到任意其他砖模 $S_j[r]$都有非零态射。特别地，给定的半砖中至多只能包含一个正则长度为 r的砖模。此外，利用管的结构可知，在 $\mathcal{A}$ 中，与给定的 $S_i[r]$ Hom-正交的砖模都包含在顶点为 $\tau^{-}S_i[r-2]$ 的翼中（对于 $r \geqslant 3$）。然而，这个翼中的所有模都与 $S_i[r]$ Ext-正交。因此，包含 $S_i[r]$ 的 $\mathcal{A}$ 的宽子范畴，是由顶点为 $\tau^{-}S_i[r-2]$ 的翼中的某些不可分解模以及 $S_i[r]$的自扩张所生成的加性闭包。后者恰好是模 $S_i[nr]$。

接下来考虑其半砖不包含正则长度为 r 的砖模的宽子范畴。在这种情况下，该半砖因而整个宽子范畴都必须包含在大小至多为 $r-1$ 的某个翼中。□

引理 7.14。 设 $\mathcal{P}$ 是由普吕弗模以及可能还包括泛模组成的不可分解纯内射对象集合。那么对于某个由正则模组成的宽子范畴 $^{\perp_{0,\,1}}\mathcal{P} =$ 极限$\longrightarrow \mathcal{W}$，有宽子范畴$(\Lambda)$ 。

证明。 若集合 $\mathcal{P}$ 仅由泛模组成，则由引理 7.6 即得结论。若其中至少包含一个普吕弗模，则泛模不会影响正交范畴的计算，因此不妨设它不属于 $\mathcal{P}$。

我们要证明，对于两个由正则模组成的宽子范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，有 $\varinjlim \mathcal{U} \cap \varinjlim \mathcal{V} = \varinjlim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$。包含关系 $\supseteq$ 显然成立。反向包含方面，取$X \in \varinjlim \mathcal{U} \cap \varinjlim \mathcal{V}$。不失一般性，可设 $X \in \varinjlim \operatorname{add} \mathbf{t}_\lambda$，其中指标为 λ。于是由命题 7.12，该模可嵌入一个纯短正合列

$$0 \to A_\lambda \to X \to Z_\lambda \to 0$$

并且由于所涉及的三个子范畴都对核、纯满态像和扩张封闭，因此， X 属于某个范畴，当且仅当 A_λ 和 Z_λ也属于该范畴。

但现在， A_λ是有限维模的余积，因此 $A_\lambda \in \varinjlim \mathcal{U} \cap \varinjlim \mathcal{V}$当且仅当 $A_\lambda \in \operatorname{Add}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subseteq \varinjlim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$。至于 Z_λ，它是普吕弗模的余积，所以我们再次可以将问题限制为单个普吕弗模的情形。但只有在使用从起始于

S的射线中无限多个模时，$n \in \mathbb{N}$才能表示为正则模的直极限。然而，利用引理 7.13，我们看到，Λ-mod 的宽子范畴与一个管的交集，要么包含于该管中某个大小严格小于其秩的翼内，要么包含该管中某条射线上正则长度为 nr, $n \in \mathbb{N}$的所有模。由此可得，$S[\infty] \in \varinjlim \mathcal{U} \cap \varinjlim \mathcal{V}$当且仅当模 $S[nr], n \in \mathbb{N}$属于$\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$，因此 $S[\infty] \in \varinjlim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$。□

对于 adic 模和有限维模的集合，我们使用一个由 Schofield 得出的结果。

引理 7.15. 设 $\mathcal{P}$ 是有限维模或 *adic* 模的一个集合。那么存在一个宽子范畴 $\mathcal{W}$，使得 ${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{P} = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$，其中 $\mathcal{W}$ 属于 宽子范畴(Λ)。

证明。 根据 [36, 定理 2.3], [27, 定理 6.1], , 赋值 $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$ 定义了宽子范畴(Λ)与 Λ-模的扩张封闭双反射子范畴之间的一个双射。注意，${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{P}$具有如下形式：$\bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{W}_P{}^{\perp_{0,1}}$，其中每个 $\mathcal{W}_P$ 都属于宽子范畴(Λ)。这是 Λ-模的一个扩张封闭双反射子范畴，因为所有 $\mathcal{W}_P{}^{\perp_{0,1}}$ 也都是如此。因此，它具有所需的形式。□

现在我们可以进行最后一步了。

引理 7.16. 设 $\mathcal{P}$ 是纯内射模的一个集合。那么存在一个 Λ- 模 的宽子范畴 $\mathcal{W}$，使得 ${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{P} =$极限$\varinjlim \mathcal{W}$或 ${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{P} = \mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$。

证明。 根据以上讨论，我们只需处理这样的情形：$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$ 其中 $\mathcal{A}$由有限维模或 adic 模组成，而 $\mathcal{D}$ 由普吕弗模（以及可能的泛模）组成。根据此前的计算，我们有 ${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{A} = \mathcal{U}^{\perp_{0,1}}$以及 ${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{D} = \varinjlim \mathcal{W}$，其中 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{W}$属于宽子范畴(Λ)，且 $\mathcal{W}$由正则模组成。于是 ${}^{\perp_{0,1}}\mathcal{P} = \mathcal{U}^{\perp_{0,1}} \cap \varinjlim \mathcal{W}$，我们要证明后者与宽子范畴$\mathcal{U}^{\perp_{0,1}} \cap \mathcal{W}$的直极限闭包一致。

包含关系 $\varinjlim(\mathcal{U}^{\perp_{0,1}} \cap \mathcal{W}) \subseteq \mathcal{U}^{\perp_{0,1}} \cap \varinjlim \mathcal{W}$显然成立，因为 $\mathcal{U}^{\perp_{0,1}}$对直极限封闭。对于反向包含，设 $X \in \mathcal{U}^{\perp_{0,1}} \cap \varinjlim \mathcal{W}$。由于这个模属于 $\varinjlim \mathcal{W} \subseteq \varinjlim$ add t，我们可以再次应用命题 7.12，将问题归结为以下情形：$X \in$ Add$(\Lambda$- 模$)$，或者 X 是普吕弗模的余积。第一种情形显然成立；在第二种情形中，利用我们所考虑的所有子范畴都对直和项和余积封闭这一点，还可以进一步归结为 $X = S[\infty]$。然后，正如前面所观察到的，$\mathcal{W}$ 必须包含所有 $n \in \mathbb{N}$对应的模 $S[nr]$。

由于 $S[\infty] \in \mathcal{U}^{\perp_0}$，其子模 $S[nr]$ 也同样成立。我们断言，模 $S[nr]$ 也属于 $\mathcal{U}^{\perp_1}$。为此，我们取 $U \in \mathcal{U}$，并可假设它不可分解。注意，U 既不是前射影模，也不是前内射模，因为它与 $S[\infty]$ Hom-正交，见 [38, XII，引理 3.6]。假设 $\mathrm{Ext}^1(U, S[r]) = D\mathrm{Hom}(\tau^- S[r], U) \neq 0$。那么正则模 U 必须具有形式 $U = \tau^i S[k]$，其中 $0 \leqslant i \leqslant r-1$ 且 $k - i \geqslant 1$。但对于任何这样的选取，我们都有 $\mathrm{Hom}(U, S[\infty]) \neq 0$，这就产生了矛盾。因此，我们已经证明了关于$S[r]$的断言；进而，由于 $\mathcal{U}^{\perp_1}$ 对扩张封闭，这一结论对所有 $S[nr]$ 也成立。这表明$S[\infty]$ 是 $\mathcal{U}^{\perp_{0,1}} \cap \mathcal{W}$ 中模的直极限，证明完毕。□

8. 克罗内克代数上的宽余反射子范畴

在上一节中，我们确定了与纯内射模集合正交的宽余反射子范畴。是否存在其他宽余反射子范畴，似乎是一个引人关注的问题。事实上，这与分类无界导出范畴 $\mathcal{D}(A\text{- Mod})$ 中的局部化子范畴这一问题有关。我们先回顾一些术语。

定义 8.1. 设 $\mathcal{T}$ 是一个带有悬移函子 Σ 的三角范畴。

(1) $\mathcal{T}$的两个对子范畴 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$对直和项封闭，并构成一个挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$，当且仅当：(i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$(ii) 对于所有对象 $T \in \mathcal{T}$，我们都能找到一个三角

$$U_T \longrightarrow T \longrightarrow V_T \longrightarrow \Sigma U_T$$

其两端分别为 $U_T \in \mathcal{U}$ 和 $V_T \in \mathcal{V}$。

此外，若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 都对悬移封闭，也就是说，它们是 $\mathcal{T}$ 的三角子范畴，那么 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 称为一个 稳定 *t*-结构 （或一个 半正交分解）。

(2) $\mathcal{T}$ 的满子范畴 $\mathcal{U}$ 若是一个对取余积封闭的三角子范畴，则称为局部化；若它能补全为 $\mathcal{T}$ 中的稳定 t-结构 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$，则称为严格局部化 。

注意，取零上同调给出了 $\mathcal{D}(A\text{-}\mathrm{Mod})$ 的局部化子范畴与 A-Mod 中对余积封闭的宽子范畴之间的一个双射。其逆映射将 $\mathcal{X}$ 对应到范畴 $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(A\text{-}\mathrm{Mod})$，该范畴由 $\mathcal{D}(A\text{-}\mathrm{Mod})$ 中所有上同调均属于 $\mathcal{X}$ 的复形组成，参见 [27, 命题 2.4]。这些对应关系可作如下限制。

命题 8.2。 [27, 30] 设 A 是一个遗传环。以下对象之间存在双射：

(1) $\mathcal{D}(A\text{-}\mathrm{Mod})$的严格局部化子范畴；(2) $A\text{-}\mathrm{Mod}$中的完备 *Ext*-正交对；(3) $A\text{-}\mathrm{Mod}$的宽余反射子范畴。

证明。 [27, 命题 2.7] 表明， A-Mod 中的一个全子范畴 $\mathcal{X}$ 可以补全为一个完备 Ext-正交对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$，当且仅当范畴 $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(A\text{-}\mathrm{Mod})$ 是某个局部化函子的核。根据 [2, 命题 1.6]，这等价于包含函子 $\mathrm{inc}: \mathcal{D}_{\mathcal{X}}(A\text{-}\mathrm{Mod}) \hookrightarrow \mathcal{D}(A\text{-}\mathrm{Mod})$ 存在右伴随；换言之，这意味着 $\mathcal{U} = \mathcal{D}_{\mathcal{X}}(A\text{-}\mathrm{Mod})$ 可以补全为一个稳定 t-结构 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$。此外，根据 Nakamura 的一项结果 [30],，函子 $\mathrm{inc}: \mathcal{D}_{\mathcal{X}}(A\text{-}\mathrm{Mod}) \hookrightarrow \mathcal{D}(A\text{-}\mathrm{Mod})$ 存在右伴随，当且仅当 $\mathrm{inc}: \mathcal{X} \hookrightarrow A\text{-}\mathrm{Mod}$ 也存在右伴随。这表明，上述对应关系限制在 (1) 与 (3) 之间时给出一个双射，而 (2) 与 (3) 之间也存在一个自然双射。□

交换诺特环的导出范畴中的局部化子范畴，已由 Hopkins 和 Neeman 的工作 [31] 完全分类；它们由素谱的子集参数化。然而，即便在最简单的非仿射情形下——即代数闭域 k 上射影直线 $\mathbb{P}^1_k$ 的拟凝聚层范畴的导出范畴 $\mathcal{D}(\mathrm{Qcoh}\,\mathbb{P}^1_k)$——情况似乎也相当复杂。在 [26], Krause 和 Stevenson 研究了 $\mathcal{D}(\mathrm{Qcoh}\,\mathbb{P}^1_k)$ 的严格局部化子范畴的分类问题，也就是说，研究了 $\mathcal{D}(\mathrm{Qcoh}\ \mathbb{P}^1_k)$ 的半正交分解 $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ 中出现的局部化子范畴 $\mathcal{L}$。结合 smashing 子范畴与张量理想的分类，他们得到了一类由 $\mathbb{Z}$ 的一个副本和 $\mathbb{P}^1$ 的幂集参数化的 $\mathcal{D}(\mathrm{Qcoh}\,\mathbb{P}^1_k)$ 的严格局部化子范畴，并提出问题：所有严格局部化子范畴是否都能以这种方式得到?

这个问题可以在克罗内克代数 Λ 的导出范畴中表述，这借助于克罗内克箭图与射影直线之间众所周知的导出等价。Krause 和 Stevenson 根据纯内射层的正交范畴，对他们的严格局部化子范畴类给出了内在描述。于是，问题就变成：在 $\mathcal{D}(\Lambda\text{-}模)$ 中，是否存在不是形如 ${}^{\perp_{\mathbb{Z}}}\mathcal{P} = \{X \in \mathcal{D}(\Lambda\text{-}模) \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\Lambda\text{-}模)}(X、Y[i]) = 0$（对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 以及集合 $\mathcal{P}$ 中所有 $Y \in \mathcal{P}\}$）的严格局部化子范畴，其中 $\mathcal{P}$ 是由不可分解纯内射 Λ-模组成的集合。根据命题 8.2，这等价于询问

问题 8.3。 Λ-模中是否存在宽余反射子范畴，它们不是对于由不可分解纯内射 Λ-模组成的集合 $\mathcal{P}$，形如${}^{\perp_0、{}^1}\mathcal{P}$ 的子范畴?

事实上，由于任意复形 $X \in \mathcal{D}(\Lambda\text{-}\mathrm{Mod})$ 都可写成 $X = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} H^n(X)[-n]$，因此 X 属于 ${}^{\perp_{\mathbb{Z}}}\mathcal{P}$ 当且仅当其所有上同调也都属于其中；等价地说，其所有上同调都属于 ${}^{\perp_{0,\,{}^1}}\mathcal{P}$。因此，${}^{\perp_{\mathbb{Z}}}\mathcal{P}$与 ${}^{\perp_{0,\,{}^1}}\mathcal{P}$在命题 8.2 中的双射下彼此对应。

从现在起， Λ 表示克罗内克代数，并采用例 4.14 和第 7 节中的记号。在克罗内克情形下，定理 7.1 的证明要简单得多，因为相关的类可以直接计算。为方便读者，我们给出这一替代证明。

按照惯例，τ 表示 Auslander-Reiten 平移，而 Γ_Λ 是Λ的 Auslander-Reiten 箭图。

引理 8.4. 设 M 是$\mathbf{p}\cup\mathbf{q}$中的一个模。那么 $^{\perp_{0,1}}M=\mathrm{Add}\ N$，其中 N 是 M 在 Γ_Λ 中的后继，或者 N 是单射投射模。此外，$\mathcal{W}=\mathrm{add}\ M$ 是 $\Lambda\text{-}\mathrm{mod}$ 的一个宽子范畴，且

(1) $\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}=\mathrm{Add}\,L=^{\perp_{0,1}}K$，其中 L 是 M 在 Γ_Λ 中的前驱，或者 L 是单射单模，而 $K=\tau M$ 是不可分解内射模。(2) $\varinjlim\mathcal{W}=\mathrm{Add}\ M=^{\perp_{0,1}}L$，其中 L 是 M在 Γ_Λ 中的前驱，或者 L 是单射单模。

证明。 $\mathcal{W}=\mathsf{add}\,M$ 是一个宽子范畴，因为 M 是一个石模，也就是说，是一个没有自扩张的砖模。其余结论都是从 Γ_Λ的形状直接得到的简单观察。□

引理 8.5. 设 $\varnothing\neq P\subset\mathbb{X}$ 和 $Q=\mathbb{X}\backslash P$。此外，设 $\mathcal{P}$ 为与$\mathbf{t}_P$中的单正则模对应的 *adic* 模所成的集合，并设 $\mathcal{Q}$ 为由泛模G 以及与$\mathbf{t}_Q$中的单正则模对应的普吕弗模组成的集合。那么 $\mathcal{W}=\mathrm{add}\mathbf{t}_P$ 是 $\Lambda\text{-}\mathrm{mod}$ 的一个宽子范畴，且 $\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}=^{\perp_{0,1}}\mathcal{P}$ 以及$\varinjlim\mathcal{W}=^{\perp_{0,1}}\mathcal{Q}$。

证明。 考虑余倾斜挠对 $(\mathcal{T},\mathcal{F})=(\mathrm{Gen}\ \mathsf{t}_P,\mathcal{F}_P)=(T(\mathcal{W}),\mathcal{W}^{\perp_0})$。事实上，它是一个余倾斜挠对，其极小逼近序列为 $0\to C_1\to C_0\to E(\Lambda)\to 0$ where Prod $C_1=\mathrm{Prod}\,\mathcal{P}$, and Prod $C_0=\mathrm{Prod}\ \mathcal{Q}$。结合注记 4.10 、命题 4.4 和引理 3.7，我们得到 $\varinjlim\mathcal{W}=\alpha(\mathcal{T})=^{\perp_{0,1}}C_0=^{\perp_{0,1}}\mathcal{Q}$and $\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}=\beta(\mathcal{F})=^{\perp_{0,1}}C_1=^{\perp_{0,1}}\mathcal{P}$。□

Kronecker 情形下定理 7.1 的证明。 为了证明 (1)⇒(2)，我们使用下表，该表总结了引理 8.4 和 8.5。

$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$	$\varinjlim\mathcal{W}$
0	Λ- 模 $=^{\perp_{0,1}}\varnothing$	$0=^{\perp_{0,1}}\{$所有不可分解的纯内射对象$\}$
Λ - 模	$0=^{\perp_{0,1}}\{$所有不可分解的纯内射对象$\}$	Λ-模 $=^{\perp_{0,1}}\varnothing$
$\mathsf{add}\,M,\ M\in\mathbf{p}\cup\mathbf{q}$	$^{\perp_{0,1}}K$ 对于合适的 K	$^{\perp_{0,1}}L$ 对于合适的 L
添加 t_P, $\varnothing\neq P\subset\mathbb{X}$	$^{\perp_{0,1}}\{$来自 $P\}$的阿代尔数	$^{\perp_{0,1}}\{G$，来自 $Q=\mathbb{X}\backslash P\}$的普吕弗

对于蕴含关系 (2)⇒(1)，我们先将基本情形整理在下表中。

$\mathcal{P}$	$\mathcal{X}=^{\perp_{0,1}}\mathcal{P}$	$\mathcal{W}$与 $\mathcal{X}=\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$或$\mathcal{X}=$极限$\varinjlim\mathcal{W}$
$\varnothing$	Λ- 模	Λ- 模
所有不可分解纯内射	0	0
$M\in\mathbf{p}\cup\mathbf{q}$	$\mathrm{Add}\,N$对于适当的 $N\in\mathbf{p}\cup\mathbf{q}$	$\mathsf{add}\ N$
$M\in\mathbf{t}_x$	$\mathbf{t}_x^{\perp_{0,1}}$	$\mathsf{add}\,\mathbf{t}_x$
来自 P的阿代尔数	$\mathbf{t}_P^{\perp_{0,1}}$	加法 t_P
普吕弗来自 Q	$\varinjlim$加法 t_P与 $P=\mathbb{X}\backslash Q$	加法 t_P
G	$\varinjlim$加法 t	加法 t

我们只需解释第 4 行，因为其他情况可由引理 7.6、8.4 和 8.5 立即得出。对于第 4 行，注意若 $\mathcal{P}=\{M\}$ with $M\in\mathbf{t}_x$，则 $\mathcal{Y}$ 包含 M 的宽闭包，即 $\mathsf{add}\,\mathbf{t}_x$，因此 $\mathcal{X}=^{\perp_{0,1}}\mathbf{t}_x$；根据奥斯兰德-雷廷公式，这与 $\mathbf{t}_x^{\perp_{0,1}}$一致。

现在，考虑任意一组不可分解纯内射对象 $\mathcal{P}$。首先，我们看到$\mathcal{X}=0$，前提是 $\mathcal{P}$ 包含多个有限维模。类似地，只要 $\mathcal{P}$包含一个模 $M\in\mathbf{p}\cup\mathbf{q}$ 以及一个无限维不可分解纯内射对象，$\mathcal{X}=0$就成立，因为 $^{\perp_{0,1}}M=\mathsf{Add}\,N$对于某个合适的 $N\in\mathbf{p}\cup\mathbf{q}$，而 N既不属于 $\varinjlim\mathsf{add}\,\mathbf{t}_P$，也不属于 $\mathbf{t}_P^{\perp_{0,1}}$，对任意 $P\subset\mathbb{X}$均如此。对于其余情形，只需注意到 $\mathbf{t}_P^{\perp_{0,1}}\cap\varinjlim\mathsf{add}\,\mathbf{t}^Q=\varinjlim\mathsf{add}\,\mathbf{t}^{Q\backslash P}$。总之，我们可以得出结论，在所有情形下，$\mathcal{X}$都可表示为 $\mathcal{X}=\mathcal{W}^{\perp_{0,1}}$，或者对于某个 $\mathcal{W}\in$ 宽子范畴 (Λ)，有 $\mathcal{X}=\varinjlim\mathcal{W}$。□

在 [35], 中，Ringel 构造了一族砖模 $P(I)$，它们定义在 Λ 上，并由基域 k 的子集标记。回顾一下，泛模 G 对应于如下表示

$$k(T) \rightleftarrows k(T)$$

由分式域 $k(T)$ 连同恒等映射以及由元素 T给出的乘法 $T\cdot$ 构成。模 $P(I)$ 构造为子表示

$$V(I) \rightleftarrows V(I)+k\cdot 1$$

其中 $V(I)$ 是以$\{\frac{1}{T-\lambda} \mid \lambda \in I\}$为基的向量空间，而 $k\cdot 1$ 是由元素 $1\in k(T)$生成的一维向量空间。我们归纳这些模的一些性质。

引理 8.6. [35] 设 I 是 k 的子集，且 $S(I)=\bigoplus_{\lambda\in I} S_\lambda$，其中 S_λ 是 $\mathbf{t}_\lambda$中的单正则模。

(1) 当 I 是基数为 n的集合时， $P(I)$ 是维数向量为 $(n,n+1)$的不可分解拟投射模。特别地， $P:=P(\varnothing)$是 Λ-模的单射投射模。(2) 当 I 是无限集时， $P(I)$ 是无限维砖。(3) $\mathrm{Hom}_\Lambda(P(I),P(J))=0$只要 I,J是两个不相交的无限集。(4) 对于任意子集 $J\subset I$，存在短正合列 $0\to P(J)\to P(I)\to S(I\backslash J)\to 0$。

现在我们利用这些大砖模构造一个 Λ- 模的宽子范畴，而它可能不符合定理 7.1 中的分类。

命题 8.7。 设 $B=P(I)$ 由一个无限子集 $I\subset k$按上述方式构造，并设$(\mathcal{T},\ \mathcal{F})=({}^{\perp_0}B,\ F(B))$为由 B余生成的挠对。那么

（1）$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\ S_\lambda)\neq 0$ 对所有 $\lambda\in k\cup\{\infty\}$成立。（2）

$\alpha(\mathcal{T})={}^{\perp_{0,\ 1}}B$ 不含非零有限维模。

证明。 （1）引理 8.6（4）中的序列 $0\to P\to B\to S(I)\to 0$ 表明，对于$\lambda\in I$，该断言成立。对于 $\lambda\in k\backslash I$，我们利用非分裂正合序列 $0\to B\to P(I\cup\{\lambda\})\to S_\lambda\to 0$，得到 $\mathrm{Hom}_\Lambda(B,S_\lambda)\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(S_\lambda,B)\neq 0$。剩下只需证明 $\mathrm{Hom}_\Lambda(B,S_\infty)\neq 0$。为此，我们将 S_∞ 视为表示 $k\cdot 1 \rightrightarrows k\cdot 1$，其中线性映射为 0 和恒等映射 $\mathrm{id}_{k\cdot 1}$; 并定义线性映射 $f\colon V(I)\longrightarrow k\cdot 1$，在 $V(I)$ 的基$\{\frac{1}{T-\lambda}\mid \lambda\in I\}$ 上令$f(\frac{1}{T-\lambda})=1$对所有 $\lambda\in I$成立。由于元素 $\frac{1}{T-\lambda}$、 $\lambda\in I$ 和 1 在 $k(T)$ 中线性无关，我们还可以定义线性映射 $g\colon V(I)+k\cdot 1\longrightarrow k\cdot 1$，令 $g\mid_{V(I)}=0$ 且 $g(1)=1$。现在有 $g\circ\mathrm{id}\mid_{V(I)}=0\circ f$，并且对所有 $\lambda\in I$都有 $g(T\cdot\frac{1}{T-\lambda})=g(\lambda\cdot\frac{1}{T-\lambda}+1)=g(1)=f(\frac{1}{T-\lambda})$，也就是说，$g\circ T\cdot\mid_{V(I)}=\mathrm{id}_{k\cdot 1}\circ f$。因此， f和 g定义了一个非零的表示之间的态射$B\to S_\infty$。

(2) 我们证明 ${}^{\perp_{0,\ 1}}B\subseteq\alpha(\mathcal{T})$。若 $g\colon T\to X$ 是一个态射，且 $T\in\mathcal{T}$ 和 $X\in{}^{\perp_{0,\ 1}}B$，那么它的像显然包含于 $\mathcal{T}$，甚至包含于 ${}^{\perp_{0,\ 1}}B$，因为${}^{\perp_1}B$ 对子模封闭。因此不失一般性，我们可以假设 g 是满射。现在对正合序列 $0\to K\to T\xrightarrow{g}X\to 0$ 应用 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)$，并利用 $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,B)=\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,B)=0$，即可得出 $K\in\mathcal{T}$。

为证明反向包含，我们需要证明每个 $X\in\alpha(\mathcal{T})$ 都满足 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,B)=0$。考虑短正合列 $0\to B\xrightarrow{f}E\xrightarrow{g}X\to 0$。中间项 E 不可能属于$\mathcal{T}$，否则 $B\in\mathcal{T}\cap\mathcal{F}=0$。因此，它的无挠部分 $\overline{E}=E/t(E)$ 非零，故存在一个非零映射 $h:\ \overline{E}\to B$。于是，将 h 与典范满同态ν：$E\to\overline{E}$ 复合所得的映射 $h\nu$ 也非零。现在假设 $h\nu f=0$。那么 $h\nu$ 可经由 g 分解，即对于某个非零映射 $\overline{h}\colon X\to B$，有$h\nu=\overline{h}g$，这与假设 $X\in\mathcal{T}$ 矛盾。由此可知$h\nu f\colon B\to B$ 非零，因此是同构。这表明我们的正合序列按所需分裂。

现在回想一下， B是一个无限维砖模，因此， B在$\mathbf{p}\cup\mathbf{q}$中没有直和项。结合 (1)，这说明没有前射影模属于 ${}^{\perp_0}B$，而前内射模和正则模都不能属于 ${}^{\perp_1}B$。因此， $\alpha(\mathcal{T})\cap\Lambda\text{-模}=0$。□

命题 8.8。 设 $B = P(I)$ 如上所述，由一个非余有限的无限子集 $I \subset k$ 构造而成，并设 $(\mathcal{T},\ \mathcal{F}) = ({}^{\perp_0}B,\ F(B))$ 为由 B余生成的挠对。假设$\alpha(\mathcal{T}) \neq 0$。那么，存在 Λ- 模 的一个宽且余反射子范畴 $\mathcal{X}$，它包含于 $\alpha(\mathcal{T})$ 中，且不能写成$\mathcal{X} = \mathcal{W}^{\perp_{0,\ 1}}$ 的形式，也不能写成某个宽子范畴 $\mathcal{W} \in$ 宽(Λ)的 $\mathcal{X} =$ 极限$\longrightarrow \mathcal{W}$。

证明。 我们断言， $\alpha(\mathcal{T})$ 不包含任何不可分解纯内射模。根据命题 8.7，我们已知 $\alpha(\mathcal{T})$ 不包含不可分解的有限维模。由于每个简单正则模都是相应普吕弗模上某个自同态的核， $\alpha(\mathcal{T})$ 不可能包含任何普吕弗模；对偶地，它也不可能包含任何 adic 模。现在我们证明它不可能包含泛模 G。

为此，我们首先注意到，每个 $X \in {}^{\perp_1}B$ 都属于 Cogen G。事实上， X 可表示为其有限生成子模的直极限，而这些子模也属于 ${}^{\perp_1}B$ ，因此都是前射影模。于是 $X \in \lim\longrightarrow \mathsf{add}\ \mathsf{p}$ $=$ Cogen G。特别地，$\alpha(\mathcal{T}) = {}^{\perp_{0,\ 1}}B$包含于 Cogen G。

接下来，假设 G 属于 $\alpha(\mathcal{T})$ ，并取 $\alpha(\mathcal{T})$中的一个非零子对象 X。那么G/X 属于 $\alpha(\mathcal{T})$ ，因此可嵌入由若干个 G组成的积中。由于 G 是一个砖模，且 $G \to G/X$ 是一个真满射，我们可得 $X = G$。这表明G 必定是 $\alpha(\mathcal{T})$中的一个简单对象。由命题 3.10 可知， G 是相对于 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$的挠且几乎无挠模。但这不可能，因为任何形如$P(J)$ 的模，其中 J是 k的一个与 I不相交的无限子集，都是 G的真子模；根据引理 8.6(3)，该子模属于 $\mathcal{T}$。至此，我们的断言得证。

现在假设存在一个对象 $0 \neq X \in \alpha(\mathcal{T})$。我们令 $\mathcal{X}$ 为 Λ- Mod 中包含 X且对余积封闭的最小宽子范畴。由 [27, 定理 2.2], 可知， $\mathcal{X}$是余反射子范畴；根据构造，它是 $\alpha(\mathcal{T})$ 的一个子范畴。

当然， $\mathcal{X}$ 不包含任何不可分解纯内射模。特别地，$\mathcal{X} \cap \Lambda$ - mod $= 0$，我们立即看出， $\mathcal{X}$ 不可能具有如下形式：对于某个满足 $M \in \mathsf{p} \cup \mathsf{q}$ 的 $\mathcal{W} =$ add M，有 $\mathcal{W}^{\perp_{0,\ 1}}$；也不可能是由 $\mathbb{X}$ 的某个真子集 P 导出的 $\mathcal{W} =$ add t_P。此外，我们还可以排除 $\mathcal{X} = (\mathsf{add}\ \mathsf{t})^{\perp_{0,\ 1}} = \mathsf{Add}\ G$。最后， $\mathcal{X}$不可能具有对于某个$\mathcal{W} \in$宽子范畴(Λ)而言的 $\lim\longrightarrow \mathcal{W}$形式，因为根据定理 4.6，这将推出 $\mathcal{W} = 0$ ，与假设$\mathcal{X} \neq 0$矛盾。□

参考文献

[1] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten； τ–倾斜理论，《组合数学》150 (2014), 415–452。[2] L. Alonso Tarrío, A. J eremías López 和 M.J. Souto Salorio，复形范畴中的局部化与无界分解，《加拿大数学杂志》**52** (2000), 225–247。[3] L. Angeleri-Hügel；倾斜模的丰富性，《代数表示理论研究》，《当代数学》716，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯 (2018), 1-23。[4] L. Angeleri-Hügel, W. Cao，极小 *silting* 模与环扩张，《中国科学：数学》**65** (2022), 1775–1794。

[5] 2205 11883 L. Angeleri-Hügel, I. Herzog, R.

[6] Laking；余倾斜心中的单对象，arXiv: 。L. Angeleri-Hügel, M. Hrbek；导出范畴中挠对的参数化 ，arXiv: 1910 11589 。L.

[7] Angeleri-Hügel, R. Laking, J. Štovíček, J. Vitória；变异与挠对，预印本 (2021), arXiv:2201.02147v1[8] L. Angeleri-Hügel, F. Marks, J. Vitória；倾斜模与环满同态 ，《数学进展》303 (2016), 1044-1076。[9] L. Angeleri-Hügel, F. Marks, J. Vitória；关于 τ–倾斜有限代数的刻画，《模、代数与范畴的模型论》，《当代数学》730，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，(2019 75 89), 第 - 页。L. Angeleri-Hügel, J. Trlifaj，有限投射维数模的直极限 ，载于《环、模、代数与阿贝尔群》，

[10] 《纯粹与应用数学讲义》 236 2004 27 44 ( ) - 1905

[11] S. Asai, C. Pfeifer；宽子范畴与挠类格，预印本，arXiv: 。

01148 2 v E. Barnard, A.

[12] Carroll, S. Zhu；挠类的极小包含，《代数组合学》第二卷 (2019 5, 879 901) 第 p 期 - S. Bazzoni；可定义类何时

[13] 是倾斜类或余倾斜类？，《代数杂志》320 (2008), 4281–4299。[14] S. Breaz, F. Pop；余倾斜模，《代数与表示论》20, 第 1305-1321 页 (2017)。[15] S. Breaz, J. Žemlička；由倾斜模生成的挠类，《Ark. Mat.》56 (1) 15 - 32, (2018)。

[16] A. Buan, H. Krause，温和遗传代数上的余倾斜模，《太平洋数学杂志》211 1, 41 2003 59 ( ), 第 – 期。[17] W. Crawley-Boevey；局部有限表示加性范畴；《代数通信》22(5), 1641- 1674 (1994)。[18] A. Del Valle, J. Rada, M. Saorín；反射子范畴，《格拉斯哥数学杂志》42 (2000) 97-113。[19] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso；τ-倾斜有限代数、砖与 g-向量，《国际数学研究通知》(2019 3, 852 892) 第 – 期。L. Demonet, O. Iyama, N. Reading, I. Reiten, H. Thomas；挠类的格理论，arXiv:1711.01785v2。[20] [21] 9 2006 423 430 R. El Bashir；[22] 覆盖与有向余极限，《代数与表示理论》。( ), – H. Enomoto，单砖：处理无挠类与宽子范畴的统一方法，《数学进展》393 (2021)，论文编号 108113，共 41 页。[23] P. Gabriel, J. A. de la Peña；表示有限代数的商，《代数通信》15 (1-2), 279-307, 1987。[24] I. Herzog；余倾斜类的极大齐格勒谱，在“代数领域的一些趋势”会议上的报告幻灯片，布拉格，(2009)。[25] C. Ingalls, H. Thomas；非交叉分拆与箭图表示，《组合数学》145(6) 1533- 1562, (2009)。[26] H. Krause, G. Stevenson；射影直线的导出范畴，《数学中的谱结构与拓扑方法》, 275–297,《EMS 大会报告系列》，EMS 出版社，苏黎世 2019。[27] H. Krause, J. Štovíček；通过 Ext-正交对得到遗传环的望远镜猜想，《数学进展》225 (2010), 2341–2364。[28] H. Lenzing，从有限表示模到无限模的同调转移，《数学讲义》1006 (1983), 734-761。[29] F. Marks, J. Štovíček；挠类、宽子范畴与局部化，《伦敦数学会杂志》，第 49 2017 3, 405 416 卷 ( ) 第 p 期 - T. Nakamura，私人通信。[31] A. Neeman， $D(R)$的色塔，附录作者 Marcel Bökstedt，《拓扑学》31 (1992), 519–532。[32] M. Prest；纯性、谱与局部化，《数学及其应用百科全书》121，剑桥大学出版社，2009。[33] I.Reiten, C.M. Ringel，典范代数的无限维表示。《加拿大数学杂志》58 (2006), 180–224。[34] C. M. Ringel；有限维遗传代数的无限维表示，《数学专题讨论会》23，学术出版社，伦敦，第 321–412 页，(1979)。[35] C. M. Ringel；温和代数是野性的，《代数学通讯》6 (1999), 第 4 期, 473–480。[36] A. H. Schofield；遗传环的泛局部化，arXiv:0708.0257v1, (2007)。[37] F. Sentieri；Auslander 定理的砖版本，《名古屋数学杂志》249, 第 88-106 页, (2023)。[38] D. Simson 和 A. Skowronski，《结合代数表示论要素》，第 2 卷，《伦敦数学会学生读物》71，剑桥大学出版社，剑桥 2007。[39] J. Wei, P. Zhang；余倾斜复形与 AIR-余倾斜模，《代数杂志》491, 第 1-31 页, (2017)。

Lidia Angeleri Hügel ，计算机科学系 - 数学部 ，维罗纳大学 维罗纳 ，Strada le Grazie 15 - Ca’ Vignal ，意大利 I-37134 维罗纳 ，意大利
电子邮件地址：lidia.angeleri@univr.it

FRANCESCO SENTIERI，维罗纳大学计算机科学系数学部，Strada le Grazie 15 - Ca’ Vignal，I-37134 维罗纳，意大利电子邮件地址：francesco.sentieri@univr.it