通过网络的$(k\ \ell)$-匿名性及其k-度量反维数

Elena Fern´an dez[1], Dorota Kuziak[1], Manuel Munoz-Marquez[1,*], 以及 Ismael G. Yero [2]

[1]统计与运筹学系，C ´ádiz 大学，西班牙[2]数学系，C ´ádiz 大学，西班牙[*]
manuel.munoz@uca.es

arXiv:2304.00849v1 [math.OC] 3 Apr 2023

摘要

本文重点研究若干网络的（k ℓ）-匿名性，并将其作为衡量网络抵御主动攻击时隐私保护程度的指标。本文考察了两种不同类型的网络。第一类由结构预先确定的图组成，即圆柱图、环面图和二维汉明图；第二类则由随机生成图构成。为评估所考察图的（k ℓ）-匿名性，我们计算了它们的 k-度量反维数。为此，对于结构预先确定的图，我们采用了组合方法；对于随机生成图，我们则建立了整数规划公式，并通过计算对其实现进行了测试。组合方法的结果以及实现所得的结果表明，根据（k ℓ）-匿名性指标，只有二维汉明图和某些一般的随机稠密图能够实现较高的隐私属性。

2020年美国数学学会学科分类：05C12；05C76；90C27；90C10；05C80

1 引言

社会网络分析是利用网络和图论方法研究社会结构的过程。这类分析在现代社会中得到了广泛发展，其背后有多种推动因素，例如，对基础计算能力和信息技术不断进步的需求日益增长。这些进步旨在改进经常融入各类重要商业和社会职能的系统与服务，例如电子商务、医疗保健、教育、制造业和人际互动等。

社会网络分析的效用毋庸置疑，因为许多不同的社会服务都能从这类研究中获益。然而，这些益处并非没有代价：如果网络中的某个相关实体能够获取电子邮件、即时消息或关系等敏感数据，网络用户的隐私就会受到侵犯。针对上述问题，一种基本的解决方案是在发布社会网络时采用某种匿名化过程，以防范此类风险。例如，可以删除可能用于识别身份的属性。尽管如此，这种简单的方法通常不足以保障网络中用户个人信息的隐私。事实上，始终存在泄露任何用户身份的可能性。因此，理想情况下，每个公开的社会网络都应包含一项用于衡量这种身份泄露概率的指标。

上述概率的一些初步测量方法最早发表于 [11]，随后又在[7]中得到小幅改进。这些方法的主要思路是提出一种衡量针对社交网络的主动隐私攻击的指标，称为$(k\ \ell)$-匿名性。具体而言，[11]指出，若一个社会图满足$(k\ \ell)$-匿名性，那么在网络中最多存在 ℓ 个攻击者节点的情况下，泄露该网络中任意给定用户身份的概率为 $1/k$。理论上，$(k\ \ell)$-匿名性由图论参数k-度量反维数提供理论依据，该参数也在 [11]中提出。

在 (k ℓ)-匿名性的定义中，整数 k 用作隐私阈值，而数值 ℓ 表示给定网络中攻击者顶点预期数量的上界。由于攻击者实体难以控制网络中的许多顶点，人们通常认为，网络中的攻击者节点数量可能远小于顶点总数，因此假定 ℓ 是一个较小的整数。

鉴于上述两个概念之间密切的关系，要确定给定图 G 的 (k ℓ)-匿名性，关键在于求出其 k-度量反维数。这个研究主题受到了多位研究人员的关注。近来的几项研究分别将 k-度量反维数作为图参数进行研究，并未涉及 (k ℓ)-匿名性，例如 [1, 6, 7, 8, 9, 10], , 以及更为全面的综述 [5], ; 后者汇总了该主题的主要研究成果。其他研究则聚焦于图的 k-度量反维数的组合性质和计算性质，有助于更好地应用和理解 (k ℓ)-匿名性。例如，图的 k-度量反维数

一些经典图族（如完全二部图、圈及其他一些图）的 k-度量反维数在开创性论文 [11]中得到了研究；一些广义彼得森图的 k-度量反维数见 [6]；一些轮图相关社交图的 k-度量反维数见 [9]；一些树和单圈图（对于$k = 1$）的 k-度量反维数见 [10]。有关这一主题较为全面的成果汇编，读者可参阅近期的综述 [5], ，该综述还探讨了其他若干相关主题。

现有研究表明，遗憾的是，对于大量网络而言，概率 $1/k$ 的值远高于可被视为合理的水平。例如， [3] 中给出了一些实例，展示了若干真实社交网络所达到的 (k ℓ)-匿名性。具体而言，大多数社交网络只满足 (1,1)-匿名性。这显然是不利的，因为这意味着在大多数社交网络（图）中，都存在一个顶点可能泄露图中至少一个顶点的信息。换言之，大多数社交网络（图）都相当脆弱。

由上述讨论可知，显然有必要找出满足 (k ℓ)-匿名性的图，其中 k 尽可能大，且 ℓ 可取任意给定值。因此，尽管已有相关研究，仍有必要研究（计算或界定）那些该参数尚不明确的图类的 k-度量反维数，从而确定它们的 (k ℓ)-匿名性。此外，采用新方法进行此类计算也值得关注。本研究致力于实现这两个目标：通过考察具有预定结构的图以及随机生成的图，进一步深化对 k-度量反维数的认识；并为探讨这一主题开辟新的视角。

特别是，本文的目标有两个方面。一方面，本文评估了多种类型网络的（k ℓ）-匿名性度量所体现的隐私属性。为开展这项评估，我们首先获得了关于 k-度量反维数的新理论结果。对于具有特定结构的多种网络，我们使用组合技术推导了这些结果；对于随机生成的网络，则采用优化方法。具体而言，我们提出了一种整数规划数学优化模型，用于求解一般网络的（k ℓ）-匿名性，并可使用现成的求解器求解。据我们所知，这种方法此前尚未应用于这一领域。

本文其余部分的结构安排如下。第 2 节介绍本文所用的符号，并给出基本定义和结果。随后，第 3节给出环面图、圆柱图和二维汉明图在相应可行 k取值下的 k-度量反维数的精确值。为便于阅读，本节所有结果的证明均列于附录。第 4 节介绍用于求解 k-度量反维数问题的整数规划公式。该公式已实现，并通过一些规则及近乎规则的随机网络进行了计算测试。生成的随机图具有三种不同结构。我们首先研究随机树，然后研究一些一般稀疏随机图，最后研究一些随机稠密图。第 5节介绍计算实验，并展示和分析所得数值结果。基于这些结果，我们进一步给出此类随机网络所满足的（k ℓ）-匿名性。本文最后在第 6 节总结全文，并探讨未来研究方向。

2 定义与基本概念

本文始终考虑一个无向、无权且连通的图 G $=$(V, E)，其中 $|V| = n$，且不含自环或重边。我们进一步假设，用户由图中的顶点表示，而边表示用户之间的某种关系。G 中任意给定路径的长度等于其所含弧的数量；对于任意一对顶点 u, v $\in$V，u 与 v 之间的距离是最短 u, v-路径的长度，记作 d(u, v)（或简记为 d_{uv}）。对于给定顶点 v $\in$V (G)，v 的离心率为 e(v) $=\max\{d(v, x) : x \in V(G)\}$。此外，对于顶点 v，任何满足 d(v, u) $=$ e(v) 的顶点 u 都称为 v 的离心顶点。请注意，这些顶点是距 v 最远的节点。接下来介绍的概念是本文研究的核心。

定义1 ([11]). 设 k $\in \mathbb{N}$ 且设 G $= (V, E)$ 是一个连通图。

- 集合 S $\subset$V 是图 G 的 k-反解析集（简称 k-ARS），当且仅当 k 是满足以下条件的最大整数：对于所有 u $\notin$ S，都存在集合 Su $\subseteq$V $\setminus$(S $\cup${u})，使得 $|Su| \geq k - 1$，并且对于每个 v $\in$S 和每个 x $\in$Su，都有 duv $=$dxv。
- 图 G 的 k-度量反维数，记作 adimk(G)，是图 G 的最小 k-ARS 的基数。
- 基数为 adimk(G) 的 k-ARS 称为 k-反解析基（简称 k-ARB）。

基于上述概念，Trujillo-Rasua 和 Yero [11] 提出了以下度量，对应一个概率指数，用于量化网络在面对针对其隐私的主动攻击时的安全程度。

定义2（[11]）。如果 k 是满足 G 的 k-度量反维数不大于 ℓ 的最小正整数，则称图 G 满足关于主动攻击的 (k ℓ)-匿名性。

定义 1 中的概念也可以从另一种角度来看。对于给定的顶点集 S ⊂ V，我们定义如下等价关系 $\mathscr{R}_S$。若对于每个顶点 z ∈ S，均有 $d_{xz} = d_{yz}$，则两个顶点 x, y ∈ V 相关，记作 $\mathscr{R}_S$。从现在起，对于给定的集合 S ⊂ V，我们将 $\mathscr{Z}_S = \{Z^1, \ldots, Z^r\}$（其中某个 r ≥ 1）视为由 $\mathscr{R}_S$ 定义的等价类集合。利用上述术语，很容易看出，任意顶点集 S ⊆ V 都是图 G 的一个 k-ARS，其中 $k = \min\{|Z^i| : Z^i \in \mathscr{Z}_S\}$。在处理这一主题时，这种 k-ARS 的定义方法通常更为实用。由于 $r = nk - 1$ 是上述非空集合 Z^r 数量的上界，以下我们假设 $R = \{1, \ldots, r\}$。

注意，根据定义2，对于给定的图$_k(G)$，确定G 的 adim 可以表述为以下优化问题：

$$\text{adim}_k(G) = \min\{|S|: \text{ S 是 G 的一个 k-ARS}\} \qquad (k\text{-MAD})$$

我们首先回顾一下，求解 k-MAD 通常是 NP难问题，这一点已由 [2] 和 [13] 独立证明。此外，显然，对于某个给定的图 G，并非每个 k 值都能找到一个 k-ARS。与此相关，若 $k = \kappa$ 是 G 含有 k-ARS 时所能取的最大整数，则称图 G 为 κ-度量反维数图。与 (k-MAD) 是 NP难问题不同， [2] 已证明，可以在关于 G 的阶 n 的多项式时间内求得该值 κ。然而，已知图 G 是 κ-度量反维数图，并不意味着存在另一个 $k \in \{2, \ldots, \kappa - 1\}$ 对应的 k-ARS（注意，我们总能找到一个 1-ARS）。原因之一在于 $\text{adim}_k(G)$ 关于 k 不具有单调性。尽管如此，某些图族的 $\text{adim}_k(G)$ 关于 k 的单调性已得到证实。例如， [3] 已证明，一个 κ-度量反维数树 T 对每个 $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$ 都含有 k-ARS。不过，即使树 T 对每个 $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$ 都含有 k-ARS，我们也必须指出，目前尚无通用方法能够针对区间 $\{1, \ldots, \kappa\}$ 中任意取值的 k，计算最优 k-ARS。也就是说，对于一般的树，尚不清楚求解其 k-度量反维数有多困难。因此，研究随机生成的树并计算其 k-度量反维数是值得关注的。

关于 这种情况，k-ARS 的存在性可以通过以下组合问题来处理 ：

给定整数 k 和图 G：G 是否包含 k-ARS? (*k*-ARS)

在本文余下部分，当图 G 对某个 $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$ 不存在 k-ARS 时，我们将称 $\text{adim}_k(G) = +\infty$。

优化问题（*k*-MAD）以及上述组合问题（*k*-ARS）将贯穿全文进行研究。具体而言，对于任意所研究的图 G，我们将计算最大的值 κ，使得 G 是 κ-度量反维数图。由此我们将得到一个整数区间，在该区间内可能计算 *k*-度量反维数。随后，我们将考虑图 $\{1, \ldots, \kappa\}$ 的 G，并研究对于每个 $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$，是否存在 *k*-ARS。于是，在可能的情况下，我们将计算 $\text{adim}_k(G)$ 的值。根据所得结果，将陈述相应图所满足的 $(k\ \ell)$-匿名性。

3 具有预定结构的网络

本节讨论一些由其他图的笛卡尔积构成的图。这类图乘积是广泛用于多种研究中的构造，涵盖理论研究和应用研究。它们具有对称结构，直观上使其成为满足较大 k 值下 (k ℓ)-匿名性的良好候选对象。图 G 和 H 的笛卡尔积是图 G□H，其顶点集为 V (G□H) = V (G) × V (H)。若 g = g′ 且 hh′ ∈ E(H)，或 gg′ ∈ E(G) 且 h = h′，则顶点 (g, h) 和 (g′, h′) 在 G□H 中相邻。关于乘积图及其结构、应用、识别等内容的综合论述，建议参阅书籍 [4]。

我们首先回顾网格图的已知结果，其 k-反维数已为人所知；随后重点讨论圆柱图、环面图和二维汉明图，这些图的 (k ℓ)-匿名性尚未得到研究。网格图 $P_r \square P_s$是两条路径 $P_r = u_1u_2 \cdots u_r$和 $P_s = v_1v_2 \cdots v_s$的笛卡尔积。

文献 [1], 研究了网格图 $P_r \square P_s$ （其中 r,t ≥ 2）的 k-度量反维数，结果如下。首先，当 r 和 s 均为奇数时，$P_r \square P_s$ 具有 4-度量反维数；否则，其度量反维数为 2。r、s 均为奇数时，不可能找到 3-ARSs。因此，已知以下公式（见 [1]）。

- $\text{adim}_1(P_r \square P_s) = 1$
- $\text{adim}_2(P_r \square P_s) = \begin{cases} 2, & \text{if } r,s \text{ are both even,} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$
- $\text{adim}_4(P_r \square P_s) = 1$ (if r,s are both odd).

根据上述结果，可以推得网格图 $P_r \square P_s$ 仅满足 (1, 1)-匿名性，因为（在已有一个攻击者节点的情况下）使 $\mathrm{adim}_k(P_r \square P_s) \leq 1$ 成立的最小值为 $k = 1$。

接下来，我们考虑圆柱图 $P_r \square C_s$、环面 $C_r \square C_s$ 以及所谓的二维汉明图 $K_r \square K_r$。按照通常的符号约定，$C_r = u_0 u_1 \cdots u_{r-1} u_0$ 和 K_r 分别表示阶为 r 的圈和完全图。我们首先求出使这些图具有 κ-度量反维数的 κ 取值，然后确定它们的 (k,l)-匿名性。为使论述更加流畅，本节将介绍所得结果，所有证明则收录于附录中。

命题 3.1. 设 $r,s \geq 2$ 为两个整数。

(i) 若 $r \geq 2$ 且 $s \geq 3$，则当 r、s 均为奇数时，$P_r \square C_s$ 具有 4-度量反维数；当 s 为偶数时，它具有 3-度量反维数；否则，它具有 2-度量反维数。

(ii) 若 $r, s \geq 3$，则当 r, s 的奇偶性相同时，$C_r \square C_s$ 是 4-度量反维数；否则，它是 2-度量反维数。

(iii) 若 $r \geq 4$，则 $K_r \square K_r$ 是 $(2r-2)$-度量反维数。

与命题 3.1一致，接下来我们给出在适当的 k取值下，圆柱图、环面图和二维汉明图的 k-度量反维数的精确值；这些 k 取值不大于 κ（对每个相应的图而言）。我们从圆柱图 $P_r \square C_s$开始。

定理 3.2. 对任意整数 $r \geq 2$ 和 $s \geq 3$,

$$\mathrm{adim}_k(P_r \square C_s) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 4 \text{ and } r,s \text{ are odd}, \\ 2, & \text{if } k = 3 \text{ and } s \text{ is even}, \\ +\infty, & \text{if } k = 3 \text{ and } r,s \text{ are odd}, \\ 1, & \text{if } k = 2 \text{ and } r,s \text{ are not both even}, \\ 4, & \text{if } k = 2 \text{ and } r,s \text{ are even}, \\ 2, & \text{if } k = 1 \text{ and } s \text{ is odd}, \\ 1, & \text{if } k = 1 \text{ and } s \text{ is even}. \end{cases}$$

下一个结果　给出了与命题 k-度量反维数，适用于环面图$C_r \square C_s$，与命题 3.1 (i　　i).

定理 3.3。对于任意两个整数 $r,s \geq 3$,

$$\mathrm{adim}_k(C_r \square C_s) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 4 \text{ and } r,s \text{ are odd}, \\ 2, & \text{if } k = 4 \text{ and } r,s \text{ are even}, \\ 4, & \text{if } k = 3 \text{ and } r,s \text{ are even}, \\ +\infty, & \text{if } k = 3 \text{ and } r,s \text{ are odd}, \\ 1, & \text{if } k = 2 \text{ and } r,s \text{ have distinct parity}, \\ 4, & \text{if } k = 2 \text{ and } r,s \text{ are even}, \\ \min\{r,s\}, & \text{if } k = 2 \text{ and } r,s \text{ are odd}, \\ 1, & \text{if } k = 1 \text{ and } r,s \text{ are even}, \\ 2, & \text{if } k = 1 \text{ and } r,s \text{ are not both even}. \end{cases}$$

接下来的结果将根据命题k，计算取适当k值时二维汉明图的3.1 (iii).

定理 3.4。对于任意 $r \geq 4$,

$$\mathrm{adim}_k(K_r \square K_r) = \begin{cases} 3, & \text{if } k = 1, \\ 2, & \text{if } k = 2, \\ r-k, & \text{if } 3 \leq k \leq r-2, \\ r, & \text{if } k = r-1, \\ +\infty, & \text{if } r \leq k \leq 2r-3, \\ 1, & \text{if } k = 2r-2. \end{cases}$$

3.1 圆柱图、环面图和（k ℓ）二维汉明图的匿名性

定理3.2、3.3 和3.4 在假设存在一个攻击者顶点（$\ell = 1$）的情况下，得出各自研究的相应图的以下度量。

除了表 1 中的结果外，我们还可以注意到，例如，如果 r,s 均为奇数，那么环面图 $C_r \square C_s$ 在仅存在一个攻击者顶点的情况下达到 (4,1)-匿名性。因此，我们可以很容易地观察到，二维

圆柱图 $P_r \square P_s$		环面图 $C_r \square P_s$		海明图 $K_r \square K_r$
$s \geq 4$ 偶数	$s \geq 3$ 奇数	$r,s \geq 4$ 偶数	其他情况	$r \geq 4$
(1,1)-匿名性	(2,1)-匿名性	(1,1)-匿名性	(2,1)-匿名性	$(2r-2,1)$-匿名性

表 1. 环面图、圆柱图和二维汉明图所实现的匿名性。

在我们迄今考察过的网络中，汉明图是抵御针对其隐私的主动攻击最“安全”的网络。这一性质可能与二维汉明图的高度对称性以及其直径较小（仅为二）有关。

4 k-MAD 问题的整数规划公式

本节将建立一个整数规划公式，用于求给定图 G 的 k-度量反维数。稍微滥用一下符号，我们也将 $V = \{1,\ldots,n\}$ 记作以自然方式与图的顶点相关联的指标集合。该公式基于通过等价关系 $\mathscr{R}_S$ 对 k-ARS S 的定义，并由两组二元决策变量构成：一组用于确定集合 S 的元素，另一组用于确定不同类的元素。顶点类由满足某些相容性条件的顶点子集确定，并称为 Q-子集。为避免同一解有多种表示方式，每个 Q-子集都有唯一的代表元，即其指标最小的顶点。

定义如下决策变量：

$s_u = 1$ 当且仅当 $u \in S$, $\forall u \in V$

$q_{uv} = 1$ 当且仅当 v 属于以 u 为代表元的 Q-子集 $\forall u, v \in V, v \geq u.$

上述决策变量确定了顶点集 $S = \{u \in V : s_u = 1\}$，其基数为 $|S| = \sum_{u \in V} s_u$；以及 Q-子集 $Q^u = \{v \in V : q_{uv} = 1\}$。由于 $q_{uu} = 1$ 表示 u 是某个 Q-子集中索引最小的顶点，因此该解确定的类的实际数量为 $r = \sum_{u \in V} q_{uu}$。

公式如下。

$$F \quad \min \quad \sum_{u \in V} s_u \tag{1}$$

$$\sum_{u \in V} s_u \geq 1 \tag{2}$$

$$s_u + \sum_{v \in V : v \leq u} q_{vu} = 1 \qquad u \in V \tag{3}$$

$$\sum_{v \in V : v > u} q_{uv} \geq (k-1) q_{uu} \qquad u \in V \tag{4}$$

$$s_u + q_{vw} \leq 1 \qquad u, v, w \in V, u \neq v, v < w, d_{uv} \neq d_{uw} \tag{5}$$

$$s_v + q_{uv} + \sum_{\substack{w \in V : w \neq u, w \neq v, \\ d_{uw} \neq d_{vw}}} s_w \geq q_{uu} \qquad u, v \in V, v > u \tag{6}$$

$$s_u \in \{0,1\}, \forall u \in V; \qquad q_{uv} \in \{0,1\}, u, v \in V, v \geq u. \tag{7}$$

令 Ω 表示可行解确定的 F 的定义域，即 $\Omega = \{(s,q) : s \in \{0,1\}^n, q \in \{0,1\}^{\binom{n}{2}}$ 满足（2）–(6)$\}$。

命题 4.1. 任何可行解 $(s,q) \in \Omega$ 都确定一个 k-ARS。

证明。设 $(s,q) \in \Omega$。考虑 $S = \{u \in V : s_u = 1\}$ 以及 Q-子集 $Q^u = \{v \in V : q_{uv} = 1\}$。下面说明这些 Q-子集恰好是由等价关系 $\mathscr{R}_S$ 确定的类。为此，我们分析这些约束的含义：

- 约束 (2) 保证顶点集 S 非空。
- 约束（3）通过规定每个顶点 $u \in V$ 要么属于集合 S（$s_u = 1$），要么属于某个 Q-子集，且其代表元要么是顶点 u，要么是索引更小的顶点，从而确保我们得到一个划分。

• 约束（4）保证每个 Q-子集的基数至少为 k。请注意，仅当 u 是某个 Q-子集的代表元（$q_{uu}=1$）时，这些约束才会生效；在这种情况下，它们规定与 u 关联的 Q-子集至少包含 $k-1$ 个额外元素。这保证了 $|Q_u|\geq k$。

• 约束（5）确保 Q-子集定义良好，即每个分量中的顶点对均满足相容性准则；具体而言，通过施加约束，确保任意两个顶点 v、$w\in V$若到任意顶点 $u\in S$的距离不同，就不能属于同一个 Q-子集。当 $w=u$ 时，这些约束规定 Q-集合中只能包含不属于 S的顶点。

• 约束（6）的作用是确保得到的 Q-子集恰好是由等价关系 $\mathscr{R}_S$确定的类。换言之，它们确保 $\mathscr{R}_S$ 的同一个等价类中的所有顶点都被分配到同一个 Q-子集。注意，约束（5）并不能保证这一条件，因为原则上，$\mathscr{R}_S$ 的同一个等价类中的两个顶点可能被分配到不同的 Q-子集。观察可知，与给定顶点对 $u,v\in V, u<v$ 相关的约束（6）仅在 u 是 Q-子集 Q_u 的代表元时才生效。在这种情况下，如果 v 属于 S 或 Q_u，则该约束显然成立。否则，该约束要求存在某个顶点 $w\in S$，使得 $d_{uw}\neq d_{vw}$。也就是说，u 和 v 不属于 $\mathscr{R}_S$ 的同一个等价类。

上述分析得出的结论是，任意可行解 $(s,q)\in\Omega$ 都确定一个 k-ARS，其目标函数值为 $|S|=\sum_{u\in V}s_u$。

□

下面我们将看到，上述结果的逆命题同样成立。具体而言

命题 4.2. 任意 k-ARS $S\subset V$，$\{Z^r\}_{r\in R}$都可以关联到 $(s,q)\in\Omega$中的一个解。

证明。设 $S\subset V$，$\{Z^r\}_{r\in R}$是给定的 k-ARS。考虑如下解 (s,q):

• $s_u=1$ 当且仅当 $u\in S$。

• $q_{uv}=1$ 当且仅当 $u,v\in Z_r$、$u<v$，且 $q_{ur,ur}=1$，其中 $u_r=\min\{u:u\in Z_r\}$，$r\in R$。（即 $Q_{ur}=Z_r$，$r\in R$）。

我们来证明 $(s,q)\in\Omega$:

• $S\neq/0$ 蕴含存在 $u\in S$，因此 (2) 成立。

• 由于 $S\cup\{Z_r\}_{r\in R}$确定了 V的一个划分，根据定义，(s,q) 满足 (3)。

• 由于 $S\subset V$，$\{Zr\}r\in R$ 是一个 k-ARS，对于任意等价类 $r\in R$，对于任意一对顶点 $v,w\in V$，若对于某个 $u\in S$ 有 $duv\neq duw$，则 v 和 w 不能同时属于同一个等价类 $Zr=Qur, r\in R$。换言之，若 $su=1$，则对于所有 $r\in R$，$qv,w=0$。因此，(s, q) 也满足约束 (5)。

• 由于 $|Z_r|\geq k$，对于所有 $r\in R$，$|Z_r\setminus\{u_r\}|=|Q_{ur}\setminus\{u_r\}|\geq k-1$，对于所有 $r\in R$。因此，约束 (4) 仅对顶点 u_r（$r\in R$）起作用，且由 (s, q) 满足。

□

注4.1。 注意，公式 F 中的约束 （2）要求由解诱导的顶点集 S 非空。这意味着，当存在 k-ARS 时，F 的最优值将为 $\mathrm{adim}_k(G)$。然而，当对于给定的 k 不存在 k-ARS 时，公式 F 将没有可行解。

作为上述分析的结果，我们得出以下结论。

推论4.3。 F 是给定图 $G=(V,E)$ 上（k-MAD）的有效公式。当 F 可行时，其最优值确定 $\mathrm{adim}_k(G)$。否则，如果 F 不可行，则不存在 k-ARS。

证明。 由命题 4.1 和 4.2 可知，k-ARS 与 Ω 中的可行解之间存在一一对应关系。此外，可行解 $(s,q)\in\Omega$ 的目标函数值为 $|S|=\sum_{u\in V}s_u$。因此，由于 F 是一个最小化问题，F 的任意最优解都将确定一个 F，从而确定一个 k-ARS，其目标函数值为 $\mathrm{adim}_k(G)$。

□

公式 F 上述共有 $n+\binom{n}{2}$ 个二元决策变量，以及数量为 $\mathscr{O}\left(1+2n+(n+1)\binom{n}{2}\right)$的约束。特别是，约束（5）的数量为 $(n-2)\binom{n}{2}$。由于随着图的顶点数增加，这一数量可能过大，因此我们对这组约束构造了一个聚合版本，即:

$$\sum_{u\in V:d_{uv}\neq d_{uw}} s_u+n\,q_{vw}\leq n \qquad \forall v,w\in V, v\geq w, \tag{8}$$

这考虑到，在任一可行解 S 中，对于任意一对 v, w ∈V，且 v ＜w，都有 $\sum_{u\in V:d_{uv}\neq d_{uw}} s_u \le \sum_{u\in V} s_u \le n$。由于约束（8）的右端恰为 n，与给定顶点对 v, w 相关联的约束会阻止这两个顶点同时属于同一个 Q 集，前提是存在某个顶点 u ∈ S，使得 $d_{uv} \neq d_{uw}$。因此，用约束（8）替换约束（5），即可得到 (k-MAD) 的另一种有效公式，记为 F^A。注意，约束（8）的数量为 $\binom{n^2}{2}$，比约束（5）的数量少一个数量级。

5 计算结果

为了分析公式 F^A 的实证性能，我们开展了一系列计算实验。这些实验有两个目标：一方面，分析 F^A 在不同类的图上的有效性和可扩展性；另一方面，为那些尚无已知理论结果的图类提供实证支持。

所有计算测试均在搭载 8 GB RAM 的 AMD Ryzen 7 PRO 2700U 2.20 GHz 设备上完成，操作系统为 Windows 10 Pro。公式F^A 使用 Mosel 5.6.0 编写，并采用 Xpress Optimizer Version 38.01 作为求解器。01 [12]。

在实验中，我们考虑了以下基准实例集：

- $\mathscr{PC}$实例：圆柱图 $P_r \square C_s$，其参数组合 (r, s) ∈{(5, 5)、(5, 6)、(5, 9)、(5, 10)、(6, 6)、(8,10)、(9,9)、(10,10)}。
- $\mathscr{CC}$实例：环面 $C_r \square C_s$ 的组合 (r, s) 为 ∈{(5, 5)、(5, 6)、(5, 9)、(5, 10)、(6, 6)、(8,10)、(9,9)、(10,10)}。
- $\mathscr{T}$实例：顶点数为 n ∈{50,100,200}、最大顶点度为 δ 的树，其中 δ ∈{5, 6, 7, 8,10、11、15， 20} 对应 n ∈{50, 200}，以及 δ ∈{5,10,15,20,25} 对应 n ＝100。最初，树以有向形式生成，并以顶点 1 为根。随后移除所有方向，得到最终的无向树。原始有根树的弧通过迭代探索其顶点生成，并从尚未探索的顶点中随机生成至多 δ 个后代。对于 n 和 δ 的每种组合，均生成了两个实例。
- $\mathscr{S}$实例：一般稀疏图，顶点数为 n ∈{50,100,200}，顶点度为 δ ∈{6,11}。与树的情况类似，先生成有向图，再移除所有方向。通过迭代遍历图的顶点，为当前顶点作为起点的弧随机生成最多 δ个端节点（从原始顶点集中选取），从而生成图的弧。对于 n 和 δ的每种组合，均生成了两个实例。
- $\mathscr{D}$实例：一般稠密图，顶点数为 n ∈{50,100,200}，当 n ＝50时顶点度为 δ ∈{40,45}，当 n ＝100 时顶点度为 δ ∈{90,95}，当 n ＝200时顶点度为 δ ∈{180,190}。对于 n 和 δ 的每种组合，均通过从完全图 K_n中移除 δ条随机生成的边，生成了两个实例。

圆柱图和环面实例在 k ∈{1,2,3,4}的取值下求解，而其他类中的实例则在 k ∈{1,2,3,4,5,6}的取值下求解。每个待求解实例的计算时间限制设为 7200 秒。

表 2 显示了针对所考虑的基准实例，公式 F^A 中的变量和约束数量。

	r	s	变量。		约束。		n	变量。		约束。
			s	q				s	q	
$\mathscr{PC}$ & $\mathscr{CC}$	5	5	25	300	1251	$\mathscr{T}, \mathscr{S}$, & $\mathscr{D}$	50	50	1225	5001
		6	30	435	1801		100	100	4950	20101
		9	45	990	4051		200	200	19900	80001
		10	50	1225	5001					
	6	6	36	630	2593					
	8	10	80	3160	12801					
	9	9	81	3240	13123					
	10	10	100	4950	20001					

表 2. 实例维度

表 3-7 总结了上述各类图所获得的结果。所有表格均在前几列显示实例参数的取值，随后是k 个区块，每个区块各有两列，分别对应所考察的

k 的取值k。每个区块的第一列标记为 $|S|$，给出了各实例k-度量反维数的最优值；此列中的 NF（不可行）表示对于所测试的k值，不存在k-ARS；也就是说，$\mathrm{adim}_k(G) = +\infty$。对于每种参数组合均生成两个实例的类别（树、稀疏图和稠密图），若两个实例的最优值相同，列 $|S|$ 只显示一个值；否则则分别列出两个不同的最优值。每个区块的第二列标记为中央处理器，给出求解器为获得可证明的最优解或证明不存在可行解所需的计算时间。在表5-7 中，这些列的结果是具有相同特征的两个实例的平均值。对于类别 $\mathscr{S}$& $\mathscr{D}$ 中的部分最大实例（$n = 200$），在计算时间限制内无法求得已证明的最优解。对于这些实例（在 CPU 列中标记为时间限制），表格中列出了找到的最佳解。

r	s	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4	
		$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU
5	5	2	0.9	1	0.2	NF	0.1	1	0.2
	6	1	0.3	1	0.3	2	0.2	NF	0.2
	9	2	8.4	1	1.8	NF	1.6	1	1.8
	10	1	2.4	1	2.3	2	2.6	NF	2.8
6	6	1	0.6	4	3.7	2	0.5	NF	0.4
8	10	1	20.9	4	423.9	2	87.7	NF	223.8
9	9	2	146.0	1	23.1	NF	239.8	1	34.6
10	10	1	68.5	4	1748.1	2	217.3	NF	771.5

表3. $\mathscr{PC}$实例（圆柱图 $P_r \square C_s$）的结果汇总

r	s	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4	
		$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU
5	5	2	2.5	5	5.1	NF	4.1	1	0.2
	6	2	2.1	1	0.3	NF	0.2	NF	0.2
	9	2	18.6	5	45.1	NF	46.1	1	2.4
	10	2	10.5	1	2.8	NF	2.3	NF	2.8
6	6	1	0.6	4	2.4	4	0.5	2	0.7
8	10	1	20.9	4	742.9	4	102.4	2	98.4
9	9	2	174.9	9	933.6	NF	371.3	1	36.2
10	10	1	66.7	4	3667.6	4	4760.6	2	131.6

表4. $\mathscr{CC}$实例（环面 $C_r \square C_s$）的结果汇总

正如预期，表3-4 中的结果证实了定理3.2 和3.3所证明的理论结果，以及公式F^A的有效性。总体而言，在参数值固定时，圆柱图实例 $\mathscr{PC}$的计算时间比环面实例 $\mathscr{CC}$更短，不过差异较小，也存在少数例外。事实上，实例的尺寸会影响计算时间，随着(r,s)的取值增大，计算时间会显著增加。对于固定尺寸，参数k 似乎不会明显影响计算时间。相反，最优值较高的实例（ $|S|$的值较高）以及不可行实例，计算起来似乎更为耗时。

表5 的结果表明，除四个 $\mathscr{T}$实例（树）外，其余实例均可行。对于$k = 1$，最优值始终为$|S| = 1$；对于大多数$k > 1$实例，最优值也为该值。不过确有例外，尤其是较小的实例：随着k 增大并接近 δ时，情况更是如此。此外，对于 $\delta = k = 6$，有些 $\mathscr{T}$实例被证明不可行，即两个50顶点实例和两个100顶点实例。与 $\mathscr{PC}$和 $\mathscr{CC}$实例类似，计算时间会随图中顶点数增加而增长，但似乎不受参数k的明显影响。考虑到公式涉及的变量和约束数量，求解这些实例所用的时间是合理的。特别是，所有满足$n \in \{50, 100\}$ 的实例均在一小时内求解完成。不过，200顶点实例的计算难度较高，尤其是k取值较大时；但所有实例均在两小时的最大时间限制内求解完成。

如表6所示，所有 $\mathscr{S}$个实例（一般稀疏图），当$n \leq 100$ 时均有可行解，其中大多数实例的最优值为 $|S| = 1$；当 $|S| > 1$时，此类实例的最优值为 $|S| = 2$，即使顶点的度接近k的值也是如此。这似乎表明，对于稀疏图，允许出现圈会降低参数k的影响，

n	δ	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5		k = 6	
		$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	S	CPU	S	CPU
50	6	1	1.9	1	2.9	1, 8	2.3	1, 17	2.6	1, 29	4.1	NF	1.9
	7	1	2.2	1	3.7	1, 8	4.8	1, 11	3.6	1, 15	6.6	1, 44	3.3
	8	1	2.3	1	6.8	1	3.8	1	3.6	1	5.8	31, 44	4.3
	9	1	1.7	1	1.8	1	2.4	1, 6	4.3	1, 15	4.0	4, 16	7.0
	10	1	1.6	1	2.1	1, 3	2.8	1, 7	4.0	1, 6	4.5	3, 19	2.8
	11	1	1.8	1	1.7	1	2.6	1, 8	4.1	1, 12	4.1	34, 11	3.8
	16	1	1.6	1	3.7	1, 5	5.6	1, 4	2.9	3, 3	5.4	1, 2	3.8
	21	1	1.3	1, 5	4.1	1, 4	7.4	3, 4	6.5	2, 3	4.8	1	3.2
100	6	1	56.7	1	76.1	1	107.1	1	98.0	1	132.0	NF	187.3
	11	1	38.4	1	41.7	1	51.2	1	72.4	1, 22	108.4	3, 28	116.1
	15	1	39.2	1	65.0	1	71.8	1, 2	78.5	1	122.3	1	106.8
	21	1	35.5	1, 3	100.7	1, 2	93.7	1, 3	66.6	1	77.7	1	89.2
	26	1	24.5	2, 6	124.9	1, 5	89.0	1, 4	69.5	1, 3	54.8	1, 2	43.6
200	6	1	2553.0	1	3105.3	1	3321.2	1	4244.3	1	4266.2	1	3009.4
	7	1	2504.5	1	2996.5	1	3387.3	1	3871.3	1	4388.2	1, 3	4498.7
	8	1	2186.9	1	2332.7	1	3641.4	1	3173.5	1, 19	4972.6	1, 44	4208.0
	9	1	2117.2	1	2254.3	1	3029.4	1	3089.9	1	4402.9	1	4112.6
	10	1	2149.2	1	2644.2	1	2572.8	1	3251.9	1	3418.3	1	3596.4
	11	1	2240.4	1	2828.9	1	2429.5	1	4479.9	1	3774.2	1, 2	3873.7
	16	1	1290.5	2, 3	3366.2	1, 2	2052.0	1	1935.2	1	1716.2	1	2334.9
	21	1	1679.0	1, 3	3080.6	1, 2	2960.4	1, 2	2857.9	1	2845.5	1	2426.5
	26	1	1124.2	1, 2	2305.0	1	1840.1	3	3270.9	2	1720.9	1	2199.7

表5. $\mathscr{T}$实例结果汇总：具有 n 个顶点且顶点度为 δ 的树。

并有助于找到可行解，至少在 $n \leq 100$ 时如此。然而，对于五个 $n = 200$ 的实例，未找到可行解。其中四个实例达到了时间限制，因此无法确定这些实例是否不存在可行解；不过这似乎不太可能，因为在大多数情况下，优化过程早期就能找到可行解（不一定是最优解）。对于第五个实例（参数为 $\delta = 25$ 且 $k = 6$），优化过程以 S = /0 终止，从而证明该实例不存在可行解。总体而言，与参数值相同的 $\mathscr{T}$ 个实例相比，这些实例的计算时间更长；随着顶点数增加，这种差异也愈发明显。具体而言，九个 $n = 200$ 的实例在两小时的时限内未能证明其最优性。这些实例中有五个在时限内找到了可行解，另外四个则在允许的计算时间内未能找到可行解。表7显示，$\mathscr{D}$ 个实例（一般稠密图）也呈现出类似的情况。除两个实例外，其余实例均有可行解；在这两个未能找到可行解的实例中，计算均达到了时间限制。现在可以观察到，尽管某些情况下 $|S| = 1$，但大多数实例的最优值为 $|S| = 2$，且某些情况下$|S| = 3$。求解 $\mathscr{D}$ 个实例所需的计算时间与求解 $\mathscr{S}$ 个实例所需的时间处于同一范围。这可以解释为，公式 F^A 的变量和约束数量取决于图的顶点数，但不取决于边数。

n	δ	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5		k = 6	
		$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	S	CPU	S	CPU
50	6	1	10.5	1	1.6	1	6.6	1	1.9	1	1.5	1	0.9
	11	1	14.0	1	4.6	1	0.9	1	4.6	1	1.1	1	1.0
100	6	1	130.60	1	75.17	1	116.3	1, 2	230.4	1	51.6	1	136.9
	11	2	202.3	2	212.27	2	197.9	2	171.3	2	177.4	2	640.8
	16	1, 2	125.4	1	90.0	1	75.7	1	76.7	1	21.0	1	55.8
	21	1	119.7	1	43.40	1, 2	105.7	2	104.5	1, 2	73.3	2	74.9
200	6	1, 2	3075.6, TL	2	6481.5	2	TL, 5482.6	2	TL, 6816.6	1	1931.7	1	3222.6
	11	1	2283.3	1	2511.5	1	1636.4	1	4519.4	1, NF	2490.3, TL	NF	TL
	16	2	4151.5	2	TL, 4658.7	2	4549.2	2	3520.1	2	3958.5	2	3793.7
	21	2	3489.5	2	2864.1	2	3286.7	2	2394.2	2	2530。	1, NF	TL
	26	1	3817.8	1	1293.2	1	1403.3	1	871.9	1	884.5	NF, 1	891.1

Ta表 6。 $\mathscr{S}$实例的结果汇总：具有 n 个顶点且顶点度为 δ 的稀疏图 .

另一方面，为了进一步分析（k-ARS）以及参数 k 对实例可行性和最优值的影响，我们进行了最后一系列实验，求解了从 $k = 1$ 开始、取值逐渐增大的 k 所对应的实例。此次我们使用了 $\mathscr{T}$、$\mathscr{S}$和 $\mathscr{D}$实例，其中 $n = 100$。对每个实例，我们都针对参数 k 的不同取值进行求解，$1 \leq k \leq \min\{\delta, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$。

表 8 汇总了树实例上获得的结果 $\mathscr{T}$，而表 9-11 汇总了实例上的结果 $\mathscr{S}$和 $\mathscr{D}$。

表 8 中列出的实现结果表明，在树中始终可以存在 k-ARS，具体而言，

n	δ	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5		k = 6	
		$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	$\|S\|$	CPU	S	CPU	S	CPU
50	25	1	4.1	1	5.3	1	2.4	1	1.4	1	1.1	1	2.7
	30	1	26.9	2	10.3	2	13.4	2	10.0	2	11.4	2	12.2
	40	3	71.2	2, 3	74.2	2	25.4	2	26.4	2	16.8	2	20.3
	45	2	22.8	2	17.8	2	18.7	2	20.3	2	15.2	2	17.5
100	75	2	17.6	2	12.1	2	14.4	1	3.6	1	0.9	1	2.9
	80	2	2461.8	2, 3	1072.3	2	1198.8	2, 3	679.6	2	406.6	2	615.2
	85	2	657.4	2	478.0	2	375.0	2	249.8	2	219.1	2	202.7
	90	2	320.0	2	205.4	2	189.0	2	174.5	2	205.9	2	142.9
	95	2	121.8	2	205.7	2	156.6	2	130.5	2	180.4	2	168.9
200	175	2, 3	TL	2	4790.1, TL	2	TL, 3715.2	2	TL, 2961.7	2	2280.1	2	2088.5
	180	2	3553.4	2	1202.9	2	1217.9	2	TL, 1095.5	2	TL, 1239.8	2	2065.7
	185	2	3553.4	2	1202.9	2	1217.9	2	TL, 1095.5	2	TL, 1239.8	2	2065.7
	190	2	1574.8	2	1598.3	2	2222.7	2	TL, 1719.1	2	2125.3	NF	TL, TL
	195	2	1201.7	2	1216.2	2	2759.8	1	2275.7	1	1281.2	1	1389.5

表7。 $\mathscr{D}$实例结果汇总：具有 n 个顶点且度为 δ 的稠密图。

k	δ = 6 $\|S\|$	δ = 11 $\|S\|$	δ = 16 $\|S\|$	δ = 21 $\|S\|$	δ = 26 $\|S\|$
1				1	1
2		1	1	3, 1	2, 6
3	1			2, 1	1, 5
4			2, 1	1, 3	1, 4
5		1, 22		1	1, 3
6		3, 28	1	1	2, 1
7		1, 27		2, 37	1
8		1, 35		1, 26	1, 19
9		72, 34	4, 6	1, 36	3, 18
10		90, 80	3, 5	59, 35	2, 17
11		NF	2, 4	72, 34	1, 16
12			1	71, 45	1, 15
13			3, 50	70, 57	63, 27
14			2, NF	69, 71	62, 40
15			1, NF	85, 70	61, 60
16				84, NF	60, 59
17				83, NF	59, 58
18				NF	82, 57
19				NF	81,56
20					80, 55
21					79, 54
22					78
23					77
24					76
25					NF, 75

表8。 $\mathscr{T}$实例在 δ 和 k 取不同值时的最优值。

对于 k 从 1 到能够给出可行解的最大值之间的每一个取值，均是如此。这证实了 [3]中关于树中存在 k-ARS 的理论结果。另一方面，表 9 和 10 所示的对一般图（包括稀疏图和稠密图）进行的实验表明，当图不是树时， k-ARS 的存在并不总能得到保证。值得注意的是，对于若干个小于可能的最大 k 值的 k，不存在可行解。

5.1 随机生成图达到的$(k\ \ell)$-匿名性

本节各表中呈现的计算结果表明，总体而言，在假设存在一个或两个攻击者顶点（$\ell = 1$ 或 $\ell = 2$）的情况下，随机生成图通常针对其隐私的主动攻击所提供的安全性较低。具体而言，我们得出以下结论。

- 属于 $\mathscr{T}$实例的树仅满足 (1, 1)-匿名性。
- 属于 $\mathscr{S}$实例的一般稀疏图有时满足 (1,1)-匿名性（通常是在图的阶较小时），有时满足 (2, 1)-匿名性（图的阶较大时更为常见）。
- 对于属于 $\mathscr{D}$实例的一般稠密图，只有极少数情况存在某个 k 值，使得 $\mathrm{adim}_k(G) \leq 1$。这可能表明，此类图在抵御主动攻击方面具有更高的安全性。对于这类稠密图，我们观察到，它们通常满足 (1,2)-匿名性，即攻击者至少需要控制此类图中的两个顶点才有可能取得一定成效。

$\delta = 11$				$\delta = 22$				$\delta = 26$			
实例 1		实例 2		实例 1		实例 2		实例 1		实例 2	
k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$
[1, 9]	2	[1, 9]	2	[1, 9]	2	[1, 3]	1	[1, 2]	1	[1, 12]	2
10	1	10	1	[10, 13]	1	4	2	[3, 12]	2	13	1
>10	NF	>10	NF	14	NF	5	1	[13, 15]	1	[14, 24]	NF
				15	1	[6, 9]	2	16	NF	[25, 26]	1
				[16, 17]	NF	[10, 14]	1	[17, 21]	1	>26	NF
				18	1	15	NF	22	NF		
				19	2	16	1	23	1		
				20	1	[17, 18]	NF	24	2		
				>20	NF	19	2	[25, 26]	1		
						20	1	>26	NF		
						>20	NF				

表 9. $\mathscr{S}$实例在不同 δ 和 k 值下的最优值。

$\delta = 75$				$\delta = 80$				$\delta = 85$			
实例 1		实例 2		实例 1		实例 2		实例 1		实例 2	
k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$
1	3	[1, 2]	3	[1, 18]	2	[1, 19]	2	[1, 13]	2	[1, 13]	2
[2,3]	2	[3, 23]	2	[19, 21]	1	[20, 22]	1	[14, 32]	1	[14, 15]	1
4	3	24	1	22	NF	23	NF	>32	NF	16	2
[5,24]	2	25	NF	[23, 27]	1	[24, 33]	1			[17, 33]	1
[25,30]	1	[26, 28]	1	28	NF	>33	NF				
31	NF	29	NF	[29, 33]	1						
[32,33]	1	30	1	>33	NF						
[34,47]	2	[31, 32]	NF								
[48,50]	NF	33	1								
		[34, 45]	2								
		>45	NF								

表10. $\mathscr{D}$实例在 $\delta \in \{75, 80, 85\}$ 及不同 k 值下的最优值。

最后一项的结果与稠密图的特征一致：稠密图通常具有较小的直径和近似对称结构，这与二维汉明图类似；已有研究证明，二维汉明图在隐私方面具有最高的安全属性。

6 结论

本研究考察了如何评估两类网络的 (k ℓ)-匿名性度量。第一类网络由具有预定结构的图组成，即圆柱图、环面图和二维汉明图；第二类网络则由随机生成图组成。这两类网络的共同特点是均为正则图或近正则图。为进行评估，我们研究了所考察网络的 k-反解析集和 k-度量反维数。后者是一个组合参数，在图论中本身也具有研究价值。

本研究的主要贡献如下：

1. 关于圆柱图、环面图和二维海明图：

   - 我们找到了 k-ARS 存在时 k 的最大可能值。
   - 我们计算出了 k-ARS 存在时相应 k 值下 k-度量反维数的精确值，并证明了当此类 k-ARS 不存在时的情形。
   - 我们根据所研究的隐私度量阐述了其 (k ℓ)-匿名性。

总之，我们发现圆柱图和环面图的隐私性较低，与之相反，二维海明图表现出较高的隐私性。这似乎主要归因于这类图具有高度对称的结构，且直径为二。

$\delta = 90$				$\delta = 95$			
实例 1		实例 2		实例 1		实例 2	
k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$	k	$\lvert S\rvert$
[1, 8]	2	[1, 8]	2	[1, 3]	2	[1, 3]	2
[9,22]	1	[9, 23]	1	[4, 11]	1	[4, 11]	1
>22	NF	>23	NF	12	NF	>11	NF
				13	1		
				[14, 24]	NF		
				25	4		
				>25	NF		

表 11. $\mathscr{D}$实例 $\delta \in \{90,95\}$ 在 k 取不同值时的最优值。

2. 我们提出了一种整数规划公式，用于求给定图 G 的 k-度量反维数。该公式可用于处理随机生成图，也可用于研究其 k-度量反维数尚无理论结果的图类。

- 我们通过对先前从理论角度研究过的圆柱图和环面图实施该公式，对其进行了验证。

- 使用该公式，我们计算了随机生成的树以及随机生成的一般图（包括稀疏图和稠密图）的k-度量反维数。对于所有生成的实例，我们都求解了 (k-MAD) 和 (k-ARS)。

- 根据实现结果，我们评估了受测图所满足的 (k ℓ)-匿名性。

结果表明，随机树和一般稀疏图的隐私属性较弱，而随机生成的一般稠密图则表现出更强的隐私属性。与二维汉明图类似，这可能是因为稠密图比其他图具有更多“近似对称”的属性，而且直观上其直径也应该较小。

作为关于 (k ℓ)-匿名性的总体结论，似乎隐私属性较强的图具有更多的 re
对称性、更大的度以及 更小的直径。

未来研究的可能方向如下：

- 从图论的角度对笛卡尔积图及其他相关乘积图的 k-度量反维数进行一般性研究。这将扩展我们关于圆柱图、环面图和二维汉明图的贡献。
- 深入研究高隐私指标与具有较大度和较小直径（相对于其阶）的图的对称性之间的关系。

- 研究计算树的 k-度量反维数的复杂度。也就是说，给定任意整数 k 和一棵树 T，是否能在多项式时间内求得 adim$_k$(T)？请注意，该值的存在性已经得到保证（见 [3]）。
- 将整数规划公式的实现应用于真实社交网络，以评估其实际隐私特性。

致谢

作者得到西班牙国家研究署和欧洲区域发展基金（ERDF）通过 MINECO PID 项目 MTM2019-105824GB-I00 提供的部分资助，以及 Plan Propio - UCA 2022-2023 计划的资助。此外，第二作者（Dorota Kuziak）在 Rovira i Virgili 大学进行短期访问期间完成了本研究，此次访问获得了“2021-2023 年西班牙大学体系再资格化援助计划，根据第289/2021号皇家法令（2021年4月20日）实施”的支持。

作者贡献声明

所有作者对本研究的贡献均相同。

补充信息

作者不存在任何利益冲突。

参考文献

ˇ1. Cangalovi´c, M., Kovaˇcevi´c-Vujˇci´c, V., and Kratica, J. (2018). 轮图和网格图的 k-度量反维数。第十三届巴尔干运筹学会议论文集，贝尔格莱德，塞尔维亚。ISBN：978-86-80593-64-7。 2. Chatterjee, T., DasGupta, B., Mobasheri, N., Srinivasan, V., and Yero, I. G. (2019). 主动攻击下大型网络隐私度量相关三个问题的计算复杂度，理论计算机科学 775, 53–67。 3. DasGupta, B., Mobasheri, N., and Yero, I. G. (2019). 主动攻击下社交网络隐私度量的分析与评估，信息科学 473, 87–100。 4. Hammack, R. H., Imrich, W., and Klavžar, S. (2011). 乘积图手册（第2卷）。博卡拉顿：CRC出版社。纽约。 5. Kuziak, D., and Yero, I. G. (2021). 图中的度量维数相关参数：组合、计算和应用结果综述。arXiv预印本 arXiv:2107.04877。 6. Kratica, J., Kovaˇceviˇc-Vujˇci´c,V., and ˇCangalovi´c, M. (2019). 若干广义彼得森图的 k-度量反维数，Filomat 33(13), 4085–4093。 7. Mauw, S., Ramírez-Cruz, Y., and Trujillo-Rasua, R. (2019). 主动攻击下社交图的条件邻接匿名性，知识与信息系统 61(1), 485–511。 8. Mauw, S., Ramírez-Cruz, Y., and Trujillo-Rasua, R. (2018). 存在主动攻击者时社交图的匿名化。数据隐私汇刊 11(2), 169–198。 9. Tang, J. H., Noreen, T., Salman, M., Rehman, M. U., and Liu, J. B. (2021). 基于 k-度量反维数度量的轮图相关社交图中的 (k ℓ)-匿名性，数学杂志，第2021卷，文章编号8038253。 10. Trujillo-Rasua, R., and Yero, I. G. (2016). 1- 度量反维数树和单圈图的刻画，计算机杂志 59(8), 1264–1273。 11. Trujillo-Rasúa, R., and Yero, I. G. (2016). k-度量反维数：社交图的一种隐私度量，信息科学 328, 403–417。 12. Xpress。Fico® xpress 求解器。https://www.fico.com/es/products/fico-xpress-solver。访问日期：2020-11-10。 13. Zhang, C., and Gao, Y. (2017). 关于 k-度量反维数问题的复杂度以及随机图中 k-度量反解析集的大小。载于国际计算与组合学会议（第555–567页）。Springer，Cham。

附录

接下来，我们给出第3节中所述结果的证明。这些证明的结构大致相似。首先，我们给出给定顶点集要成为给定图的k-ARS 所必须满足的条件。然后，通过构造具有所需基数的k-ARS 来完成计算，从而得到精确值。在此过程中，我们会用到以下简单结果。

备注 6.1. *[11]* 如果图 G 的最大度为 Δ，那么它是某个 $k \leq \Delta$ 的 k-度量反维图。

命题的证明 3.1

(i) 考虑一个圆柱图 $P_r\square C_s$，其中 $r \geq 2$ 且 $s \geq 3$。由于 $P_r\square C_s$ 的最大度为 4（除非 $r = 2$，此时它是 3-正则图），根据备注 6.1，它必定是某个 k-度量反维数图，其中 $k \leq 4$（或者 $k \leq 3$，当 $r = 2$ 时）。我们分析以下情况。

- r、s 为奇数。注意，$S_1 = \{(u(r+1)/2, v0)\}$ 中的顶点有四个离心顶点，分别为 $(u1, v(s-1)/2)$、$(u1, v(s+1)/2)$、$(ur,v(s-1)/2)$ 和 $(ur,v(s+1)/2)$，并且它们在 $\mathscr{Z}S1$ 中构成一个等价类。注意，Pr□Cs 的顶点集可以划分为 S1、X1、...、Xq，其中 Xi （$i \in \{1,\ldots,q\}$）由所有与 S1 中顶点距离为 i 的顶点构成，且 q 是 $(u(r+1)/2, v0)$ 的离心率。此外，对于任意给定的顶点，在排除第一个顶点的情况下，$(u(r+1)/2, v0)$ 与 $(u1, v(s-1)/2)$、$(u1, v(s+1)/2)$、$(ur,v(s-1)/2)$ 和 $(ur,v(s+1)/2)$ 之间至少存在四条不相交路径，使得其中一条路径经过该给定顶点。基于上述事实，可以观察到，$\mathscr{Z}S1$ 中的任何等价类的基数至少为四（这些类恰好是 X1、...、Xq）。因此，S1 是一个 4-ARS。由于 Pr□Cs 的最大度为四，我们推得，当 r、s 为奇数时，Pr□Cs 是 4-度量反维数的。

  我们指出，关于由中心顶点定义的类的大小的这段讨论，可以推广到任意网格图或环面。以下证明中将多次用到这一事实。

- s为偶数。若$r = 2$，则$P_r\square C_s$ 的最大度为三。因此，类似于上文所述的论证可得，集合$S_2 = \{(u1, v0), (u2,v_{s/2})\}$是一个3-ARS。因此，在这种情况下，$P_2\square C_s$是3-度量反维的。从现在起，设$r \geq 3$，并令$S_3 = \{(u1, v0),(u_r, v_{s/2})\}$。可以看出，S3是一个3-ARS，这意味着对于某个$k \geq 3$，$P_r\square C_s$是k-度量反维的。

  现在，假设$P_r\square C_s$ 包含一个4-ARS（数量不可能更多，因为$P_r\square C_s$ 的最大度为四）。我们分两种情况讨论。

  情形 1：r 为偶数。首先注意，$P_r\square C_s$中的任意顶点 $x = (u_i,v\,j)$ 都有唯一的离心顶点。因此，若要寻找一个 4-ARS 集合 A，且 $x \in A$，则它唯一的离心顶点也必须属于 A。$(u_i,v\,j)$ 的离心顶点是 $(u_1,v\,j+s/2)$ 或 $(u_r, v\,j+s/2)$，不妨设为 $(u_r, v\,j+s/2)$（这可由 $P_r\square C_s$ 的对称性假设得到）。因此，$(u_r,v\,j+s/2)$ 也属于 A。但由于顶点 $(u_r, v\,j+s/2)$ 的度为三，我们可得：要么集合 A 不是 4-ARS，这与假设矛盾；要么 $(u_r,v\,j+s/2)$ 的所有邻点都属于 A。后一种情况意味着，对应于 u_r 的 C_s 副本中的所有顶点也都必须属于 A；这同样矛盾，因为这样的 A 不是 4-ARS。

  情形 2：r 为奇数。证明与情形 1 相对类似，但需要指出，除非 x 等于 $(u^{(r+1)/2}, v\,j)$（其中任意 $j \in \{0,\ldots,s-1\}$），否则 $P_r\square C_s$ 的任意顶点 x 都有唯一的离心顶点。如果上文考虑的顶点 $(u_i, v\,j) \in A$ 满足 $i \neq (r+1)/2$，那么情形 1 中的论证同样适用，并可得到相同的结论。因此，假设 $i = (r+1)/2$。于是，$(u_i, v\,j)$ 有两个离心顶点，分别为 $(u_1,v\,j+s/2)$ 和 $(u_r, v\,j+s/2)$。因此，$(u_1,v\,j+s/2)$、$(u_r, v\,j+s/2)$ 也必属于 A。但由于顶点 $(u_r, v\,j+s/2)$、$(u_1,v\,j+s/2)$ 的度为三，要么集合 A 不是 4-ARS，这再次与假设矛盾；要么如情形 1 中那样，对应于 u_1,u_r 的 C_s 的各个副本中的所有顶点也都必须属于 A，而这再次导致矛盾，因为这样的 A 不是 4-ARS。

  Ther因此，上述两种情况都可得出：当 r 为偶数时，$P_r\square C_s$ 是 3-度量反维。 en.

- s 为奇数且 r 为偶数。首先注意到，$P_r\square C_s$ 中的任意单个顶点都有两个离心顶点，并构成一个 2-ARS。因此，在这种情况下，$P_r\square C_s$ 对某个 k 而言是 k-度量反维数的。假设 $P_r\square C_s$ 包含某个 k-ARS。

  设 S_4 是 k-ARS，且 $k \geq 3$，并设 $(u_i, v\,j) \in S_4$。基于上述理由，$(u_i, v\,j)$ 的两个离心顶点也必须属于 S_4。根据 $P_r\square C_s$ 的对称性，不失一般性，可设这两个顶点为 $(u_r, v\,j+(s-1)/2)$ 和 $(u_r, v\,j+(s+1)/2)$（这也基于 r 为偶数这一事实）。这立即意味着 S_4 不可能是 4-ARS，因为顶点 $(u_r, v\,j+(s-1)/2)$ 和 $(u_r, v\,j+(s+1)/2)$ 的度为三，并且可以采用与上述情形1和情形2类似的过程。另一方面，由于 $(u_r, v\,j+(s-1)/2)$ 和 $(u_r, v\,j+(s+1)/2)$ 属于 S_4,，因此 $(u_1,v\,j-1)$、$(u_1,v\,j)$ 和 $(u_1,v\,j+1)$ 也必须属于 S_4。基于同样的理由，$(u_r, v\,j+(s-1)/2-1)$ 和 $(u_r, v\,j+(s+1)/2+1)$ 也必须属于 S_4。这一论证将得出结论：所有顶点 (u_1,v_ℓ) 和 (u_r, v_ℓ)，其中 $\ell \in \{0,s-1\}$，都必须属于 S_4。然而，这样的集合只是一个 1-ARS，这与之矛盾。因此，当 r 为偶数且 s 为奇数时，$P_r\square C_s$是 2-度量反维数。

(ii) 考虑一个环面 $C_r \square C_s$，其中 r，$s \geq 3$。由于 $C_r \square C_s$ 是 4-正则的，根据备注 6.1，它必定是某个 k-度量反维数，其中 $k \leq 4$。

- 若 r 和 s 均为偶数，则考虑 C_r 的两个直径顶点 u0 和 $u_{r/2}$，以及 C_s 的两个直径顶点 v0 和 $v_{s/2}$。注意，$\{u0, u_{r/2}\}$ 构成 C_r 的一个 2-ARS，$\{v0, v_{s/2}\}$ 也构成 C_s 的一个 2-ARS。容易看出，两个顶点 (u0, v0) 和 $(u_{r/2}, v_{s/2})$ 构成 $C_r \square C_s$ 的一个 4-ARS。
- 若 r 和 s 均为奇数，则顶点 u0 和 v0 分别构成 C_r 和 C_s 的 2-ARS。因此可以看出，顶点 (u0, v0) 构成 $C_r \square C_s$ 的一个 4-ARS。
- 剩下需要考虑 r 和 s 奇偶性不同的情形。假设 r 为偶数而 s 为奇数。因此，对于任意顶点 $(u_i, v_j) \in V(C_r \square C_s)$，恰有两个直径顶点，因此该顶点仅构成 $C_r \square C_s$ 的一个 2-ARS。因此，若要构造 $C_r \square C_s$ 的 k-ARS S，且 $k \geq 3$，则需要考虑一个基数大于 1 的集合。然而，在这种情况下，总会存在一个等价类 $Z_i \in \mathscr{Z}_S$，其基数至多为 2，因为对于任意顶点 $(u_i, v_j) \in V(C_r \square C_s)$，$C_r \square C_s$ 中恰有两个直径顶点。这证明 $C_r \square C_s$ 是 2-度量反维数的。

(iii) 考虑一个二维汉明图 $K_r \square K_r$，其中 $k \geq 4$。注意，$K_r \square K_r$ 是 $(2r-2)$-正则图。因此，由备注 6.1 可知，它对于某个 $k \leq 2r-2$ 是 k-度量反维图，并且不难验证，$K_r \square K_r$ 中的任意顶点都构成一个 $(2r-2)$-ARS。 □

定理证明3.2

下面说明，对于每个整数 $r \geq 2$ 和 $s \geq 3$，

$$\operatorname{adim}_k(P_r \square C_s) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 4 \text{ and } r,s \text{ are odd,} \\ 2, & \text{if } k = 3 \text{ and } s \text{ is even,} \\ +\infty, & \text{if } k = 3 \text{ and } r,s \text{ are odd,} \\ 1, & \text{if } k = 2 \text{ and } r,s \text{ are not both even,} \\ 4, & \text{if } k = 2 \text{ and } r,s \text{ are even,} \\ 2, & \text{if } k = 1 \text{ and } s \text{ is odd,} \\ 1, & \text{if } k = 1 \text{ and } s \text{ is even.} \end{cases}$$

根据 k 的可能取值，我们将论证分为四种情况，以便计算 $\operatorname{adim}_k(P_r \square C_s)$。

情形 $k = 4$：我们只需考虑 r、s 均为奇数的情况。由于任意单个顶点 $(u_{(r+1)/2}, v_j)$（其中 $j \in \{0, \ldots, s-1\}$）都构成一个 4-ARS，因此显然 $\operatorname{adim}_4(P_r \square C_s) = 1$。

情形 $k = 3$：若 s 为偶数，则对于 $P_r \square C_s$ 的任意顶点 (u_i, v_j)，恰有一个离心顶点；除非 r 为奇数且 $i = (r+1)/2$，此时 (u_i, v_j) 恰有两个离心顶点。因此，任意单个顶点都构成 $P_r \square C_s$ 的 k-ARS，且 $k \leq 2$，故 $\operatorname{adim}_3(P_r \square C_s) \geq 2$。另一方面，考虑集合 $S_1 = \{(u_0, v_1), (u_r, v_{s/2})\}$（两个直径顶点）。注意，在 $\mathscr{Z}_{S_1}$ 中有两个基数为 3 的类：一个由 (u_0, v_1) 的三个邻点组成，另一个由 $(u_r, v_{s/2})\}$ 的三个邻点组成。现在，$P_r \square C_s$ 的结构表明，$P_r \square C_s$ 的每个顶点都属于连接 (u_0, v_1) 与 $(u_r, v_{s/2})$ 的一条直径路径，因此，到 (u_0, v_1) 距离相同的顶点，到 $(u_r, v_{s/2})$ 的距离也相同。这意味着，$\mathscr{Z}_{S_1}$ 的任何其他剩余类（如果存在）基数至少为 4。因此，S_1 是 $P_r \square C_s$ 的一个 3-ARS，故 $\operatorname{adim}_3(P_r \square C_s) = 2$。

接下来，设 r、s 为奇数。如前所述，任何单个顶点 $(u_{(r+1)/2}, v_j)$（其中 $j \in \{0, \ldots, s-1\}$）都构成一个 4-ARS，而任何其他不同的顶点都构成一个 2-ARS。因此，若存在 3-ARS，这样的集合基数至少为 2。设 S_2 是这样的集合。若 $S_2 \subseteq (\{u_{(r+1)/2}\} \times V(C_s))$，我们很容易看出 S_2 不是 3-ARS。因此，考虑一个顶点 $(u_i, v_j) \in S_2$，其中 $j \neq (r+1)/2$。由于 (u_i, v_j) 有两个离心顶点，不妨设为 $(u_r, v_{j+(s-1)/2})$ 和 $(u_r, v_{j+(s+1)/2})$。利用命题 3.1 (i) 的证明中相同的论证，我们可以推得，所有顶点 (u_1, v_ℓ) 和 (u_r, v_ℓ)（其中 $\ell \in \{0, s-1\}$）都必须属于 S_2。然而，这样的集合只是一个 1-ARS，这就产生了矛盾。因此，当 r、s 为奇数时，$P_r \square C_s$ 中不存在 3-ARSs。

情形 $k = 2$：若 r、s 均为偶数，则每个顶点恰有一个离心顶点，且它只构成一个 1-ARS。因此，$\operatorname{adim}_2(P_r \square C_s) \geq 2$。设 S_3 为一个 2-ARB。还需注意，若某个顶点 $(u_i, v_j) \in S_3$，，则它的离心顶点也必在 S_2 中。这意味着，若 $\operatorname{adim}_2(P_r \square C_s) = 2$，则 S_3 由 $P_r \square C_s$的两个直径顶点构成。然而，正如在 $k = 3$的情形中所证明的，这样的集合在 $P_r \square C_s$中是一个 3-ARSs，这是不可能的。因此 $\operatorname{adim}_2(P_r \square C_s) \geq 3$。设 $|S_3| = \operatorname{adim}_2(P_r \square C_s) = 3$。基于相同理由（离心顶点的唯一性），$S_3$不可能是仅由 $\{u_1, u_r\} \times V(C_s)$中的顶点构成的子集。取 $(u_i, v_j) \in S_3$，使得 $i \neq 1, r$。因此，其离心顶点不失一般性地记为 $(u_r, v_{j+s/2})$，也属于 S_3。此外，

$(u_r, v_{j+s/2})$ 的离心顶点 (u_1, v_j) 也在 S_3,中，即 $S_3 = \{$包含 (u_i, v_j)、$(u_r, v_{j+s/2})$、$(u_1, v_j)\}$。然而，在这种情况下，顶点 $(u_1, v_{j+s/2})$ 在 $\mathscr{Z}_{S_3}$ 中构成一个基数为 1 的等价类，这是不可能的。因此，$\mathrm{adim}_2(P_r \square C_s) \geq 4$。为证明等式成立，我们考虑集合 $S_4 = \{(u_1, v_0)$ 、 (u_1, v_1)、$(u_r, v^{s/2})$、$(u_r, v^{s/2+1})\}$。注意，在 $\mathscr{Z}_{S_4}$ 中有四个基数为 2 的等价类，它们分别是 (u_1, v_0)、(u_1, v_1)、$(u_r, v^{s/2})$、$(u_r, v^{s/2+1})$ 不属于 S_4时的邻居。此外， $\mathscr{Z}_{S_4}$ 中的任何其他等价类的基数至少为 2。因此，S_4 是一个 2-ARS，从而完成本情形的证明。

接下来假设 r、s 不全为偶数。如果 s 为奇数，则容易看出，顶点 (u_1, v_0) 构成一个 2-ARS，因此 $\mathrm{adim}_2(P_r \square C_s) = 1$。此外，如果 s 为偶数，则 r 必为奇数。因此，同样容易看出，顶点 $(u^{(r+1)/2}, v_0)$ 构成一个 2-ARS，从而 $\mathrm{adim}_2(P_r \square C_s) = 1$。

情形 k = 1: 如果 s 为偶数，则顶点 (u_1, v_0) 构成一个 1-ARS，因此 $\mathrm{adim}_1(P_r \square C_s) = 1$。另一方面，如果 s 为奇数，则 $P_r \square C_s$ 中的任意单个顶点均为 2-ARS 或 4-ARS。因此，$\mathrm{adim}_1(P_r \square C_s) \geq 2$。为证明等式成立，只需注意到由两个相邻顶点 (u_1, v_0) 和 (u_1, v_1) 构成的集合是一个 1-ARS，由此可得 $\mathrm{adim}_1(P_r \square C_s) = 2$。

定理 3.3的证明

我们来证明，对于任意两个整数 r、s ≥ 3,

$$\mathrm{adim}_k(C_r \square C_s) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 4 \text{ and } r, s \text{ are odd,} \\ 2, & \text{if } k = 4 \text{ and } r, s \text{ are even,} \\ 4, & \text{if } k = 3 \text{ and } r, s \text{ are even,} \\ +\infty, & \text{if } k = 3 \text{ and } r, s \text{ are odd,} \\ 1, & \text{if } k = 2 \text{ and } r, s \text{ have distinct parity,} \\ 4, & \text{if } k = 2 \text{ and } r, s \text{ are even,} \\ \min\{r, s\}, & \text{if } k = 2 \text{ and } r, s \text{ are odd,} \\ 1, & \text{if } k = 1 \text{ and } r, s \text{ are even,} \\ 2, & \text{if } k = 1 \text{ and } r, s \text{ are not both even.} \end{cases}$$

与定理 3.2的证明类似，我们再次将论述分为四种情况。

情形 k = 4: 假设 r、s 为奇数。因此，可以直接观察到，$C_r \square C_s$ 中的任意顶点都是一个 4-ARS，这意味着 $\mathrm{adim}_4(C_r \square C_s) = 1$。另一方面，如果 r、s 为偶数，则我们考虑任意顶点 (u_i, v_j) 及其在 $C_r \square C_s$中的唯一直径顶点。容易观察到，这两个顶点构成一个 4-ARS。由于 $C_r \square C_s$ 中的任意单个顶点仅构成一个 1-ARS（当 r、s 为偶数时），因此可得 $\mathrm{adim}_4(C_r \square C_s) = 2$。

情形 k = 3: 令 r、s 为偶数。由于 $C_r \square C_s$ 中的任意单个顶点都有唯一的直径顶点，因此它仅构成一个 1-ARS。因此，如果顶点 (u_i, v_j) 属于 $C_r \square C_s$的某个 3-ARS，那么其唯一的直径顶点也属于该集合，从而 $\mathrm{adim}_3(C_r \square C_s) \geq 2$。此外，注意到 $\mathrm{adim}_3(C_r \square C_s) = 2$ 是不可能的，因为当 r 、 s 为偶数时，$C_r \square C_s$ 中的任意两个直径顶点构成 $C_r \square C_s$ 的一个 4-ARS。因此，$\mathrm{adim}_3(C_r \square C_s) \geq 3$。另外，基于同样的原因以及 $C_r \square C_s$的结构，$\mathrm{adim}_3(C_r \square C_s) = 3$是不可能的，因此 $\mathrm{adim}_k(C_r \square C_s) \geq 4$。考虑集合 $S = \{(u_0, v_0), (u_0, v_1), (u^{r/2}, v^{s/2}), (u^{r/2}, v^{s/2+1})\}$。注意，$(u_0, v_0)$, $(u^{r/2}, v^{s/2})$ 是直径顶点，同样 (u_0, v_1), $(u^{r/2}, v^{s/2+1})$ 也是直径顶点。我们将考虑$\mathscr{Z}_S$的等价类。其中四个如下，即其顶点与集合 S 中的顶点相邻的那些类。

$$Z^1 = \{(u_0, v_{s-1}), (u_1, v_0), (u_{r-1}, v_0)\}$$
$$Z^2 = \{(u_0, v_2), (u_1, v_1), (u_{r-1}, v_1)\}$$
$$Z^3 = \{(u_{r/2}, v_{s/2-1}), (u_{r/2+1}, v_{s/2}), (u_{r/2-1}, v_{s/2})\}$$
$$Z^4 = \{(u_{r/2}, v_{s/2+2}), (u_{r/2+1}, v_{s/2+1}), (u_{r/2-1}, v_{s/2+1})\}$$

注意到这四个类的基数均为 3。此外，根据 $C_r \square C_s$ 的结构，由于 (u_0, v_0)、$(u^{r/2}, v^{s/2})$ 以及 (u_0, v_1)、$(u^{r/2}, v^{s/2+1})$ 都是直径对，因此 $\mathscr{Z}_S$ 的其余类（如果存在）基数至少为 4。由此，S 是 $C_r \square C_s$ 的一个 3-ARS，从而得到所需的等式 $\mathrm{adim}_3(C_r \square C_s) = 4$。

接下来假设 r、s 均为奇数。设 S 是 $C_r \square C_s$ 的一个 3-ARS，且 $(u_i, v_j) \in S$。由于 r、s 均为奇数，顶点 (u_i, v_j) 有 4 个直径顶点，它们要么构成 $\mathscr{Z}_S$ 的一个完整等价类，要么其中一部分构成 $\mathscr{Z}_S$ 的一个完整等价类，要么它们全部都属于 S。第一种情况不可能发生，因为在 $C_r \square C_s$ 中，除 (u_i, v_j) 外，没有其他顶点到这 4 个顶点的距离都相同。第二种情况只能是恰好有三个顶点构成 $\mathscr{Z}_S$ 的一个完整等价类。也就是说，这些顶点中恰好有一个属于 S，不妨设为 $(u_{i'}, v_{j'})$。然而，在其余三个与 (u_i, v_j) 互为直径顶点的顶点中，只有两个到 $(u_{i'}, v_{j'})$ 的距离相同。因此，S 只能是一个 2-ARS，这不可能。由此可知，(u_i, v_j) 的 4 个直径顶点必须属于 S。但同理，这前述 4 个顶点（即与 (u_i, v_j) 互为直径顶点的顶点）的直径顶点也必须属于 S。因此，

按照这一迭代过程，并结合环面 $C_r \square C_s$ 的结构，每一步至少会有一个新的顶点加入 S。因此，$C_r \square C_s$ 的整个顶点集都必须属于 S，这是不可能的；由此可断定，当 r、s 均为奇数时，$C_r \square C_s$ 不存在 3-ARS。

情形 $k = 2$：我们需要根据 r 和 s 的奇偶性区分几种情况。

- r、s 的奇偶性不同。因此，$C_r \square C_s$ 中的任意顶点 (u_i, v_j) 都构成一个 2-ARS，因为它恰有两个直径顶点，这两个顶点构成等价类 $Z_i \in \mathscr{Z}_{\{(ui,vj)\}}$，其基数为 2；而相对于该顶点的任何其他等价类的基数至少为 4。因此，在这种情况下，$\mathrm{adim}_2(C_r \square C_s) = 1$。
- r、s 均为偶数。因此，任意单个顶点都构成一个 1-ARS，因为它恰有一个直径顶点。因此 $\mathrm{adim}_2(Cr \square Cs) \geq 2$，且令 S' 为 $Cr \square Cs$ 的一个 2-ARB。上述论证还意味着，若顶点 $(ui, v\,j) \in$ 属于 S'，那么它唯一的直径顶点 $(ui+r/2, v\,j+s/2)$ 也属于 S'。因此，$\mathrm{adim}_2(Cr \square Cs) = 2$ 的情形不可能成立，因为 $Cr \square Cs$ 中任意两个直径顶点都构成一个 4-ARS。因此，$\mathrm{adim}_2(Cr \square Cs) \geq 3$。然而，直径顶点（以及 $Cr \square Cs$ 的结构）所呈现的相同情形再次表明，$\mathrm{adim}_2(Cr \square Cs) \geq 4$。现在考虑集合 $S'' = \{(u0, v0), (u0, vs/2), (ur/2, v0), (ur/2, vs/2)\}$。注意，$(u0, v0), (ur/2, vs/2)$ 是 $Cr \square Cs$ 中的直径顶点，$(u0, vs/2), (ur/2, v0)$ 也是如此。此外，在 $Cr \square Cs$ 中，与 $Cr/2$ 中的顶点 v0 和 vr 对应的 Cs 副本中的顶点，在 $\mathscr{Z}S''$ 中形成 $s-2$ 个基数为 2 的等价类；同样，与 $Cr \square Cs$ 中的顶点 u0 和 $us/2$ 对应的 Cr 副本中的顶点形成 $r-2$ 个基数为 2 的等价类。$\mathscr{Z}S''$ 中其余的类基数均为 4。因此，我们可以推出 S'' 是一个 2-ARS。因此 $\mathrm{adim}_2(Cr \square Cs) = 4$。
- r、s 为奇数。这部分证明采用了一种略有不同的技巧。为此，我们首先介绍一些必要的工具和术语，以简化符号表示。$T = C_r \square C_s$ 中的行或列，是指 T 中一个 C_r 或 C_s 的副本。

性质6.1. 对于任意顶点 $x = (u_i, v\,j)$，x 的离心顶点集合为

$$\{x^{--}, x^{+-}, x^{++}, x^{-+}\},$$

其中 $x^{--} = (u_{i-\frac{r-1}{2}}, v_{j-\frac{s-1}{2}}); x^{+-} = (u_{i+\frac{r-1}{2}}, v_{j-\frac{s-1}{2}}); x^{++} = (u_{i+\frac{r-1}{2}}, v_{j+\frac{s-1}{2}})$; and, $x^{-+} = (u_{i-\frac{r-1}{2}}, v_{j+\frac{s-1}{2}})$.

由性质6.1 可立即得到，$\mathrm{adim}_2(C_r \square C_s) \geq 2$。

首先注意，T 中的任意一行 $U_i = \{u_i\} \square V(C_s)$，$1 \leq i \leq r$ 都是 T 的一个 2-ARS，因为对于每个 $j \in \{1, \ldots, s\}$，顶点对 $\{(u_{i+\delta}, v\,j), (u_{i-\delta}, v\,j)\}$（其中 $1 \leq \delta \leq r_2^{-1}$）在 $\mathscr{Z}_{U_i}$ 中构成一个等价类。类似地，T 中的任意一列 $V_j = \{v\,j\} \square V(C_r)$，$1 \leq j \leq s$ 都是 T 的一个 2-ARS，因为对于每个 $i \in \{1, \ldots, r\}$，顶点对 $\{(u_i, v\,j-\delta), (u_i, v\,j+\delta)\}$（其中 $1 \leq \delta \leq s_2^{-1}$）在 $\mathscr{Z}_{V_j}$ 中构成一个等价类。因此，$2 \leq \mathrm{adim}_2(C_r \square C_s) \leq \min\{r, s\}$。

因此，我们接下来关注满足 $2 \leq |S| < \min\{r,s\}$ 的顶点集。在下文中，如果给定集合中的所有顶点都属于 T 的同一行或同一列，即使它们不一定彼此相邻，我们就称这些顶点为对齐顶点。

下面的结果给出了关于对齐顶点的条件，这些条件决定其中一个顶点何时可以定义一个 1-ARS。

性质 6.2. 任何既不是 T 的完整行也不是完整列，且包含对齐顶点的顶点集 $S \subset V(T)$ 都是 T 的 1-ARS。（证明见定理 *3.3* 的证明末尾。

当 S 不包含对齐顶点时，我们还有以下性质。

性质 6.3. 任何不包含对齐顶点的顶点集 S，$2 \leq |S| < \min\{r, s\}$，都是 1-ARS。（证明见定理 *3.3* 的证明末尾。

性质6.2 和 6.3 如上所述，可以推导出 S 确实是 1-ARS，对应于 T。因此，我们最终得出 $\mathrm{adim}_2(C_r \square C_s) = \min\{r,s\}$ 当 r,s 为奇数时。

情形 $k = 1$: 若 r、s 均为偶数，则任意顶点都构成一个 1-ARS，因为它恰有一个直径顶点。因此，在这种情况下，$\mathrm{adim}_1(C_r \square C_s) = 1$。现在，若 r、s 不全为偶数，不妨设 s 为奇数。因此，集合 $S_1 = \{(u_0,v_0),(u_0,v_1)\}$（注意，$(u_0, v_0)$、$(u_0, v_1)$ 是 C_s 中的直径顶点）是 $C_r \square C_s$ 的一个 1-ARS，因为顶点 $(u_0, v^{(s+1)/2})$ 构成一个等价类 $Z^i \in \mathscr{Z}_{S_1}$。因此，$\mathrm{adim}_1(C_r \square C_s) \leq 2$。此外，由于 $C_r \square C_s$ 的任意单个顶点要么是一个 2-ARS（当 r、s 奇偶性不同时），要么是一个 4-ARS（当 r、s 均为奇数时），我们推得 $\mathrm{adim}_1(C_r \square C_s) = 2$，从而完成证明。 □

性质的证明 6.2

我们来说明，T 的任意顶点集 $S \subset V(T)$，只要既不是 T 的完整行也不是完整列，且包含对齐顶点，就是 T 的一个 1-ARS。在证明中，我们用符号 p_{xy} 表示 T 中从 x 到 y 的最短路径。我们还将用到以下事实：对于给定的三个对齐顶点 x^-、x^+、$z \in U_i, 1 \le i \le r$，若 x^- 不属于 p_{x^+z}，且 x^+ 不属于 p_{x^-z}，则 z 关于 $S_0 = \{x^-, x^+\}$ 的等价类是一个单元素集合。因此，对于任意满足 $z \notin S$ 的集合 $S \supseteq S_0$，z 的等价类也同样是一个单元素集合。

不失一般性，假设 w e 假设 S 在同一行 U_i 中包含两个对齐顶点。否则，证明应 ld 只需交换行和列 umn。

由于 S 不是完整行，因此 $U_i = U_i \setminus S \neq /0$，于是存在 $z = (u_i, v_j) \in U_i$。

令 P $\equiv x^- \ldots z \ldots x^+$ 为唯一一条包含 z 的路径，其端点顶点为 $x^-, x^+ \in S$，且所有中间顶点均属于 U_i。考虑以下可能情况：

- P 是从 x^- 到 x^+ 的最短路径。因此，$z \in P = p_{x^-, x^+}$。于是 $x^- \notin p_{x^+, z}$ 且 $x^+ \notin p_{x^-, z}$。根据上文的说明，类 Z_z 是单元素集合 {z}。
- P 不是从 x^- 到 x^+ 的最短路径。令 $E^- = \text{argmax}\{d(x^-, y) : y \in Ui\} = \{y^-, y^+\}$，其中 y^- 满足 $x^+ \notin px^-y^-$ 且 $x^+ \in px^-y^+$。由于 $|P| \ge r_2^{-1}$，可知 $y^-, y^+ \in P \setminus S$。事实上，$x^- \notin px^+,y^-$。否则，经过 x^- 的从 x^+ 到 y^- 的路径长度将大于 $d(x^-, y^-) \ge r_2^{-1}$，这与 px^+,y^- 是 Ui 中的最短路径相矛盾。

上述两种情况的论证可以得出，S 确实是 T 的一个 1-ARS。 □

性质的证明6.3

我们来证明，任何既不是 T 的完整行也不是完整列、且包含对齐顶点的顶点集 $S \subset V(T)$，都是 T 的一个 1-ARS。

令 $x = (u_i, v_j) \in S$。由于环面的对称性，不失一般性，设 $x = (u_{\frac{r-1}{2}}, v_{\frac{s-1}{2}})$。考虑以下几种情况：

- $(u_{i+1}, v_{j+1}) \in S$。令 $y = (u_{i+1}, v_{j+1}) = (u_{r_2^{-1}+1}, v_{\frac{s-1}{2}+1})$，且 $x^* = (u0, v_{\frac{s-1}{2}})$。由于 $\min\{r, s\} \ge 3$，因此 $x^* \neq x$ 且 $x^* \neq y$。此外，$x^* \notin S$，因为 x 和 x^* 对齐。从 x^* 到 x 的一条最短路径为 $(u0, v\,j) - (u1, v\,j) \ldots (u\,j, v\,j)$，因此 $d_{x^*,x} = r_2^{-1} + 1$。此外，从 x^* 到 y 的一条最短路径为 $(u0, v\,j) - (us_{-1}, v\,j) - (us_{-1}, v\,j_{+1}) \ldots (u\,j_{+1}, v\,j_{+1})$，因此 $d_{x^*,y} = 1 + 1 + \big((r-1) - (r_2^{-1} + 1)\big)$。最后可以看出，不存在其他顶点 $z \neq x^*$，使得 $d_{z,x} = r_2^{-1} + 1$ 且 $d_{z,y} = 2 + \big((r-1) - (r_2^{-1} + 1)\big)$。因此，单元素集合 $\{(u0, v_{\frac{s-1}{2}})\}$ 构成了 $\mathscr{Z}_S$ 的一个等价类。

- $(u_{i+1}, v_{j+1}) \notin S$。现在需要考虑两种不同的情况。

  (i) $(u_0, v_0) \in S$。现在令 $y = (u_0, v_0)$，并令 $x^* = (u_{\frac{r-1}{2}+1}, v_{\frac{s-1}{2}+1})$；根据假设，x 不属于 S。此外，$x^* \neq y$，因为 $\min\{r, s\} \ge 3$。事实上，$d_{x,x^*} = 2$，且 $d_{y,x^*} = r+s2$，因为从 y 到 x 的任何最短路径都不经过 x，因为这些路径离开 y 的方向都与 x 相反。此外，现在可以观察到，x^* 是唯一满足 $d_{x,x^*} = 2$ 且 $d_{y,x^*} = r+s\,2$ 的顶点。因此，单元素集合 $\{x^*\}$ 构成了 $\mathscr{Z}_S$ 的一个等价类。

  (ii) $(u_0, v_0) \notin S$。
  由环面的对称性可知，现在可以假设 $y = (u_i, v_j) \in S$，其中 $i < r_2^{-1}$ 且 $j < s_2^{-1}$。现在令 $x^* = x^{--}$，并注意到与 x 到 x^{--} 的距离相同的顶点只有 x^{+-}、x^{++} 和 x^{-+}。如 然而，

$$d_{y,x^{--}} = d_{y,x^{+-}} - 1 = d_{y,x^{-+}} - 1 = d_{y,x^{++}} - 2.$$

  因此，不存在其他顶点 z，使得 $d_{x,x^*} = d_{z,x^*}$ 且 $d_{y,x^*} = d_{y,x^*}$，因此我们得出结论：单元素集合$\{x^*\}$ 构成了 $\mathscr{Z}_S$ 的一个等价类。

□

定理 3.4的证明

我们来证明，对每个 $r \geq 4$,

$$\operatorname{adim}_k(K_r \square K_r) = \begin{cases} 3, & \text{if } k = 1, \\ 2, & \text{if } k = 2, \\ r-k, & \text{if } 3 \leq k \leq r-2, \\ r, & \text{if } k = r-1, \\ +\infty, & \text{if } r \leq k \leq 2r-3, \\ 1, & \text{if } k = 2r-2. \end{cases}$$

情形 $k = 1$: 由于 $K_r \square K_r$ 的每个顶点都构成一个 $(2r-2)$-ARS，且 $2r-2 \geq 6$，我们推出 $\operatorname{adim}_1(K_r \square K_r) \geq 2$。令 $S = \{(u_i, v_j), (u_k, v_l)\}$ 为一个 1-ARB，并考虑等价类 $\mathscr{Z}_S = \{Z^1, \ldots, Z^t\}$，其中 $t \geq 1$，这些等价类由等价关系 $\mathscr{R}_S$ 定义。如果 $i = k$ 或 $j = l$，设不失一般性地 $i = k$（注意，$i = k$ 和 $j = l$ 不可能同时成立），那么每个等价类 $Z^q \in \mathscr{Z}_S$ 至少包含 $r-2$ 个顶点。事实上，这样的等价类由形如 (u_i, v_α) 的 $r-2$ 个顶点组成。因此，S 是一个 $(r-2)$-ARS。由于 $r \geq 4$，S 是某个 $k \geq 2$ 的 k-度量 ARS，这是不可能的。如果 $i \neq k$ 且 $j \neq l$，那么顶点 (u_i, v_l) 和 (u_k, v_j) 属于由 $\mathscr{Z}_S$ 定义的同一个等价类。此外，$\mathscr{Z}_S$ 中的任何其他等价类都包含两个以上的顶点。因此，S 是一个 2-ARS，这同样是不可能的。由这两个矛盾可知，必有 $\operatorname{adim}_1(K_r \square K_r) \geq 3$。另一方面，由三个顶点组成的集合 $S_1 = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_1)\}$ 构成一个 1-ARS，因为顶点 (u_2, v_2) 构成了 $\mathscr{Z}_{S_1}$ 的一个等价类。因此，$\operatorname{adim}_1(K_r \square K_r) \leq 3$。

情形 $k = 2$: 我们注意到，集合 $S_2 = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$ 构成一个 2-ARS，因为顶点 (u_1, v_2)、(u_2, v_1) 构成 $\mathscr{Z}_{S_2}$ 的一个等价类。因此，$\operatorname{adim}_2(K_r \square K_r) \leq 2$。此外，$\operatorname{adim}_2(K_r \square K_r) \geq 2$ 成立，因此在这种情形下等式成立。

情形 $3 \leq k \leq 2r-3$: 设 X 是 $K_r \square K_r$ 的一个 k-ARB。注意，$|X| \geq 2$。假设 X 含有两个顶点 (u_i, v_j) 和 (u_k, v_l)，满足 $i \neq k$ 且 $j \neq l$。我们考察 $\mathscr{Z}_X$ 的等价类。如果 $\mathscr{Z}_X$ 中存在一个类，其中所有顶点到 (u_i, v_l) 和 (u_k, v_j) 的距离均为 1，那么就会得到一个矛盾，因为具有此性质的顶点只有两个，即 (u_i, v_l) 和 (u_k, v_j)。这意味着 X 要么是一个 2-ARS（若 (u_i, v_l) 和 (u_k, v_j) 均不在 X 中），要么是一个 1-ARS（若 $(u_i, v_l) \in X$ 或 $(u_k, v_j) \in X$）。因此，顶点 (u_i, v_l) 和 (u_k, v_j) 也应属于 X。通过类似的论证，不存在第三个顶点 $(u_{i'}, v_{j'}) \in X$，满足 $i \neq i' \neq k$ 且 $j \neq j' \neq l$。因此，$X \subset (V(K_r) \times \{v_j, v_l\}) \cup (\{u_i, u_k\} \times V(K_r))$。如果存在两个顶点 (u_a, v_b)、$(u_c, v_d) \in X$，满足 $a \neq c$、$b \neq d$，且不失一般性地，$a \neq i, k$（这意味着 $b \in \{j, l\}$），并且 $d \neq j, l$（这意味着 $c \in \{i, k\}$），那么运用上述类似的论证可推知，(u_a, v_d)、(u_c, v_b) 也属于 X。然而，这会产生矛盾，因为 $(u_a, v_d) \notin (V(K_r) \times \{v_j, v_l\}) \cup (\{u_i, u_k\} \times V(K_r))$。这意味着 $X \subset (V(K_r) \times \{v_j, v_l\})$ 或 $X \subset (\{u_i, u_k\} \times V(K_r))$。假设 $X \subset (V(K_r) \times \{v_j, v_l\})$（另一种情形可对称处理）。再次采用证明顶点 (u_i, v_l) 和 (u_k, v_j) 属于 X 时所用的相同论证，可以证明：对于某个 $h \in \{1, \ldots, r\}$，当且仅当 $(u_h, v_l) \in X$ 时，$(u_h, v_j) \in X$。令 $X_j = X \cap (V(K_r) \times \{v_j\})$，并令 $X_l = X \cap (V(K_r) \times \{v_l\})$，注意 $|X_j| = |X_l| = t$ 对某个 $2 \leq t \leq r$ 成立。因此，$\mathscr{Z}_X$ 的等价类如下：

- 两个基数为 $r-t$ 的等价类，即集合 $(V(K_r) \times \{v_l\}) \setminus (X_l)$ 和 $(V(K_r) \times \{v_j\}) \setminus (X_j)$。当 $t = r$ 时，这些类可能为空。
- 基数为 $r-2t$ 的类，它们是集合 $\{u_\alpha\} \times V(K_r) \setminus X$，其中每个 $1 \leq \alpha \leq r$ 都满足 $(u_\alpha, v_j) \in X$。
- 一个包含所有剩余顶点的类，其基数为 $(r-t)(r-2)$；当 $t = r$ 时，该类也可能为空。

因此，我们得到，当 $t \leq r-1$ 时，X 是一个 $(r-t)$-ARS（实际上是一个 $(r-t)$-ARB）；而当 $t = r$ 时，X 是一个 $(r-2)$-ARB。因此，我们得出 $k = r-t$ 或 $k = r-2$（相应地）。然而，若考虑 X_j 或 X_l 中的任意一个子集，我们会发现它们都是 $(r-t)$-ARS（或 $(r-2)$-ARS），这意味着 X 不是 k-ARB，从而与我们的第一个假设相矛盾，即 X 不包含两个顶点 (u_i, v_j) 和 (u_k, v_l)，使得 $i \neq k$ 且 $j \neq l$。

因此，要么 $X \subset (V(K_r) \times \{v_j\})$，其中某个 $v_j \in V(K_r)$；要么 $X \subset (\{u_i\} \times V(K_r))$，其中某个 $u_i \in V(K_r)$。不失一般性，设 $X \subset (V(K_r) \times \{v_j\})$。在这种情况下，我们看到顶点 $(V(K_r) \times \{v_j\}) \setminus X$ 构成了 $\mathscr{Z}_X$的一个基数为 $r-|X|$的等价类，其中 $|X| \leq r-1$；而 $\mathscr{Z}_X$的其他每个等价类都包含更多顶点。由于 X 是 k-ARB，我们推得 $k = r-|X|$，这意味着对于每个 $3 \leq k \leq r-2$，$\operatorname{adim}_k(K_r \square K_r) = |X| = r-k$。对于 $|X| \leq r-1$的情况，我们也有 $k \leq r-2$，因为 $|X| \geq 2$。若 $|X| = r$，则 X 是一个 $(r-1)$-ARB，这意味着 $k = r-1$，因此 $\operatorname{adim}_{r-1}(K_r \square K_r) = |X| = r$。此外，这些论证表明，对于任意 $r \leq k \leq 2r-3$，$K_r \square K_r$ 中不存在 k-ARS。

最后，K_r的任意顶点 $\square K_r$ 构成一个 $(2r-2)$-ARS，这意味着 $\operatorname{adim}_{2r-2}(K_r \square K_r) = 1$。证明到此结束。 □