表示论中的中心化子与Hecke代数：在纽结与物理学中的应用

L. Poulain d'Andecy[1]

arXiv:2304.00850v1 [math.RT] 3 Apr 2023

研究指导资格论文´ `

摘要。本文是一篇为"研究指导资格认证 "而提交的论文。第一章介绍一些背景知识，并概述经典Schur–Weyl对偶及其涉及 Hecke 代数的量子类比。文中还讨论量子群及其中心化子，以及它们与辫群、杨–巴克斯特方程和链环不变量构造之间的联系。第一章最后简要回顾若干相关的 Hecke代数概念。第二章介绍融合海克代数，并将其应用于杨–巴克斯特方程解的构造。第三章总结关于李代数的对角中心化子的近期研究成果，并给出其在研究 sl(3) 的缺失标签问题中的一个应用。最后一章讨论 Yokonuma–Hecke 代数的代数结果及其在链环不变量研究中的应用。

[1]兰斯数学实验室 UMR 9008，兰斯香槟-阿登大学，Moulin de la Housse BP1039，51100 兰斯，法国。
loic.poulain-dandecy@univ-reims.fr

目录

引言1第一章. P

预备知识：中心化子的用途

4第二章. 融合 Hecke代数 34第三章. 对角中心化子 49

第四章. Yokonuma–Hecke 代数与链环不变量 65

出版物列表 71

参考文献73

引言

表示论于19世纪末在格奥尔格·弗罗贝尼乌斯与群论和数论相关的研究中正式诞生。此后它迅速发展，如今已成为一门非常活跃、独立的数学学科，并且与数学中的其他学科以及其他科学领域有着诸多交集。通常，人们通过群论来学习表示论：先了解抽象群以及群在集合上的作用的一般理论，再将表示定义为一种特殊的群作用，即通过线性算子在向量空间上的群作用。表示论最初的历史动因，是寻找其在群论和数论中的应用。人们确实发现了引人注目的应用，例如，表示论的一些成果用于有限单群的分类，或用于证明费马大定理。然而，如今显然表示论并不局限于对其他领域的潜在应用：它本身被视为数学中的一门基础学科。关于表示论的历史概述，可参阅 [Cur2、Haw1、Haw2]。

20世纪上半叶，人们对表示论的兴趣显著增长，这与量子物理的发展密切相关（例如参见 [Mac1、Wey3]）。由于量子物理从根本上涉及向量空间和线性算子，因此描述对称性或可观测量之间对易关系的群或代数，实际上是通过它们的线性表示呈现出来的。在物理学中，具体呈现出来的通常是表示，而群论或更复杂的代数理论则是理解这些表示的数学工具（例如，粒子物理标准模型就很明显地体现了这一点）。量子物理中的“自旋”理论就是一个很好的例子。自旋通过希尔伯特空间建模：自旋为 0 的粒子对应维数为 1 的空间，自旋为 1/2 的粒子对应维数为 2 的空间，以此类推。在这些向量空间上，都有可观测量，例如给出总自旋或沿选定轴方向的各分量值。它们是大小各异的矩阵，具体大小取决于自旋值，也是物理理论中最重要的对象。事实证明，所有这些向量空间都可以很好地理解为群 $SU(2)$ 的不可约表示（该群确实每种维数都恰有一个这样的表示），因此，自旋理论中涉及的所有矩阵都统一在 $SU(2)$ 表示论这一共同框架之下。

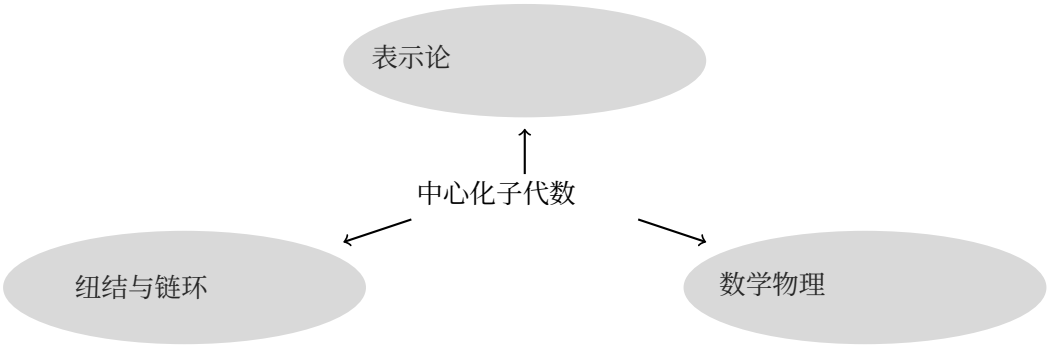
上述示例旨在说明基本表示在物理学中的重要性，以及将一组矩阵视为某个群的表示有多么有用。这与一种普遍观点一致：表示就是伪装成一组矩阵的群（或代数）。矩阵是数学科学中简单而基本的对象，这也解释了表示论的实用性和普遍性。

伊萨伊·舒尔和赫尔曼·外尔是表示论的两位先驱。他们的名字永远与所谓的舒尔–韦尔对偶联系在一起。舒尔-韦尔对偶令人惊叹且优美之处在于，它将我们所能想到的两个最基本群的表示论紧密联系起来。一方面，我们有一个有限群，即对称群 S_n；另一方面，我们有一个矩阵群，也就是李群，即一般线性群 $GL_N(\mathbb{C})$（如果偏好酉矩阵，也可以用特殊酉群 $SU(N)$ 代替 $GL_N(\mathbb{C})$ 来表述舒尔–韦尔对偶）。

舒尔–韦尔对偶有几种不同的表述，其抽象程度和一般性各异。最简单、最简洁的表述之一如下：在向量空间 $\left(\mathbb{C}^N\right)^{\otimes n}$ 上，有一个 $GL_N(\mathbb{C})$ 的表示和一个 S_n 的表示，而相应的两组矩阵互为中心化子。这种表述突显了表示的中心化子的概念。

当我们手头有一组矩阵（例如，一个表示）时，考察它的中心化子是很自然的想法。在物理学中，这通常对应于研究对称性。一般而言，从数学视角来看，中心化子包含了关于我们最初那组矩阵的大量信息。因此，沿着这一思路，在表示论中，只要我们有一个想要研究的群或代数的表示，就会希望理解它的中心化子。一种尤其令人愉悦的情形是，我们能够通过考察这样的中心化子，重新得到那些我们也独立感兴趣的代数，例如舒尔–韦尔对偶中的情形。在这种情况下，中心化子的整个理念便成为两种各自都饶有趣味的代数结构之间的桥梁。

本论文的主题。本论文讨论了若干项研究，它们由中心化子代数及其应用这一共同主题联系在一起，尤其关注其在结与链环理论以及数学物理中的应用。示意图如下：



表示论与纽结和链环的相关性可以简要说明如下。首先，研究纽结和链环，尤其是它们的拓扑不变量，与一种代数理论有关：辫群由此登场，而我们需要找到所谓的马尔可夫迹。第二步源于这样一个事实：一般而言，研究辫群上的马尔可夫迹过于困难，因此我们决定通过辫群的一些表示来研究它们。这相当于用更简单的代数取代辫群，并使我们能够实际构造出具体的不变量。最著名的例子是 Temperley–Lieb 代数、Hecke 代数和 Birman–Murakami–Wenzl代数，它们分别产生 Jones多项式、HOMFLYPT 多项式和考夫曼多项式。

不过，中心化子代数在这个故事中扮演什么角色？事实证明，上述三种代数都以中心化子代数的形式出现。例如，Hecke 代数是对称群的一种变形，并且存在 $GL_N(\mathbb{C})$ 的一种适当变形，称为量子群，使得舒尔-韦尔对偶可以扩展到这一量子情形。事实上，上述三种代数都作为某些量子群的中心化子代数出现，这并非巧合。

量子群是单李代数的泛包络代数的变形，经过精心设计，具有以下性质。一方面，它们保留了李代数的大部分代数性质，尤其是它们的半单表示论已得到充分理解。另一方面，在表示的张量积方面，它们与李代数有所不同。根据其公理，它们的张量积表示的中心化子代数支持辫群的表示；事实证明，它们相较于李代数情形发生了充分的变形，因此能够给出非平凡表示（此处的“非平凡”是指这些表示不能经由对称群分解，这与经典李代数情形不同）。此外，所有这些表示都被证明支持马尔可夫迹，从而导出链环不变量（Reshetikhin–Turaev不变量）。

上一段的简要总结已从纽结与链环理论的角度充分说明了研究量子群表示的中心化子代数的动机。数学物理也提供了更多研究动机。事实上，量子群最初正是源于数学物理方面的考量。简言之，构造量子群是为了给出杨–巴克斯特方程的解；该方程是可积系统理论中的主方程。中心化子再次发挥作用，因为从某种意义上说，这些解实际上存在于表示的中心化子中。以 Hecke 代数为例最容易理解这一点：一个简单公式给出了杨–巴克斯特方程的抽象解，再通过表示这一解，便可恢复一些来自量子群的矩阵解。

从历史上看，Hecke 代数最初出现于一个表面上与量子群截然不同的领域：有限型李型单群的表示论。一个引人注目的事实是，它们也作为某些表示的中心化子代数出现，因此这两种视角都非常适合我们的讨论。有限群论的这一视角提供了无穷多种可能的推广，其中一些与纽结与链环及可积模型相关的图景十分契合。本论文的一章将专门讨论 Yokonuma–Hecke代数；从有限型李群的角度来看，它们是 Hecke 代数的自然推广，近来则被发现可应用于结与链环理论。另一个例子是仿射Hecke代数（源自 p-进群），它们与仿射量子群、实心环面内的纽结与链环以及反射方程（可积模型中的第二个主方程）有关。更一般地，人们发现，源自有限型或 p-进李型群的各种 Hecke 代数，除了纯粹的表示论之外，还有大量应用，例如范畴化、特殊函数理论和正交多项式理论。

除了 Hecke型代数之外，还有另一类代数也同样适用于上述图示。

著名的例子是 Racah代数和 Askey–Wilson代数。它们最初出现在正交多项式理论中，但最近人们逐渐清楚地认识到，它们也与中心化子代数密切相关。我们需要稍微转换一下看待中心化子的视角，考虑李代数通过对角嵌入映入其包络代数的 n 重张量积所得的中心化子（量子群也有同样的情形）。我们将这个代数称为“对角中心化子”。本论文有一章专门讨论对角中心化子。Racah代数已被用于诸多方面，其中包括作为超可积系统的对称代数，因此这里仍然可以发现它与数学物理的联系[2]。至于纽结理论，这种联系并不那么明显（首先，它们并不是辫群代数的直接商），但这种联系仍然存在。事实上，最近已经证明 Askey–Wilson代数与 Kauffman括号 skein 代数同构。此外，根据构造，它们与上文讨论的表示的通常中心化子密切相关，因此它们与量子群和链环不变量并不相距甚远。实际上，将这些代数与更多类似辫子的代数结合起来，是一个令人兴奋的研究方向。总而言之，对角中心化子不如 Hecke代数那样广为人知，但正如前面的图示所表达的那样，它们无疑属于本论文的框架。

目录。第一章的某些部分为了节省篇幅而写得较为简略，但仍足以讲述我们想要讲述的内容。文中列出了许多参考文献。后续章节所涉材料的证明及更多细节，可在参考文献之前末尾所列的出版物中找到。

第一章更详细地讨论了上述略述的内容，旨在提供一些背景知识、记号，并为后文介绍的结果提供一些动机。首先讨论中心化子代数和舒尔–韦尔对偶。随后介绍辫群和杨–巴克斯特方程，并以 Hecke 代数作为第一个例子。为了将 Hecke 代数恰当地纳入中心化子的一般理论，文中对量子群作了一些讨论，并由此引出上文提到的量子群中心化子的显著性质。接着回顾马尔可夫迹和链环不变量的构造。最后一节概述一般的 Hecke 代数，以联系 Hecke 代数的历史定义，并为最后一章的 Yokonuma–Hecke 代数铺垫。此外，这一节还提及仿射 Hecke 代数和箭图 Hecke 代数的一些近期成果。由于这些内容与论文的主题相去较远，因此未纳入正文。

第二章介绍了一类新代数，它们恰好契合上述图景。这些代数是 Hecke 代数在更一般的 $U_q(gl_N)$ 表示张量积情形下的类似物。舒尔–韦尔对偶被扩展，以纳入这些称为融合 Hecke 代数的代数。关于相关中心化子代数的代数描述的部分结果与猜想，均以融合 Hecke 代数的形式呈现。文中给出了融合 Hecke 代数的辫子式描述，并完整研究了其表示论（半单情形）。最后，借助融合 Hecke 代数中杨–巴克斯特方程的一个显式解公式，跨越了通往数学物理的桥梁。

第三章节将中心化子的论述直接置于李代数的泛包络代数之中。文中引入了“对角中心化子”的概念，并概述了Racah代数的相关内容（ q-变形，即所谓的Askey–Wilson代数，也作了简要提及）。随后，详细讨论了两个新的对角中心化子例子。其中一个（对应于 sl_3）揭示出了一种涉及 E_6 型Weyl群的出人意料的对称性。最后，通过一个关于研究 sl_3的缺失标签的具体应用，我们再次跨越了通向数学物理的桥梁；对于这一问题，我们的代数方法使我们得以发现新的对称性。

最后一个较短的章节完全 посвящ于 Yokonuma–Hecke 代数及链环不变量的构造。一如既往，我们从“纯粹”的代数出发：给出一个同构定理，说明 Yokonuma–Hecke 代数与通常赫克代数之间的关系。随后，我们将该定理应用于 Yokonuma–Hecke 代数族上马尔可夫迹的代数分类。在本章的结尾，我们转向纽结与链环理论，并应用代数定理，以著名的 HOMFLYPT不变量为基础，给出由 Yokonuma–Hecke 代数产生的拓扑不变量的显式公式。

致谢。我衷心感谢各位评审花时间审阅本工作并撰写报告，也感谢答辩委员会成员。非常感谢兰斯大学的同事们给予的支持，以及合著者们与我进行的诸多有趣的学术交流。此外，我也很高兴能衷心感谢蒙特利尔 CRM 数学物理团队，在本文部分内容撰写期间为我营造了热情友好的氛围。

[2]Racah代数以物理学家 Giulo Racah 的名字命名。

第一章

预备知识：中心化子的用途

目录

I.1 中心化子的总体思想. **4**
I.2 舒尔-韦尔对偶 . **6**
I.3 辫群与杨-巴克斯特方程. **12**
I.4 量子群及其中心化子 . **18**
I.5 辫群上的马尔可夫迹与链环不变量 . **25**
I.6 Hecke 代数丛林. **28**
附录 I.A 对称群与 Hecke 代数的表示论 30

I.1 中心化子的基本理念

历史文献可参见 [Wey1], , 另可参见颇具影响力的著作 [Wey2] , 或较新的介绍 [GW]。需要指出的是，为求简洁，本文讨论的半单情形并未涵盖中心化子理论的全部内容（例如参见 [BDK, §3], [GJ, §4]以及 [Gre, JS, MMcA]）。

一个矩阵的中心化子 。中心化子代数的第一个例子在线性代数中很早就出现了 a.
我们取一个方阵 矩阵 M。它的中心化子是矩阵代数的如下子代数:

$$Z(M) = \{\text{Matrices } N \text{ s.t. } [M, N] = 0\} \ .$$

已经展现出中心化子理论某些特征的基本例子是，当 M 是一个对角矩阵时。于是我们有:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Z(M) = \{ \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & & & \\ & & A_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \} \ ,$$

其中，如果特征值 λ_i 的重数为 m_i，那么 $Z(M)$ 中的矩阵是分块对角矩阵，且 A_i 的大小为 m_i。因此，我们可以说，中心化子 $Z(M)$ 在某种程度上“了解”重数 m_i。

一组矩阵的中心化子。再来看一个更复杂的例子，取一组大小相同的方阵 $S = \{M_1, \ldots, M_k\}$。自然，它的中心化子是:

$$Z(S) = \{\text{Matrices } N \text{ s.t. } [M_i, N] = 0 \, , \ \forall i\} \ .$$

例如， S 是由可对角化矩阵构成的交换集。借用量子力学的语言，如果 S 生成一个极大交换子代数，我们就说 S 是完备的。从物理上看，这意味着 S 中元素的公共特征子空间都是一维的，因此，构成底层向量空间的一组基的向量可以由 S中元素的特征值唯一标记（相差一个标量）。现在， S 完备当且仅当 $Z(S)$是交换的（在这种情况下， $Z(S)$实际上是由 S生成的交换代数）。因此，我们可以说，中心化子 $Z(S)$能够判断这个集合是否完备；此外，根据构造，如果S 不完备，我们必须从 $Z(S)$中取出元素来使其完备。

表示的中心化子。最后，我们来讨论表示论中更一般的情形。取一个代数 $\mathcal{A}$，并设 $\rho:\ \mathcal{A}\to \mathrm{End}(E)$是定义在有限维复向量空间$E$上的一个表示。该表示的中心化子，就是$\mathrm{End}(E)$中由自同态族$\{\rho(a)\}_{a\in\mathcal{A}}$构成的集合的中心化子：

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E) = \text{ centraliser of } \{\rho(a)\}_{a\in\mathcal{A}} = \{x\in \mathrm{End}(E)\mid \rho(a)x = x\rho(a)\,,\ \forall a\in\mathcal{A}\}\ .$$

在这里，中心化子同样“知晓”关于该表示的许多信息。第一个例子是舒尔引理，其表述如下：

$$\rho \text{ is irreducible} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E) = \{\lambda \mathrm{Id}_E\}_{\lambda\in\mathbb{C}}\ .$$

更一般地，假设该表示分解为不可约表示的直和：

$$E\cong m_1A_1\oplus m_2A_2\oplus \ldots\ldots \oplus m_kA_k\,,$$

其中 $m_i\in\mathbb{Z}_{>0}$ 是不可约表示 A_i 在 E中的重数。利用舒尔引理，中心化子 $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E)$可描述如下。每个同型分量 $A_i^{\oplus m_i}$ 都是稳定的，并且可以选取一个基（拼接 A_i的基），使得在 $A_i^{\oplus m_i}$上，$\mathcal{A}$ 的算子以及中心化子的算子呈现如下形式：

$$\mathcal{A}\ni a\mapsto \begin{pmatrix} \rho_i(a) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \rho_i(a) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & \rho_i(a)\end{pmatrix}\,,\qquad \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E)\ni x\mapsto \begin{pmatrix} x_{11}\mathrm{Id} & x_{12}\mathrm{Id} & \ldots & x_{1m_i}\mathrm{Id}\\ x_{21}\mathrm{Id} & x_{22}\mathrm{Id} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ x_{m_i1}\mathrm{Id} & \ldots & \ldots & x_{m_im_i}\mathrm{Id}\end{pmatrix}\,,$$

其中我们展示的是块大小为 m_i的分块矩阵。因此可见，中心化子 $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E)$同构于矩阵代数的直和：

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E)\cong \mathrm{Mat}_{m_1}(\mathbb{C})\oplus \mathrm{Mat}_{m_2}(\mathbb{C})\oplus \ldots\ldots \oplus \mathrm{Mat}_{m_k}(\mathbb{C})\ ,$$

这些矩阵代数的大小对应于重数。因此，中心化子“知晓”这些重数。

两种观点。令 $\mathcal{B}:=\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E)$，我们可以进一步指出，$E$ 也可以看作 $\mathcal{B}$的一个表示。取上面的系数 x_{ij}，我们构造出 $\mathcal{B}$ 的一个表示，其维数为 m_i（A_i的重数），并且在 E 中出现的次数等于 A_i的维数。现在我们有以下两种观点。

从 $\mathcal{A}$ 的角度来看：	从 $\mathcal{B}$ 的角度来看：
$\rho\cong \dim(B_1)A_1\oplus \ldots\ldots \oplus \dim(B_k)A_k$	$\rho\cong$ 维数$(A_1)B_1\oplus \ldots\ldots \oplus$维数$(A_k)B_k$

由此得到这样一句格言：

“Multiplicities for $\mathcal{A}$ = Dimensions for $\mathcal{B}$ (and vice-versa)”.

最后，由于这些像彼此对易，E也可以看作代数 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 的一个表示。总而言之，我们分别得到 E 作为 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$，最后作为 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 的表示时的如下分解：

$$E=\bigoplus_i A_i^{\oplus\dim(B_i)}\,,\qquad E=\bigoplus_i B_i^{\oplus\dim(A_i)}\,,\qquad E=\bigoplus_i A_i\otimes B_i\,. \tag{I.1}$$

向量的标记。按照上述思路，简要回到量子力学的术语，我们要问：如何为向量空间 E 中的向量自然地标记？(I.1) 中最后一个分解给出了明确答案。首先，在代数 $\mathcal{A}$ 中选取一个极大交换集。该集合对 E 的作用将使我们能够区分不同的表示 A_i 和 A_j（及其 $i\neq j$），并区分给定 A_i 中的向量。

然而，只要重数 m_i 严格大于 1，这就不足以唯一确定 E中的一个向量。这很容易理解，因为算子不可能 $\mathcal{A}$ 区分同一个不可约表示 A_i的不同同构副本。换句话说，从 $\mathcal{A}$的角度来看，空间 B_i 是透明的，它们只通过维数记录重数。我们有时会说，E 中的向量存在一个“缺失标签”（从 $\mathcal{A}$的角度来看）。

实际上，缺少的是作用于空间 B_i 上的算子，以便区分给定 A_i的不同副本。借助源自表示论的形式体系，解决方案显而易见：中心化子代数 $\mathcal{B}$ 提供了这类算子，进而为向量提供额外的标记。归根结底，要获得一套完备观测量集，自然而然地需要将 $\mathcal{A}$ 中的一套完备集与 $\mathcal{B}$中的一套完备集结合起来。第三章详细研究了一个具体例子。

I.2 舒尔–韦尔对偶

我们用著名的经典Schur–Weyl对偶来阐释上一节的一般理论。参考文献为 [Ful、FH、GW、Wey2]。下文使用的标准组合对象（分拆、杨图表等）的定义已在附录中回顾。

I.2.1 GL_N 和 S_n的表示

取一个有限维复向量空间 V，其维数为 N，再取一个非负整数 n。群 $GL(V)$自然地作用于 V，并通过对角作用作用于 $V^{\otimes n}$：

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_2) \otimes \cdots \otimes (g \cdot v_n) \qquad \forall g \in GL(V) \ .$$

我们还有对称群 S_n，它通过置换各因子作用于 $V^{\otimes n}$：

$$\pi \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\pi^{-1}(1)} \otimes v_{\pi^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi^{-1}(n)} \qquad \forall \pi \in S_n \ .$$

表示 $V^{\otimes n}$ 可分解为不可约表示的直和；对于 $GL(V)$ 和 S_n，情况均如此。先来看 $GL(V)$。我们有：

$$\underline{\text{For } GL(V)\text{:}} \qquad V^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le N}} V_\lambda^{\oplus m_\lambda} \ , \tag{I.2}$$

表示 V_λ 是 $GL(V)$ 的最高权为 λ 的不可约表示，而正整数 m_λ 是重数。

另一方面，我们有：

$$\underline{\text{For } S_n\text{:}} \qquad V^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le N}} S_\lambda^{\oplus M_\lambda} \ , \tag{I.3}$$

表示 S_λ 是与 λ 相关联的 S_n 的不可约表示（见附录），而正整数 M_λ 是重数。

将 $GL(V)$ 和 S_n 放在一起。我们在 (I.2) 和 (I.3) 中有两个非常相似的分解，因此将它们合并为一个公式。我们考虑直积群 $GL(V) \times S_n$。两个群都作用在 $V^{\otimes n}$ 上，由于这两个作用对易，因此诱导出直积群的一个作用。

我们给出的关于 $V^{\otimes n}$ 的最后一个分解，是将其视为直积 $GL(V) \times S_n$ 的表示。回顾一下，这个直积的不可约表示具有 $M \otimes N$ 的形式，其中 M 是 $GL(V)$ 的不可约表示，而 N 是 S_n 的不可约表示。我们有，$V^{\otimes n}$ 作为 $GL(V) \times S_n$ 的表示可分解如下：

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le N}} V_\lambda \otimes S_\lambda \ . \tag{I.4}$$

首先将这一分解限制到群 $GL(V)$，然后限制到群 S_n，便可重新得到我们的两个分解：

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le N}} (V_\lambda)^{\oplus \dim(S_\lambda)} \ , \qquad V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le N}} (S_\lambda)^{\oplus \dim(V_\lambda)} \ .$$

这里的对偶性显而易见。特别是，S_n 的不可约表示的维数等于 $GL(V)$ 的不可约表示的重数，反之亦然。它们可以用一定数量的杨表来表示：

$$m_\lambda = \dim(S_\lambda) = |\mathrm{STab}(\lambda)| \qquad \text{and} \qquad M_\lambda = \dim(V_\lambda) = |\mathrm{SSTab}_N(\lambda)| \ . \tag{I.5}$$

上述构造背后的富有成效的想法是，我们可以利用关于 S_n 的一些表示知识来研究 $GL(V)$ 的表示，或者反过来。这类思想早已出现在表示论早期 Schur 的工作中 [Sch], ，并由 Weyl [Wey2] 大力推广。这种情况及其众多推广通常被称为舒尔–韦尔对偶。

I.2.2 经典的舒尔–韦尔对偶

我们根据第 I.1 节总结前面对 $GL(V)$ 和 S_n 的讨论，并以一种为我们将要考虑的推广奠定基础的方式表述主要事实。

如果我们要讨论中心化子，最好从代数的角度来谈（与某组矩阵中的所有矩阵都可交换的元素构成一个代数）。因此，我们首先将群 $GL(V)$ 和 S_n 替换为代数。我们将群 S_n 替换为它的群代数 $\mathbb{C}S_n$，并将群 $GL(V)$ 替换为其李代数的泛包络代数；为了强调它对 N的依赖，我们将其记作 $U(gl_N)$。

因此，情形 是：我们有两个代数作用在同一个向量空间上，可以这样来表示 it 如下：

$$U(gl_N) \xrightarrow{\phi} \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \xleftarrow{\rho} \mathbb{C}S_n$$

准确地说，ρ只是将 S_n的作用线性延拓到 $\mathbb{C}S_n$。映射 ϕ是将 gl_N 在 $V^{\otimes n}$上的作用延拓到 $U(gl_N)$。$gl_N = \mathrm{End}(V)$ 中的一个元素通过其在 $V^{\otimes n}$上的对角作用来作用；该作用是各个因子上的作用之和：

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = (g.v_1) \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n + \ldots\ldots + v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes (g.v_n)\ .$$

现在我们可以陈述构成所谓舒尔–韦尔对偶的主要结论。请注意，我们现在将表示 V_λ of $GL(V)$ 视为 $U(gl_N)$ 的表示；从现在起，我们会在记号中标明对 N 的依赖：V_λ^N（因为同一个分拆会为不同的 N 索引出 $U(gl_N)$ 的表示）。

定理 I.1（舒尔–韦尔对偶）。

1. 在 线性算子空间$(V^{\otimes n})$ 中，$U(gl_N)$ 和 $\mathbb{C}S_n$ 的像互为中心化子：

$$End_{U(gl_N)}(V^{\otimes n}) = \rho\big(\mathbb{C}S_n\big) \quad and \quad End_{\mathbb{C}S_n}(V^{\otimes n}) = \phi\big(U(gl_N)\big)\ . \tag{SW1}$$

2. 将 $V^{\otimes n}$ 视为 $U(gl_N) \otimes \mathbb{C}S_n$ 的表示，其分解为：

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} V_\lambda^N \otimes S_\lambda\,. \tag{SW2}$$

如前所述，舒尔–韦尔对偶的第一部分 (SW1) 蕴含存在如 (SW2) 所示的分解。但 (SW2) 的核心——也是舒尔–韦尔对偶重要的第二部分——在于准确识别 $GL(V)$ 的不可约表示以及 S_n 中哪些会出现在 $V^{\otimes n}$ 中。

I.2.2.1 舒尔–韦尔对偶中的核

显然，中心化子 $\mathrm{End}_{U(gl_N)}(V^{\otimes n})$ 和 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_n}(V^{\otimes n})$ 在上述讨论中发挥了重要作用。为了完成对舒尔–韦尔对偶的研究，自然要探求这些代数的显式代数描述。例如，此时对于问题“ $GL(V)$ 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用的中心化子是什么？”，我们只能回答，它是群代数 $\mathbb{C}S_n$ 的一个同态像。换言之，它是 $\mathbb{C}S_n$ 的一个商。因此，我们希望研究该映射的核：

$$\mathbb{C}S_n \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}(V^{\otimes n})\ .$$

事实上，上述映射的核已在 (SW2) 中得到隐式描述，因为 S_n 的不可约表示在 $V^{\otimes n}$ 中的出现情况已被确定，从而也确定了那些在表示 ρ 下消失的表示。我们将在下一段中更详细地讨论这一点，目的是推导出该商的代数描述（例如，给出显式的定义关系）。

注 I.2. 当然，我们也可以询问从 $U(gl_N)$ 出发的映射的核，从而询问 $U(gl_N)$ 中与 $V^{\otimes n}$ 上 S_n-作用的中心化子同构的商。我们不会沿着这个方向展开，但要指出，通过这种方式可以得到一些研究充分且颇有趣的代数，称为 Schur代数 $S(n,N)$。关于将其明确描述为 $U(gl_N)$ 的商，请参阅 [Gre]，以及 [DG]。▲

半单代数的商的一般理论。设 A 是 $\mathbb{C}$ 上的有限维半单代数。设 S 是 A 的一组完备的两两非同构不可约表示的指标集。阿廷–韦德伯恩定理断言，我们有如下代数同构：

$$A \cong \bigoplus_{\lambda \in S} \mathrm{End}(S_\lambda) \ , \tag{I.6}$$

其中，S_λ 是与 λ对应的不可约表示的一种实现。该同构自然地由以下方式给出：将 $a \in A$ 映射到线性算子空间 $\mathrm{End}(S_\lambda)$ 中与 a 在 S_λ上的作用相对应的自同态。

由阿廷–韦德伯恩分解（I.6）可立即看出，A 的理想（等价地，商）与 $S' \subset S$ 的子集相对应，具体如下：

$$I_{S'} = \bigoplus_{\lambda \in S'} \mathrm{End}(V_\lambda) \qquad \text{and} \qquad A/I_{S'} \cong \bigoplus_{\lambda \in S \setminus S'} \mathrm{End}(V_\lambda) \ .$$

通俗地说，要得到半单代数 A的一个商，需要选取某个不可约表示子集（此处为 S'）；从 A 到商 $A/I_{S'}$的过程中，这些表示必须消失。这就是对理想的一种表示论描述。

接着，我们将极小中心幂等元 E_λ 定义为 A 中的元素：在 A 的阿廷–韦德伯恩分解下，它在与 λ对应的分量中对应于 Id_{V_λ}，而在所有其他分量中对应于 0。集合 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in S}$ 是 A的一组完备的极小中心正交幂等元，也就是说，它们是中心的，它们之和为 1，它们满足$E_\lambda E_{\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'} E_\lambda$ ，并且不能写成两个非零中心幂等元之和。

在 A 的任意表示 W 中，按定义，极小中心幂等元 E_λ 的作用将其投影到与 λ 对应的 W 的同型分量。更准确地说，若将 W 分解为不可约表示，

$$W \cong \bigoplus_{\lambda' \in S} V_{\lambda'}^{\oplus m_{\lambda'}} \ ,$$

那么 E_λ 的作用就是投影到直和项 $V_\lambda^{\oplus m_\lambda}$，即：

$$E_{\lambda|_{V_\lambda}} = \mathrm{Id}_{V_\lambda} \quad \text{and} \quad E_\lambda(V_{\lambda'}) = 0 \ \text{ if } \lambda' \neq \lambda \ .$$

请注意，理想 $I_{S'}$ 的一组生成元由满足 $\lambda \in S'$ 的元素 E_λ 构成。

回到舒尔–韦尔对偶。现在我们已经可以描述舒尔–韦尔对偶中出现的 $\mathbb{C}S_n$ 的商。由 (SW2) 可立即得出，从 $\mathbb{C}S_n$ 映射到 $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ 的映射的核是理想 $I_{S'}$，其中 S' 是 n 的分拆中行数严格多于 N 的那些分拆所组成的子集。

从情形 $n = N+1$ 入手很有用。在这种情形下，这样的分拆只有一个，即由 $N+1$ 个方格组成的单列。这是 S_{N+1} 的符号表示。下面描述它的极小中心幂等元。这个幂等元与所谓的 $\mathbb{C}S_{N+1}$ 反对称化子重合。

对于任意 n，$\mathbb{C}S_n$ 的反对称化子是以下元素：

$$P'_n = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} sgn(w) w. \tag{I.7}$$

容易验证，P'_n 满足 $wP'_n = P'_n w = sgn(w) P'_n$，且 P'_n 是一个幂等元，使得在 $\mathbb{C}S_n$ 中乘以 P'_n 的像维数为 1。

根据上文回顾的内容，当 $n = N+1$ 时，反对称化子 P'_{N+1} 是舒尔–韦尔对偶中核的一个生成元。现在，若 $n \geq N+1$，我们可以取 P'_{N+1}，它是 $\mathbb{C}S_{N+1}$ 的一个元素；借助 S_{N+1} 到 S_n 的自然包含，我们可以将它视为 $\mathbb{C}S_n$ 的一个元素。事实证明，在 $\mathbb{C}S_n$ 中，该反对称化子也生成了与 n 中行数严格多于 N 的分拆所对应的理想。这可由 S_n 到 S_{N+1} 的表示限制知识推出（参见附录中的布拉泰利图）。事实上，可以看到，S_{N+1} 的符号表示恰好出现在那些行数严格多于 N 的 S_n 表示的限制中。因此，P'_{N+1} 的像恰好在正确的一组表示中非零，而这足以推出所述结论。

我们指出，截至目前，对中心化子的描述并未明确依赖于维数 N的 V。当然，这种依赖隐藏在从 $\mathbb{C}S_n$ 到线性算子空间$(V^{\otimes n})$的映射及其核中。因此，它现在显式出现是十分自然的。

定理 I.3 (SW2')。

- 如果 $n \le N$ 则该映射的核为 $\{0\}$，且中心化子 线性算子空间$_{U(gl_N)}(V^{\otimes n})$ 与 $\mathbb{C}$ 同构 S_n.
- 若 $n > N$，则该映射的核由 $\mathbb{C}S_n$ 中的元素 P'_{N+1} 生成。因此，中心化子 线性算子空间$_{U(gl_N)}(V^{\otimes n})$ 是 $\mathbb{C}S_n$ 关于关系 $P'_{N+1} = 0$ 的商。

换言之，要完整描述中心化子，我们从对称群 $\mathbb{C}S_n$ 的代数出发；若 $n > N$，则消去作用于 $N+1$ 个字母上的反对称化子。具体而言，中心化子 线性算子空间$_{U_q(sl_N)}(V^{\otimes n})$ 可描述为由 s_1，....., s_{n-1} 生成并满足以下定义关系的代数:

$$\begin{array}{ll} s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}\,, & \text{for } i \in \{1,\dots,n-2\}\,, \\ s_i s_j = s_j s_i\,, & \text{for } i,j \in \{1,\dots,n-1\} \text{ such that } |i-j|>1\,, \\ s_i^2 = 1\,, & \text{for } i \in \{1,\dots,n-1\}\,, \\ P'_{N+1} = 0 & \text{if } n > N. \end{array}$$

例 I.4（Temperley–Lieb 代数）。设 $N = 2$。在此情形下，中心化子 线性算子空间$_{U(sl_2)}(V^{\otimes n})$ 称为 Temperley–Lieb 代数。附加关系 $P'_3 = 0$ 写作:

$$1 - s_1 - s_2 + s_1 s_2 + s_2 s_1 - s_1 s_2 s_1 = 0\ .$$

可以证明，对于所有 $i = 1,\dots,n-2$，它都蕴含具有指标 $i, i+1$ 的相同关系。然后令 $t_i := s_i - 1$，即可恢复 Temperley–Lieb 代数的另一种标准表示:

$$t_i^2 = -2t_i\,, \quad t_i t_{i+1} t_i = t_i\,, \quad t_{i+1} t_i t_{i+1} = t_{i+1} \quad \text{and} \quad t_i t_j = t_j t_i \text{ if } |i-j|>1.$$

I.2.3 舒尔–韦尔对偶的扩展

鉴于舒尔–韦尔对偶在表示论中的基础性重要地位，它存在许多推广形式。例如，我们可以考虑比 V 本身更一般的 $GL(V)$ 的表示。这将是本论文其中一个章节的研究主题。

在本节中，我们将仅简要介绍舒尔–韦尔对偶从 $GL(V)$ 到经典群 $O(V)$ 和 $SP(V)$ 的第一次历史性推广，以及近年来涉及对称群的一种推广方式，但其处理方式与之前有所不同。事实上，我们将对下表进行简要介绍:

在 $V^{\otimes n}$ 上对角作用的群	它们的中心化子
$GL(V)$	对称群
$\cup$	$\cap$
$O(V)$ 和 $SP(V)$	Brauer代数
$\cup$	$\cap$
S_N 其中 $N =$ 维(V)	分划代数

左侧是 S_N 包含于正交群 $O(V)$中的情形，其中我们将 S_N 的元素视为置换矩阵。

I.2.3.1 经典群与Brauer代数

经典群。为简便明确起见，我们将研究矩阵群。取一个 V维数为 N的有限维向量空间，并固定一个基 v_1，....., v_N，从而将End(V)中的元素与$N \times N$矩阵对应起来。取一个可逆的 $N \times N$矩阵 $G = (g_{ij})$，它或者是对称的，或者是反对称的，并将其视为一个非退化双线性形式的Gram矩阵：$< v,\ w >_G = {}^t vGw$，也就是说，$< v_i,\ v_j >_G = g_{ij}$。因此，该双线性形式或者是对称的，或者是交错的（若为交错形式，则 N 必为偶数）。

我们将考虑 $GL(V)$ 的子群 Γ_G，它由满足 ${}^t MGM = G$ 的可逆矩阵 M 构成。当然，这等价于要求 M 保持双线性形式：$< Mv,\ Mw >_G = < v,\ w >_G$。子群 Γ_G 以对角作用作用于张量空间 $V^{\otimes n}$；这正是先前研究的 $GL(V)$ 的对角作用在 Γ_G 上的限制。

一般而言，正如预期的那样，子群 Γ_G 在 $V^{\otimes n}$ 中拥有比 $GL(V)$ 更多的不变子空间。特别是在 $V\otimes V$ 中，主要的新意在于该向量

$$v_0 := \sum_{i,j} \overline{g}_{ij} v_i \otimes v_j \ ,$$

现在由 Γ_G 保持不变，其中 G 的逆元是 $\overline{G} = (\overline{g}_{ij})$。这使我们能够构造一个与 Γ_G 交换的算子，即 $\mathrm{End}(V\otimes V)$ 中的一个元素：

$$E \ : \ v\otimes w \mapsto < v, w >_G \, v_0 \ .$$

与 $GL(V)$ 的情形相比，这是 Γ_G 的中心化子中的一个新元素；在那种情形下，我们只有置换算子 $P(v\otimes w) = w\otimes v$。容易验证，元素 P 和 E 满足以下关系：

$$P^2 = \mathrm{Id}_{V\otimes V} \ , \qquad E^2 = \pm NE \qquad \text{and} \qquad EP = PE = \pm E \ ,$$

其中，符号 $\pm$ 与 ${}^tG = \pm G$ 中的相同。

Brauer代数与 $O(N)$, $SP(N)$ 的中心化子。关于经典群的中心化子的首要结果是， P 和 E 在 $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ 中的各种自然嵌入生成整个中心化子。我们首先需要一个代数来编码上述元素 P 和 E 的关系。因此，我们固定一个非零参数 $\delta\in\mathbb{C}$ 和一个整数 $n\geq 0$。我们将 Brauer代数 $Br_n(\delta)$ 定义为由以下元素生成的代数：

$$s_1, \dots, s_{n-1}, \ e_1, \dots, e_{n-1} \ ,$$

其定义关系为：

$$\begin{gathered}
s_i^2 = 1 \ , \quad e_i^2 = \delta e_i \ , \quad e_i s_i = s_i e_i = e_i \ , \qquad i = 1, \dots, n-1, \\
s_i s_j = s_j s_i \ , \quad e_i e_j = e_j e_i \ , \qquad s_i e_j = e_j s_i \ , \qquad \text{if } |i-j| > 1, \\
s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \ , \quad e_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i e_{i+1} \ , \quad e_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} e_i \ , \\
e_i s_{i+1} e_i = e_i \ , \qquad i = 1, \dots, n-2.
\end{gathered}$$

首先考虑矩阵 G 为对称矩阵的情形。取 G 为 N 阶单位矩阵，并将所得的群 Γ_G 记为 $O(N)$。对于 $\delta = N$，考虑 Brauer代数 $Br_n(N)$，并在 $V^{\otimes n}$ 上构造其表示：

$$\rho_{O(N)} \ : \ \begin{array}{l} Br_n(N) \ \to \ \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \\ s_i \mapsto P_i \quad \text{and} \quad e_i \mapsto E_i \end{array}$$

其中， P_i （分别为 E_i）是在 $V^{\otimes n}$ 中作用于 V 的 i 和 $i+1$ 个副本上的算子 P（分别为 E）。

然后考虑矩阵 G 为反对称矩阵的情形，这意味着 N 为偶数。取 G 为矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$，其中各块的大小为 $N/2$。将所得的群 Γ_G 记为 $SP(N)$。对于 $\delta = -N$，考虑 Brauer代数 $Br_n(-N)$，并在 $V^{\otimes n}$ 上构造其表示：

$$\rho_{SP(N)} \ : \ \begin{array}{l} Br_n(-N) \ \to \ \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \\ s_i \mapsto -P_i \quad \text{and} \quad e_i \mapsto E_i \end{array}$$

其中 P_i 和 E_i 如上所述。

舒尔–韦尔对偶第一部分的类似结论对于经典群而言是：在两种情况下，Brauer代数的像都是该群在 $V^{\otimes n}$上的对角作用的整个中心化子：

$$\rho_{O(N)}(Br_n(N)) = \mathrm{End}_{O(N)}(V^{\otimes n}) \qquad \text{and} \qquad \rho_{SP(N)}(Br_n(-N)) = \mathrm{End}_{SP(N)}(V^{\otimes n}) \ .$$

在这两种情形（$O(N)$ 和 $SP(N)$）中，也存在舒尔–韦尔对偶第二部分的类似结论，即 $V^{\otimes n}$ 的分解，如 (SW2) 所示，其中涉及 Brauer代数的不可约表示。我们不详述具体内容，感兴趣的读者可参阅例如 [Wen]。

图示描述。考虑以下一组图示（Brauer 图）。我们取两行各含 n 个点，上下排列，并画边将点两两相连（共有 n 条边）。注意，这是一种组合对象，唯一重要的信息是哪个点与哪个点相连。换言之，这样的图示对应于集合 $\{1,\dots,2n\}$ 的一个分拆（我们将这些点编号为 1, . . ., 2n），分拆成 n 2 元子集；如果两个图示所对应的分拆相同，则认为它们等价。

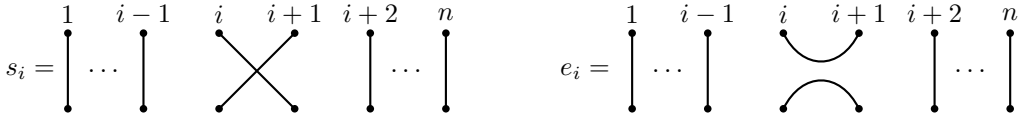
考虑由 Brauer 图示的线性组合构成的向量空间，并将基元素与 Brauer 图示对应起来。在 Brauer 图示上定义乘法，并将其线性延拓。取两个图示 d 和d'，执行以下步骤：

- 将 d 的图示置于 d' 的图示上方，并将 d 的底行上的点与 d'的顶行上的点对应重合。我们用 $k(d,d')$表示所得图示中的闭环数。
- 接着，去掉中间一行的点，并将乘积 dd' 定义为所得的不含闭环的图示乘以 $\delta^{k(d,d')}$。

这就在由 Brauer 图示的线性组合构成的向量空间上定义了一个结合含幺代数，结果证明它与 $Br_n(\delta)$同构。

例如，只考虑边始终连接顶行与底行的图示，就会得到对称群 S_n；而将范围限制为这些置换图时，乘法就是 S_n 的乘法（置换复合）。代数 $Br_n(\delta)$更大，实际上有 $(2n-1)!! = 1\times 3\times\cdots\times(2n-1)$种不同的 Brauer 图示（连接第一个点有 $2n-1$ 种选择，接着连接下一个点有 $2n-3$ 种选择，依此类推）。

上述 $Br_n(\delta)$ 的代数表示中的生成元对应于以下图示：



说明与参考文献。Brauer代数链 $\{Br_n(\delta)\}_{n\geq 0}$ 具有非常有趣的表示论。当它是半单的时，其结构可由布拉泰利图概括；该图由杨图通过“上-下”过程得到（对称群的布拉泰利图见附录）：从 $n-1$ 到 n，可以在一个分拆中添加一个方格，或移除一个方格。对于所有满足 $n-k$ 为偶数的 $k\leq n$，Brauer代数 $Br_n(\delta)$ 的简单模由 k 的分拆标记。关于 Brauer代数的定义、结构和半单表示论，可参考 [Br, Bro, HW, IMO, Na1, Ram, Wen]。

对于一般的 δ，Brauer代数 $Br_n(\delta)$ 是半单的；但在 δ 的某些特化下则不是。当 δ 是满足 $|\delta|<n$ 的整数时，会出现非半单性。回想一下，经典群 Γ 的 Brauer–Schur–Weyl 对偶可表示为：

$$\mathrm{End}_\Gamma(V^{\otimes n}) = \rho\big(Br_n(\pm N)\big),$$

其中 $N=\dim(V)$ 和 $\rho\big(Br_n(\pm N)\big)$ 是 $Br_n(\pm N)$ 的某个同态像。因此，一个颇为耐人寻味的特点是，经典群（本质上是半单的）的中心化子通常表示为一个非半单代数的商。Brauer代数在半单情形之外的表示论展现出一些有趣的性质，参见例如 [CDVM1、CDVM2、Mar5]。

I.2.3.2 对称群与分划代数

作为本节的结尾，我们简要介绍舒尔–韦尔对偶的另一种推广。这一次，我们考虑以自然置换表示作用的对称群 S_N。具体而言，取一个向量空间 V，其给定基为 v_1、……、v_N，而 S_N通过置换向量 v_1、……、v_N作用于 V（不要与通过置换 V 的副本而作用于 $V^{\otimes n}$ 上的 S_n 相混淆）。当然，置换矩阵是正交的，因此 S_N 通过正交群 $O(N)$ 的一个子群作用于 V。上一节已用 Brauer代数描述了 $O(N)$ 的中心化子，因此我们期待在此找到一个包含并推广 Brauer代数的代数。

在这一情形中出现的代数是分划代数 $P_n(\delta)$。不同于 Brauer图（回想一下，它们对应于将 $2n$ 个点划分为若干个二元子集），我们考虑对$2n$ 个点的任意可能的分拆。通过连接给定分拆中属于同一子集的点，画出相应的图示。这些图示集合上的乘法与 Brauer图中的定义相同：首先将两个

图示 d 和 d' 拼接起来，并计算仅包含中间点的连通分支的数量，记作$k(d,d')$。然后去掉中间一行的点，乘积 dd' 定义为 $\delta^{k(d,d')}$ 乘以去掉中间连通分支后的图示。

显然，分 划代数 $P_n(\delta)$ 包含 Brauer 代数 $Br(\delta)$，而后者又包含对称群 p
代数 $\mathbb{C}S_n$。这 就是本节开头表格中提到的包含链。

分划代数 $P_n(\delta)$ 在张量空间 $V^{\otimes n}$ 上的作用非常简单。将顶行中的点从左到右依次记为 $1,\dots,n$，底行中的点同样依次记为 $1',\dots,n'$。图示 d 对应于 $\{1,\dots,n,1',\dots,n'\}$的一个分拆。我们规定：

$$(d)^{i_1,\dots,i_n}_{i_{1'},\dots,i_{n'}} = \begin{cases} 1 & \text{if } i_a = i_b \text{ whenever } a \text{ and } b \text{ are in the same block,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

这定义了 $V^{\otimes n}$ 上的一个算子：

$$\rho(d)\cdot v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_n} = \sum_{i_{1'},\dots,i_{n'}} (d)^{i_1,\dots,i_n}_{i_{1'},\dots,i_{n'}} v_{i_{1'}}\otimes\cdots\otimes v_{i_{n'}},$$

其中所有指标的取值范围均为 1 到 $N=\dim(V)$。可以验证，这推广了此前讨论 $O(N)$ 的中心化子时所述的 $Br(N)$ 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用。这里与舒尔 – 韦尔对偶对应的结果是：

$$\mathrm{End}_{S_N}(V^{\otimes n}) = \rho\big(P_n(\pm N)\big),$$

换言之 ， S_N 在 $V^{\otimes n}$ 上的对角作用的中心化子是分划代数的像。

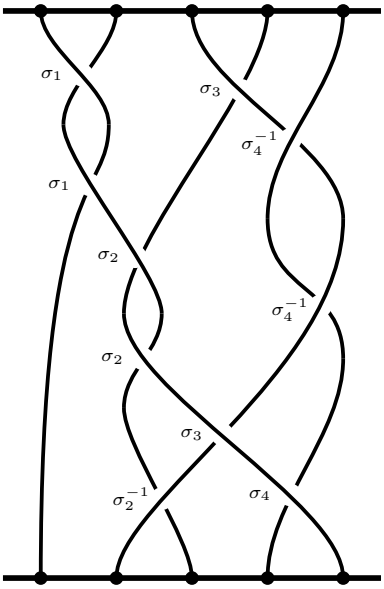
备注与参考文献。分划代数最初是在统计物理学中的波茨模型背景下引入的。读者可参阅 [HR、Mar1、Mar2、Mar3、Mar4、MR、Jo4] 及其中的参考文献。分划代数也用于研究对称群 [BDVO]的 Kronecker 系数。

I.3 辫群与杨–巴克斯特方程

接下来我们转向一个（看似）不同的主题：辫群与杨–巴克斯特方程。它们与前文的联系将在最后一个小节的例子中展现。

I.3.1 辫群

关于辫群的精确定义和更多细节，请参阅 [Bir、BZ、Kam、KT]。下面是一个辫子的例子（有 5 股线）：



我们固定两条水平平行线，每条线上各有 5 个固定点，并用一条“辫股”将上方直线上的每个点与下方直线上的一个点一一连接。

这是三维空间中的一个对象，因此辫股可以从其他辫股的“上方”或“下方”穿过。交叉旁边的标记 $\sigma_i^{\pm 1}$ 表示辫群的标准生成元。

辫子在同伦意义下视为等价，也就是说，我们可以连续移动辫股，同时保持端点固定；移动后的辫子仍是同一个辫子。

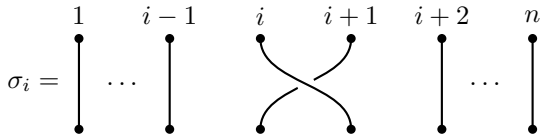
如例子所示，一条含有 n 股线的辫子画在一个矩形带内，矩形带的顶边有 n 个固定点，底边有 n 个固定点。我们用条带内的辫股将每个顶点与一个底点一一连接起来

。辫股是一条从顶点延伸到底点的连续曲线。沿曲线前进时，垂直坐标始终递减（不允许任何辫股向上返回）。

在条带的每个点，最多只有两股线彼此交叉；在每个交叉处，我们会标明哪一股线从另一股线上方穿过。当从左侧延伸而来的辫股从右侧延伸而来的辫股上方（分别为下方）穿过时，我们称该交叉为正（分别为负）。我们假设交叉的数量有限。这种图示称为具有 n 股线的辫子；辫子视为模同伦（端点固定时对股线进行连续变形）等价。

在由所有具有 n 股线的辫子组成的集合 B_n 上定义结合乘法，该乘法就是图示的垂直拼接。若 α、$\beta \in B_n$，要计算乘积 $\alpha\beta$，我们将 α 的图示放在 β 的图示上方，将 α 的底部点与 β 的顶部点重合，从而连接股线，然后删除这些中间点。

在此乘法下，由具有 n 股线的辫子组成的集合 B_n 构成一个群。B_n 的单位元 **1** 是这样一种辫子：其中的 n 股线竖直且平行。以下元素称为初等辫：

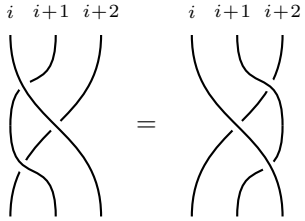


$$i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

逆元 σ_i^{-1} 与 σ_i 是同一个图示，只是用负交叉代替正交叉。初等辫 σ_1，……，σ_{n-1} 是辫群 B_n的生成元。它们满足以下关系：

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad \text{if } |i-j| > 1,$$

因为如果 $|i-j|>1$，那么辫股对 i、$i+1$ 和 j、$j+1$ 可以彼此独立地操作。因此，以下关系也显然成立：



事实上，只需移动中间的辫股即可。用代数术语来说，我们有：

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\,, \qquad \text{for } i = 1, \ldots, n-2.$$

事实证明，上述两类关系足以完全刻画辫群。下面是著名的定理：

定理 I.5（Artin [Ar1、Ar2、Boh]）。辫群 B_n 由 σ_1，……，σ_{n-1} 生成，并满足以下定义关系：

$$\begin{aligned} &\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\,, && \textit{for } i \in \{1, \ldots, n-2\}\,, \\ &\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\,, && \textit{for } i,j \in \{1, \ldots, n-1\} \textit{ such that } |i-j| > 1\,. \end{aligned} \tag{I.8}$$

B_n的局部表示。设 V 是一个向量空间，并构造由 n 个 V组成的张量积 $V^{\otimes n}$。取一个可逆元 $R \in$ 线性算子空间（$V \otimes V$），并按如下方式定义元素 R_1，……，R_{n-1}：

$$\text{Operators } R_1, \ldots, R_{n-1} \text{ on } V^{\otimes n}: \qquad \overbrace{V \otimes V}^{R_1} \overbrace{\otimes V}^{R_2} \otimes \ldots\ldots \overbrace{\otimes V}^{R_{n-1}}$$

更准确地说，对于 $i=1$、…、$n-1$，算子 R_i 仅在 V 的副本 i、$i+1$ 上对 $V^{\otimes n}$ 产生非平凡作用，并且在这些副本上按 R 作用。也就是说，它由 $R_i = \mathrm{Id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes R \otimes \mathrm{Id}_{V^{\otimes n-i-1}}$ 定义。

我们称 R 定义了辫群 B_n 的局部表示，或者称以下映射 p

$$\begin{aligned} \rho \quad : \quad B_n \quad &\to \quad \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \\ \sigma_i \quad &\mapsto \quad R_i \end{aligned}$$

若满足辫关系，则是 B_n 在张量空间 $V^{\otimes n}$ 上的局部表示

$$R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2 \qquad \text{on } V \otimes V \otimes V. \tag{I.9}$$

这立即推出了 B_n 的所有其他定义关系，从而使映射 ρ 成为群 B_n 的一个表示。因此，局部表示就是 B_n 在张量空间 $V^{\otimes n}$ 上的一个表示，其中生成元的作用具有上文所述的特殊（局部）形式 σ_i。它仅取决于满足 (I.9) 的可逆元 $R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$。

例 I.6。置换算子 $P \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ 将 $x \otimes y$ 送至 $y \otimes x$，给出了辫群的第一个局部表示例子。事实上，它可经由对称群在 $V^{\otimes n}$ 上的表示 S_n 分解。

I.3.2 杨–巴克斯特方程

设 V 是一个有限维向量空间。我们为作用于 $V^{\otimes n}$上的算子引入一些额外的记号。若$S \in \mathrm{End}(V \otimes V)$，则用记号 S_{ij} 表示作用于 $V^{\otimes n}$ 上的算子：它在第 i 和第 j 个副本上按照 S 作用，在其他副本上则平凡作用。我们考虑一个函数

$$\begin{array}{rccl} R & : & \mathbb{C}^2 & \to & \mathrm{End}(V \otimes V) \\ & & (u,v) & \mapsto & R(u,v)\ . \end{array}$$

The 杨–巴克斯特方程（简称 YB 方程）是关于这类函数的函数方程 R:

$$R_{12}(u_1,u_2)R_{13}(u_1,u_3)R_{23}(u_2,u_3) = R_{23}(u_2,u_3)R_{13}(u_1,u_3)R_{12}(u_1,u_2) \qquad \text{作用于 } V\otimes V\otimes V\text{上。} \tag{I.10}$$

在此语境下，变量 u_1、u_2、u_3 通常称为谱参数。从我们的角度来看，这个方程的所谓辫化版本更为相关。由 R 定义另一个函数:

$$\begin{array}{rccl} \check{R} & : & \mathbb{C}^2 & \to & \mathrm{End}(V \otimes V) \\ & & (u,v) & \mapsto & PR(u,v) \end{array}\ ,$$

其中 P 是将 $x \otimes y$ 送到 $y \otimes x$ 的置换算子。为了更清楚地看出它与辫关系的联系，设 $\check{}\ R_1(u,v) := \check{}R_{12}(u,v)$, 且 $\check{}\ R_2(u,v) := \check{}R_{23}(u,v)$。经过简单推导可知，杨–巴克斯特方程等价于下面这个仅涉及函数 R 的方程:

$$\check{R}_1(u_1,u_2)\check{R}_2(u_1,u_3)\check{R}_1(u_2,u_3) = \check{R}_2(u_2,u_3)\check{R}_1(u_1,u_3)\check{R}_2(u_1,u_2) \qquad \text{on } V\otimes V\otimes V. \tag{I.11}$$

需要精确区分时，我们将此形式称为编织杨-巴克斯特方程。

在许多情况下，函数 仅依赖于比值 u/v。在这种情况下（令 $u = u_1/u_2$ 和 $v = u_2/u_3$），编织杨-巴克斯特方程变为:

$$\check{R}_1(u)\check{R}_2(uv)\check{R}_1(v) = \check{R}_2(v)\check{R}_1(uv)\check{R}_2(u) \qquad \text{on } V\otimes V\otimes V. \tag{I.12}$$

$\check{}$ 除了乘法形式，有时我们也会遇到加法形式，此时函数 R 仅依赖于差值 $u - v$:

$$\check{R}_1(u)\check{R}_2(u+v)\check{R}_1(v) = \check{R}_2(v)\check{R}_1(u+v)\check{R}_2(u) \qquad \text{on } V\otimes V\otimes V. \tag{I.13}$$

例 I.7（常数解，杨解）。

- 编织杨-巴克斯特方程的常数解（即不依赖于谱参数）等价于辫群的局部表示。
- 可以手动验证，下列函数满足 (I.10):

$$R(u,v) = \mathrm{Id}_{V\otimes V} + \frac{P}{u-v}\,,$$

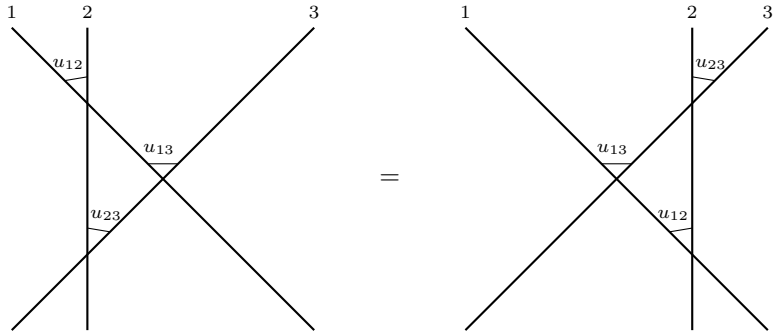
或者等价地说，编织杨-巴克斯特方程 (I.11) 由下式满足:

$$\check{R}(u,v) = PR(u,v) = P + \frac{\mathrm{Id}_{V\otimes V}}{u-v}\,.$$

这个解称为杨解。

参考文献与图示。杨–巴克斯特方程无疑是理论物理学和数学物理学中的基本方程之一。关于这一主题的浩瀚文献中，部分参考文献包括 [AYP, Fad, FST, GRS, Jim3, Jim4, JM, KBI, PAY]。历史文献包括 [McG, Ons, Yan1, Yan2, ZZ] ，以及标准著作 [Bax]。尽管杨-巴克斯特方程属于物理学理论和数学的一面，但值得注意的是，如今可以研究它与实验的联系，参见例如 [Bat, BF]。

在物理学中的一种诠释里，杨–巴克斯特方程表示为下图:



其中， u_{ij} 是一些物理参数。在这里，杨–巴克斯特方程是将 n 体相互作用用二体相互作用表示的因式分解所需的相容条件。这源自论文 [McG、Yan1、Yan2、ZZ]。请注意，杨–巴克斯特方程只涉及三个粒子。对杨–巴克斯特方程的这种解释，与下面关于辫群和对称群的经典事实非常相似。对称群的最长元素（颠倒 1，...， n 的顺序）可以作为简单对换的最小长度乘积，以不同方式进行因式分解；仅仅假设辫关系（其只涉及三股辫股线），就可以看出所有这些不同的因式分解都相等。上面的杨–巴克斯特方程与辫方程发挥着相同的作用。

I.3.3 动机示例

I.3.3.1 对称群

为了开始揭示本节与上一节之间的联系，第一个例子应当是对称群。对称群 S_n 的生成元与关系表示为：生成元 $s_1, \ldots, s_{n-1}$ 满足定义关系：

$$\begin{aligned} &s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}\,, && \text{for } i \in \{1,\ldots,n-2\}\,,\\ &s_i s_j = s_j s_i\,, && \text{for } i,j \in \{1,\ldots,n-1\} \text{ such that } |i-j|>1\,,\\ &s_i^2 = 1\,, && \text{for } i \in \{1,\ldots,n-1\}\,. \end{aligned}$$

在这个表示中，生成元 s_i 被认作初等换位 $(i, i+1)$。这个表示清楚地表明，对称群 S_n 是辫群 B_n 的商，因为我们在辫群的阿廷表示中加入了定义关系 $s_i^2 = 1$ （定理 I.5）。

事实证明，对称群也与杨–巴克斯特方程有关，如例 I.7 所示。为了将其形式化，我们考虑以下函数：

$$s_i(u) := s_i + \frac{1}{u}\,, \qquad \text{where } i = 1,\ldots,n-1. \tag{I.14}$$

这些是取值于群代数 $\mathbb{C}S_n$中的函数。直接验证即可得出，杨–巴克斯特方程成立：

$$s_i(u) s_{i+1}(u+v) s_i(v) = s_{i+1}(v) s_i(u+v) s_{i+1}(u)\,.$$

因此，我们在群代数 $\mathbb{C}S_n$中得到了杨–巴克斯特方程的一个解。然而，由于它尚未成为作用于向量空间张量积上的算子，因此它还不是杨–巴克斯特方程的真正解。每当我们选择 S_n的一个局部表示时，它就会给出一个矩阵解。更准确地说，设我们有一个形如以下的S_n 表示：

$$s_i \mapsto \check{R}_i = \mathrm{Id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \check{R} \otimes \mathrm{Id}_{V^{\otimes n-i-1}}\,,$$

对于某个算子 $\check{R} \in \mathrm{End}(V \otimes V)$。于是，我们只需在该表示中应用公式（I.14），也就是说，令：

$$\check{R}(u) = \check{R} + \frac{\mathrm{Id}_{V\otimes V}}{u}\,,$$

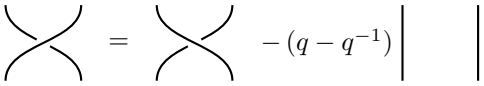
从而得到定义在 $V \otimes V$上的杨–巴克斯特方程的解。当然，对于任意向量空间 V，我们都有 S_n 在 $V^{\otimes n}$上的自然置换表示。这相当于取 $\check{R} = P_{V\otimes V}$。因此，我们恢复了杨解，它来自于在 S_n的张量表示中应用 $\mathbb{C}S_n$ 中的“抽象解”。

像 (I.14) 这样的公式通常称为巴克斯特化公式。它利用满足某种代数（此处为 $\mathbb{C}S_n$）的常数解（此处为 s_i），构造出一个带谱参数（此处为 $s_i(u)$）的杨–巴克斯特方程解。本节将给出更多巴克斯特化公式的例子。

I.3.3.2 Hecke 代数

定义。我们直接给出与辫群相关的定义。思路如下：辫群在代数上相当复杂，因为股线之间可以出现任意数量的交叉。因此，最直接的想法是添加一个代数关系，以便处理所有这些交叉。最简单的做法是添加关系 $\sigma_i^2 = 1$，从而得到对称群。这种做法过于简单，而次简单的做法则导出 Hecke 代数。

更准确地说，我们在辫群的定义中加入以下关系：



(I.15)

其中，q 是一个参数，可以视为不定元，也可以视为一个非零复数。该关系是局部关系，意味着它仅应用于辫子的一小部分（交叉附近），而辫子的其余部分保持不变。

从代数角度看，Hecke 代数 $H_n(q)$ 定义为由元素 σ_1、.....、σ_{n-1} 生成，并满足以下定义关系的代数：

$$\begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\,, & \text{for } i \in \{1,\dots,n-2\}\,, \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\,, & \text{for } i,j \in \{1,\dots,n-1\} \text{ such that } |i-j|>1\,, \\ \sigma_i^2 = 1 + (q-q^{-1})\sigma_i\,, & \text{for } i \in \{1,\dots,n-1\}\,. \end{array} \tag{I.16}$$

如果 q 是复数，它就是定义在 $\mathbb{C}$ 上的代数；如果 q 是不定元，也可以将其定义为定义在 $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上的代数。生成元的归一化采用了惯常的选择，使得二次特征方程为：

$$(\sigma_i - q)(\sigma_i + q^{-1}) = 0\ .$$

一般的二阶特征方程会有两个相互独立的特征值，但如果我们要求σ_i 可逆（事实上我们确实如此），那么就可以对 σ_i 重新归一化，使特征值的乘积为 -1，如上所示（注意，对 σ_i 重新归一化不会改变辫子关系）。

若 $q^2 = 1$ 关系 (I.16) 是对称群 S_n的定义关系，那么 Hecke 代数$H_n(1)$ 就是群代数 $\mathbb{C}S_n$。因此，Hecke 代数是对称群 S_n群代数的一种变形。

杨–巴克斯特方程。对于任意 $i \in \{1,\dots,n-1\}$，定义以下取值于代数$H_n(q)$ 的函数：

$$\sigma_i(u) = \sigma_i + (q-q^{-1})\frac{1}{u-1}\ . \tag{I.17}$$

然后，利用 $H_n(q)$ 中的关系进行直接计算可得：

$$\sigma_i(u)\sigma_{i+1}(uv)\sigma_i(v) = \sigma_{i+1}(v)\sigma_i(uv)\sigma_{i+1}(u)\ ,$$

也就是说，这些函数在 $H_n(q)$ 中满足编织杨-巴克斯特方程。因此，我们在 Hecke 代数 $H_n(q)$ 中得到了编织杨-巴克斯特方程的一个解，其公式相当简单。仿照对称群的讨论，并参照巴克斯特化公式 (I.14)，我们发现，要得到杨–巴克斯特方程真正的矩阵解，需要 Hecke 代数的局部表示。

事实证明，对于任意向量空间 V，我们都可以在 $V^{\otimes n}$ 上构造 $H_n(q)$ 的一个局部表示，作为 S_n 张量表示的推广。更确切地说，固定 V 的一组基 $(e_1,\dots,e_N)$，并在 $V\otimes V$ 上定义一个线性算子：

$$\check{R}(e_a\otimes e_b) := \begin{cases} q\, e_a\otimes e_b & \text{if } a=b, \\ e_b\otimes e_a + (q-q^{-1})\, e_a\otimes e_b & \text{if } a<b, \\ e_b\otimes e_a & \text{if } a>b. \end{cases} \qquad \text{where } a,b = 1,\dots,N. \tag{I.18}$$

可以手动验证，...

$$\sigma_i \mapsto \check{R}_i = \mathrm{Id}_{V^{\otimes i-1}}\otimes\check{R}\otimes\mathrm{Id}_{V^{\otimes n-i-1}}\ ,$$

是 Hecke 代数的一个表示。因此，最后将 $H_n(q)$ 的 Baxter化公式 (I.17) 与该表示结合起来，我们便得到任意向量空间 V 上杨–巴克斯特方程的另一个解。

例 I.8。若 $\dim(V) = 2$，按 $V \otimes V$ 的基的字典序排列，我们得到：

$$\check{R} = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q-q^{-1} & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \qquad \check{R}(u) = \begin{pmatrix} \frac{qu-q^{-1}}{u-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{(q-q^{-1})u}{u-1} & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \frac{q-q^{-1}}{u-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{qu-q^{-1}}{u-1} \end{pmatrix}.$$

来自 Hecke 代数的解 $\check{R}(u)$ 是杨解 $\check{R}(\alpha)$ 的一种变形，$= P +$ 恒等式 α 源自例 I.7，其含义如下：令 $u = q^{2\alpha}$，并取极限 $q \to 1$。

I.3.3.3 Brauer代数与 Birman–Murakami–Wenzl代数

Birman–Murakami–Wenzl（BMW）代数 $BMW_n(a,q)$ 源自 [BW、Mu1],，它是辫群代数 $\mathbb{C}B_n$ 对以下关系取商所得：

$$\begin{aligned} \sigma_i\varepsilon_i = a\varepsilon_i \qquad & \text{for } i = 1,\dots,n-1, \\ \varepsilon_i\sigma_{i+1}\varepsilon_i = a^{-1}\varepsilon_i \quad \text{and} \quad \varepsilon_i\sigma_{i+1}^{-1}\varepsilon_i = a\varepsilon_i \qquad & \text{for } i = 1,\dots,n-2, \end{aligned}$$

其中我们令

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{\sigma_i - \sigma_i^{-1}}{q-q^{-1}}\ .$$

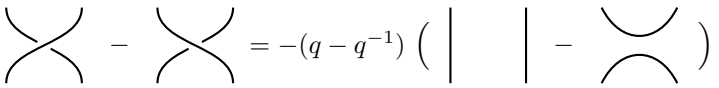
这里 q 和 a 是两个非零复数，且 $q^2 \neq 1$。或者，我们也可以在环 $\mathbb{Z}[q^{\pm1}, a^{\pm1}, (q-q^{-1})^{-1}]$ 上使用不定元 q 和 a。

仅用 σ_i 表示时，第一个关系为：

$$(\sigma_i - q)(\sigma_i + q^{-1})(\sigma_i - a) = 0\ ,$$

因此，我们得到了生成元的三次特征方程。由代数表示可清楚看出，若进一步施加 $\varepsilon_i = 0$，便可恢复 Hecke 代数 $H_n(q)$。

注释 I.9. BMW代数还有一个拓扑定义，它使用缠结图的概念而不是辫子，并采用某种正则同位概念。在这种表述中，生成元是通常的初等辫，而元素 ε_i 对应于连接 第 i 个和第 $i+1$ 个点的初等缠结图。σ_i 与 ε_i 之间的关系即为Kauffman括号关系：



(I.19)

这是一个局部关系，在某种意义上允许以类似 Hecke 代数的方式“消解”交叉，不过过程更为复杂。Hecke 代数导出 Jones/HOMFLYPT多项式，而 BMW代数导出考夫曼多项式 [Kau]。更多详情请参阅 [BW、Mor、MT] 。▲

杨–巴克斯特方程。对于任意 $i \in \{1,\dots,n-1\}$，定义如下函数，其取值属于代数$BMW_n(q,a)$：

$$\sigma_i(u) = \sigma_i + (q-q^{-1})\frac{1}{u-1} + (q-q^{-1})\frac{1}{a^{-1}qu+1}\varepsilon_i\ . \tag{I.20}$$

结果　　证明这些函数 [Jo2] 在 BMW代数 中满足编织杨-巴克斯特方程　　：

$$\sigma_i(u)\sigma_{i+1}(uv)\sigma_i(v) = \sigma_{i+1}(v)\sigma_i(uv)\sigma_{i+1}(u)\ .$$

按照上文讨论对称群和 Hecke 代数时采用的相同步骤，接下来要讨论的是：能否为 BMW代数找到某种局部表示，从而得到杨–巴克斯特方程的真正矩阵解。事实证明，这仍然是可行的。这里不详述具体细节，显式公式请参见 [Mu2, Tur] 。在这两种情况下（Hecke 和 BMW），局部表示的存在对于量子群的 Schur–Weyl 对偶具有深远意义。我们将在 I.4 节稍后讨论这一点。

与 Brauer代数的联系。对于满足 q such that$q^2=1$ 的值，BMW代数在上文中并未定义。问题在于定义 ϵ_i 时除以了 $(q-q^{-1})$。因此，我们将给出 BMW代数的另一种表示形式，以明确展示它与 Brauer代数之间的联系。首先，我们需要强化作为生成元的 ε_i，因此生成元现在为 σ_i 和 ε_i，其中 $i=1,\dots,n-1$。我们采用以下定义关系：

$$\sigma_i-\sigma_i^{-1}=(q-q^{-1})(1-\varepsilon_i)\,,\quad \varepsilon_i^2=(1-\frac{a-a^{-1}}{q-q^{-1}})\varepsilon_i\,,\quad \varepsilon_i\sigma_i=\sigma_i\varepsilon_i=a\varepsilon_i\,,\qquad i=1,\dots,n-1,$$
$$\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i\,,\quad \varepsilon_i\varepsilon_j=\varepsilon_j\varepsilon_i\,,\quad \sigma_i\varepsilon_j=\varepsilon_j\sigma_i\,,\qquad \text{if } |i-j|>1,$$
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\,,\quad \varepsilon_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\varepsilon_{i+1}\,,\quad \varepsilon_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}=\sigma_i\sigma_{i+1}\varepsilon_i\,,$$
$$\varepsilon_i\sigma_{i+1}\varepsilon_i=a^{-1}\varepsilon_i\quad\text{and}\quad \varepsilon_i\sigma_{i+1}^{-1}\varepsilon_i=a\varepsilon_i\,,\qquad i=1,\dots,n-2.$$

与之前相比，细微的区别在于，只要 $\frac{a-a^{-1}}{q-q^{-1}}$ 有定义，这个代数就有定义。如果 $(q-q^{-1})$ 可逆，那么第一个关系便可将 ε_i 表示为 σ_i 和 σ_i^{-1} 的形式，而相较于之前新增的所有关系都可以轻易推出。因此，如果 $q^2\neq 1$，那么这与之前的代数相同。

现在考虑 $a=\pm q^{\pm(1-\delta)}$ 的特化（符号任取）。我们立即发现，存在一个 q 的取值使得 $q^2=1$ 成立；此外，对于这样的 a 和 q，可以得到 Brauer代数。从这个意义上说，BMW代数是 Brauer代数的一种变形。

从 BMW代数到 Brauer代数的特化，使我们能够从公式 (I.20) 得到相应的 Brauer代数公式。将谱参数 u 替换为 q^{2u}，可得：

$$s_i(u)=s_i+\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1-\delta/2}e_i\,,$$

满足具有加法谱参数的杨–巴克斯特方程（准确地说，必须使用特化$a=-q^{\delta-1}$；另一种特化则得到杨解 s_i+1/u）。

I.3.3.4 辫群代数的更多商?

继续列举例子，自然会想到考察辫群代数的其他商。然而，要通过显式的生成元与关系找到一些这样的商（并且值得研究），事实证明非常困难。与复反射群相关的分圆 Hecke 代数只提供了少数几种可能性，参见 [Ma1、Cha]。排除通常赫克代数以及由单个元素生成的交换代数（$n=2$）后，我们只得到另外 5 种代数；例如，辫股数 n必须小于 5。甚至，寻找包含生成元三次特征方程的、最一般的辫群代数有限维商这一问题也很困难，例如参见 [Ma4]。

I.4 量子群及其中心化子

在上一节讨论辫群和杨–巴克斯特方程时，作为主要例子的代数似乎是某些变形，它们所对应的正是第 I.2 节经典 Schur–Weyl 对偶中发挥作用的代数。这表明，它们也可能是某些对象的中心化子，而这些对象应当是经典群的变形。这正是量子群登场之处。

用于单李代数 $\mathfrak{g}$ 的量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 由 Drinfeld 和 Jimbo 于 80 年代中期引入[Dri1, Jim1]。一些特殊情形下的构造早已见于 [KR, Skl]。关于量子群的一般参考资料有 [CP2, Dri2, Kas, KS]。量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 是拟三角 Hopf 代数的例子。我们不会给出拟三角 Hopf 代数、量子群及其仿射版本的定义。因此，这部分将相当简略，只旨在说明存在一种一般而有趣的代数结构，它为我们提供了辫群的表示，甚至更多，还提供了杨–巴克斯特方程的解。我们的首要目标是从辫群和杨–巴克斯特方程的角度，阐明研究中心化子的动机。我们将更详细、明确地讨论 $U_q(sl_N)$ 的例子。

I.4.1 张量积的中心化子

设 $\mathfrak{g}$ 是一个单李代数。为了对我们所讨论的内容有一个代数层面的直观认识，我们记作 $U_q(\mathfrak{g})$ 的量子群是一个结合代数，可以用生成元与关系显式定义。作为一个向量空间，它看起来像李代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$。然而，其

元素的乘法方式有所不同。它是 $U(\mathfrak{g})$ 中乘法的变形，也就是说，存在一种令参数 q 趋于 1 的方式，从而恢复代数 $U(\mathfrak{g})$。

我们将要讨论的性质是[1]:

- 我们可以对 $U_q(\mathfrak{g})$ 的表示构造张量积这一事实;
- $V \otimes W$ 和 $W \otimes V$ 作为 U_q（$\mathfrak{g}$）的表示是同构的这一事实，以及这些同构提供了辫群的局部表示;
- 最后，我们还可以利用仿射量子群升级这一图景，从而得到杨–巴克斯特方程的解。

设 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 是 $U_q(\mathfrak{g})$ 的两个表示。那么 $V_1 \otimes V_2$ 可以构成 $U_q(\mathfrak{g})$ 的一个表示。注意，向量空间 $V_1 \otimes V_2$ 自然带有 $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$ 的表示。那么，在 $V_1 \otimes V_2$ 上构造 $U_q(\mathfrak{g})$ 的表示的方法，就是与所谓的余乘 Δ 进行前复合:

$$\Delta \ : \ U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g}) \qquad \rightsquigarrow \qquad \rho_{V_1 \otimes V_2} = (\rho_1 \otimes \rho_2) \circ \Delta \ .$$

余乘需要满足一些性质（例如余结合性），相关内容可参阅任何一本关于 Hopf代数的书。值得强调的是，一般而言，对于任意结合代数，并不存在自然的余乘（例如 Hecke 代数），也不存在自然的方式来构造表示的张量积。

注 I.10. 对于群代数 $\mathbb{C}G$，从 $\mathbb{C}G$ 到 $\mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$ 的映射 Δ 由 $\Delta(g) = g \otimes g$ 对任意$g \in G$ 定义，它可扩张为代数同态，并由此得到对群的表示取张量积的标准方式。

对于李代数 $\mathfrak{g}$，从 $U(\mathfrak{g})$ 到 $U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$的映射 Δ由 $\Delta(x) = x\otimes 1+1\otimes x$对任意 $x \in \mathfrak{g}$定义，它可扩张为代数同态，并由此得到对李代数的表示取张量积的标准方式。▲

对我们而言， $U_q(\mathfrak{g})$的表示的张量积具有以下关键性质：对于 $U_q(\mathfrak{g})$的任意两个表示 V、W，表示 $V \otimes W$和 $W \otimes V$ 同构，也就是说，存在一个可逆线性算子$\check{R}_{V,\,W}$，其作用于 $V \otimes W$和 $W \otimes V$之间，并且与 $U_q(\mathfrak{g})$的作用对易:

$$\check{R}_{V,W} \ : \ V \otimes W \ \xrightarrow{\sim} \ W \otimes V \ , \qquad \text{isomorphism of } U_q(\mathfrak{g})\text{-representations.}$$

量子群的一个主要特点是其余乘不具有余交换性，这意味着像 $\Delta(a)$（其中 $a \in U_q(\mathfrak{g})$）通常不在两个分量的对换作用下保持不变。换言之，若我们用 Δ^{op} 表示 Δ 与 $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$（$a \otimes b \mapsto b \otimes a$）的置换的合成，则有 $\Delta \neq \Delta^{op}$。

然而，在 $U_q(\mathfrak{g})$中，存在一种弱于余交换性且满足的性质，它保证表示 $V \otimes W$ 和 $W \otimes V$同构。这种性质体现为存在一个可逆元 $\mathcal{R}$，属于$U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$，使得:

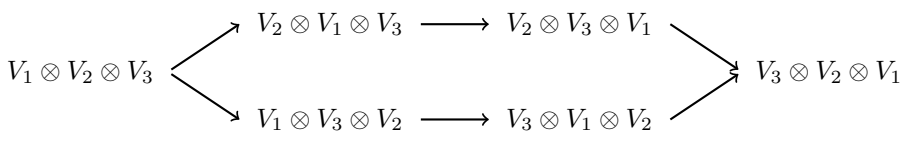
$$\mathcal{R} \cdot \Delta(a) = \Delta^{op}(a) \cdot \mathcal{R} \quad \forall a \in U_q(\mathfrak{g}) \ . \tag{I.21}$$

ˇ 由此立即可知，以下元素给出了 $V \otimes W$ 与 $W \otimes V$ 之间的表示同构$R_{V,\,W}$：

$$\check{R}_{V,W} = P_{V \otimes W} \cdot \rho_{V \otimes W}(\mathcal{R}) \, ,$$

其中， $\rho_{V \otimes W}(\mathcal{R})$ 是表示在 $V \otimes W$ 上的元素 $\mathcal{R}$ 的像，而 $P_{V \otimes W}$ 是从 $V \otimes W$ 到 $W \otimes V$ 的置换算子。

此外，$\check{R}_{V,W}$ 这些同构的存在本身并不足以满足我们的目的；此外，我们还需要这些同构满足相容条件。考虑三个表示的张量积:



[1]平凡表示和对偶表示（或称逆变表示）的存在，是量子群的一些重要性质；本文不作讨论。

该图示展示了通过应用同构 $\check{R}_{V_i,V_j}$，从 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ 到 $V_3 \otimes V_2 \otimes V_1$ 的两条可能路径。相容条件要求这两条路径重合。该条件可写成一个从 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ 到 $V_3 \otimes V_2 \otimes V_1$的线性算子等式：

$$\underset{\text{映射}_{V_3})}{(\check{R}_{V_1,V_2} \otimes \text{恒等}} \circ \left(\mathrm{Id}_{V_2} \otimes \check{R}_{V_1,V_3}\right) \circ \left(\check{R}_{V_2,V_3} \otimes \mathrm{Id}_{V_1}\right) = \left(\mathrm{Id}_{V_1} \otimes \check{R}_{V_2,V_3}\right) \circ \left(\check{R}_{V_1,V_3} \otimes \mathrm{Id}_{V_2}\right) \circ \left(\mathrm{Id}_{V_3} \otimes \check{R}_{V_1,V_2}\right) . \quad \text{(I.22)}$$

此时，没有理由认为表示 $U_q(\mathfrak{g})$ 满足相容条件 (I.22)。事实上，该条件之所以成立，是因为所谓的拟三角条件，其形式如下：

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \quad \text{and} \quad (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \, . \tag{I.23}$$

这两个条件尤其蕴含了常数杨–巴克斯特方程 $\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$，它直接成立于$U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$ 中。由此可确保所有如 (I.22) 所述的表示都满足相容条件。

满足 (I.21) 和 (I.23) 的这类元素 $\mathcal{R}$ 称为通用 R-矩阵。事实证明，量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 存在一个满足所有必要性质的通用 R-矩阵。我们指出，需要适当定义 $U_q(\mathfrak{g})$ 和 $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$，其中涉及形式幂级数和适当的完备化。

辫关系。现在，若考虑 $V_1 = V_2 = V_3 = V$ 的情形，并简单地用 R 表示同构 $\check{R}_{V,\,V}$，它是 $\mathrm{End}(V \otimes V)$ 中的一个可逆元，那么上面的相容条件就简化为辫关系：

$$\check{R}_1\check{R}_2\check{R}_1 = \check{R}_2\check{R}_1\check{R}_2 \qquad \text{on } V \otimes V \otimes V.$$

算子 $\check{R}$ 在 $V \otimes V$ 上称为与量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的表示 V 相关联的 R-矩阵。因此，我们在 $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ 中有元素 $\check{R}_1$、……、$\check{R}_{n-1}$，它们由 $\mathrm{End}(V \otimes V)$ 中的元素 $\check{R} \in$ 按如下方式构造：

$$\overbrace{V \otimes V}^{\check{R}_1} \otimes \overbrace{V}^{\check{R}_2} \otimes V \otimes \ldots\ldots \otimes \overbrace{V}^{\check{R}_{n-1}}$$

这些元素满足辫子关系。根据构造，它们与 $U_q(\mathfrak{g})$ 的作用对易，因此实际上属于中心化子，由此我们得到本次讨论的第一个结论。

结论 I.11。对于 $U_q(\mathfrak{g})$ 的任意表示 V，我们在 $V^{\otimes n}$ 上有一个辫群的局部表示。此外，其取值落在中心化子中：

$$\begin{array}{rcl} B_n & \to & End_{U_q(\mathfrak{g})}(V^{\otimes n}) \\ \sigma_i & \mapsto & \check{R}_i \end{array}$$

需要注意的是，辫群的像不一定生成整个中心化子线性算子空间$_{U_q(\mathfrak{g})}(V^{\otimes n})$。实际上，一般而言，矩阵 $\check{R}_i$ 并不生成中心化子。对于 $U_q(sl_2)$ 的任意表示，以及 $\mathfrak{g}$ 为经典李代数或类型为 G_2 [LZ1] 的 $U_q(\mathfrak{g})$ 的标准（向量）表示，这一性质都成立。一般而言，除了稍后将讨论的舒尔–韦尔对偶的量子类比所处理的常见情形外，中心化子的结构并不十分清楚。

杨–巴克斯特方程。量子群最初是为研究杨–巴克斯特方程而设计的，但到目前为止，我们只讨论了它们与辫群的局部表示之间的关系。简言之，我们必须解释如何加入谱参数。这需要再增加一个（相当大的）步骤，以仿射量子群为研究对象，从而提高技术难度。我们只尝试以非正式的方式阐明这一思路：杨–巴克斯特方程的解之所以存在，是因为具有良好性质的仿射量子群存在。我们指出，自量子群理论创立之初，就已有人将仿射量子群用于杨–巴克斯特方程 [Jim2]。本部分的参考文献为[CP1, CP2, EFK, FR, GRS, Her], ，另请参阅其中的参考文献。

固定一个 V $U_q(\mathfrak{g})$ 的表示。设想我们有一个包含 $U_q(\mathfrak{g})$ 的“更大”代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$。此外，设想我们有一族 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的表示 $V(a)$，它们依赖于复参数 a，并且对 $U_q(\mathfrak{g})$ 的限制总是给出我们最初选定的表示 V。我们将参数a称为“求值”参数。

最后一个假设是，设想 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的表示的张量积也具有与我们此前讨论的 $U_q(\mathfrak{g})$ 相似的性质。也就是说，至少对于求值参数的通常取值，我们可以找到一个算子，将表示 $V(a)\otimes V(b)$ 与 $V(b)\otimes V(a)$ 交织起来。这个算子记作 $\check{R}(a,b)$，因此属于 $\mathrm{End}(V\otimes V)$，因为这两个表示的底层向量空间都是V。于是我们可以将它视为参数 a,b 的函数：

$$\begin{array}{rccc} \check{R} & : & \mathbb{C}^2 & \to & \mathrm{End}(V\otimes V) \\ & & (a,b) & \mapsto & \check{R}(a,b) \end{array},$$

将相容条件应用于 $V(a)\otimes V(b)\otimes V(c)$ 后，形式如下：

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & V(b)\otimes V(a)\otimes V(c) & \longrightarrow & V(b)\otimes V(c)\otimes V(a) & \searrow & \\ V(a)\otimes V(b)\otimes V(c) & & & & & & V(c)\otimes V(b)\otimes V(a) \\ & \searrow & V(a)\otimes V(c)\otimes V(b) & \longrightarrow & V(c)\otimes V(a)\otimes V(b) & \nearrow & \end{array}$$

对于函数 $\check{R}(a,b)$，这表示为：

$$\check{R}_{12}(b,c)\check{R}_{23}(a,c)\check{R}_{12}(a,b)=\check{R}_{23}(a,b)\check{R}_{12}(a,c)\check{R}_{23}(b,c) \qquad \text{on } V\otimes V\otimes V.$$

这就是编织杨-巴克斯特方程。从 $U_q(\mathfrak{g})$ 的角度来看，对“取值”参数的依赖消失了，而这个等式存在于 $V^{\otimes 3}$ 中。此外，$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的交织性质限制在 $U_q(\mathfrak{g})$ 上时，表明这一切实际上都发生在中心化子中。现在让我们在此得出第二个结论。

结论 I.12。在上述情形下，我们在 $V\otimes V$ 上得到杨–巴克斯特方程的一个解 $\check{R}(a,b)$。此外，函数 $\check{R}_1(a,b)\ldots$、$\check{R}_{n-1}(a,b)$ 的取值属于中心化子：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & End_{U_q(\mathfrak{g})}(V^{\otimes n}) \\ (a,b) & \mapsto & \check{R}_i(a,b) \end{array}$$

请注意，最终谱参数来自 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的一族表示，这族表示扩展了 $U_q(\mathfrak{g})$ 的给定表示。因此，非常粗略地说，杨–巴克斯特方程可以看作是在 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 层面应用的辫关系。

当然，我们仍需讨论上述情形是否至少对某些量子群 $U_q(\mathfrak{g})$的某些表示 V 成立。结果证明，答案是肯定的。首先，存在一个具有良好性质的代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$。它可以看作与仿射李代数$\hat{\mathfrak{g}}$相关联的量子群，或者也可以看作 $U_q(\mathfrak{g})$的某种仿射化。它具备我们所需的关于表示张量积的所有良好性质。此外，推广 $\mathfrak{g}$ 嵌入$\hat{\mathfrak{g}}$的自然方式，可以将 $U_q(\mathfrak{g})$视为 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$的一个子代数。

更微妙的是关于以下假设的情形：我们有一族 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$的“求值”表示$V(a)$，它们扩展了 $U_q(\mathfrak{g})$的一个表示 V。这一假设并非总是成立，我们将简要讨论其有效性。

首先，对于最简单的情形 $\mathfrak{g}=sl_N$，这一假设对 $U_q(\mathfrak{g})$的任意表示 V都成立。这是因为存在一个依赖于参数 a、从 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$到 $U_q(\mathfrak{g})$的态射；它与从$\hat{\mathfrak{g}}$ 到 $\mathfrak{g}$的求值态射相类似。

对于其他单李代数 $\mathfrak{g}$，不存在这种求值态射的类似物。不过，一般而言，$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 存在一族依赖于参数 a 的自同构。于是，假设表示 $V$of $U_q(\mathfrak{g})$ 可以扩张为 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的一个表示。那么，通过用这些自同构扭曲该表示，就得到一族 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的表示 $V(a)$，它们扩张了 V。

由此得到如下结论：我们在 $V$of$U_q(\mathfrak{g})$ 的表示上有一个杨–巴克斯特方程的解，它可以扩展到 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$。再强调一次，对于 $\mathfrak{g}=sl_N$，所有表示都可以扩展；但对于任意 $\mathfrak{g}$，这并不成立。由此自然引出表示[CP3]的“最小仿射化”这一概念。反过来看，也可以说：我们在 $V$of $U_q(\mathfrak{g})$ 的表示上有一个杨–巴克斯特方程的解，它可以由 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的表示的限制得到。最终，通过这一构造，我们确实得到了相当多的杨 – 巴克斯特方程的解。例如，可参见 [ZJ2]，其中可以看到与表示的仿射化相关的这些微妙之处。

注记 I.13。例 I.8 与 $U_q(sl_2)$ 和基本表示相关。在此之前，我们有例 I.7，即杨解，它可以作为 $U_q(sl_2)$ 所给解的某个极限 $q \to 1$ of 得到。一般而言，与 $U_q(\mathfrak{g})$ 的中心化子相关的解取某个极限 $q \to 1$ of 后，会产生有趣的解，这些解属于 $U(\mathfrak{g})$ 的中心化子。这些解也来自一个代数，它与 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 具有许多共同性质；这个代数称为杨代数 $Y(\mathfrak{g})$（见 [CP2]）。这个不带参数 q 的代数，可以看作 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 的某个极限。▲

I.4.2 量子 Schur–Weyl 对偶

这里我们回到一个更具体的讨论，以说明我们之前的例子——Hecke 代数和 BMW代数——确实来自这一中心化子构造。

量子群 $U_q(sl_2)$。我们从 $\mathfrak{g} = sl_2$ 开始。作为一个向量空间， sl_2 由以下矩阵生成，并且具有如下自然的李代数结构：

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad [h,x] = 2x\,, \;\; [h,y] = -2y\,, \;\; [x,y] = h\,. \tag{I.24}$$

我们将要使用的 $U_q(sl_2)$ 的定义如下。作为一个向量空间，我们定义 $U_q(sl_2)$ 为

$$U(sl_2)[[\alpha]] = \{c_0 + c_1\alpha + \dots\,,\; c_i \in U(sl_2)\}\,,$$

系数属于 $U(sl_2)$、关于 α 的形式幂级数所构成的向量空间。这里我们滥用记号，对 $U(sl_2)$ 的生成元仍保留名称 x、y、h，但要强调的是，此处我们指的仅仅是向量空间 $U(sl_2)$；乘法将有所不同。$U_q(sl_2)$ 中元素的乘法采用形式级数的通常乘法，并满足元素 x、y、h 之间的以下定义关系：

$$hx - xh = 2x\,, \;\; hy - yh = -2y\,, \quad xy - yx = \frac{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}\,. \tag{I.25}$$

需要注意的是，最后一个关系右边确实是关于 α 的幂级数。我们应当强调，作为向量空间， $U(sl_2)[[\alpha]]$ 与系数取自 $\mathbb{C}[[\alpha]]$ 的 $U(sl_2)$ 并不相同。这是因为 $U(sl_2)$ 不是有限维的。例如，考虑 $e^{\alpha h}$。

通常用 $q = e^{\alpha}$ 和 $K = e^{\alpha h}$ 表示。利用 K，可以避免定义关系中的形式级数，但这样一来，下面的 R-矩阵就较难引入，而且与 $U(sl_2)$ 的联系也不那么清晰。在这里，极限 $\alpha = 0$ 是良定义的，并且可以从定义关系中直接看出，我们得到代数 $U(sl_2)$。

余乘与 R-矩阵。我们考虑完备张量积 $U_q(sl_2)\hat{\otimes}U_q(sl_2)$，这意味着作为向量空间，它是关于 α 的幂级数空间，其系数取自通常的张量积 $U(sl_2)\otimes U(sl_2)$。余乘在生成元上的定义如下：

$$\Delta(x) = x \otimes e^{-\alpha h/2} + e^{\alpha h/2} \otimes x\,, \quad \Delta(y) = y \otimes e^{-\alpha h/2} + e^{\alpha h/2} \otimes y\,, \quad \Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h\,, \tag{I.26}$$

可以验证， Δ 可扩张为从 $U_q(sl_2)$ 到 $U_q(sl_2)\,\hat{\otimes}U_q(sl_2)$ 的代数同态，并且显然，极限 $\alpha = 0$ 给出 $U(sl_2)$ 上通常的余乘。

讨论普适 R-矩阵 $\mathcal{R}$时，张量积的完备化就变得十分重要。事实上，一个显式公式为：

$$\mathcal{R} = e^{\alpha(h\otimes h)/2} \sum_{n\geq 0} \frac{(q-q^{-1})^n}{[n]_q!} q^{n(n-1)/2} \Big(e^{-\alpha h/2} y \otimes x e^{\alpha h/2}\Big)^n\,, \tag{I.27}$$

其中我们令 $q = e^{\alpha h}$, $[n]_q! = [2]_q \cdot [3]_q \dots [n]_q$，其中 $[k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$。由于求和中的项是 α^n 的倍数，因此元素 $\mathcal{R}$ 是完备张量积中的一个良定义元素。

量子群 $U_q(sl_N)$。现在我们取 $\mathfrak{g} = sl_N$，其中某个 $N > 0$。 sl_N 的自然生成元是元素 h_i、x_i、y_i，以及 $i = 1$、.....、$N-1$。元素 h_i、x_i、y_i 这一组对应于 sl_N的以下矩阵：取 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 这些矩阵作为 sl_2，并将它们代入第 i 行和第 $i+1$ 列。

乘法按如下方式变形。首先，每组三元元素 h_i、x_i、y_i 都满足 (I.25) 中 $U_q(sl_2)$ 的关系。然后我们保留矩阵的以下通常关系：

$$[h_i, x_{i\pm1}] = -x_{i\pm1}\,, \qquad [h_i, y_{i\pm1}] = y_{i\pm1}\,, \qquad [h_i, x_j] = [h_i, y_j] = 0 \quad (|i-j|>1)\,,$$

$$[h_a, h_b] = 0 \quad (\forall a, b)\,, \qquad [x_i, y_j] = 0 \quad (i \neq j)\ .$$

最后，我们加入所谓 Serre 关系的变形：

$$x_j x_i^2 - (q+q^{-1}) x_i x_j x_i + x_i^2 x_j = y_j y_i^2 - (q+q^{-1}) y_i y_j y_i + y_i^2 y_j = 0\,, \qquad \text{if } |i-j| = 1\,.$$

Fo对每个三元组 h_i, x_i, y_i，余乘由与 (I.26) 中 $U_q(sl_2)$ 相同的公式给出 .

$U_q(sl_N)$ 的向量表示。$U_q(sl_N)$ 的基本表示（或向量表示）V，只需将每个 h_i, x_i, y_i 赋予其自然的 $N \times N$矩阵即可。$U_q(sl_N)$ 的所有定义关系确实都得到满足。看起来我们处理的是 $U(sl_N)$，但当然，$U_q(sl_N)$ 的“量子”新意在于，我们有另一种在 $V^{\otimes n}$ 上构造表示的方法。特别是，各因子的置换不属于中心化子 线性算子空间$_{U_q(sl_N)}(V^{\otimes n})$。这正是我们再次遇到 Hecke 代数之处。

存在 $U_q(sl_N)$ 的通用 R-矩阵的显式公式，但我们不予给出。事实证明，当我们考察它在表示 $V \otimes V$ 中的像，并将其与置换算子相乘时，得到：

$$\check{R}(e_a \otimes e_b) := \begin{cases} q\, e_a \otimes e_b & \text{if } a = b, \\ e_b \otimes e_a + (q - q^{-1})\, e_a \otimes e_b & \text{if } a < b, \\ e_b \otimes e_a & \text{if } a > b. \end{cases} \qquad \text{where } a, b = 1, \dots, N,$$

其中 $(e_1, \dots, e_N)$ 是用于构造上述表示 V 的基。对于下文而言，关键在于我们恢复了 Hecke 代数 $H_n(q)$ 在张量积 $V^{\otimes n}$ 上的表示，该表示已在 (I.18) 中明确给出。

Hecke 代数 $H_n(q)$ 和量子 Schur–Weyl 对偶。关于量子 Schur–Weyl 对偶的信息可见 [CP2, Jim2, KS]。这里我们考虑 $U_q(gl_N)$，而不是 $U_q(sl_N)$，以便与第一节进行更好的比较。回想一下，我们有一个 Hecke 代数 $H_n(q)$ 在张量积$V^{\otimes n}$上的表示。因此，我们的情形是：两个代数都表示在同一个向量空间上，可以这样来描绘：

$$U_q(gl_N) \quad \xrightarrow{\ \rho\ } \quad \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \quad \xleftarrow{\ \pi\ } \quad H_n(q)$$

现在我们可以陈述舒尔–韦尔对偶的（第一部分）。

定理 I.14（ 量子舒尔–韦尔对偶 I）。中心化子 线性算子空间$_{U_q(gl_N)}(V^{\otimes n})$ 是 Hecke 代数$H_n(q)$ 的像：

$$End_{U_q(gl_N)}(V^{\otimes n}) = \pi\big(H_n(q)\big)\ . \qquad (\mathbf{qSW1})$$

这里我们处于半单情形（q 是一般的），根据上文概述的关于中心化子的普遍考察，我们实际上有：$\pi\big(H_n(q)\big)$ 与 $\rho\big(U_q(gl_N)\big)$ 互为中心化子。

量子舒尔–韦尔对偶的第二部分也将与其经典对应部分十分相似，但首先，我们简要讨论 $U_q(gl_N)$ 和 $H_n(q)$ 的不可约表示。我们有：

- 量子群 $U_q(gl_N)$ 的有限维不可约表示与$U(gl_N)$ 的有限维不可约表示一一对应。因此，它们也由最高权标记，这里的最高权同样可识别为满足 $\ell(\lambda) \leq N$ 的分拆 λ。如同在经典情形中，我们将它们记为 V_λ^N。向量表示V 对应于 $\lambda = (1)$。

- Hecke 代数 $H_n(q)$ 的不可约表示与对称群S_n的不可约表示一一对应。因此，它们由大小为 n 的分拆 λ 标记。我们用 S_λ 表示它们（见附录）。

定理 I.15（qu antum Schur–Weyl II）。$V^{\otimes n}$ 作为 $U_q(gl_N)\otimes H_n(q)$ 的表示的分解 *is:*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)\le N}} V_\lambda^N \otimes S_\lambda\,. \tag{qSW2}$$

$U_q(gl_N)$ 的中心化子的完整描述，也就是从 $H_n(q)$ 到 End$(V^{\otimes n})$ 的映射之核的描述，与经典情形遵循相同的思路。我们只需要反对称化子的类似物，为此需要稍微深入了解 Hecke 代数 $H_n(q)$ 的代数结构，其定义已在 (I.16) 中给出。

对于对称群 S_n 的任意元素 w，设 $w = s_{a_1}\dots s_{a_k}$ 是用生成元 $s_i = (i, i+1)$ 表示 w 的一个约化表达式（即最小长度表达式），并记 $\ell(w) = k$。然后定义 $\sigma_w := \sigma_{a_1}\dots\sigma_{a_k} \in H_n(q)$。这个定义不依赖于 w 的约化表达式，而集合 $\{\sigma_w\}_{w\in S_n}$ 构成了$H_n(q)$ 的一组基。于是， $H_n(q)$ 中的 q-反对称化子是如下元素:

$$P'_n = \frac{\sum_{w\in S_n}(-q^{-1})^{\ell(w)}\sigma_w}{\sum_{w\in S_n} q^{-2\ell(w)}} = \frac{q^{n(n-1)/2}}{[n]_q!}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}(-q^{-1})^{\ell(w)}\sigma_w\ , \tag{I.28}$$

其中， q-数定义如下:

$$[L]_q := \frac{q^L - q^{-L}}{q-q^{-1}} = q^{L-1} + q^{L-3} + \dots + q^{-(L-1)} \qquad \text{and} \qquad [L]_q! := [1]_q[2]_q\dots[L]_q\ . \tag{I.29}$$

显然，如果 $q = 1$， q-反对称化子就变为通常的反对称化子。

对于下面的陈述，请注意，根据 $H_{N+1}(q)$ 到 $H_n(q)$ 的自然包含（若 $n > N$），我们可以将元素 P'_{N+1} 视为 $H_n(q)$ 中的一个元素。

定理 I.16（量子 Schur–Weyl II'）。

- 如果 $n \le N$ th en 映射的核为 $\{0\}$，且中心化子 线性算子空间$_{U_q(gl_N)}(V^{\otimes n})$ 同构于 $H_n($ $q)$.
- 若 $n > N$，则该映射的核在 $H_n(q)$ 中由元素 P'_{N+1} 生成。因此，中心化子 线性算子空间$_{U_q(gl_N)}(V^{\otimes n})$ 是 $H_n(q)$ 除以关系 $P'_{N+1} = 0$ 所得的商。

具体而言，中心化子 线性算子空间$_{U_q(gl_N)}(V^{\otimes n})$ 可描述为由 s_1、.....、 s_{n-1} 生成且满足以下定义关系的代数:

$$\begin{aligned}
&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\,, && \text{for } i\in\{1,\dots,n-2\}\,,\\
&\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\,, && \text{for } i,j\in\{1,\dots,n-1\} \text{ such that } |i-j|>1\,,\\
&\sigma_i^2 = 1 + (q-q^{-1})\sigma_i\,, && \text{for } i\in\{1,\dots,n-1\}\,,\\
&P'_{N+1} = 0 && \text{if } n > N.
\end{aligned}$$

例 I.17（Temperley–Lieb 代数）。令 $N = 2$。在此情形下，中心化子 线性算子空间$_{U_q(gl_2)}(V^{\otimes n})$ 与 Te mperley–Lieb 代数重合。附加关系 $P'_3 = 0$ 如下:

$$1 - q^{-1}\sigma_1 - q^{-1}\sigma_2 + q^{-2}\sigma_1\sigma_2 + q^{-2}\sigma_2\sigma_1 - q^{-3}\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = 0\ .$$

可以证明，它蕴含对所有 $i = 1$、.....、 $n-2$，指标为 i、 $i+1$ 时同样成立的关系。于是，令 $e_i := \sigma_i - q$，即可得到 Temperley–Lieb 代数的另一种标准表示:

$$e_i^2 = -[2]_q e_i\,, \quad e_ie_{i+1}e_i = e_i\,, \quad e_{i+1}e_ie_{i+1} = e_{i+1} \quad \text{and} \quad e_ie_j = e_je_i \text{ if } |i-j|>1.$$

那么 BMW代数呢? 我们已经解释了 Hecke 代数如何融入量子群表示的中心化子的论述中。BMW代数也有与之对应的精彩理论。我们可以不考虑 gl_N，而考虑其他经典李代数 so_N 或 sp_N。我们可以构造量子群 $U_q($ $so_N)$ 或 $U_q(sp_N)$，并考虑张量积 $V^{\otimes n}$，其中 V 是 $U_q(so_N)$ 或

$U_q(sp_N)$ 的（类似于）向量表示。然后， $V^{\otimes n}$ 的中心化子可以用与上文类似的方式描述，只需将 Hecke 代数替换为 BMW代数（参数 a 根据我们采用 so_N 还是 sp_N，取决于 q 的某个幂）。有关沿用上述思路的详细内容，我们例如可以参考 [KS]。至此，我们关于将 Hecke 代数和 BMW代数解释为量子群表示的中心化子的讨论就结束了。

I.5 辫群上的马尔可夫迹与链环不变量

我们简要回顾一种利用辫群构造链环不变量的著名方法，该方法以 Alexander 定理和 Markov 定理为基础。随后指出，这种方法也可应用于量子群的中心化子，从而得到 Reshetikhin–Turaev不变量。作为示例，我们进一步介绍 Hecke代数族上的马尔可夫迹；这一内容将在第四章中使用。

I.5.1 Alexander 与 Markov 定理

此处的参考文献为 [Bir、BZ、Kam、KT]。辫子的闭合是通过在辫子中将顶部的点与底部的点连接起来得到的。我们将顶部最左侧的点与底部最左侧的点相连，然后以同样的方式连接第二对点，依此类推。辫子的闭合会在三维空间中形成一个链环。我们在环境同痕的意义下考察链环，并有以下两个基本结果。

定理 I.18.

- （Alexander 定理， *[Ale]*）任何链环都可以通过某个辫子的闭合得到。
- （Markov 定理， *[Mark]*）两个辫子的闭包同伦当且仅当它们在由以下关系生成的等价关系下等价：

$$\alpha\beta \sim \beta\alpha \quad (\alpha,\beta \in B_n,\ n \geq 1) \qquad and \qquad \alpha\sigma_n^{\pm 1} \sim \alpha \quad (\alpha \in B_n,\ n \geq 1)\ . \tag{I.30}$$

很容易通过绘制辫子看出，(I.30) 中的两个条件都是必要的。Markov 定理的主要结果是，这两个条件也足以保证两个等价的辫子具有同位闭合。请注意，在第二个等价式中， α 是由 n 股线组成的辫子，而 $\alpha\sigma_n^{\pm 1}$是由 $n+1$ 股线组成的辫子（这里隐含地使用了自然包含 $B_n \subset B_{n+1}$ ，以便也将 α 视为 B_{n+1}的一个元素）。这个等价关系定义在任意股数的辫子集合上，也就是说，定义在 $\bigcup_{n\geq 1} B_n$上。

马尔可夫迹的定义。根据上述结果，一个链环在同伦意义下对应于一个辫子等价类。于是，可以利用辫子的等价类来定义链环不变量：给每个等价类赋予某个值（一个数、多项式或其他任何东西）。当然，我们希望直接在一个辫子（该等价类的一个代表元）上计算它，因此引出了马尔可夫相容映射的概念。这是一个定义在所有辫子集合 $\bigcup_{n\geq 1} B_n$ 上的映射 τ ，满足：

$$\tau(\alpha\beta) \sim \tau(\beta\alpha) \quad (\alpha,\beta \in B_n,\ n \geq 1) \qquad \text{and} \qquad \tau(\alpha\sigma_n^{\pm 1}) \sim \tau(\alpha) \quad (\alpha \in B_n,\ n \geq 1)\ .$$

从现在 起，我们将把映射 τ 视为一族映射 $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$，其中每个映射 τ_n 都作用于辫群 B $_n$.

当然，完美马尔可夫相容映射就是将一个辫子映射到其等价类的映射。不过，人们希望能够实际计算不变量的值。为此，考虑比辫群简单的代数结构会很有用。这些结构是辫群代数的商（例如 Hecke 代数）。

因此，假设对于每个 $n \geq 1$，我们都有一个代数 $\mathcal{A}_n$ ，它是辫群代数 RB_n的商，其中 R 是系数环。为简单起见，我们在此假设（正如例子中将出现的情况）这些代数 $\mathcal{A}_n$ 在自然包含映射下构成一个代数链：

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \ldots\ldots \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} \subset \ldots\ldots\ .$$

我们滥用记号，将 σ_i 保留为辫群生成元在 $\mathcal{A}$ 中的像的名称 $_n$.

定义 n I.19. $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ 上的马尔可夫迹是一族线性映射 $\{\tau_n : \mathcal{A}_n \to R\}_{n\geq 1}$ satisfyin g:

$$\begin{aligned} &\tau_n(xy) = \tau_n(yx)\ , && \text{for } n \geq 1 \text{ and } x, y \in \mathcal{A}_n; && \textit{(Trace condition)} \\ &\tau_{n+1}(x\sigma_n) = \tau_{n+1}(x\sigma_n^{-1}) = \tau_n(x)\ , && \text{for } n \geq 1 \text{ and } x \in \mathcal{A}_n. && \textit{(Markov condition)} \end{aligned} \tag{I.31}$$

值得强调以下几点。元素 $x \in \mathcal{A}_n$ 可以视为 $\mathcal{A}_{n+1}$的一个元素，但我们并不要求 $\tau_{n+1}(x) = \tau_n(x)$。映射 $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ 对 n 的依赖很重要。这里可能会产生混淆，因为文献中许多不变量的构造使用了不同类型的迹（有时也称为马尔可夫迹）。我们将在下文最后一段明确说明这一点。

链环的不变量。只要有如上所述的马尔可夫迹，按照构造，我们就已经非常接近得到一个链环不变量了。我们只需依次应用 Alexander 定理和 Markov 定理。具体而言，从链环 L 出发，应用 Alexander 定理，找到一个辫子 β_L，其闭合为 L。然后将 β_L 送入代数$\mathcal{A}_n$（其中 n 是 β_L的辫股数），再应用映射 τ_n。根据 Markov 定理，这就是链环 L的一个不变量。

为了用公式更正式地表述，我们为将辫子映射到代数中的映射命名 $\mathcal{A}_n$:

$$\pi_n \ : \ RB_n \to \mathcal{A}_n \qquad (n \geq 1)\ .$$

映射 π_n 是代数态射，将辫群生成元 $\sigma_i \in B_n$ 映射到元素 $\sigma_i \in \mathcal{A}_n$。注意，我们不要求 π_n 是满射，也就是说，我们不要求辫群 B_n的像生成 $\mathcal{A}_n$。在许多例子中，满射性都成立，例如 Hecke 代数；但我们将看到，一般情况下并非如此：正如前面提到的，量子群的中心化子并不总是满足这一点，而第四章讨论的 Yokonu ma–Hecke 代数也不会满足这一点。

链环 L 的不变量取值公式很简单:

$$P(L) = \tau_n\big(\pi_n(\beta_L)\big) \qquad \text{where } \beta_L \in B_n \text{ closes to } L.$$

一种略有不同的构造。通过略有不同的一类迹，也可以得到不变量（见 [Jo1]）。我们可以在 $\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{A}_n$ 上定义一个“Ocneanu 迹” ψ，它是满足迹条件和修正后的马尔可夫条件的线性映射:

$$\psi(x\sigma_n) = z\psi(x) \quad \text{and} \quad \psi(x\sigma_n^{-1}) = \overline{z}\psi(x)\ , \text{for } n \geq 1 \text{ and } x \in \mathcal{A}_n\ ,$$

其中 z、$\overline{z}$ 是 R 的可逆元。这里我们假设， $\psi(x)$ 不会因将 x 视为 $\mathcal{A}_n$ 中的元素，还是视为 $\mathcal{A}_{n+1}$ 中的元素（或视为带有 $N \geq n$ 的 $\mathcal{A}_N$ 中的元素）而有所不同。在这些条件下，可以验证下列公式给出了一个不变量:

$$P(L) = (z\sqrt{\theta})^{-(n-1)}(\sqrt{\theta})^{w(\beta_L)}\psi\big(\pi_n(\beta_L)\big)\ , \qquad \text{with } \theta = \frac{\overline{z}}{z}\ ,$$

其中 $\beta_L \in B_n$ 的闭合是 L，而 $w(\beta_L)$ 是 β_L 中按符号计数的交叉数。我们通过添加 θ 的一个平方根扩张了环 R。

实际上，这个不变量也可以通过我们所说的马尔可夫迹得到。首先，需要对 $\mathcal{A}_n$ 中的辫群生成元重新归一化。我们令 $\sigma_i' = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\sigma_i$。显然，由于辫子关系是齐次的， σ_i' 仍满足这些关系。于是，映射族 $\{\tau_n = (z\sqrt{\theta})^{-(n-1)}\psi\}_{n\geq 1}$ 是关于生成元 σ_i' 的马尔可夫迹，并且它们恰好产生与上述相同的不变量。

I.5.2 Reshetikhin–Turaev不变量

我们抽象地知道大量代数链 $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$，其中 $\mathcal{A}_n$ 是辫群代数 B_n的一个商。如上一节所述，它们是量子群表示的中心化子代数，即，

$$\mathcal{A}_n = \mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{g})}(V^{\otimes n})\ ,$$

其中， V 是量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的一个表示。辫群生成元的像由 R-矩阵给出。因此，一个问题是我们能否在 $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$上找到马尔可夫迹。事实证明这是可能的[2]。

[2]更一般的框架是带状Hopf代数的情形，参见 *e.g.* [LR]。

定理 I.20（[Res，Tur], 另见 [KRT，ZGB]）。中心化子代数族 $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ 支承马尔可夫迹。

我们将对这个极具一般性的结果作两点说明。

- 首先，从概念层面看，有一种有趣而抽象的方式可以理解如何构造马尔可夫迹。首先要记住，量子群的表示 V 有一个对偶表示，即反表示 $V^\star$ 。此外，还有一个“平凡”的一维表示$V_0 = \mathbb{C}$。量子群的公理保证，平凡表示 V_0 在张量积 $V \otimes V^\star$ 中出现的重数为一。这就导出了一个与量子群作用相交换的态射，且该态射在归一化因子之外唯一：

$$\mathrm{qTr}_V \ : \ V \otimes V^\star \to \mathbb{C} \ .$$

映射 qTr_V 是通常矩阵迹在量子群中的对应物，称为“量子迹”。接下来考虑以下过程：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{End}(V^{\otimes n}) & \to & \mathrm{End}(V^{\otimes(n-1)} \otimes V \otimes V^\star) & \to & \mathrm{End}(V^{\otimes(n-1)}) \\ M & \mapsto & M \otimes \mathrm{Id}_{V^\star} & \mapsto & (\mathrm{Id}_{\mathrm{End}(V^{\otimes(n-1)})} \otimes \mathrm{qTr}_V)\big(M \otimes \mathrm{Id}_{V^\star}\big) \ . \end{array}$$

简单来说，我们对张量积中第 n 个因子取量子迹。事实证明，将这一过程限制在子代数 $\mathcal{A}_n \subset \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ 上后，其取值落在中心化子 $\mathcal{A}_{n-1} \subset \mathrm{End}(V^{\otimes(n-1)})$ 中。因此，我们得到一个从 $\mathcal{A}_n$ 到 $\mathcal{A}_{n-1}$ 的映射。有时也称之为“条件期望值”。

最后，我们可以重复该过程 n 次，从而得到一个从 $\mathcal{A}_n$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射。忽略重整化问题，这就给出了马尔可夫迹的值。

- 这相当抽象，不过也有一种具体的方法来执行该过程。存在一个矩阵$\mu_V \in \mathrm{End}(V)$，它实际上是量子群中某个元素在其表示下的像，可以用来计算马尔可夫迹。我们不解释如何找到 μ_V，这里只指出，马尔可夫迹的值是通过使用 μ_V 和通常的迹计算得到的：

$$\mathcal{A}_n \ni M \mapsto \mathrm{Tr}\big(M \cdot (\mu_V \otimes \cdots \otimes \mu_V)\big) \ .$$

I.5.3 Hecke 代数示例：HOMFLYPT 多项式

为了满足我们的需要，在 Hecke 代数生成元的特征方程中加入另一个参数会很方便。以下关于 Hecke代数上马尔可夫迹的处理方法，例如见[GP，第 4.5] 节。

本节中，Hecke 代数 H_n 定义在 $\mathbb{C}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}, (q-q)^{-1}]$ 上，满足：

$$\begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \ , & \text{for } i \in \{1, \dots, n-2\} \ , \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ , & \text{for } i, j \in \{1, \dots, n-1\} \text{ such that } |i-j| > 1 \ , \\ \sigma_i^2 = u^2 + u(q-q^{-1})\sigma_i \ , & \text{for } i \in \{1, \dots, n-1\} \ . \end{array}$$

根据定义，给定代数族上的马尔可夫迹构成一个向量空间。下面的陈述指出，对于 Hecke代数，这个向量空间是一维的。

定理 I.21. 固定 $\tau_1(1)$ 的值后，在 Hecke 代数族 $\{H_n\}_{n\geq 1}$ 上存在唯一的马尔可夫迹 $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ 。

映射 τ_n 可以通过以下方式显式给出。首先，我们为 H_n选择一个方便的基，例如以下这个（其中集合的乘积 $A.B$ 为 $\{a.b \mid a \in A, \ b \in B\}$）：

$$\left\{ \begin{array}{c} 1, \\ \sigma_1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1, \\ \sigma_2, \\ \sigma_2\sigma_1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1, \\ \sigma_3, \\ \sigma_3\sigma_2, \\ \sigma_3\sigma_2\sigma_1 \end{array} \right\} \cdot \ \dots \ \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1, \\ \sigma_{n-1}, \\ \vdots \\ \sigma_{n-1}\dots\sigma_1 \end{array} \right\} \ .$$

注意，生成元 σ_{n-1} 至多出现一次。考虑 σ_{n-1} 不出现的情况，也就是说，取 $x \in H_{n-1}$。诀窍是使用公式 $q-q^{-1} = u^{-1}\sigma_{n-1} - u\sigma_{n-1}^{-1}$。利用 $(q-q^{-1})$ 的可逆性，我们有：

$$\tau_n(x) = \tau_n\Big(\frac{u^{-1}\sigma_{n-1} - u\sigma_{n-1}^{-1}}{q-q^{-1}}x\Big) = \frac{u^{-1}-u}{q-q^{-1}}\tau_{n-1}(x) \ .$$

上面基中的其余元素可写为 $x\sigma_{n-1}\dots\sigma_k$，其中 $x \in H_{n-1}$ 和 $k \in \{1,\dots,n-1\}$，对于它们，我们只需有：

$$\tau_n(x\sigma_{n-1}\dots\sigma_k) = \tau_{n-1}(x\sigma_{n-2}\dots\sigma_k) \ .$$

前面的两个公式递归地唯一确定映射族 $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$，只需选定 τ_1(1)。

HOMFLYPT 多项式和 Jones多项式。现在我们有了马尔可夫迹，可以按照前一小节的说明定义一个不变量。所得不变量取决于两个参数 q 和 u，称为 HOMFLYPT 多项式（它是关于 u 和 $q-q^{-1}$ 的劳朗多项式）；参见 [FYH+、Jo1、PT]。

在 Hecke 代数上定义马尔可夫迹后，我们可以考察它能否传递到某些商上，例如 Temperley–Lieb 代数。按照我们的归一化，定义 Temperley–Lieb 代数 TL_n 的附加关系为：

$$1-(uq)^{-1}\sigma_1 - (uq)^{-1}\sigma_2 + (uq)^{-2}\sigma_1\sigma_2 + (uq)^{-2}\sigma_2\sigma_1 - (uq)^{-3}\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = 0 \ .$$

不难证明，对于任意 n，τ_n 能够通过商映射到 TL_n，当且仅当将 τ_3 作用于上述关系的左边所得结果为 0。例如，当 $u = q^2$ 时便会出现这种情况，由此得到一个单变量不变量，即 Jones多项式。

I.6 Hecke 代数丛林

“Hecke 代数”这一术语在数学的不同领域中指代许多不同的代数。称为 Hecke 代数的代数出现在表示论的多个分支、数论、Coxeter 群和反射群的研究、辫群和 Artin 群的研究、量子群与范畴化的研究、纯粹的变形理论中，也可能出现在其他领域。我们将介绍 Hecke 代数的一些定义，包括本文采用的定义，以及它们之间的一些联系，但无意面面俱到。

作为中心化子代数的 Hecke代数。设 G 是一个群，其子群为 B。为简便起见，假设 G是有限的。Hecke 代数 $H(G,B)$ 是 G的某个表示的中心化子代数。该表示是从 B的 1 维平凡表示 $\mathbf{1}_B$ 诱导得到的表示。等价地，它是由 G 在陪集空间 G/B上的作用所对应的 G 的置换表示：

$$H(G,B) = \mathrm{End}_G(\mathbb{C}G/B) = \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_B^G \mathbf{1}_B) \ . \tag{I.32}$$

$H(G,B)$ 的一组基由 G 相对于 B 的双陪集标记，其乘法以组合方式给出，参见例如 [GP, §8.4]。当然，依循一般的中心化子思想，Hecke 代数 $H(G,B)$ 包含了置换表示分解为不可约表示的信息。可以考虑更一般的群-子群对 (G,H)，例如具有满足某些条件的子群 H 的拓扑群 G，但我们略去这些细节。

“Hecke 代数”这一名称源自 Erich Hecke [Hec] 关于模形式的研究，参见 [Bum, Iwa, Leh, Ogg, Shi]。粗略地说，他利用某个交换算子集，为某些模形式空间找到了一组特殊基。用现代术语来说，这些算子与上文所述的中心化子代数密切相关。

作为 Coxeter 群变形的 Hecke代数。Coxeter 群 W 由一组生成元$S = \{s_1,\dots,s_n\}$ 及以下定义关系确定：

$$s_i^2 = 1 \qquad \text{and} \qquad \underbrace{s_is_js_i\dots}_{m_{ij}\ \text{terms}} = \underbrace{s_js_is_j\dots}_{m_{ij}\ \text{terms}} \quad (i\neq j) \ ,$$

对于 $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ 的一个选择，满足 $m_{ij} = m_{ji}$（若 $m_{ij} = \infty$，则删除含有 s_i 和 s_j的定义关系）。有限 Coxeter 群将有限反射群分类 [Hum]。

相应的 Hecke 代数 $H(W)$定义在 $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上，由生成元 σ_1、.....、 σ_n 及以下关系定义：

$$\sigma_i^2 = 1 + (q-q^{-1})\sigma_i \qquad \text{and} \qquad \underbrace{\sigma_i\sigma_j\sigma_i\dots}_{m_{ij}\text{ terms}} = \underbrace{\sigma_j\sigma_i\sigma_j\dots}_{m_{ij}\text{ terms}} \quad (i\neq j)\ .$$

我们可以允许不同的参数 q_i，只要它们在生成元的共轭类上保持不变。对于任意元素 $w\in W$，设 $w = s_{a_1}\dots s_{a_k}$是关于生成元的 w的一个约化（即最小长度）表达式。然后定义 $\sigma_w := \sigma_{a_1}\dots\sigma_{a_k}\in H(W)$。此定义不依赖于 w 的约化表达式以及集合

$$\{\sigma_w\}_{w\in W}\ ,$$

构成 $H(W)$ 的一组基。因此，Hecke 代数 $H(W)$ 是群代数 $\mathbb{C}W$ 的平坦变形。标准参考文献是 [GP]。

示例 I.22. 通过取 $S=\{s_1,\dots,s_{n-1}\}$、整数 $m_{i,\ i+1} = m_{i+1,\ i} = 3$ 以及 $m_{ij}=2$ 其他情况，我们恢复了前几节中与对称群 S_n 相关的 Hecke 代数 H_n。在此情况下， $W=S_n$，且生成元为 $s_i =$ （i，$i+1$）。

这些代数被称为 Hecke代数（也常称为 Iwahori–Hecke 代数，或有限岩堀-赫克代数，以区别于下文的仿射版本），其名称的由来可由以下事实[Iwah]得到解释。粗略地说，若取 G 一个有限域上的约化群，以及 B 它的 Borel 子群，那么当 W 是 G的 Weyl群时，式 (I.32) 中的中心化子代数就与本段所说的 Hecke 代数一致。更确切地说，参数 q 变为有限域[3]的基数。因此，Iwahori–Hecke 代数使我们得以理解 G 表示论中至少这样一部分：它包含在 $\mathrm{Ind}_B^G\mathbf{1}_B$ (来自G 的、具有一个被 B固定的向量的表示)之中。

更一般地说，Iwahori–Hecke 代数是有限域上约化群表示论的基础。其核心思想是“Harish–Chandra哲学”，该哲学认为，这些表示论的研究可以分为两个步骤。粗略地说，首先应当对表示论的基本块进行分类：即尖点表示或离散级数表示。接下来便是理解由这些基本块构造出的一些诱导表示。作为中心化子代数，Hecke 代数出现在第二个步骤中。与 Borel 子群相关的置换表示是第一个例子。值得注意的是，事实证明，所有由尖点表示诱导而来的表示的中心化子代数，都与反射群 [HL, Lus1]相关的 Iwahori–Hecke 代数密切相关。Harish–Chandra哲学源于实李群表示论和调和分析，在表示论的其他若干领域也极为有用。我们刚才提到的只是其中之一；另一个领域涉及 p-进群和朗兰兹纲领，其中也用到了 Iwahori–Hecke 代数。

仿射Hecke代数。在 Coxeter 群中，我们有所有与有限根系相关的有限 Weyl群。事实证明，我们还拥有与根系的仿射扩张相关的仿射魏尔群。这些群可以看作有限 Weyl群与根格的半直积。事实证明，它们也具有 Coxeter 群的表示。因此，它们都有相应的 Hecke 代数，称为仿射Hecke代数，或仿射伊wahori–赫克代数。

实际上，我们可以考虑“扩展的”仿射魏尔群，即用更大的格替代根格（例如权格，但也可以是其他更大的格）。我们可以将一个扩展的仿射魏尔群与一个根数据联系起来，而根数据会出现在约化群的研究中（例如 [GM]）。事实证明，我们还可以定义与根数据 [Lus2, Sol2] 相关的仿射伊wahori–赫克代数。例如，我们有一个 GL 型仿射 Hecke 代数，这可能是最广为人知的一种。它将在第四章中作为仿射Yokonuma–Hecke代数的一个特例（$d=1$）出现。

仿射伊wahori–赫克代数在 p-进域上的约化群表示论中发挥着类似于有限域上有限版本的作用。首先，若取一个定义在 p-进域上的约化群 G a，以及它的 Iwahori子群 B，那么 (I.32) 中的中心化子代数就是与 G [IM] 的 Weyl群相关联的仿射伊wahori–赫克代数。因此， p-进群的表示论至少有一部分（即具有 Iwahori子群不变向量的表示）受仿射Hecke代数控制。看来实际情况远不止如此：仿射Hecke代数似乎还以与上文相同的 Harish–Chandra哲学，出现在 p-进群的整个表示论中；例如参见 [Sol1]。

我们不可能在此讨论有限型或仿射型 Iwahori–Hecke 代数的所有应用。至少可以提及 Kazhdan–Lusztig多项式 [KL]，它们在表示论中具有非凡的广泛应用。

[3]这也解释了为何选择字母“q”：它是字母“p”之后的那个字母，而有限域通常记作 $\mathbb{F}_q$，其中 q 是 p 的幂。幸运的是， p 之后的字母也是“quantum”（量子）一词的首字母，因此不会与量子群理论中的记号冲突。

与本文主题更为密切相关的是，我们将讨论范围限定于 GL 的仿射Hecke代数。首先，在可积系统中，它为将反射方程纳入 Hecke 代数 [IO2] 中的杨–巴克斯特方程研究提供了代数框架。其次，对于纽结与链环，它在实心环面内的纽结与链环研究中发挥着与 Hecke 代数相同的作用 [Lam]。最后，还有一种舒尔–韦尔对偶的推广，将仿射Hecke代数与 A型仿射量子群联系起来 [CP2]。

箭图赫克代数。箭图赫克代数（又称 KLR 赫克代数）由 Khovanov–Lauda 和 Rouquier [KhLa1, KhLa2, Rou] 提出，旨在实现量子群的范畴化。粗略地说，它们的表示论结构仿照了量子群（某些子代数）的代数结构。更进一步，KLR代数的分圆商实现了量子群最高权可积模的范畴化 [KK]。这类范畴化结论将某个代数 A 与另一个代数 B的表示范畴联系起来，在两个方面都极为有用。一方面，这自然为 B的表示论提供了大量信息；另一方面，它往往也对代数 A 有着显著的应用。例如，若元素 A 在某个基下的分解对应于表示 B 的直和分解（或约当–赫尔德合成列），那么该分解中系数的非负性便可立即得出。

这些发展的起源，源于A型中一个尤为有趣的故事。在这里，Lascoux–Leclerc–Thibon提出的一个猜想后来由Ariki证明，涉及对称群和通常赫克代数[4]的模表示论。它们与A型仿射量子群相关，这与前一段的思路相同（例如参见 [KKK] 的引言及其中的参考文献）。如果我们沿着量子群的历史脉络，从可积系统和／或辫群出发，那么意识到量子群后来也对对称群的模表示具有根本重要性，着实令人惊讶。

Brundan–Kleschev同构阐明了上述两段之间的联系：他们证明，A型KLR代数的分圆商实际上与A型仿射Hecke代数的分圆商同构，其中包括通常赫克代数和对称群 [BK]。这一同构是显式的，尽管相当复杂。KLR代数通过生成元与关系的表示来定义，而这种表示并不那么简洁。得益于Brundan–Kleschev同构，我们可以将它们（在A型中）视为对附录中特征零下不可约表示的简洁显式描述在非半单块中的推广。参见 [BK, §5]。

因此，所有类型的仿射量子群都可由所有类型的KLR代数范畴化。在A型中，KLR代数与仿射Hecke代数之间存在显式关联。这引出了一个问题：我们能否对其他仿射Hecke代数做类似的事情？M. Kashiwara及其合作者提出了将B型和D型仿射Hecke代数与量子群以类似方式联系起来的猜想 [EK, KM] ，随后由P. Shan、M. Varagnolo和E. Vasserot证明 [VV, SVV]。在他们的证明中，出现了一些通过几何方法定义的代数，它们发挥着与A型KLR代数类似的作用。基于他们的工作，我们得以在[8, 10, 11] 中定义推广KLR代数的代数，并证明它们与B型和D型仿射Hecke代数的分圆商之间存在显式同构。

事实证明， [8, 10, 11] 中定义的代数最近已被用于一个舒尔–韦尔对偶命题，将它们与量子群 [AP]的量子对称对联系起来。这些数学结构与反射方程的关系，正如量子群与杨–巴克斯特方程之间的关系一样 [BK, AV]。因此，对于本论文而言，这个循环已经闭合，因为舒尔–韦尔对偶、量子群和可积系统也出现在这些发展中。

附录 I.A 对称群与 Hecke代数的表示论

I.A.1 合成、分拆与杨图表

满足 $\nu_1 + \cdots + \nu_l = n$ 的非负整数元组 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_l)$ 称为 n 的一个组合。整数 $\nu_1,\ldots,\nu_l$ 称为 ν 的各个部分。我们不区分 ν 与在其末尾添加了一些等于 0 的部分后得到的同一元组。组合 $\ell(\nu)$ 的长度是满足 $\nu_k \neq 0$ 的最大整数 k。我们用 $\nu \models n$ 表示“ν 是 n 的一个组合”。

λ 的 n 分拆是 n 的一种合成，其各部分按非递增顺序排列。因此，它是一个整数元组 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$，满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l \geq 0$ 和 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$。对于分拆，长度 $\ell(\lambda)$就是

[4]值得回顾的是，模（*i.e.* 正特征域上的）对称群表示论远不如特征零情形那样为人所理解。

非零部分的数量。我们用 $\lambda \vdash n$ 表示"λ 是 n的一个分拆"。

一对 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ 称为一个节点。分拆 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ 的杨图（或费雷尔图）是满足 $x \in \{1, \dots, l\}$ 和 $y \in \{1, \dots, \lambda_x\}$的节点 (x, y) 的集合。分拆 λ的杨图可视为一个左对齐的数组，共有 l行，其中第 j行包含 λ_j 个节点，对所有 $j = 1, \dots, l$均如此（注意，行是从上到下计数的）。节点通常用一个空框表示。

对于分拆 λ，形状为 λ 的杨表是从 λ 的节点集合到 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$的映射。它可以表示为在 λ 的图示节点中填入 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$中的数字。若杨表的形状是 n 的一个分拆，则其大小为 n （大小即节点的数量）。为简洁起见，我们有时将形状为λ 的杨表称为 λ-杨表。

大小为 n 的杨表称为标准杨表，如果从节点集合到 $\{1, \dots, n\}$ 的映射是双射，并且杨图中各行从左到右、各列从上到下的数字都严格递增。我们定义

$$\mathrm{STab}(\lambda) = \{\text{standard } \lambda\text{-tableaux}\} \quad \text{and} \quad \mathrm{STab}(n) = \bigcup_{\lambda \vdash n} \mathrm{STab}(\lambda) \ .$$

杨表 $\boldsymbol{t}$ 称为半标准杨表，如果各行中的数字弱递增，且杨图各列中的数字从上到下严格递增。对于 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，令 ν_a 表示整数 a 在杨表 $\boldsymbol{t}$ 中出现的次数。序列 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ 构成 n 的一个合成。我们称 $\boldsymbol{t}$ 为权为 ν 的半标准杨表。我们定义

$$\mathrm{SSTab}(\lambda, \nu) := \{\text{semistandard } \lambda\text{-tableaux of weight } \nu\} \ .$$

Fo例如，标准杨表是权为 $(1, \dots, 1)$ 的半标准杨表 .

半标准杨表中有一个重要子集，其中节点中的数字都属于某个整数 N 对应的 $\{1, \dots, N\}$。因此我们定义：

$$\mathrm{SSTab}_N(\lambda) = \{\text{semistandard } \lambda\text{-tableaux with numbers} \leq N\} \quad \text{and} \quad \mathrm{SSTab}_N(n) = \bigcup_{\lambda \vdash n} \mathrm{SSTab}_N(\lambda) \ .$$

等价地，这意味着杨图表的权 ν 不是固定的，而是要求满足 $\ell(\nu) \leq N$。也就是说，我们有 $\mathrm{SSTab}_N(\lambda) = \bigcup \mathrm{SSTab}(\lambda, \nu)$，其中并集遍历所有满足 $\ell(\nu) \leq N$ 的 n 的合成 ν

下面给出两个例子：

$$\boldsymbol{t} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \ .$$

两者都是 λ-杨图表，且满足 $\lambda = (3, 1)$；其中 $\boldsymbol{t}$ 是标准的，而 $\boldsymbol{T}$ 是半标准的。我们有 $\boldsymbol{T} \in \mathrm{SSTab}_3(\lambda)$（实际上，对于任意 $N \geq 3$，它都属于 $\mathrm{SSTab}_N(\lambda)$）。更准确地说，$\boldsymbol{T}$ 的权是合成 $\nu = (1, 2, 1)$，其长度为 3。

支配序与 Kostka 数。对于分拆 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$，我们采用约定 $\lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \cdots = 0$。对于大小相同的两个分拆 λ、μ，记

$$\lambda \geq \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i \ , \quad \forall i.$$

这就是分拆的支配序。

对于一个分拆n λ 的 n 和一个合成 ν 的 n，形状为 λ an 的半标准杨氏图表的数量 d 权为 ν 称 为 Kostka 数：

$$K_{\lambda,\nu} := |\mathrm{SSTab}(\lambda, \nu)| \ .$$

一个基本性质是，$K_{\lambda,\ \nu}$ 不依赖于 ν 各部分的排列顺序（参见 [Sta2，定理 7.10。2]，其中给出了直接的组合证明）。因此，可以验证这蕴含了 Kostka 数的另一个基本性质，即它们与支配序之间的关系：

$$K_{\lambda,\nu} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \geq \nu^{\mathrm{ord}} \ ,$$

其中，ν^{ord} 是将 ν 的各部分按递减顺序重新排列后得到的分拆。

例 I.23. 设 $\lambda = (4, 4)$ 和 $\nu = (3, 2, 2, 1)$，则

半标准杨氏表$(\lambda, \nu) := \Big\{$ $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & 3 & 4 & \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 3 & \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline\end{array}$ $\Big\}$.

若 $\nu' = (2, 3, 1, 2)$（我们已将 ν 的各部分重新排列），则：

半标准杨氏表$(\lambda,\nu') :=$ $\left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&2&2&\\\hline 2&3&4&4&\\\hline\end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&2&3&\\\hline 2&2&4&4&\\\hline\end{array}\right\}$.

最后，我们取一个含有等于 5 的部分的合成，例如 $\nu = (2,5,1)$。这里 $\nu^{\mathrm{ord}} = (5,2,1)$，而我们没有 $\lambda \geq \nu^{\mathrm{ord}}$。因此，集合半标准杨氏表$(\lambda,\nu)$为空。这里很容易看出，无法在图示 λ 中放入 5 个相同的数字而不使某一列中出现两个相同的数字。

I.A.2 S_n 和 $H_n(q)$的半正规表示

例如，可参阅 [Hoe、IO1、OV、Ram2、Rut、You]。

Hecke 代数。首先，我们定义标准杨表 $\boldsymbol{t}$的内容序列。参数q 满足 q^2 不是单位根。令 θ_i 为 $\boldsymbol{t}$ 中编号为 i 的节点，并将θ_i 的坐标记为(x_i, y_i)。也就是说，在 $\boldsymbol{t}$中，数字 i 位于第 x_i 行、第 y_i列。我们定义经典内容 $\mathrm{cc}_i(\boldsymbol{t}) = y_i - x_i$ 以及 q-内容 $\mathrm{c}_i(\boldsymbol{t}) = q^{2\mathrm{cc}_i(\boldsymbol{t})}$。下面是一个标准杨表及其 q-内容序列的例子：

$$\boldsymbol{t} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \quad : \qquad \mathrm{c}_1(\boldsymbol{t}) = 1\,, \quad \mathrm{c}_2(\boldsymbol{t}) = q^2\,, \quad \mathrm{c}_3(\boldsymbol{t}) = q^{-2}\,, \quad \mathrm{c}_4(\boldsymbol{t}) = q^4\,.$$

现在令 $\lambda \vdash n$，并令 S_λ 为一个向量空间，其基为 $\{v_{\boldsymbol{t}}\}_{\boldsymbol{t}\in \mathrm{STab}(\lambda)}$，由形状为 λ的标准杨表索引。生成元 σ_1、……、σ_{n-1}的下列公式定义了 Hecke 代数 $H_n(q)$在空间 S_λ上的一个不可约表示：

$$\sigma_i(v_{\boldsymbol{t}}) = \frac{(q-q^{-1})\mathrm{c}_{i+1}(\boldsymbol{t})}{\mathrm{c}_{i+1}(\boldsymbol{t}) - \mathrm{c}_i(\boldsymbol{t})}\, v_{\boldsymbol{t}} + \frac{q\,\mathrm{c}_{i+1}(\boldsymbol{t}) - q^{-1}\mathrm{c}_i(\boldsymbol{t})}{\mathrm{c}_{i+1}(\boldsymbol{t}) - \mathrm{c}_i(\boldsymbol{t})}\, v_{s_i(\boldsymbol{t})}\,, \qquad \text{for } i \in \{1,\dots,n-1\}. \tag{I.33}$$

其中 $s_i(\boldsymbol{t})$ 是将 i 和 $i+1$ 互换后由 $\boldsymbol{t}$ 得到的杨表。杨表 $s_i(\boldsymbol{t})$ 不一定是标准杨表，对于任意非标准杨表 $\boldsymbol{t}'$，我们令 $v_{\boldsymbol{t}'} := 0$。注意，由于 q^2 不是单位根，因此对于任意 $\boldsymbol{t} \in \mathrm{STab}(\lambda)$，都有 $\mathrm{c}_i(\boldsymbol{t}) \neq \mathrm{c}_{i+1}(\boldsymbol{t})$，所以公式（I.33）成立。

当 λ 遍历 n 的所有分拆时，表示 S_λ 两两不同构，并且穷尽了 $H_n(q)$ 的所有不可约表示。不可约表示 S_λ 是量子 Schur–Weyl 对偶中出现的表示。特别地，如果 λ 是单行方格，则表示 S_λ 是由 $\sigma_i \mapsto q$ 给出的一维表示；如果 λ 是单列方格，则表示 S_λ 是由 $\sigma_i \mapsto -q^{-1}$ 给出的一维表示。

对称群。如果我们用 $d_{i,j}(\boldsymbol{t}) := \mathrm{cc}_j(\boldsymbol{t}) - \mathrm{cc}_i(\boldsymbol{t})$ 表示杨表 $\boldsymbol{t}$ 中编号为 j 和 i 的节点之间的轴向距离，那么公式（I.33）可以用 q-数 $[d]_q = \frac{q^d - q^{-d}}{q - q^{-1}}$ 表示如下：

$$\sigma_i(v_{\boldsymbol{t}}) = \frac{q^{d_{i,i+1}(\boldsymbol{t})}}{[d_{i,i+1}(\boldsymbol{t})]_q}\, v_{\boldsymbol{t}} + \frac{[d_{i,i+1}(\boldsymbol{t}) + 1]_q}{[d_{i,i+1}(\boldsymbol{t})]_q}\, v_{s_i(\boldsymbol{t})}\,, \qquad \text{for } i \in \{1,\dots,n-1\}. \tag{I.34}$$

这表明，该公式可以扩展到 $q^2 = 1$ 的情形，因为 q 数 $[d]_q$ 在 $q^2 = 1$ 时的极限就是 d。当 $q^2 = 1$ 时，公式（I.34）给出了对称群的不可约表示 S_λ。它们彼此不同构，并且穷尽了 $H_n(q)$ 的不可约表示。再次，这些表示 S_λ 正是舒尔–韦尔对偶中出现的表示。对于 λ 个单行方格，对应的表示 S_λ 是平凡表示；而对于 λ 个单列方格，对应的表示 S_λ 是符号表示。

I.A.3 分支规则与 Bratteli 图示

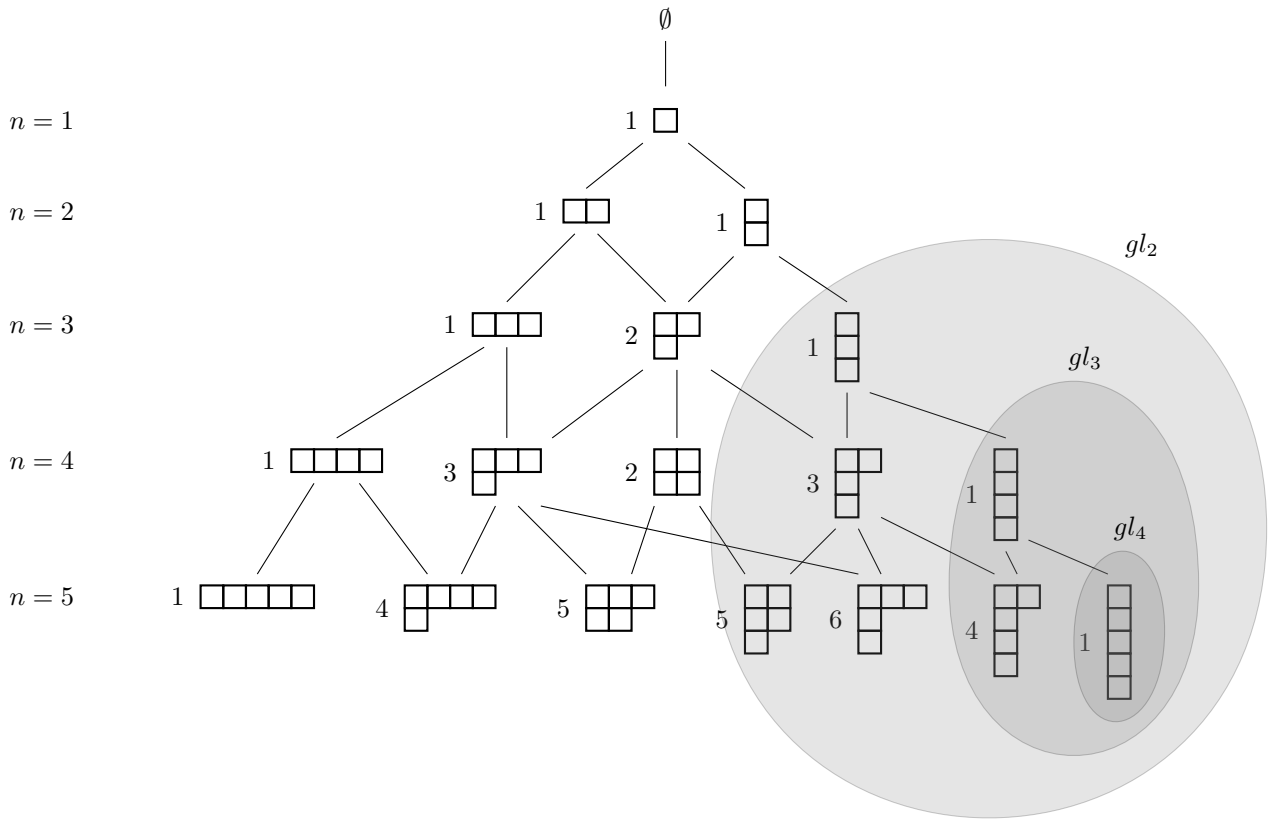
Hecke 代数与对称群的分支规则相同（同样，在考虑 $H_n(q)$ 时，q^2 不是单位根）。具体如下：

$$\mathrm{Res}_{H_{n-1}(q)}(V_\lambda) \cong \bigoplus_{\substack{\mu\vdash n-1\\ \mu\subset\lambda}} V_\mu\,. \tag{I.35}$$

布拉泰利图的前几层如下所示。第 n 层的顶点以 $H_n(q)$（等价地，以 S_n）的不可约表示（的同构类）为索引，边则表示分支规则：

当且仅当 S_μ 出现在 S_λ 的限制中时，才会将第 n 层的 λ 与第 $n-1$ 层的 μ 相连。不存在重边，因为重数始终为 0 或 1。所得图示就是按包含关系排序的分拆偏序集的哈斯图（即所谓的杨格）。

阴影区域旨在以直观方式表达舒尔–韦尔对偶的完整陈述。具体而言，删除标记为 gl_N 的阴影区域内的顶点后，剩余顶点对应于张量积 $V^{\otimes n}$ 的分解中出现的表示，其中 $\dim(V) = N$。换言之，移除阴影区域（以及连接到该区域内顶点的边）后，我们得到 $GL(V)$ 或 $U_q(gl_N)$ 的中心化子的布拉泰利图。例如，若 $N = 2$，所得图示仅包含至多有两行的分拆，它是 Temperley–Lieb 代数的布拉泰利图。



第二章

融合海克代数

目录

引言 34
II.1 将舒尔-韦尔对偶推广至对称幂. **35**
II.2 融合置换与融合辫子 . **37**
II.3 融合 Hecke 代数的表示论. **41**
II.4 中心化子的代数表示 . **43**
II.5 辫群在哪里? . **45**
II.6 应用：杨–巴克斯特方程的解 . **46**
II.7 结论与展望 . **47**
附录 II.A 融合海克代数的布拉泰利图. **48**

引言

在第一章中，我们遇到了一些具有以下特征的代数：

- 它们是辫群代数的商；
- 它们包含杨–巴克斯特方程的抽象解；
- 它们在形如 $V^{\otimes n}$ 的向量空间上有表示。

第一个著名的例子是 Hecke 代数[1]，，但我们也有其他明确的例子，即 Temperley–Lieb 代数和 Birman–Murakami–Wenzl代数。这些例子正是以下链环不变量背后的代数：Jones多项式、HOMFLYPT 多项式和考夫曼多项式。

上面列表中的第三项实际上是统一这些例子的关键。事实上，通过它们在张量空间 $V^{\otimes n}$ 上的表示，可以将这些代数视为某些有趣代数——量子群——的表示的中心化子。随后我们看到，量子群确实是经过巧妙设计的代数，它们通过自身的中心化子产生符合上述列表的代数。

本章的目标是描述更一般的量子群表示的中心化子，以便得到其他符合上述愿望清单的代数。这些代数将称为融合 Hecke 代数。它们的经典极限是带有组合风格的代数，称为融合置换代数；这类代数更简单，也颇有趣。

“融合”这一名称源于这样一个事实：在我们的构造背后，或多或少隐含着杨–巴克斯特方程的所谓融合过程。融合过程最初是在矩阵层面设计的，旨在从一个已知解出发，构造杨–巴克斯特方程的新解。这项工作的出发点实际上是，我们希望理解杨–巴克斯特方程的一些解（即对应于 su_2 的高自旋表示的解）如何能够来自某些代数中的抽象公式。这里相关的代数就是融合 Hecke 代数。

[1]实际上，第一个例子应当是对称群的群代数，其变形就是 Hecke 代数。从辫群的角度看，对称群稍显简单。

有了诸如融合 Hecke 代数这样的中心化子代数之后，我们从第一章讨论的一般图景中得知，杨–巴克斯特方程的某个解必定隐藏在某处。当然，找到给出这一解的显式公式又是另一回事。结果我们成功地为融合 Hecke 代数找到了这个公式，而且它采用 q-数的形式，十分优美（该公式见本章最后一节）。

在探寻杨–巴克斯特方程的解的过程中，我们在很大程度上偏离了这一首要目标。融合 Hecke 代数 $H_{\mathbf{k},\,n}$ 的表示论特性实在太引人入胜，让人无法置之不理。从我们的出发点来看，代数 $H_{\mathbf{k},\,n}$ 自然与若干$U_q(gl_N)$的表示构成舒尔–韦尔对偶。一个重要之处在于，代数 $H_{\mathbf{k},\,n}$ 不依赖于 N，并且在某种意义上，它内插于任意 N 的中心化子之间，或位于它们之上。这引出了一个问题：给定特定的 N，需要取怎样的商？对此，我们提出了一些猜想，并取得了部分结果。

此外，自然也会想到一个问题：能否从头推导出 $H_{\mathbf{k},\,n}$ 的表示论（也就是说，不借助量子群 $U_q(gl_N)$）？秉承舒尔–韦尔对偶的思路，这将为关于 $U_q(gl_N)$-表示的一些结果提供另一种视角，例如某些张量积的分解。在半单情形下，我们成功地仅凭通常赫克代数已知的表示论，描述了 $H_{\mathbf{k},\,n}$ 的表示论。

最后，为了探讨与辫群及链环不变量之间的联系，我们借助融合辫的概念及其某种乘法方式，给出融合 Hecke 代数的拓扑定义。该定义使我们能够自然地将代数中的对象与 $q=1$ 所涉及的组合结构联系起来，也使我们能够对如何通过商去除该理想以得到真正的中心化子，给出一种简洁而相当简单的（猜想性）描述。融合 Hecke 代数是 Hecke 代数的自然推广，而对上述理想取商则是 Temperley–Lieb 代数的自然推广。

参考文献 。本章相关的出版物（可从中找到更多细节）有 [1, 6, 7].

II.1 将舒尔–韦尔对偶推广至对称幂 s

整数 $N>1$ 固定不变：它是 $U_q(gl_N)$ 的基本表示 V 的维数。以下内容尤其适用于 $q=1$。

II.1.1 融合 Hecke 代数与 q-对称幂

q-对称幂。回顾一下，对于任意满足 $\ell(\lambda)\le N$ 的分拆 λ，我们有 $U_q(gl_N)$ 的一个不可约表示 V_λ^N。这里我们将考虑单行分拆这一特殊情形，即某个整数 $k\ge 1$ 对应的 $\lambda=(k)$。在这种情况下，我们可以利用量子 Schur–Weyl 对偶，对 $V_{(k)}^N$ 作如下描述。回顾一下，基本表示 V of $U_q(gl_N)$ 的 k 重张量积可分解如下：

$$V^{\otimes n}=\bigoplus_{\substack{\lambda\vdash k\\ \ell(\lambda)\le N}} V_\lambda^N\otimes S_\lambda\,.$$

对于 $\lambda=(k)$，Hecke 代数 $H_n(q)$ 的表示 $S_{(k)}$ 是一维的（$\sigma_i\mapsto q$）。因此，从 $H_n(q)$ 的角度来看上述分解，我们看到可以利用 $H_n(q)$ 投影到不可约表示 $S_{(k)}$上的投影算子，得到子空间 $V_{(k)}^N$。这正是 q-对称化算子所起的作用。

$H_k(q)$ 中的 q-对称化算子是以下元素（所有记号均已在 (I.29) 附近定义）：

$$P_k=\frac{\sum_{w\in S_k}q^{\ell(w)}\sigma_w}{\sum_{w\in S_k}q^{2\ell(w)}}=\frac{q^{-k(k-1)/2}}{[k]_q!}\sum_{w\in S_k}q^{\ell(w)}\sigma_w\ . \tag{II.1}$$

借此机会，我们强调这个漂亮的公式 $\sum_{w\in S_k}q^{2\ell(w)}=q^{k(k-1)/2}[k]_q!$。

这个元素是 $H_n(q)$ 中对应于一维表示 $S_{(k)}$ 的正交中心幂等元。因此，我们定义：

$$S^kV=P_k(V^{\otimes k})\,,$$

我们称空间 S^kV 为 V 的第 k 个“q-对称幂”。这是 $U_q(gl_N)$ 的一个表示，与上文讨论的表示 $V_{(k)}^N$ 一致。

若 $q=1$ 则 P_k 是 S_k所有元素的通常对称化算子（归一化求和），而空间 S^kV是 V的通常 k 次对称幂。

张量积。现在设 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\infty}$ 是一个由非负整数组成的无限序列，并设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$（我们考虑无限序列 $\mathbf{k}$，以便 n 可以按需变化）。这里我们考虑 $U_q(gl_N)$的表示的如下张量积：

$$S^{k_1}V \otimes \cdots \otimes S^{k_n}V \ .$$

常值序列 $\mathbf{k} = (1, 1, \ldots)$ 对应通常的情形 $V \otimes \cdots \otimes V$。对于固定整数 k，常值序列 $\mathbf{k} = (k, k, \ldots)$ 特别值得关注，但我们将讨论混合张量积的一般情形。

融合 Hecke 代数。考虑"大"Hecke 代数 $H_{k_1+\cdots+k_n}(q)$。存在一个自然的（抛物）子代数，同构于 $H_{k_1}(q) \otimes \cdots \otimes H_{k_n}(q)$。因此，我们可以通过在每个因子中代入 q-对称化子，定义 $H_{k_1+\cdots+k_n}(q)$ 的如下元素：

$$P_{\mathbf{k},n} = P_{k_1} \otimes \cdots \otimes P_{k_n} \ . \tag{II.2}$$

或者，$P_{\mathbf{k},n}$ 的显式表达式为：

$$P_{\mathbf{k},n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{q^{-k_i(k_i-1)/2}}{[k_i]_q!} \sum_{w \in S_{k_1} \times \cdots \times S_{k_n}} q^{\ell(w)} \sigma_w \ ,$$

这里我们改为指称对称群 $S_{k_1+\cdots+k_n}$ 的抛物子群 $S_{k_1} \times \cdots \times S_{k_n}$。元素 $P_{\mathbf{k},n}$ 是 $H_{k_1+\cdots+k_n}(q)$ 的一个幂等元，前面的因子确保了正确的归一化，从而得到 $P_{\mathbf{k},n}^2 = P_{\mathbf{k},n}$。

现在我们可以用代数方式定义融合 Hecke 代数。

定义 II.1. 融合 Hecke 代数$H_{\mathbf{k},\ n}(q)$ 是如下代数：

$$H_{\mathbf{k},n}(q) = P_{\mathbf{k},n} H_{k_1+\cdots+k_n}(q) P_{\mathbf{k},n} \ .$$

这里需要作一些说明。对于任意代数 A 以及其中的任意幂等元 e，子集 eAe 构成一个代数。它可以视为 A的一个子代数，因为二者的乘法相同；但需要注意，eAe 的单位元是 e，而非 A的单位元。这类幂等子代数在表示论中十分常见，参见例如 [Gre, §6]，其中给出了以下标准结果。首先，根据构造，若向量空间 M 是 A的一个表示，则 eM（可能是$\{0\}$）是 eAe的一个表示。此外，若 A 是半单的，且 M_1、.....、M_k 是完备的不可约表示集，那么 eM_1、.....、eM_k 中所有非零表示构成了 eAe的完备不可约表示集。

如果 $q = 1$ 那么 幂等元 $P_{\mathbf{k},n}$ 只是对该子群 S_{k_1}所有元素的归一化求和 $\times \cdots \times S_{k_n}$ 的 $S_{k_1+\cdots+k_n}$，而融合 Hecke 代数 $H_{\mathbf{k}\ n}(1)$ 是如下代数：

$$H_{\mathbf{k},n}(1) = P_{\mathbf{k},n} S_{k_1+\cdots+k_n} P_{\mathbf{k},n} \ .$$

在这种情况下，我们将代数 $H_{\mathbf{k},n}(1)$ 称为融合置换代数。

舒尔–韦尔对偶的推广。几乎根据构造，融合 Hecke 代数$H_{\mathbf{k},n}(q)$ 作用于所需的 $U_q(gl_N)$-表示的张量积。具体而言，我们有两个表示：

$$U_q(gl_N) \xrightarrow{\ \rho\ } \mathrm{End}(S^{k_1}V \otimes \cdots \otimes S^{k_n}V) \xleftarrow{\ \pi\ } H_{\mathbf{k},n}(q) \ .$$

现在我们可以陈述舒尔–韦尔对偶（第一部分）的推广。

定理 II.2（[7]）。 中心化子线性算子空间$_{U_q(gl_N)}(S^{k_1}V \otimes \cdots \otimes S^{k_n}V)$ 是融合 Hecke 代数的像 $H_{\mathbf{k},n}(q)$：

$$End_{U_q(gl_N)}(S^{k_1}V \otimes \cdots \otimes S^{k_n}V) = \pi\big(H_{\mathbf{k},n}(q)\big) \ . \tag{II.3}$$

我们处于半单情形（q 是一般的），因此实际上 $\pi\big(H_n(q)\big)$ 和 $\rho\big(U_q(gl_N)\big)$ 互为中心化子。

II.1.2 关于抛物型 Hecke 代数的简短补充

设 W 为一个Coxeter 群，其生成元集合为 S。设 J 为 S 的一个子集，并设 W_J 为由生成元的子集 J 生成的 W的子群，称为抛物子群。我们假设 W_J 是有限的。以下所有内容对 $q=1$均有效。我们将 [称为APV，将Cur]称为Cur。

抛物赫克代数 $H^J(W)$ 的定义。我们考虑 Hecke 代数 $H(W)$ 中的以下元素（见第一章），它与 W 相关：

$$P_J = \frac{1}{W_J(q^2)} \sum_{w\in W_J} q^{\ell(w)}\sigma_w \ ,$$

其中，归一化因子 $W_J(q^2) = \sum_{w\in W_J} q^{2\ell(w)}$ 的选取使得 P_J 是一个幂等元。元素 P_J 是 Hecke 代数 $H(W_J)$ 的 q-对称化元；在这里，我们将其视为由 T_s（满足 $s\in J$）生成的 $H(W)$ 的子代数。

定义 II.3。抛物赫克代数 $H^J(W)$ 定义为以下代数：

$$H^J(W) = P_J H(W) P_J \ .$$

$H^J(W)$ 的标准基。为了从 $H(W)$ 的 $\{T_w\}$ 的标准基得到 $H^J(W)$ 的一个基，我们需要在 $W_J\backslash W/W_J$ 中为每个双陪集选取一个代表元。

命题 II.4。设 R_J 是 $W_J\backslash W/W_J$ 中双陪集的任意代表元集合，则 $\{P_J\sigma_x P_J\}_{x\in R_J}$ 是 $H^J(W)$ 的一个基。

陪集代表元有一种最标准的选取方式，具体如下。对于 $W_J\backslash W/W_J$ 中的每个双陪集，在陪集 [GP 中都存在唯一一个最小长度的元素（参见《GP》第 2] 章）。我们将 X_{JJ} W_J 在 W 中的双陪集的最短长度代表元集合记为 X_{JJ}。这些特殊的陪集代表元可通过其下降集来刻画：

$$x\in X_{JJ} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(x)\cap J = \mathcal{R}(x)\cap J = \emptyset \ ,$$

其中，元素 $x\in W$ 的左下降 $\mathcal{L}(x)$ 由满足 $\ell(sx) < \ell(x)$ 的简单对换 $s\in J$ 组成；右下降 $\mathcal{R}(x)$ 的定义与此类似。

$H^J(W)$ 的标准基因此为

$$\{P_J\sigma_x P_J\}_{x\in X_{JJ}} \ .$$

II.2 融合置换与融合辫

融合 Hecke 代数涉及具有辫股的“拓扑对象”，这些辫股可以通过彼此上方或下方穿过而交叉。对于 $q=1$，所有拓扑信息都会消失，我们得到一个纯粹由组合方式定义的代数。下表展示了另一个经典情形。

拓扑代数	组合代数
Hecke 代数	对称群
BMW代数	Brauer代数
融合 Hecke 代数	融合置换代数

表格两列之间的联系在于，左侧的代数是右侧代数的平坦变形。这里的“平坦”是指向量空间保持不变，而乘法则被修改（带有参数 q）。其一大优点是，我们可以为左侧的代数获得一种由组合对象（来自右侧的代数）索引的自然基，或称标准基。下面我们来看看这在融合 Hecke 代数中是如何实现的。

II.2.1 融合置换代数

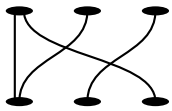
对象。我们将两行 n 点上下排列，并将顶行的点与底行的点连接起来。要求如下：对于每个 $a \in \{1, \dots, n\}$，有 k_a 条边从顶行的第 a 个点出发，并有 k_a 条边到达底行的第 a 个点。边的总数为 $k_1 + \cdots + k_n$。

唯一重要的信息如下：哪些点与哪些其他点相连，以及它们之间有多少条边。更严格地说，取一个如上所示的图示，并令 $a \in \{1, \dots, n\}$。从顶端第 a 个点出发的边有 k_a 条，我们将这些边到达的底部点组成的多重集记为 I_a。如果两个图示对应的多重集序列（$I_1, \dots, I_n$）相同，则认为它们等价。

定义 II.5. 融合置换是上述图示的一个等价类。我们用 $S^{fus}{}_{\mathbf{k}\,n}$ 表示融合置换的集合。

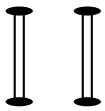
例子。• 如果 $\mathbf{k} = (1, 1, 1, \dots)$ 仅由 1 组成，那么融合置换集合 $\mathcal{D}_{\mathbf{k},n}$ 与 $\{1, \dots, n\}$ 的置换集合相同。

• 令 $n = 3$，并取 $k_1 = 2$ 和 $k_2 = k_3 = 1$。在 $\mathcal{D}_{\mathbf{k},3}$ 中有 7 个不同的融合置换，以下是一个例子（我们给出一个图示及其对应的多重集序列）：

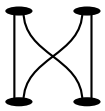


$(\{1,3\}, \{1\}, \{2\})$

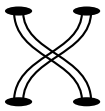
• 令 $n = 2$，并取 $k_1 = k_2 = 2$。下面给出 $\mathcal{D}_{\mathbf{k},\,3}$ 的三个不同融合置换（对于每一个，我们都给出一个图示以及相应的多重集序列）：



$(\{1,1\}, \{2,2\})$

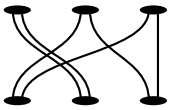


$(\{1,2\}, \{1,2\})$

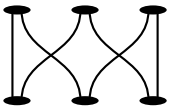


$(\{2,2\}, \{1,1\})$

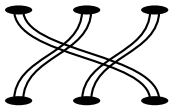
• 令 $n = 3$，并取 $k_1 = k_2 = k_3 = 2$。$\mathcal{D}_{\mathbf{k},\,3}$ 中有 21 个不同的融合置换，以下是其中三个例子（对于每一个，我们都给出一个图示以及相应的多重集序列）：



$(\{2,2\}, \{1,3\}, \{1,3\})$



$(\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\})$



$(\{3,3\}, \{1,1\}, \{2,2\})$

乘法。我们将结合的 $\mathbb{C}$-代数 $H_{\mathbf{k},n}(1)$定义为一个 $\mathbb{C}$-向量空间，其基由 $S^{fus}{}_{\mathbf{k}\,n}$ 中的融合置换索引，并按如下方式定义乘法。设 $d, d' \in \mathcal{D}_{\mathbf{k},n}$，并分别将 d、d'与表示它的图示相对应。

- （拼接）将 d 的图示放在 d' 的图示上方，并将 d 的底行点与 d'的顶行点对应起来。

- （移除中间点）对于每个 $a \in \{1, \dots, n\}$，有 k_a 条边进入中间行的第a个点，另有 k_a 条边从该点离开。我们删除中间行的第 a个点，并对将进入该点的 k_a 条边与从该点离开的 k_a 条边进行所有可能的连接方式求和（在第 a条边处，因此有 k_a!种可能）。

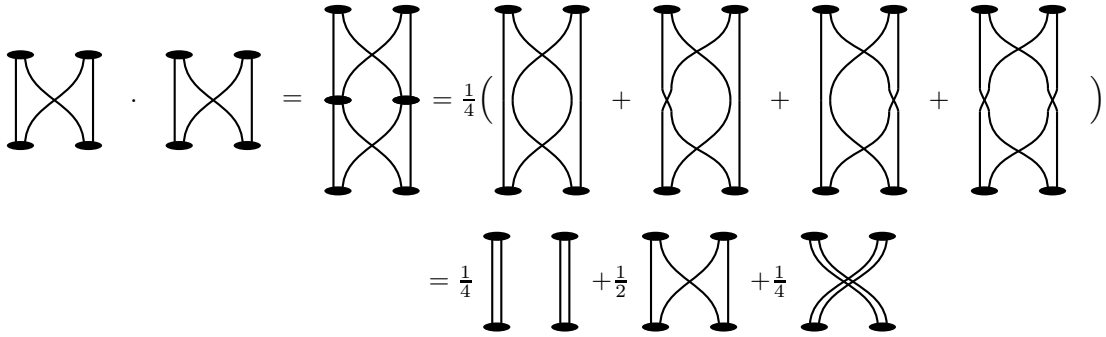
- (归一化) 我们将得到的和除以 $k_1! \dots k_n!$。

按照上述步骤完成后，我们得到一个由图示构成的和，它表示融合置换的和（其系数为有理数）。我们将其定义为 dd' 在 $H_{\mathbf{k},\,n}(1)$ 中的乘法。这种图示乘法是良定义的，因为结果显然只取决于图示的等价类。

代数 $H_{\mathbf{k},\,n}(1)$ 是一个含单位元的结合代数，其单位元是与仅含竖直边的图示相对应的融合置换。

例子。• 如果 $\mathbf{k} = (1, 1, 1, \ldots)$ 仅由 1 组成，那么代数 $H_{\mathbf{k},\ n}(1)$ 显然与 $\mathbb{C}S_n$ 个字母上的对称群 S_n 的复群代数相同。

• 下面给出一个 $H_{\mathbf{k},2}(1)$ 中两个元素的乘积示例，其中 $k_1 = k_2 = 2$:



两个定义的相容性及标准基。正如记号所示，融合置换代数与上一节借助幂等元 $P_{\mathbf{k},n}$ 定义的代数 $H_{\mathbf{k},n}(1)$ 一致。

P命题 II.6（[7]）。代数 $H_{\mathbf{k},n}(1)$ 的两个定义给出同构代数。

不展开细节，两个定义的对应关系如下。回顾一下，幂等元子代数 $P_{\mathbf{k},n}S_{k_1+\cdots+k_n}P_{\mathbf{k},n}$ 有一个基:

$$\{P_{\mathbf{k},n}wP_{\mathbf{k},n}\}_{w\in X_{min}}\,, \tag{II.4}$$

其中 X_{min} 是 $S_{k_1+\cdots+k_n}$ 中 $S_{k_1}\times\cdots\times S_{k_n}$ 的双陪集的最短长度代表元集合。因此，这些 w 是 $k_1+\cdots+k_n$ 的置换，因而可以看作连接 $k_1+\cdots+k_n$ 两行点的一一对应置换图。在这样的图示中，我们将两行点各自行中的前 k_1 个点粘合（或称"融合"）在一起，然后粘合接下来的 k_2 个点，依此类推。由此得到前一小节中的图示，它表示 $S^{fus}{}_{\mathbf{k}\ n}$ 中的一个融合置换。

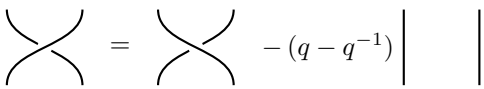
请注意，从图示观点来看，上述使用最短长度代表元的基非常自然。对于给定的融合表示，它对应于选择唯一一个表示该融合表示、且边之间交点数量最少的图示。特别地，这样的图示满足：从顶部同一个点引出的边彼此不交叉，底部到达同一个点的边也同样如此。上面绘制的所有融合置换图示都是按这种方式绘制的。

II.2.2 融合辫与融合 Hecke 代数

对象：融合辫。我们考虑以下对象，它们是通常辫的推广。也可以将它们视为"拓扑化"的融合置换，因为现在交叉将产生影响。我们从一条矩形带开始，其顶边有 n 个固定点，底边有 n 个固定点，与通常辫的情形相同。然后用股线连接这些点，但现在要求如下：每条股线都连接顶边的一个点和底边的一个点；不过，顶边的第 a 个点和底边的第 a个点各连接有 k_a条股线。因此总共有 $k_1+\cdots+k_n$ 条股线。

更准确地说，最好将点替换为小椭圆，从现在起我们就这样做。连接到同一个椭圆的股线，并非真的连接在椭圆上的同一个点，而是彼此相邻地连接在同一个椭圆上。我们沿用通常辫子的术语；与之前一样，我们将这类图示视为在同伦意义下等价，即在固定端点的同时连续移动股线。

我们称这样的对象为融合辫。毋庸赘言，当 $\mathbf{k} = (1, 1, \ldots)$ 时，融合辫就是通常辫。下面给出了一些融合辫的例子。

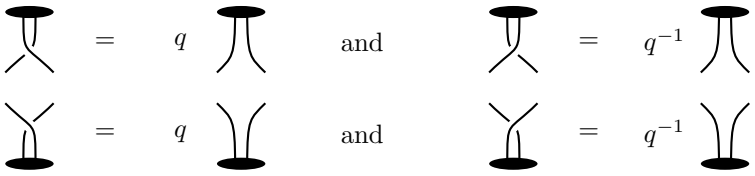


向量空间。我们考虑由融合辫的形式线性组合构成的向量空间 $Vect^{fus}{}_{\mathbf{k}\ n}$。

定义 II.7。向量空间 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 是 $Vect^{fus}{}_{\mathbf{k}\ n}$ 关于以下关系取商所得:

(i) 所有交叉的 Hecke 关系:

(ii) 椭圆附近交叉的幂等关系：



第一个关系（Hecke 关系）与经典辫子和 Hecke 代数的情形一样，对所有交叉都局部成立。幂等关系也是局部关系。具体来说，它们规定：如果两股线从同一个椭圆出发，且它们首次交叉时彼此相交，那么原融合辫等于移除该交叉并乘以 $q^{\pm 1}$ 后得到的融合辫；两股线汇入同一个椭圆时也同样如此。

需要注意的是，椭圆附近交叉的 Hecke 关系是两个幂等关系之和，因此两者完全相容。

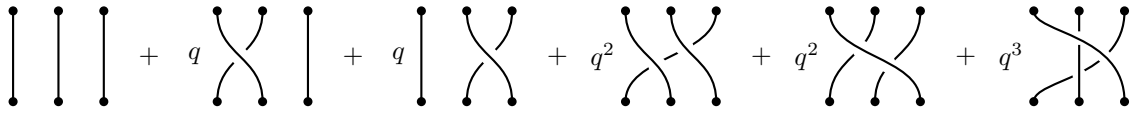
乘法。现在我们在向量空间 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$ 上定义一个乘积，使其成为结合含幺代数。设 b, b' 是两个融合辫。我们将 bb' 定义为以下步骤的结果：

- (拼接) 我们将 b 的图示置于 b' 的图示上方，并将 b 底部的椭圆与 b' 顶部的椭圆识别起来

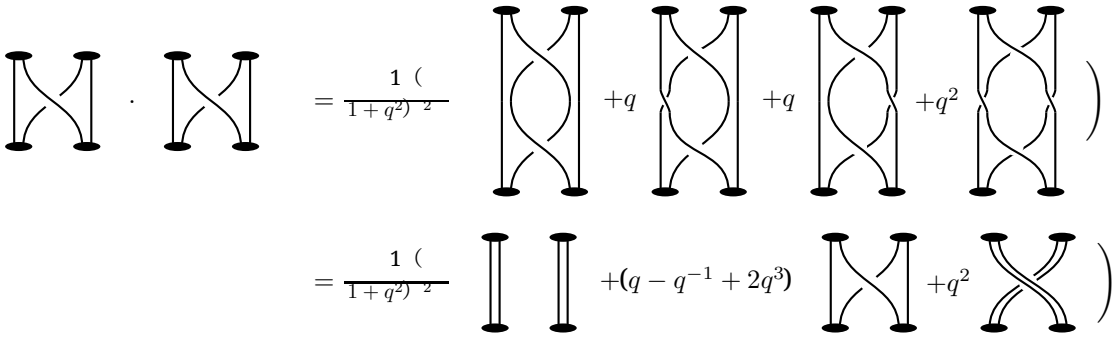
- （移除中间椭圆）对于每个 $a \in \{1, \dots, n\}$，中间一行的第 a 个椭圆有 k_a 股线进入，并有 k_a 股线离开。我们移除这个椭圆，并将其替换为 Hecke 代数 $H_{k_a}(q)$ 的 q-对称化元 P_{k_a}。

在最后一步中，我们将 $H_{k_a}(q)$ 中的任意元素视为 k_a股线上的辫子的线性组合。

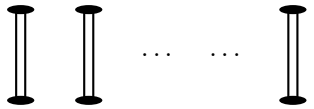
例 II.8。当 $k = 3$ 时，我们演示移除中间椭圆的过程。每个中间椭圆都有三股线进入和离开：；每个椭圆都替换为以下总和，并以 $1+2q^2+2q^4+$ 归一化：



- 下面是 $H^{fus}_{2\ 2}{}_{,}(q)$ 中两个元素的乘积示例：



我们通过说明为什么只有不交叉的竖直股的融合辫是 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$ 的单位元，来展示幂等关系的用法。例如，对于 $k = 2$，它是：



设我们将这个元素置于另一条融合辫的顶部，并将第 a 个中间椭圆替换为 $H_{k_a}(q)$ 中的某个 σ_w。随后，由 σ_w 添加的全部交叉都可以沿着平行股向上移动，并因此会碰到顶行中的某个椭圆。于是我们可以使用幂等元关系。因此，我们看到，用 σ_w 替换一个中间椭圆，与用平凡辫替换该中间椭圆是相同的，只差一个因子 $q^{\ell(w)}$。最后只需在第 a 个椭圆处对 q 对称化子进行（归一化）求和，即可得出结论：乘以上述元素不会改变融合辫。

两个定义及标准基的相容性。对于融合置换代数，我们可以证明，这里定义的代数 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$ 与上一节中借助幂等元 $P_{\mathbf{k},\ n}$ 定义的代数相一致。

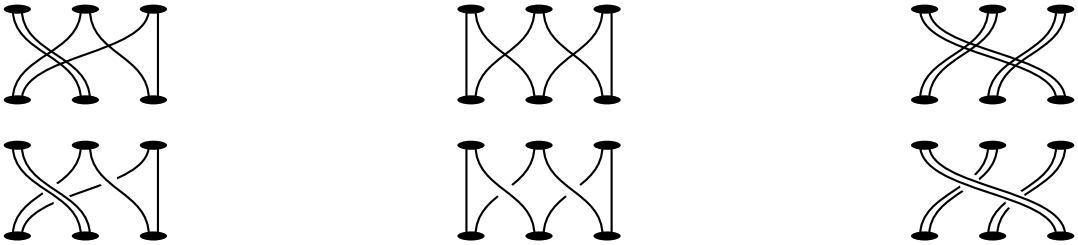
P命题 II.9 ([7])。代数 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 的两种定义给出同构代数。

Rec（从幂等子代数的角度看）$H_{\mathbf{k},n}(q)$ 的标准基为 ：

$$\{P_J\sigma_w P_J\}_{w\in X_{min}}\ , \tag{II.5}$$

其中 X_{min} 是如 (II.4) 中所述的最短长度代表元集合。我们用融合辫来解释这个基。回顾一下，对于 $w\in X_{min}$，我们已经固定了一个表示它的标准图示（交点数最少的图示）。现在，在这个图示中，将每一对边之间的交点改为交叉，并规定所有这些交叉均为正交叉（来自左侧的边从另一条边上方经过）。由此得到一个融合辫图示，因而得到融合 Hecke 代数 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 中的一个元素。改变 $w\in X_{min}$，便得到基 (II.5) 的图示版本。

例 II.10。若 $n=3$ 和 $k_1=k_2=k_3=2$，则有 21 个不同的融合置换，下面给出三个例子。每种情况下，我们都画出一个典范形式的图示，并在其下方给出相应的 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 标准基元素：



结论 II.11. 融合 Hecke 代数 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$ 是融合置换代数 $H_{\mathbf{k},\ n}(1)$ 的平坦变形：二者的基都由同一个集合索引，并且 $H_{\mathbf{k},\ n}(1)$ 中的乘法可作为 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$ 中乘法的一个特例（$q=1$）得到。

II.3 融合 Hecke 代数的表示论

II.3.1 不可约表示与分支规则

下文中，我们用 $\mathbf{k}\vdash n$ 表示合成 $(k_1,\dots,k_n)$，用 $\mathbf{k}^{\mathrm{ord}}_{\vdash n}$ 表示将数 $k_1,\dots,k_n$ 按降序排列后得到的分拆。下文中的所有组合对象均在第一章的附录中定义。

设 $\boldsymbol{t}$ 是形状为 $\lambda\vdash k_1+\cdots+k_n$ 的标准杨表。我们用 $\overline{\boldsymbol{t}}$ 表示由 $\boldsymbol{t}$ 经由以下从 $\{1,\dots,k_1+\cdots+k_n\}$ 到 $\{1,\dots,n\}$ 的映射得到的杨表：

$$1,\dots,k_1\mapsto 1\,,\qquad k_1+1,\dots,k_1+k_2\mapsto 2\,,\qquad\dots\qquad k_1+\cdots+k_{n-1}+1,\dots,k_1+\cdots+k_n\mapsto n\,,$$

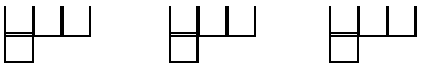
也就是说，我们将 $\boldsymbol{t}$ 中前 k_1 个整数替换为 1，接下来的 k_2 个整数替换为 2，依此类推。这样我们得到一个权为 $\mathbf{k}\vdash n$ 的杨表 $\overline{\boldsymbol{t}}$（注意，如下例所示，$\overline{\boldsymbol{t}}$ 不一定是半标准的）。

现在，设 $\boldsymbol{T}\in\mathrm{SSTab}(\lambda,\mathbf{k}\vdash n)$ 是一个形状为 λ、权为 $\mathbf{k}\vdash n$ 的半标准杨氏图表。我们在 $H_{k_1+\cdots+k_n}(q)$ 的不可约表示 S_λ 中定义如下向量：

$$w_{\boldsymbol{T}}:=\sum_{\substack{\boldsymbol{t}\in\mathrm{STab}(\lambda)\\ \overline{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{T}}} v_{\boldsymbol{t}}\ \in V_\lambda\ . \tag{II.6}$$

这里我们使用的是第一章附录中介绍的 S_λ 的半正规基。

例 II.12. 设 $n=2$，$\mathbf{k}\vdash 2=(2,2)$ 和 $\lambda=(3,1)$。形状为 λ 且权为 $\mathbf{k}\vdash 2$ 的半标准杨氏图表只有一个，即 $\begin{smallmatrix}1&1&2\\2\end{smallmatrix}$。于是有：$w_{\begin{smallmatrix}1&1&2\\2\end{smallmatrix}}=v_{\begin{smallmatrix}1&2&3\\4\end{smallmatrix}}+v_{\begin{smallmatrix}1&2&4\\3\end{smallmatrix}}$。



剩下的形状为 λ 的标准杨表 $\boldsymbol{t} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ 给出了杨表 $\bar{\boldsymbol{t}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$，它不是半标准的。

以下结论仅利用通常赫克代数的表示论即可证明 .

定理 II.13（[7]）。对于任意 $\lambda \vdash k_1 + \cdots + k_n$，令 $W_{\mathbf{k},\,\lambda} := P_{\mathbf{k},\,n}(S_\lambda)$。

1. 空间 $W_{\mathbf{k},\,\lambda}$ 由向量 $w_{\boldsymbol{T}}$ 张成，其中 $\boldsymbol{T} \in$ 半标准杨氏表$(\lambda, \mathbf{k}_{|n})$。

2. $H_{\mathbf{k},\,n}(q)$ 的一组两两非同构的不可约（非零）表示为

$$\{W_{\mathbf{k},\lambda}\}_{\lambda \in S_{\mathbf{k},n}} \qquad with\ S_{\mathbf{k},n} := \{\lambda \vdash k_1 + \cdots + k_n \mid \lambda \geq \mathbf{k}_{|n}^{ord}\}.$$

$W_{\mathbf{k},\,\lambda}$ 的维数为 Kostka 数 $K_{\lambda,\,\mathbf{k}_{|n}} = |$半标准杨氏表$(\lambda, \mathbf{k}_{|n})|$。

3. 对于 $\lambda \in S_{\mathbf{k},\,n}$，$W_{\mathbf{k},\,\lambda}$ 限制到 $H_{\mathbf{k},\,n-1}(q)$ 后分解为：

$$Res_{H_{\mathbf{k},n-1}(q)}(W_{\mathbf{k},\lambda}) \cong \bigoplus_{\mu \in Res_{\mathbf{k}}(\lambda)} W_{\mathbf{k},\mu}\,, \tag{II.7}$$

其中我们设：

$$Res_{\mathbf{k}}(\lambda) := \big\{\mu \in S_{\mathbf{k},n-1} \mid \mu \subset \lambda\ and\ \lambda/\mu\ contains\ at\ most\ one\ box\ in\ each\ column\big\}.$$

注 II.14. 前一定理第 2 项的一个数值推论是：

$$\dim H_{\mathbf{k},n}(q) = \sum_{\lambda \vdash k_1 + \cdots + k_n} |\mathrm{SSTab}(\lambda, \mathbf{k}_{|n})|^2\ .$$

事实上，请回忆 $|\mathrm{SSTab}(\lambda, \mathbf{k}_{|n})| = 0$，若我们没有 $\lambda \geq \mathbf{k}_{|n}^{ord}$。这是对罗宾逊–申斯特德–克努特对应 [Knu] 的一种表示论解释。 ▲

常值序列 $\mathbf{k} = (k, k, \ldots)$ 的情形。我们特别讨论整数 $k \geq 1$ 对应的常值序列 $\mathbf{k} = (k, k, \ldots)$ 的情形。在这种情况下，定理 II.13 第 2 项中不可约表示的参数化要简单得多。

推论 II.15 ([7]). 设 $\mathbf{k} = (k, k, \ldots)$，其中 $k \geq 1$ 为整数。$H_{\mathbf{k},n}$ 的一组完备的两两不同构的不可约（非零）表示为

$$\{W_{\mathbf{k},\lambda}\}_{\lambda \in S_{\mathbf{k},n}} \qquad with\ S_{\mathbf{k},n} := \{\lambda \vdash kn \mid l(\lambda) \leq n\}.$$

链 $\{H_{\mathbf{k},n}\}_{n \geq 0}$ 对应的布拉泰利图的前几个层级分别为：$\mathbf{k} = (2, 2, 2, 2, \ldots)$ 和 $\mathbf{k} = (3, 1, 1, 1, \ldots)$，见本章附录。

II.3.2 回到中心化子

回顾一下，我们有一个表示：

$$\pi\ :\ H_{\mathbf{k},n}\ \to\ \mathrm{End}\big(S^{k_1}V \otimes \cdots \otimes S^{k_n}V\big)\,,$$

其像给出了 $U_q(sl_N)$ 的中心化子（这是我们对舒尔–韦尔对偶第一部分的推广）。接下来需要理解这个映射的核。我们将给出其表示论描述。

$H_{\mathbf{k},n}(q)$ 的不可约表示与某些分拆之间的对应关系，指的是定理 II.13 中得到的分类。

定理 II.17（[7]）。表示 π 的核是 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 中对应于以下不可约表示子集的理想：

$$\{\ \lambda \in S_{\mathbf{k},n} \mid l(\lambda) > N\ \}\ .$$

特别地， 核为 $\{0\}$，且中心化子与代数 $H_{\mathbf{k},\,n}(q)$ 重合，当且仅当 $n \leq N$.

张量积 $S^{k_1}V \otimes \cdots \otimes S^{k_n}V$ 的分解。请注意，我们并未运用关于 $U_q(gl_N)$（或简写为 $GL(N)$）表示的张量积分解规则的知识。这里相关的规则称为 Pieri 规则，是 Littlewood–Richardson 规则的一个特例。因此，我们实际上重新得到了 Pieri 规则。

更准确地说，作为一个 $U_q(gl_N) \otimes H_{\mathbf{k},\,n}(q)$-模，其分解为

$$S^{k_1}V \otimes \cdots \otimes S^{k_n}V = \bigoplus_{\substack{\lambda \in S_{\mathbf{k},n} \\ l(\lambda) \le N}} L_\lambda^N \otimes W_{\mathbf{k},\lambda} \ , \tag{II.8}$$

这里回顾一下，集合 $S_{\mathbf{k},\,n} = \{\lambda \vdash k_1 + \cdots + k_n \mid \lambda \geq \mathbf{k}_{|n}^{\mathrm{ord}}\}$ 对应于 $H_{\mathbf{k},\,n}(q)$ 的不可约表示，而 $W_{\mathbf{k},\,\lambda}$ 是在定理 II.13 中构造的相应不可约表示。

特别地，结合 $W_{\mathbf{k},\,\lambda}$ 的维数信息，我们得到，作为一个 $U_q(gl_N)$-模：

$$S^{k_1}V \otimes \cdots \otimes S^{k_n}V = \bigoplus_{\substack{\lambda \in S_{\mathbf{k},n} \\ l(\lambda) \le N}} \left(L_\lambda^N\right)^{\oplus K_{\lambda,\mathbf{k}_{|n}}} \ ,$$

其中 $K_{\lambda,\,\mathbf{k}_{|n}}$ 是 Kostka 数，它统计形状为 λ、权为 $(k_1, \ldots, k_n)$ 的半标准杨氏图表的数量。

II.4 中心化子的代数表示

Here 我们假设序列 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots)$ 不含 0，且按降序排列 r.

q-反对称化子的推广。我们通过一个简单的图示步骤定义元素 $H_{\mathbf{k},\,n}(q)$。为方便起见，我们先在 $q^2 = 1$ 的情形下给出定义，然后再处理一般情形（下文给出例子）。给出这些例子后，我们会立即给出一个等价的、更具代数性的定义。

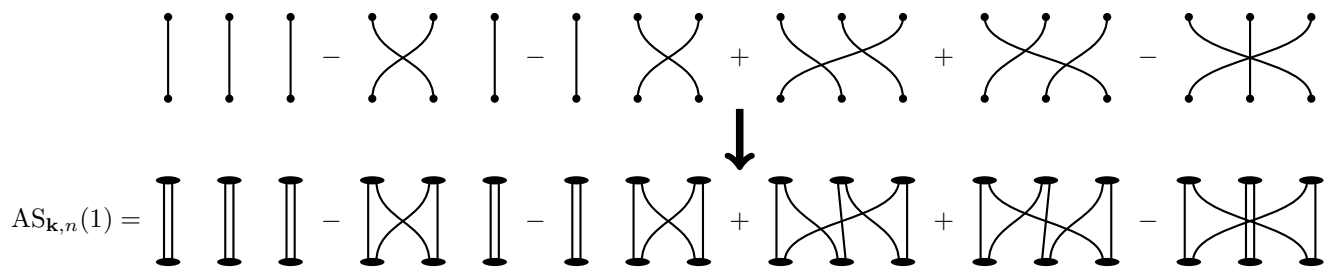
设 $w \in S_n$。我们通过以下步骤定义一个融合置换，记为 $|w|_{\mathbf{k}}$。从 w 的置换图开始，在点之间添加竖直边（如有必要），以形成与 $\mathbf{k}$ 对应的融合置换图。更准确地说，对于每个 $a \in \{1, \ldots, n\}$，我们添加 $k_a - 1$ 条竖直边，将顶部第 a 个点与底部第 a 个点连接起来。然后令：

$$\mathrm{AS}_{\mathbf{k},n}(1) = \sum_{w \in S_n} (-1)^{\ell(w)} |w|_{\mathbf{k}} \ \in H_{\mathbf{k},n}(1) \ . \tag{II.9}$$

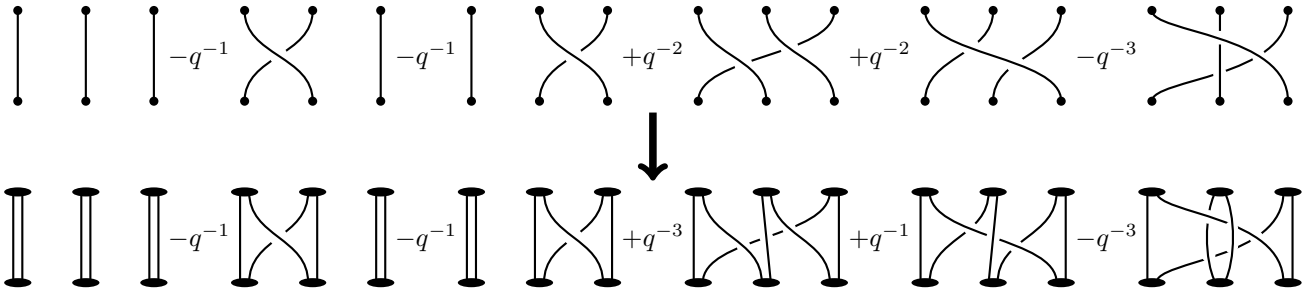
类似地，我们按如下方式定义元素 $|\sigma_w|_{\mathbf{k}} \in H_{\mathbf{k},\,n}(q)$。我们从交叉数最少的 σ_w 辫图开始。将所有点改为椭圆，并且对于每个 $a \in \{1, \ldots, n\}$，添加 $k_a - 1$ 条竖直边，将顶部第 a 个椭圆与底部第 a 个椭圆连接起来。规则如下：在每个椭圆处，新辫股连接在已有辫股的右侧；添加的辫股彼此不交叉；新辫股位于原有辫股“上方”，构成 σ_w（此处“上方”取其自然含义，如下文例子所示）。然后令：

$$\mathrm{AS}_{\mathbf{k},n}(q) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-q^{-1})^{\ell(w)} |\sigma_w|_{\mathbf{k}} \ \in H_{\mathbf{k},n}(q) \ . \tag{II.10}$$

例 II.18。设 $n = 3$ 且 $\mathbf{k} = (2, 2, 2, \ldots)$。此处展示了如何得到 $\mathrm{AS}_{\mathbf{k},\,n}(1)$：



这里展示了获得 $\mathrm{AS}_{\mathbf{k},n}(q)$ 的过程：

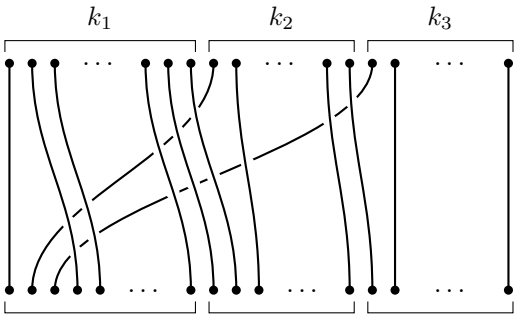


添加的竖直股线确实位于所有其他股线之上。起初，我们将它们分别连接在每个椭圆处，位置在现有股线的右侧。在上图中，我们使用了一些幂等关系，省略了椭圆附近的一些交叉。这解释了 q 的幂为何发生变化。请注意，最后，系数总是等于 $(-1)^{\ell(w)}$ times q^{-1} 的带符号的和（即图示中交叉次数之和）的幂。

代数解释。考虑通常赫克代数 $H_{k_1+\cdots+k_n}(q)$ 的以下元素：

$$\Gamma = \sigma_{k_1} \dots \sigma_2 \cdot \sigma_{k_1+k_2} \dots \sigma_3 \cdot \dots\dots \cdot \sigma_{k_1+\cdots+k_{n-1}} \dots \sigma_n \ , \tag{II.11}$$

以下是示例 $n = 3$ 中 Γ 的图示表示：

$\Gamma =$ 

令 $w \in \mathfrak{S}_n$。利用 $H_{\mathbf{k},\,n}$ 与 $P_{\mathbf{k},\,n} H_{k_1+\cdots+k_n}(q) P_{\mathbf{k},\,n}$ 之间的对应关系，我们可以证明，$|\sigma_w|_{\mathbf{k}}$ 的代数定义是

$$|\sigma_w|_{\mathbf{k}} = P_{\mathbf{k},n} \Gamma \sigma_w \Gamma^{-1} P_{\mathbf{k},n} \ .$$

核的生成元。我们提出以下两个猜想。它们推广了 Temperley–Lieb 代数作为 Hecke 代数的商的描述，例如见例 I.17。下面我们通过代数的自然包含，将元素 $\mathrm{AS}_{\mathbf{k},N+1}(q)$ 视为 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 中的元素，其中 $n \geq N+1$ 任意；（也就是说，在 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 中，元素 $\mathrm{AS}_{\mathbf{k},N+1}(q)$ 只涉及连接到 $N+1$ 前几个椭圆的股线）。

猜想 II.19 ([7])。设 $n > N$。核由元素 $\mathrm{AS}_{\mathbf{k},\,N+1}(q)$ 生成，因此中心化子同构于代数 $H_{\mathbf{k},\,n}(q)$ 除以以下关系所得的商：

$$\mathrm{AS}_{\mathbf{k},N+1}(q) = 0 \ .$$

一般而言，我们相当容易证明，元素 $\mathrm{AS}_{\mathbf{k},\,N+1}(q)$ 确实属于核。猜想的难点在于证明它是一个生成元。简而言之，困难在于第一个非平凡层级 $n = N+1$ 上，理想已经包含了多个不可约表示（见附录中的布拉泰利图）。这与 Hecke/Temperley–Lieb 情形存在根本的概念差异；在后者中，层级 $N+1$ 上的理想维数为 1。

特别是， 在我们的情形中，生成元有多种可能的选择。由于某些难以理解的原因，t he 图示化 co 上面的构造似乎给出了一个自然的选择。

猜想 II.20（[7]）。元素 $\mathrm{AS}_{\mathbf{k},\,N+1}(q)$ 是 $H_{\mathbf{k},\,N+1}(q)$ 中的中心的元素。

一些已知情形。下面对一些特殊情形的验证为这两个猜想提供了支持。此外，通过明确的（计算机辅助）计算，已能验证对于所有满足 $k_1+\cdots+k_{N+1}\le 7$ 的 $\mathbf{k}$ 和 N，这两个猜想均成立。

请注意，以下陈述中的 q 要么是一般的（一个不定元），要么是 $q=1$。

命题 II.21（[7]）。

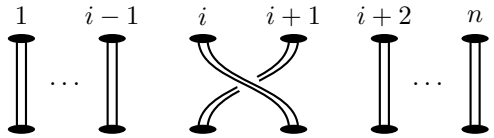
1. 若 $\mathbf{k}=(k,1,1,1,\ldots)$，其中 k 任意，则对于任意 N，猜想 II.19–II.20 均成立。
2. 若 $N=2$，则对于任意 $\mathbf{k}$，猜想 II.19 成立。3. 若 $\mathbf{k}$ 仅由 1 和 2 组成，则对于任意 N，猜想 II.19 成立。4. 若 $\mathbf{k}$ 仅由 1 和 2 组成，则对于任意 N，猜想 II.20 对 $q^2=1$ 成立。

II.5 辫群在哪里?

这里我们考虑整数 k 对应的常值序列 $\mathbf{k}=(k,k,k,\ldots)$（因此张量积中的所有表示都相同）。根据第一章中关于量子群中心化子的总体讨论，我们知道融合 Hecke 代数包含辫群代数的一个商。本节中，我们将在 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 内找出辫群的生成元。

我们用 Σ_i 表示 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 中的融合辫：所有从椭圆 i 出发的辫股都从椭圆 $i+1$ 出发的辫股上方穿过，其余辫股均保持竖直。这里图示更直观，例如，对于 $k=2$:

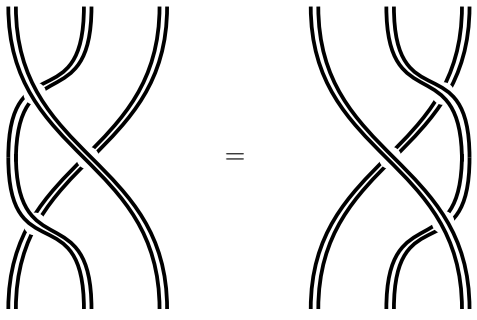
$\Sigma_i =$



融合 Hecke 代数 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 中的乘法似乎相当复杂，因为每次将两个融合辫连接起来时，都要用 q-对称化子替换中间椭圆。不过，经过一番思考，并采用与例 II.8 之后相同思路的论证，可以相当容易地证明这些元素满足辫关系：

$$\Sigma_i\Sigma_{i+1}\Sigma_i=\Sigma_{i+1}\Sigma_i\Sigma_{i+1}\ .$$

最后，这可以由通常的辫群中以下这类显然的关系得出[2]（这里是 $k=2$，但我们可以增加更多平行股，以适用于任意的 k）：



除辫子关系外，元素 Σ_1、…、Σ_{n-1} 还必须满足某个特征方程，因为代数$H_{\mathbf{k},n}(q)$ 是有限维的。要直接从 $H_{\mathbf{k},2}(q)$ 中的定义乘法计算特征值并非易事，但我们可以利用 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 在 $U_q(sl_N)$ 的表示的张量积 $S^kV\otimes S^kV$ 上的表示。在这一表示中，元素 Σ_i 对应于 R-矩阵，由此可以得到特征方程。

[2]这幅图看起来像某种管子，但我们实际指的是通常辫子的一个关系（这里有 6 股线）

略去细节并加以概括，$H_{\mathbf{k},n}(q)$ 的元素 Σ_1、...、Σ_{n-1} 满足以下关系：

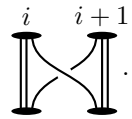
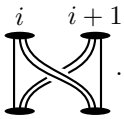
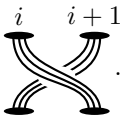
$$\begin{aligned}
&\Sigma_i\Sigma_{i+1}\Sigma_i = \Sigma_{i+1}\Sigma_i\Sigma_{i+1}\,, && \text{for } i \in \{1,\dots,n-2\}\,,\\
&\Sigma_i\Sigma_j = \Sigma_j\Sigma_i\,, && \text{for } i,j \in \{1,\dots,n-1\} \text{ such that } |i-j|>1\,,\\
&\textstyle\prod_{l=0}^{k}\Big(\Sigma_i - (-1)^{k+l}q^{-k+l(l+1)}\Big) = 0\,, && \text{for } i \in \{1,\dots,n-1\}\,.
\end{aligned}$$

需要特别指出的是，只要满足 $n>2$ 和$k>1$，这些元素就不会生成整个代数$H_{\mathbf{k},\ n}(q)$。与通常赫克代数相比，这是一个显著的差异。我们还注意到，Σ_1、.....、Σ_{n-1}必须满足除上述关系之外的其他关系（且这些关系并非由上述关系推出），因为它们生成的代数是有限维的，而我们知道，上述关系一般不足以定义一个有限维代数。在$H_{\mathbf{k},\ n}(q)$中，由Σ_1、.....、Σ_{n-1}生成的子代数的一组完整定义关系目前仍是一个开放问题。

II.6 应用：杨–巴克斯特方程的解 $\mathbf{n}$

在确定了辫群在融合 Hecke 代数中的实现之后，现在我们继续推进引言中列出的愿望清单，并寻求杨–巴克斯特方程的一个解。根据第一章节中关于量子群的中心化子的总体讨论，我们再次知道，融合 Hecke 代数必须包含这样的一个解。

首先，我们介绍代数 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 中的一些自然元素：部分初等编织记作$\Sigma_i^{(p)}$，对应于这样的融合辫：从椭圆 i 起始的最右侧 p 股线从从椭圆 $i+1$起始的最左侧p股线之上穿过，其余所有股线均为竖直的。再说一次，配图更直观（此处$k=3$）：

$\Sigma_i^{(1)} =$  ,　$\Sigma_i^{(2)} =$  ,　$\Sigma_i^{(3)} =$  ,

其中，所有从椭圆 1、. . .、$i-1$、$i+2$、. . .、n 出发的股线均为竖直的。元素 $\Sigma_i^{(0)}$ 是单位元，而 $\Sigma_i^{(k)}$ 则是上一段中所称的 Σ_i，它们满足辫子关系。

除了 q-数 $[L]_q := \frac{q^L-q^{-L}}{q-q^{-1}}$ 和 q-阶乘 $[L]_q! := [1]_q[2]_q\dots[L]_q$，我们还定义 q-二项式系数和 q-Pochhammer 符号：

$$\begin{bmatrix} L \\ p \end{bmatrix}_q := \frac{[L]_q!}{[L-p]_q![p]_q!}\,, \qquad (a\,;\,q)_p = \prod_{r=0}^{p-1}(1-aq^r)\,.$$

按照约定，我们有 $[0]_q! = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}_q = (a;\ q)_0 = 1$。

定理II.22（[6]）。以下取值于 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$ 的函数

$$\check{R}_i(u) = \sum_{p=0}^{k}(-q)^{k-p}\begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix}_q^2 \frac{(q^{-2}\,;\,q^{-2})_{k-p}}{(uq^{-2p}\,;\,q^{-2})_{k-p}}\ \Sigma_i^{(p)}\,, \tag{II.12}$$

满足辫化杨–巴克斯特方程：

$$\check{R}_i(u)\check{R}_{i+1}(uv)\check{R}_i(v) = \check{R}_{i+1}(v)\check{R}_i(uv)\check{R}_{i+1}(v)\,.$$

上面的公式可以称为“Baxter化”公式。这一术语源自 V. Jones [Jo3]。粗略地说，Baxter化公式是一种从辫群关系的解出发，得到杨–巴克斯特方程解的方法。换言之，这是一种为辫关系引入谱参数的方法。当然，Baxter化公式取决于辫群生成元所满足的其他关系（遗憾的是，并不存在适用于辫群本身的 Baxter化公式）。在第一章中，我们给出了 Hecke 代数和 BMW代数的例子。上面的公式就是融合 Hecke 代数的 Baxter化公式。

推论 II.23。将上面的公式与 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$ 在向量空间 $S_q^k(V)^{\otimes n}$ 上的表示结合起来，我们得到作用于 q-对称幂上的杨–巴克斯特方程矩阵解。

我们强调，对于每个 k，都有一个无穷族的杨–巴克斯特方程矩阵解：对 V 的维数的每种选择，都有一个解。如果 $N = 2$，这个解作用于 $U_q(sl_2)$ 的自旋 $k/2$ 表示。

注记 II.24。
• 请注意，从 $H_{\mathbf{k}\ n}(q)$ 中的公式（即表示之前）可以清楚地看出对谱参数 u 的（有理）依赖关系。

• 对于 $q = 1$，上面的公式已经很有意思。请注意，这个极限可以直接求出（所有量子数都变为通常的数）。这些解属于融合置换的代数，而它们的矩阵版本作用于通常的对称幂。▲

例 II.25。对于 $k = 1$，上面的公式就是 Hecke 代数的通常巴克斯特化公式。对于 $k = 2$，公式为：

$$\check{R}_i(u) = \Sigma_i^{(2)} - (q + q^{-1})\frac{(q^2 - q^{-2})}{1 - uq^{-2}}\Sigma_i^{(1)} + q^2\frac{(1 - q^{-2})(1 - q^{-4})}{(1 - u)(1 - uq^{-2})}\ .$$

II.7 结论与展望

我们可以用以下结论概括本章的主要成果。

结论 II.26. 我们构造了一个代数 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$，称为融合 Hecke 代数 a:

- 它包含辫群代数的一个商；
- 它包含杨–巴克斯特方程的一个抽象解；
- 它在向量空间 $W^{\otimes n}$ 上有表示，其中 $W = S^k(V)$ 是 V 的 q-对称幂；通过这类表示，它与 $U_q(gl_N)$ 形成舒尔–韦尔对偶，其中 $N = \dim(V)$。

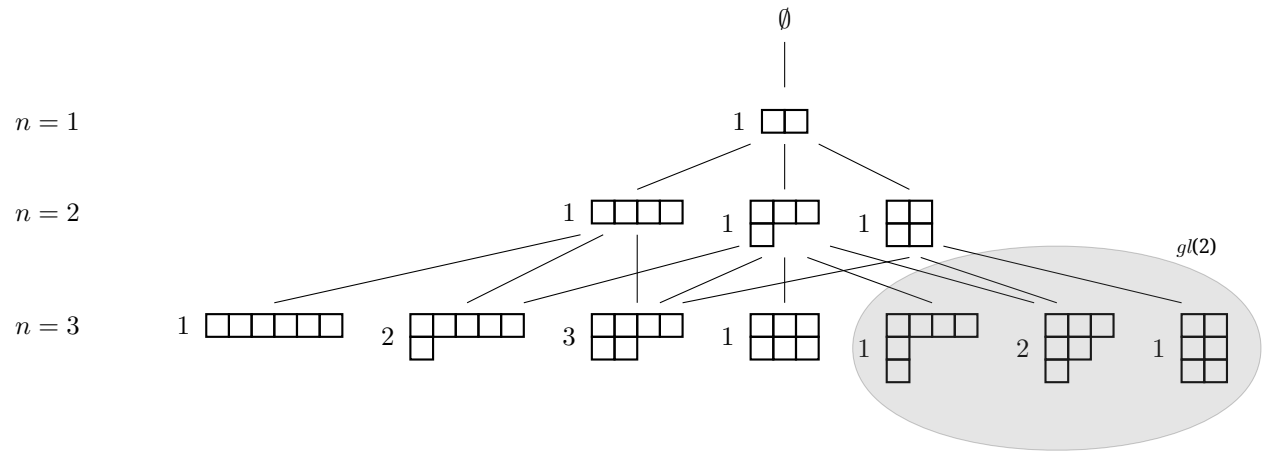
• 由于 Hecke 代数和 Temperley–Lieb 代数被描述为量子群表示的中心化子，因此可以将它们视为包含自旋链模型的哈密顿量（具有 $U_q(sl_N)$-对称性）。事实上，传递矩阵以及由可交换元素构成的贝特子代数的整个构造，都可以直接在这些代数内部完成。当然，要运用“代数 Bethe Ansatz”方法，就需要代数内部的杨–巴克斯特方程解。这正是融合 Hecke 代数所具备的，因此所有要素都已齐备。从这个角度来看，考虑融合 Hecke 代数的仿射版本似乎也很有必要，以便将非平凡的边界条件和反射方程纳入其中。

• 融合 Hecke 代数中仅第一个对称幂非平凡的特殊情形是最简单的情形。它对应于只对张量积中的第一个表示进行“融合”的想法，从而研究特定的边界条件。进一步限制到 $sl(2)$ 时，我们的定义对应于近期在与共形场论相关的背景下引入的所谓缝代数 [MRR] 。对于缝代数，其非半单表示论已有相当深入的研究。对一般的融合 Hecke 代数开展类似研究，无疑也会很有趣。抛物赫克代数的视角提出了运用卡兹丹-卢斯蒂格理论的思路。这对于我们关于理想和中心化子的问题也可能有所帮助（例如参见 [EMTW，第 22] 章）。

• 我们所采用的融合 Hecke 代数表述方式，使其如何推广到其他情形一目了然。例如，可以考虑 $U_q(gl_N)$ 的不同表示，和 / 或其他量子（超）群。这种方法的出发点显然可以作如下推广：仍然可以考虑融合辫，但采用不同的乘法过程。实际上，可以用辫群代数的其他商代替 Hecke 代数，和/或用其他幂等元代替 q-对称化子。[LZ2] 简要考察了 Temperley–Lieb 代数这一情形。另一个例子是用 BMW代数代替 Hecke 代数，并考虑 q-对称化子的类似物。从图示观点来看待这些代数（即 $q = 1$ 的经典极限）也很有意思；在这一方向上，将分划代数也纳入可能考察的代数之列，同样显得顺理成章。

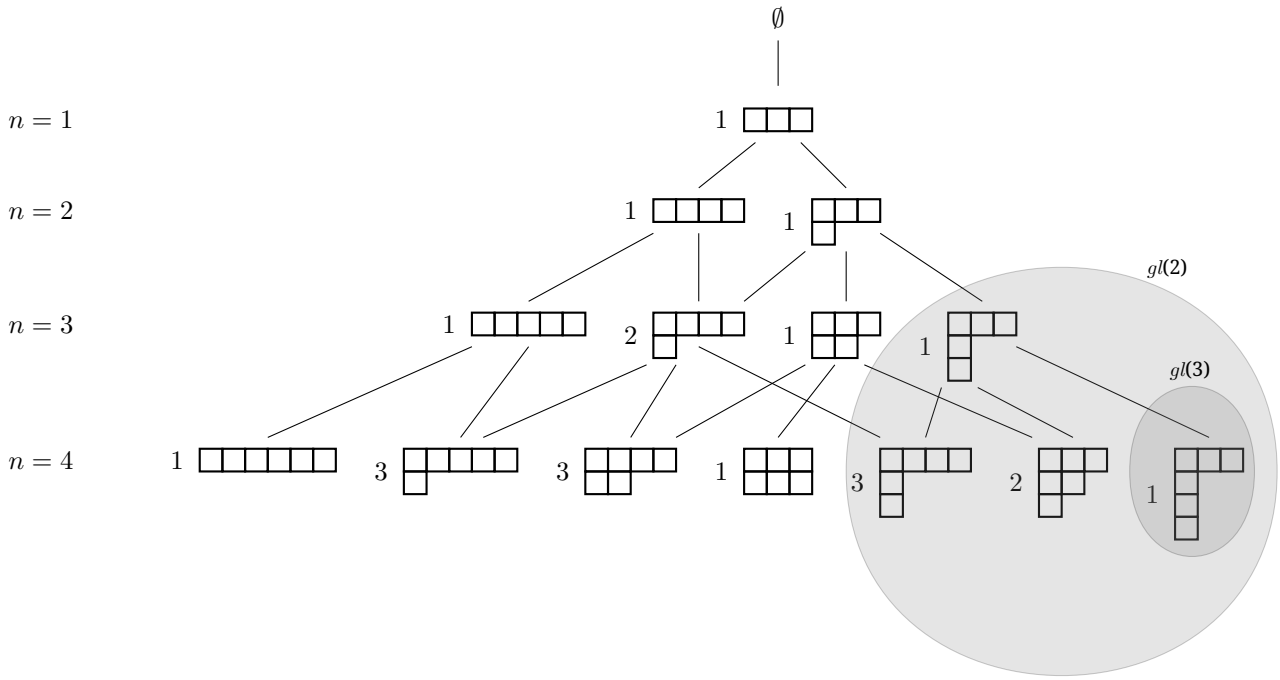
附录II.A 融合海克代数的 Bratteli 图

代数链 $H_{\mathbf{k},\ n}(q)$，其中 $\mathbf{k}\ =(2,2,2,2,\ldots)$。当 $\mathbf{k}\ =(2,2,2,\ldots)$ 为无限个 2 组成的序列时，代数链 $\{H_{\mathbf{k},n}(q)$ 的布拉泰利图$\}_{n\geq 0}$ 开头如下：



请注意，即使 $\mu\subset\lambda$，也不存在从 $\mu=$ 到 $\lambda=$ 的箭头，因为 λ/μ 在同一列中包含两个方框。阴影区域表示融合海克代数$H_{\mathbf{k},n}(q)$与 $U_q(gl_N)$的表示的中心化子之间的联系，如第一章附录所示。

代数链 $H_{\mathbf{k},n}(q)$ 当 $\mathbf{k}\ =(3,1,1,1,\ldots)$ 当 $\mathbf{k}\ =(3,1,1,1\ldots)$ 时，代数链 $\{H_{\mathbf{k},n}(q)\}_{n\geq 0}$ 的布拉泰利图开头如下（阴影区域的含义与前面的例子类似）：



第三章

对角中心化子

目录

引言 49
III.1 Racah代数与Askey–Wilson代数. 51
III.2 对角中心化子 $Z_n(sl_2)$. 53
III.3 $Z_2(sl_3)$的对角中心化子 . 55
III.4 应用：sl_3 的缺失标签及其对称性 . 58
III.5 结论与展望 . 62
附录 III.A $Z_n(sl_2)$ 和 $Z_2(sl_3)$ 的希尔伯特–庞加莱级数. 63

引言

到目前为止，在讨论中心化子时，我们主要讨论的是表示张量积的中心化子：

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \,,$$

对于给定的李代数 $\mathfrak{g}$ 或量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的一组表示。本章我们将转换思路，考察某种“普适”中心化子；对于任意选定的表示 $V_1, \ldots, V_n$，它都将与上述中心化子相关。

为了解释这是如何产生的，我们先回顾如何对李代数表示取张量积。首先，通过对角嵌入，将泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 嵌入其 n 重张量积 $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ 中：

$$\delta^{(n)} : \begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) & \to & U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \\ g & \mapsto & g\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1 + \cdots + 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes g \qquad (g\in\mathfrak{g}) \end{array}$$

态射 $\delta^{(n)}$ 由上述公式在元素 $g \in \mathfrak{g}$ 上定义，并以乘法方式扩展到整个代数 $U(\mathfrak{g})$。此时，我们处于 $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ 中，接下来只需自然地将这个代数表示在 $U(\mathfrak{g})$ 的 n 个表示的张量积上。

这启发我们在选择表示之前，直接研究 $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ 在泛层次上的中心化子。本章节将采用这种做法。

定义 III.1。对角中心化子 $Z_n(\mathfrak{g})$ 是 $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ 中由 $\delta^{(n)}$ 的像所对应的中心化子：

$$Z_n(\mathfrak{g}) = \left\{ X \in U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \mid [\delta^{(n)}(g), X] = 0 \,, \quad \forall g \in U(\mathfrak{g}) \right\} \,. \tag{III.1}$$

对于量子群，其定义完全类似，只需将对角嵌入 $\delta^{(n)}$ 替换为迭代余乘积 $\Delta^{(n)}$。态射 $\Delta^{(n)}$ 通过递归定义为 $\Delta^{(n)} = (\Delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta^{(n-1)}$，其中 $\Delta^{(2)} = \Delta$ 是余乘。

动机。如前所述，第一个动机是，理解对角中心化子 $Z_n(\mathfrak{g})$ 将是研究任意表示张量积的中心化子的有趣第一步。事实上，我们自然得到一个满射代数同态：

$$Z_n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)\,,$$

对于任意选取的不可约表示 $V_1, \ldots, V_n$。换句话说，这些表示的中心化子都将是同一个代数 $Z_n(\mathfrak{g})$的商。只有当我们能够以合理的方式描述代数 $Z_n(\mathfrak{g})$ 时，这一切才非常理想。

第二个动机是，对于这类对角中心化子的最简单例子，我们确实发现了一些非常有趣的代数。第一个有趣的例子是 $\mathfrak{g} = sl_2$ 和 $n = 3$。这里出现的 $U(sl_2)$ 代数称为 Racah代数，其对应于 $U_q(sl_2)$ 的变形称为 Askey–Wilson代数。Racah代数和 Askey–Wilson代数出现在数学和物理学的众多领域中。它们的名称源自正交多项式理论，它们最初被发现是控制同名正交多项式 [GZ, Zhe] 双谱性质的代数。除了正交多项式理论和 sl_2 的表示论之外，它们还作为物理模型的对称性出现 [GVZ, KMP], , 也出现在代数组合学中 [GWH, Ter], , 并且与 Kauffman括号缀 skein代数有关（例如参见 [4] ，其中综述了 Askey–Wilson代数）。本章第一节将更详细地讨论这些代数。

最后，对角中心化子可以视为经典不变多项式代数的自然变形。也就是说，作为 $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ 的子代数，它们按照 $\mathfrak{g}$ 中元素的次数过滤，其分次商代数是不变多项式函数代数。更确切地说，它们是定义在 $\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}$ (n times) 上、在 G 的同时伴随作用下保持不变的多项式函数。例如，若 $G = SL(N)$，我们讨论的是定义在由 n 个无迹 $N \times N$ 矩阵组成的元组上、在同时共轭下保持不变的多项式函数：

$$f(M_1, \ldots, M_n) = f(g^{-1}M_1 g, \ldots, g^{-1}M_n g), \quad \text{for any } g \in SL(N). \tag{III.2}$$

这是一套经典且经过充分研究的理论，参见 [Pro, Raz, Sib] 或 [Dre] 及其中的参考文献。例如，我们知道不变多项式函数由所谓的极化迹生成：

$$(M_1, \ldots, M_n) \mapsto Tr(M_{a_1} \ldots M_{a_d}) \tag{III.3}$$

其中 $d \geq 2$ 和 $a_1, \ldots, a_d \in \{1, \ldots, n\}$。此外，对于较小的 N（小于 5），已知可以将次数 d 限制为小于 $^{N}_{(N+1)\,2}$（对于任意 N，人们猜想这一结论成立，但目前只知道可以取 $d \leq N^2$）。这些生成元之间的关系理想仅在 $N = 2$ 的情形下得到了充分理解。

总而言之， $Z_n(\mathfrak{g})$的研究与经典不变理论密切相关。具体而言，为 $Z_n(\mathfrak{g})$寻找生成集的问题，对应于不变量理论中所谓的第一基本定理；而求出 $Z_n(\mathfrak{g})$的定义关系，则对应于探寻不变量理论中的第二基本定理。在这方面，本章关于 $Z_n(sl_2)$和 $Z_2(sl_3)$所得的结果，可以视为相应不变多项式函数的第一基本定理和第二基本定理的非交换类比。

章节安排。本章第一节详细回顾 $Z_3(sl_2)$的描述以及Racah代数的出现，也提及 $U_q(sl_2)$的 q版本。下一节中，我们彻底解决了对任意 n描述 $Z_n(sl_2)$的问题，并在此过程中定义和研究了通常的Racah代数的一种类比。附录中给出了关于Hilbert–Poincar´e级数的一些有趣的组合学考量。第三节据我们所知，首次尝试在 sl_2情形之外考察对角中心化子。结果发现，关于 $Z_2(sl_3)$有许多值得探讨之处，我们也得以给出完整描述。我们明确展示了类型为 E_6 的Weyl群所具有的一种意外对称性。最后一节将其应用于张量积中的 sl_3 表示的向量标记问题。我们运用对 $Z_2(sl_3)$的代数描述，揭示了这个数学物理经典问题中的新对称性。

参考文献。本章节的相关出版物及更多详情见 [2, 3, 4, 5, 9]。

III.1 Racah代数与Askey–Wilson代数

III.1.1 Racah代数

让我们从最简单的单李代数 $\mathfrak{g} = sl_2$ 开始。代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 由元素 e_{ij}、i、$j \in \{1,2\}$ 生成，其定义关系如下：

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj} \qquad \text{and} \qquad e_{11} + e_{22} = 0 \ .$$

我们将描述对角中心化子 $Z_n(sl_2)$，直至第一个非平凡情形 $n = 3$，届时我们将发现Racah代数的一种体现。

n=1。 $U(sl_2)$的Casimir元 C 为：

$$C = \sum_{i,j=1}^{2} e_{ij} e_{ji} \ ,$$

它是 $U(sl_2)$的中心的生成元，也就是说，是 $Z_1(sl_2)$的中心的生成元。至此，便完成了对 $Z_1(sl_2)$的（众所周知的）代数描述：它是一个由一个生成元（即 C）生成的多项式代数。

n=2。从Casimir元 C出发，有几种方法可以构造对角中心化子 $Z_2(sl_2)$的元素。可以利用 $U(sl_2)$在 $U(sl_2)^{\otimes 2}$ 中的不同自然嵌入（别忘了对角嵌入）：

$$C_1 = C \otimes 1 \, , \qquad C_2 = 1 \otimes C \, , \qquad C_{12} = \delta^{(2)}(C) \ .$$

在继续之前，先明确说明：$C_{12} = \sum_{i\,,\ j=1}^{2} (e_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes e_{ij})(e_{ji} \otimes 1 + 1 \otimes e_{ji})$。事实证明， C_1、 C_2、 C_{12} 彼此对易、代数独立，并生成整个对角中心化子$Z_2(sl_2)$。这就给出了 $Z_2(sl_2)$的代数描述。

命题 III.2。对角中心化子 $Z_2(sl_2)$ 同构于由三个变量（即 C_1、 C_2、 C_{12}）生成的多项式代数。

n=3。第一个有趣的情形出现在 $n = 3$。考虑以下 6 种由 Casimir元 C 生成 $U(sl_2)^{\otimes 3}$ 中元素的方法（我们引入这些记号以便后续使用）：

$$k_1 = C_1 = C \otimes 1 \otimes 1, \quad k_2 = C_2 = 1 \otimes C \otimes 1, \quad k_3 = C_3 = 1 \otimes 1 \otimes C, \quad k_4 = C_{123} = \delta^{(3)}(C),$$
$$X = C_{12} = \delta^{(2)}(C) \otimes 1, \qquad Y = C_{23} = 1 \otimes \delta^{(2)}(C) \ . \tag{III.4}$$

不难验证，按照构造方式，这 6 个元素属于对角中心化子 $Z_3(sl_2)$（可能会注意到还应当有一个元素 C_{13}，但事实证明它等于其他元素的线性组合）。同样显然， C_1、 C_2、 C_3、 C_{123} 与 $Z_3(sl_2)$ 中的每个元素都对易。然而， C_{12}和 C_{23} 不对易，这正是 $Z_3(sl_2)$[1]非交换性的来源。

因此，我们要寻找 $Z_3(sl_2)$ 的代数描述。为此，我们考察 C_{12} 与 C_{23}之间的交换关系。大致思路如下：由于它们不对易，我们计算它们的交换子。如果这个新元素可以用其他元素表示，那么问题就解决了。否则，我们就取这个新元素，计算它与 C_{12} 和 C_{23}的交换子。这个过程本可以持续一段时间，但实际上并没有。我们得到以下关系：

$$\begin{aligned}
&k_1, k_2, k_3, k_4 \quad \text{commute with all elements,} \\
&[X, Y] = Z, \\
&[X, Z] = 4\{X, Y\} + 4X^2 - 4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)X + 4(k_1 - k_2)(k_4 - k_3), \\
&[Z, Y] = 4\{X, Y\} + 4Y^2 - 4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)Y + 4(k_3 - k_2)(k_4 - k_1),
\end{aligned} \tag{III.5}$$

其中 $\{X, Y\} = XY + YX$ 是反对易子。我们发现了一些二次关系，可以将其视为李代数关系的推广。现在，奇妙之处来了。这些关系也出现在一个看似截然不同的背景中。

[1] $Z_2(sl_2)$ 的交换性与 sl_2 的不可约表示的二重张量积所具有的“无重数”现象有关。相反， $Z_3(sl_2)$ 必定是非交换的，因为在分解三重张量积时会出现重数。

Racah 代数与 Racah 多项式。关系 (III.5) 定义了所谓的 Racah 代数，我们将其记作 $R(3)$。理解 Racah 代数的一种初步途径来自正交多项式理论。Racah 多项式构成了一族双谱经典正交多项式 $\{R_n(x)\}_{n\geq 0}$，它们位于 Askey 方案的顶端，其特征是具有一个差分算子和一个递推算子（例如参见 [KLS]）。这里我们只作简要介绍。递推关系和差分关系如下：

$$\lambda(x)R_n(\lambda(x)) = A_nR_{n+1}(\lambda(x)) - (A_n + C_n)R_n(\lambda(x)) + C_nR_{n-1}(\lambda(x))\,, \quad \text{with } \lambda(x) = x(x+\gamma+\delta+1)\,,$$

$$n(n+\alpha+\beta+1)R_n(\lambda(x)) = B(x)R_n(\lambda(x+1)) - (B(x)+D(x))R_n(\lambda(x)) + D(x)R_n(\lambda(x-1))\,,$$

其中，系数 $A_n, C_n, B(x)$ $D(x)$ 可用四个参数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 显式表示。

现在，取第二个方程右边的差分算子，并将其记为 X；再记 Y 为乘以 $\lambda(x)$ 的算子。我们发现，（作为作用于多项式上的算子） X 和 Y 恰好满足关系 (III.5)，其中 k_1, k_2, k_3, k_4 可用 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 显式表示。

长话短说，Racah代数与 Racah 多项式相关联时，其含义如下。设有两个可对角化矩阵 X 和 Y。再设我们知道如何对角化 X，并且希望对角化 Y（反之亦然）。如果 X 和 Y 满足 Racah代数的关系，那么 X 的特征基与 Y 的特征基之间的基变换将用 Racah 多项式表示。用物理学的说法，我们称 X 与 Y 之间的重叠系数可用 Racah 多项式表示。更多细节以及 Racah代数的其他应用，特别是作为超可积模型的对称代数的应用，请参阅 [DBI+, GVZ, KMP] 及其中的参考文献。

这段简短文字告诉我们，在表示中， $Z_3(sl_2)$ 的算子 X 和 Y 之间的“重叠”由 Racah 多项式给出。然而，在物理学中，求这些重叠系数是一个研究已久的问题；它们称为 $6j$-系数或 Racah 系数。因此，对角中心化子 $Z_2(sl_3)$ 的代数结构立即解释了为什么 $SU(2)$ 的重耦合理论中的 Racah 系数或 $6j$- 系数可以用 Racah 多项式[2] 表示。

回到对角中心化子 $Z_3(sl_2)$。我们尚未完全完成对 $Z_3(sl_2)$ 的代数描述。它与 Racah 代数 $R(3)$ 并非完全同构，尽管文献中在一定程度上忽略了这一微妙之处。原因如下。借助对易关系并应用 Diamond 引理（例如参见 [5]），可以证明 Racah 代数 $R(3)$ 有一个很好的 PBW 基：

$$k_1^i k_2^j k_3^k k_4^m X^n T^p Z^q, \qquad i,j,k,m,n,p,q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ .$$

然而，这些元素的像在线性算子空间($Z_3(sl_2)$中并非线性无关，因此这个代数更为复杂。事实上，利用 $U(sl_2)$[⊗3]中的自然次数概念，记录分次分量维数的 $Z_3(sl_2)$的希尔伯特–庞加莱级数为：

$$\frac{1-t^6}{(1-t^2)^6(1-t^3)}\ .$$

分子中的 $-t^6$ 与上面的基不兼容。在 $Z_3(sl_2)$ 中存在一个满足的隐藏关系（6 次）。事实证明，这个关系并没有那么糟糕。事实上，Racah 代数 $R(3)$ 中存在一个中心元：

$$\Gamma = Z^2 - 8(XYX + YXY) + 4(k_1+k_2+k_3+k_4-4)\{X,Y\} - 8(k_1-k_2)(k_4-k_3)Y - 8(k_3-k_2)(k_4-k_1)X$$

现在， $Z_3(sl_2)$ 中满足的额外关系（并非由 $R(3)$ 的关系所蕴含）只是固定中心元 Γ 的取值：

$$\Gamma = 8(k_1-k_2+k_3-k_4)(k_1k_3-k_2k_4) - 32(k_1k_3+k_2k_4)\ . \tag{III.6}$$

这个关系可以 可视为将 Z^2 用其他元素表示，并导出 Z_3 的如下基（sl_2 ）：

$$k_1^i k_2^j k_3^k k_4^m X^n Y^p Z^q, \qquad i,j,k,m,n,p,q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad q \in \{0,1\},$$

这与上面的 Hilbert–Poincar´e 级数相符。结论如下。

[2]当然，这并非历史上的发展方式。Racah 系数最初是由 Racah [Rac] 计算出来的，后来才被确定为某些正交多项式，因此被称为 Racah 多项式。

结论　在 III.3 中，若我们用 (III.5) 和 (III.6) 定义特殊 Racah 代数 $sR(3)$，则有 :

The diagonal centraliser $Z_3(sl_2)$ is isomorphic to $sR(3)$.

Askey–Wilson代数。对于量子群 $U_q(sl_2)$，也有完全类似的论述。Askey–Wilson代数 $AW(3)$ 由生成元 C_{12}、C_{23}、C_{13}、中心元 C_1、C_2、C_3、C_{123}以及以下定义关系所定义：

$$\begin{aligned} C_{12} + \frac{[C_{23}, C_{13}]_q}{q^2 - q^{-2}} &= \frac{C_1 C_2 + C_3 C_{123}}{q + q^{-1}}, \\ C_{23} + \frac{[C_{13}, C_{12}]_q}{q^2 - q^{-2}} &= \frac{C_2 C_3 + C_1 C_{123}}{q + q^{-1}}, \\ C_{13} + \frac{[C_{12}, C_{23}]_q}{q^2 - q^{-2}} &= \frac{C_3 C_1 + C_2 C_{123}}{q + q^{-1}}, \end{aligned}$$

其中，q-交换子定义为 $[A, B]_q = qAB - q^{-1}BA$。与经典情形一样，对角中心化子最终是 $AW(3)$ 的一个商；同样，这个商等价于固定 $AW(3)$ 的某个中心元的值。

Askey–Wilson代数在正交多项式背景下具有与Racah代数相同类型的诠释。有关更多详细信息，请参阅 [4] 及其中的参考文献。

III.2 对角中心化子 $Z_n(sl_2)$

III.2.1 Racah代数 $R(n)$

定义。我们考虑以下对 Racah 代数进行推广的定义。容易验证，对于 $n = 3$，该代数与上一节的 Racah 代数 $R(3)$[3]一致（尽管其表示略有不同）。

定义 III.4。Racah 代数 $R(n)$ 是由以下生成元构成的结合代数：

$$P_{ij},\ 1 \le i \le j \le n \qquad \text{and} \qquad F_{ijk},\ 1 \le i < j < k \le n,$$

定义关系为，对 $\{1, \dots, n\}$ 中所有可能的指标 i、j、k、l、m：

$$\begin{aligned} P_{ii} \quad & \text{is central}, \\ [P_{ij}, P_{k\ell}] &= 0 \qquad \text{if both } i, j \text{ are distinct from } k, \ell, \\ [P_{ij}, P_{jk}] &= 2F_{ijk}, \\ [P_{jk}, F_{ijk}] &= P_{ik}(P_{jk} + P_{jj}) - (P_{jk} + P_{kk})P_{ij}, \\ [P_{k\ell}, F_{ijk}] &= P_{ik}P_{j\ell} - P_{i\ell}P_{jk}, \\ [F_{ijk}, F_{jk\ell}] &= -(F_{ij\ell} + F_{ik\ell})P_{jk}, \\ [F_{ijk}, F_{k\ell m}] &= F_{i\ell m}P_{jk} - F_{j\ell m}P_{ik}, \end{aligned}$$

其中，每个关系中涉及的所有指标均互不相同，且 P_{ij} 和 F_{ijk} 定义如下：

$$P_{ij} = P_{ji} \qquad \text{and} \qquad F_{ijk} = -F_{jik} = F_{jki} \qquad \text{for any } i, j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

定义关系很多。不过，其逻辑很清楚：我们给出足够多的关系，使得从生成元 P_{ij} 出发，该代数在交换子运算下封闭。这是对通常 Racah 代数 $R(3)$定义的直接推广。第三个关系可视为定义元素 F_{ijk}，其余关系则表明，所有交换子都可以用生成元表示。

[3]T确切地说，必须使用连接 C_{123} 和 C_{13} 的关系 $C_1 + C_2 + C_3 + C_{123} = C_{12} + C_{23} + C_{13}$。

与对角中心化子 $Z_n(sl_2)$ 的联系。当然，如果这些关系在对角中心化子 $Z_n(sl_2)$ 中不成立，那么上述定义对我们的目的而言就多少有些意义不明。因此，我们立即陈述第一个主要结果。下文中， C 是上一节所述的 $U(sl_2)$ 的 Casimir元，并且我们使用了 Sweedler 记号 $\delta^{(2)}(C) = \sum C_{(1)} \otimes C_{(2)}$。

定理 III.5（[3]）。存在一个从 $R(n)$ 到 $Z_n(sl_2)$ 的满射代数同态，由下式给出 :

$$P_{ii} \mapsto \frac{1}{2} C_i\,, \qquad P_{ij} \mapsto C_{ij} - C_i - C_j \qquad \textit{and} \qquad F_{ijk} \mapsto \frac{1}{2}[C_{ij}, C_{jk}]\,, \qquad \textit{for } i,j,k \textit{ all distinct,}$$

其中:

$$C_i = 1^{\otimes(i-1)} \otimes C \otimes 1^{\otimes(n-i)}, \qquad C_{ij} = \sum 1^{\otimes(i-1)} \otimes C_{(1)} \otimes 1^{\otimes(j-i-1)} \otimes C_{(2)} \otimes 1^{\otimes(n-j)}\ .$$

$R(n)$ 的定义关系由 $Z_n(sl_2)$ 中给定的元素满足，这一点通过直接计算即可验证（这些关系最初就是这样计算出来的）。不那么显然的是满射性。这相当于证明 $Z_n(sl_2)$ 由中间卡西米尔元 C_i、C_{ij} 生成。为此，我们用到了经典不变理论的结果。

$R(n)$ 中的中心元。与 $R(3)$ 一样， $R(n)$ 的定义关系不足以完整描述 $Z_n(sl_2)$。故事中困难的部分就在这里。值得注意的是， $R(n)$ 的关系蕴含了 $R(n)$ 中若干族中心元的存在，因而也蕴含了它们在 $Z_n(sl_2)$ 中的存在。这些中心元类似于 $R(3)$ 的中心元 Γ。

我们需要引入非交换元素矩阵的行列式概念。若 A 是一个矩阵，其元素为 $A_{i,\ j}$ $(1 \le i,j \le n)$，则定义 A 的对称化行列式如下

$$\det A = \frac{1}{n!} \sum_{\rho,\sigma \in S_n} sgn(\rho) sgn(\sigma) A_{\rho(1),\sigma(1)} A_{\rho(2),\sigma(2)} \cdots A_{\rho(n),\sigma(n)},$$

其中 S_n 是由 n 个元素组成的置换群，而 $sgn(\sigma)$ 是 σ的符号。对于可交换元素，这就是矩阵行列式的通常定义。我们还定义如下矩阵 3×3

$$P_{ijk}^{abc} = \begin{pmatrix} P_{ia} & P_{ib} & P_{ic} \\ P_{ja} & P_{jb} & P_{jc} \\ P_{ka} & P_{kb} & P_{kc} \end{pmatrix}.$$

现在我们引入 $R(n)$ 的一些元素，它们将发挥重要作用。

$$\begin{aligned}
w_{ijk} &:= {F_{ijk}}^2 + \tfrac{1}{2}\det(P_{ijk}^{ijk}) \\
&\quad - \tfrac{1}{3}\left(\{P_{ij}, P_{ik}\} + \{P_{ij}, P_{jk}\} + \{P_{ik}P_{jk}\} + P_{ij}P_{kk} + P_{ik}P_{jj} + P_{jk}P_{ii}\right), \\
x_{ijk\ell} &:= F_{ijk}F_{jk\ell} + \tfrac{1}{2}\det(P_{ijk}^{jk\ell}) + \tfrac{1}{2}(F_{ij\ell} + F_{ik\ell})P_{jk} - \tfrac{1}{3}(P_{ij}P_{k\ell} + P_{ik}P_{j\ell} + P_{i\ell}P_{jk}), \\
y_{ijk\ell m} &:= F_{ijk}F_{k\ell m} + \tfrac{1}{2}\det(P_{ijk}^{k\ell m}) + \tfrac{1}{2}(F_{ij\ell}P_{km} - F_{ijm}P_{k\ell}), \\
z_{ijk\ell mp} &:= F_{ijk}F_{\ell mp} + \tfrac{1}{2}\det(P_{ijk}^{\ell mp}),
\end{aligned}$$

其中指标 $i,j,k,\ell,m,p \in \{1,\dots,n\}$ 均互不相同。下面首先概述一下我们利用代数 $R(n)$ 的定义关系可以证明的结果（稍后还会进一步讨论 y 和 z）。

命题 III.6（[3]）。对于任意互不相同的 i,j,k,ℓ,m,p，元素 $w_{ijk}, x_{ijk\ell}, y_{ijk\ell m}$ 和 $z_{ijk\ell mp}$ 在指标置换下不变，并且是 $R(n)$ 中的中心元素。

III.2.2 特殊 Racah 代数 $sR(n)$与 $Z_n(sl_2)$

现在我们已经得到了代数 $R(n)$ 的一个可行定义，它是 Racah 代数 $R(3)$ 的类似物，因此可以实现我们的目标，描述对角中心化子 $Z_n(sl_2)$。至于 $n=3$，根据定理 III.5，它将是 $R(n)$ 的一个商。值得注意的是，只需固定我们前面发现的 $R(n)$ 的中心元的取值即可。

这段讨论中未明言的是，我们利用了对不变量交换代数的关系理想的精确了解（见 [Dre] 及其中的参考文献）。事实上，我们知道该理想的一组方便的生成元

（格罗布纳基），并且需要找到其非交换版本（下文对于 $Z_n(sl_2)$，我们只给出非交换情形下的结果）。

首先，我们发现所需的某些关系已经可以由$R(n)$的定义关系推出。总结如下。

命题 III.7（[3]）。以下断言在 $R(n)$中成立：

- 以下关系对 $1 \le a \le n$ 和 $1 \le i < j < k < \ell \le n$成立：

$$P_{ai}F_{jk\ell} - P_{aj}F_{ik\ell} + P_{ak}F_{ij\ell} - P_{a\ell}F_{ijk} = 0.$$

- 对于所有互不相同的 i、j、k、ℓ、m、$p \in \{1, \dots, n\}$，有：

$$y_{ijk\ell m} = 0 \qquad and \qquad z_{ijk\ell mp} = 0 \ .$$

这还不够，因此我们确实需要用附加关系对 $R(n)$取商。一切设计的目的，都是让这些新关系消去 $R(n)$中剩余的中心元。

定义 III.8. 特殊 Racah 代数 $sR(n)$是 $R(n)$按以下关系取商所得：

$$w_{ijk} = 0 \qquad \text{and} \qquad x_{ijk\ell} = 0, \qquad \forall 1 \le i < j < k < \ell \le n \ .$$

定理 III.9（[3]）。定理 III.5 的态射通过商 $sR(n)$分解，并成为一个同构：

$$sR(n) \cong Z_n(\mathfrak{sl}_2) \ .$$

相当令人惊讶的是，只需在 $R(n)$中加入上述关系，就能对任意 n的取值恢复中心化子。事实上，这些关系最多只涉及 4 个指标；原本可能会认为，随着 n 增大，我们需要对由涉及越来越多指标的元素张成的部分取商。这种简化归因于非交换情形（许多关系已可由 $R(n)$推出）；就这一点而言，非交换情形比交换情形更简单。

III.3 对角中心化子 $Z_2(sl_3)$

从现在起，我们将聚焦于李代数 sl_3；对于它，二重张量积已经产生了一个非常有趣的代数情形。

代数 $U(sl_3)$由元素 e_{ij}、i、$j \in \{1,2,3\}$生成，并满足以下定义关系：

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj} \qquad \text{and} \qquad e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0 \ .$$

对角嵌入 $\delta^{(2)}$从 $U(sl_3)$ 到 $U(sl_3)\otimes U(sl_3)$ 与引言中的相同，对角中心化子$Z_2(sl_3)$也相应地定义。

III.3.1 $Z_2(sl_3)$ 的生成元

沿用处理 sl_2 时的思路，我们首先利用 $U(sl_3)$ 的 Casimir元（即 $U(sl_3)$ 中心的生成元）构造 $Z_2(sl_3)$ 的元素。$U(sl_3)$ 中有两个 Casimir元，一个次数为 2，另一个次数为 3。出于对称性考虑，我们选择如下形式：

$$C^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}e_{ji} \quad \text{and} \quad C^{(3)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} (e_{ij}e_{jk}e_{ki} + e_{ji}e_{kj}e_{ik}) \ .$$

它们 生成 $U(sl_3)$ 的中心。从这两个元素出发，我们可以得到 $Z_2(sl_3)$ 的 6 个元素：

$$k_1 = C^{(2)} \otimes 1 \,, \quad k_2 = 1 \otimes C^{(2)} \,, \quad k_3 = \delta^{(2)}(C^{(2)}) \,,$$
$$l_1 = C^{(3)} \otimes 1 \,, \quad l_2 = 1 \otimes C^{(3)} \,, \quad l_3 = \delta^{(2)}(C^{(3)}) \ .$$

现在说说与 sl_2 的主要区别：这些元素不能生成对角中心化子 $Z_2(sl_3)$。事实上，这是必然的，因为按照构造，这些元素彼此都对易（实际上，它们必定是 $Z_2(sl_3)$ 中的中心元素）。然而，对角中心化子 $Z_2(sl_3)$ 不可能是交换的[4]。因此，我们需要找到更好的方法来寻找 $Z_2(sl_3)$ 的元素。

极化迹。我们从不变量的经典构造中汲取灵感。定义 $U(sl_3)^{\otimes 2}$ 中的下列元素：

$$T^{(a_1,\dots,a_d)} = \sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{3} e^{(a_1)}_{i_2 i_1} e^{(a_2)}_{i_3 i_2} \dots e^{(a_d)}_{i_1 i_d}\,, \qquad \text{where } a_1,\dots,a_d \in \{1,2\}\ .$$

所用的记号为 $e^{(1)}_{ij} = e_{ij}\otimes 1$ 和 $e^{(2)}_{ij} = 1\otimes e_{ij}$。通过直接运用矩阵代数中的对易关系进行验证，可以证明这些元素与任意 $\delta^{(2)}(e_{pq})$ 对易，其中 p,q。因此，它们属于 $Z_2(sl_3)$。它们是引言中极化迹的非交换类比，我们也将其称为极化迹。

略去所有细节，我们可以利用经典不变量理论的一些结果（参见 [Dre] 及其中的参考文献）得到：

$$T^{(1,1)},\ T^{(1,2)},\ T^{(2,2)},\ T^{(1,1,1)},\ T^{(1,1,2)},\ T^{(1,2,2)},\ T^{(2,2,2)},\ T^{(1,1,2,2)}\ ,$$

将生成整个对角中心化子 $Z_2(sl_3)$。

注 III.10。事实上，细心的读者将本文与 [Dre] 对比后，或许会注意到似乎少了一个 6 次生成元，例如 $T^{(1,1,2,2,1,2)}$。值得注意的是，这个“缺失”的生成元在非交换情形下并未缺失，因为它会出现在上述两个元素的交换子中。这正是非交换版本比其交换类比更简单的一个例子。▲

上面的元素 k_1,k_2,k_3,l_1,l_2,l_3 与 $T^{(1,1)}, T_{(1,2)}T_{(2,2)}T_{(1,1,1)}T_{(2,2,2)}$ 以及 $T^{(1,1,2)}+T^{(1,2,2)}$ 直接相关。因此，我们引入另外两个元素：

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(T^{(1,1,2)} - T^{(1,2,2)}) + \frac{1}{3}(l_1 - l_2)\ , \\ Y &= T^{(1,1,2,2)} + \frac{3}{2}(T^{(1,1,2)} + T^{(1,2,2)}) - \frac{1}{12}(T^{(1,2)})^2 - \frac{5}{12}T^{(1,1)}T^{(2,2)} + \frac{5}{2}T^{(1,2)}\,. \end{aligned}$$

X 和 Y 这种不太自然、看似复杂的选择是由对称性考量所决定的；这一点我们略而不谈，而这种选择将在最后一个小节以及下一节的应用中给我们丰厚的回报。在继续之前，先作一总结。

结论 III.11. 对角中心化子 $Z_2(sl_3)$ 由以下元素生成：

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ \ X,\ Y\ .$$

III.3.2 $Z_2(sl_3)$ 的一个表示

现在，我们需要为上述 $Z_2(sl_3)$ 的生成元找出一套完备关系集。结果将与 $Z_3(sl_2)$ 和 Racah代数的情形极为相似。我们先定义一个新的代数，它将是本节（以及下一节）的主角。

定义 III.12. 代数 $\mathcal{A}$ 是由中心元 a_2、a_5、a_6、a_8、a_9 以及生成元A、B、C生成的代数，其满足以下定义关系：

$$\begin{aligned} [A,B] &= C\,, \\ [A,C] &= -6B^2 + a_2A^2 + a_5A + a_8\,, \\ [B,C] &= -2A^3 - a_2\{A,B\} - a_5B + a_6A + a_9\,, \end{aligned} \tag{III.7}$$

我们有以下定理：

[4]这是因为在两个不可约 sl_3-表示的张量积中会出现重数 .

定理 III.13（[5]）。存在一个从 $\mathcal{A}$ 到 $Z_2(sl(3))$ 的满射代数同态，其定义如下：

$$A \mapsto X\,, \qquad B \mapsto Y\,, \qquad C \mapsto Z := [X,Y]\,,$$

对于某种对 a_2、a_5、a_6、a_8、$a_9 \in \mathbb{C}[k_1,k_2,k_3,l_1,l_2,l_3]$ 的选取。

关于 a_2、a_5、a_6、a_8、a_9 有一个显式表达式，但我们暂且略过，稍后再回到它。代数 $\mathcal{A}$ 在以 a_2、a_5、a_6、a_8、a_9 为系数的多项式上的一个漂亮的 PBW 基为：

$$\{A^a B^b C^c\ ,\ \ a,b,c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}\ .$$

这表明 $\mathcal{A}$ 不可能与 $Z_2(sl_3)$ 同构，因为这将与已知的 $Z_2(sl_3)$ 的希尔伯特–庞加莱级数相矛盾（见附录）。因此必须找到一个额外的关系。具体过程如下。

结果发现，代数 $\mathcal{A}$ 有一个非平凡的中心元，其显式表达式为：

$$\Omega = x_1 A + x_2 B + x_3 A^2 + x_4\{A,B\} + x_5 B^2 + x_6 ABA - A^4 + 4B^3 + C^2\ ,$$

其中 $x_1 = 6a_5 + 2a_9$、$x_2 = -2a_6 - 2a_8$、$x_3 = 6a_2 + a_6$、$x_4 = -a_5$、$x_5 = 8a_2 - 24$、$x_6 = -2a_2 + 12$。

我们可以表述最终结果。

定理 III.14（[5]）。对角中心化子 $Z_2(sl_3)$ 同构于代数 $\mathcal{A}$ 按 the following additional relation:

$$\Omega = a_{12}\,, \qquad \textit{for some } a_{12} \in \mathbb{C}[k_1,k_2,k_3,l_1,l_2,l_3]\,.$$

同样，a_{12} 有一个显式表达式，此处略去。关于记号，参数 a_2、a_5、a_6、a_8、a_9、a_{12} 的下标对应于它们的次数，详见下一小节。

III.3.3 $Z_2(sl_3)$ 的最高权特化与 E_6 对称性

$Z_2(sl_3)$ 的最高权特化。考虑 $V_{m_1,\ m_2}$ 的最高权表示 $U(sl_3)$。它由两个复数 m_1、m_2 参数化，并由最高权向量 $v_{m_1,\ m_2}$ 作为 $U(sl_3)$-模生成，满足

$$\begin{aligned} h_p v_{m_1,m_2} &= (m_p - 1) v_{m_1,m_2} \quad \text{with} \quad p = 1,2\,, \\ e_{pq} v_{m_1,m_2} &= 0 \quad \text{with} \quad 1 \leq p < q \leq 3\,, \end{aligned} \tag{III.8}$$

其中我们设 $h_p = e_{pp} - e_{p+1,\ p+1}$。例如，若 m_1、$m_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$，则 $V_{m_1,\ m_2}$ 可以是 sl_3 的有限维不可约表示，其最高权为（m_1，m_2）。

在表示 $V_{m_1,\ m_2}$中，$U(sl_3)$ 的 Casimir元 $C^{(2)}$和 $C^{(3)}$与单位矩阵成比例。记它们的值为：

$$C^{(2)} = c^{(2)}(m_1,m_2)\mathrm{Id}_{V_{m_1,m_2}} \quad \text{and} \quad C^{(3)} = c^{(3)}(m_1,m_2)\mathrm{Id}_{V_{m_1,m_2}}\ .$$

现在选取三对复数（m_1，m_2）、（m_1'，m_2'）和（m_1''，m_2''），并考察表示 $V_{m_1,\ m_2} \otimes V_{m_1',\ m_2'}$的张量积。在该空间中，考虑 $U(sl_3)$ 对应于权（m_1''，m_2''）的对角作用下的所有最高权向量。将所有这些向量作为 $U(sl_3)$-模生成的子空间记为：

$$M^{m_1'',m_2''}_{m_1,m_2,m_1',m_2'}\ .$$

根据构造，对角中心化子 $Z_2(sl_3)$ 与 $U(sl_3)$ 的对角作用对易，因此它保持子空间 $M^{m_1''}{}_{,\ m_1\ m_2}^{\ \ m_2''}{}_{,\ ,\ m_1',\ m_2'}$ 不变。该子空间因而自然成为一个 $Z_2(sl_3)$-模。

例 III.15. 若 $V_{m_1,\ m_2}$,$V_{m_1',\ m_2'}$,$V_{m_1'',\ m_2''}$ 是有限维不可约表示，则子空间 $M^{m_1''}{}_{,\ m_1\ m_2}^{\ \ m_2''}{}_{,\ ,\ m_1',\ m_2'}$ 是 $V_{m_1'',\ m_2''}$ 在张量积 $V_{m_1,\ m_2} \otimes V_{m_1',\ m_2'}$ 中的同型分量（即 $V_{m_1,\ m_2} \otimes V_{m_1',\ m_2'}$ 中所有与 $V_{m_1'',\ m_2''}$ 同构的直和项之直和）。

在 $M^{m_1''}{}_{\text{中},\ m_1\ m_2}^{\ \ m_2''}{}_{,\ ,\ m_1',\ m_2'}$ $Z_2(sl_3)$ 的表示中，中心参数 k_1、k_2、k_3、l_1、l_2、l_3取确定的复数值，因为它们是用 Casimir元表示的。具体如下：

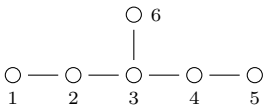
$$\begin{aligned} k_1 &= c^{(2)}(m_1,m_2)\,, & k_2 &= c^{(2)}(m_1',m_2')\,, & k_3 &= c^{(2)}(m_1'',m_2'')\,, \\ l_1 &= c^{(3)}(m_1,m_2)\,, & l_2 &= c^{(3)}(m_1',m_2')\,, & l_3 &= c^{(3)}(m_1'',m_2'')\,, \end{aligned}$$

我们将 $Z_2(sl_3)^{spec}$ 称为对应于这些取值的 $Z_2(sl_3)$特化。在 $Z_2(sl_3)^{spec}$中，参数 a_i 变成 m 的多项式，其下标对应于它们的次数：

$$a_2, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{12} \in \mathbb{C}[m_1, m_2, m_1', m_2', m_1'', m_2''] \qquad \text{with } \deg(a_i) = i \ .$$

数字 2、5、6、8、9、12 恰好是类型为 E_6 的根系的基本次数。令人惊讶的是，这并非单纯的数字巧合，接下来我们就会看到。

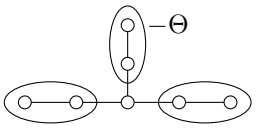
类型为 E_6 的 Weyl群的作用。考虑一个类型为 E_6 的根系，并选取单根 α_1、α_2、α_3、α_4、α_5、α_6，其编号如下图所示，遵循以下 Dynkin图：



L我们将参数 m_1、m_2、m_1'、m_2'、m_1'' 和 m_2'' 与单根按如下方式对应：

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1 \,, & m_1' &= \alpha_5 \,, & m_1'' &= \Theta \,, \\ m_2 &= \alpha_2 \,, & m_2' &= \alpha_4 \,, & m_2'' &= -\alpha_6 \,, \end{aligned}$$

其中 $\Theta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6$ 是 E_6 的最高正根。(m_1, m_2)、(m_1', m_2') 和 (m_1'', m_2'') 分别对应于三个两两正交的 A_2 型子系。换言之，我们从 E_6 中选出一个 $A_2 \times A_2 \times A_2$ 型子系。要理解这一点，最好回想一下，加入最高根的负根会生成相应的仿射Dynkin图。对于 E_6，仿射Dynkin图中的三个 A_2 型子系自然呈现出来：



$$\rightsquigarrow \quad A_2 \times A_2 \times A_2 \subset E_6$$

根系类型为 E_6 的 Weyl群 $W(E_6)$ 通过其通常的反射表示作用于根集，并通过上述识别，这导出了 $W(E_6)$ 在 $\mathbb{C}[m_1, m_2, m_1', m_2', m_1'', m_2'']$ 上的线性作用。显式计算这一作用是初等的，因此我们略去所得公式。

这一切看起来或许相当随意，但下面是我们令人惊讶的发现。

定理III.16（[5]）。出现在 $Z_2(sl_3)^{spec}$ 的表示中的多项式 a_2、a_5、a_6、a_8、a_9、a_{12}，都是在 $W(E_6)$ 作用下的不变多项式。特别地，代数 $Z_2(sl_3)^{spec}$ 对参数 (m_1、m_2、m_1'、m_2'、m_1''、m_2'') 的依赖仅通过它们在 $W(E_6)$ 下的轨道体现。

众所周知，$W(E_6)$的不变多项式子代数由 6 个代数独立多项式生成，其次数依次为 2、5、6、8、9、12（即 E_6 的基本次数）。多项式 a_2、a_5、a_6、a_8、a_9、a_{12} 实际上就是这样一组生成元。

为完整起见，代数 $Z_2(sl_3)^{spec}$ 在中心对称 $-\mathrm{Id}$ 下也保持不变（该对称将 X 映为 $-X$，并将 Y 映为 Y），因此根格的完整对称群 $\pm W(E_6)$ 在 $Z_2(sl_3)^{spec}$ 上实现为对称性。

III.4 应用： sl_3 的缺失标签及其对称性

本节中，我们固定 sl_3 的三个最高权，并将它们统称为

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_1', m_2', m_1'', m_2'') \in \mathbb{Z}_{>0} \ .$$

我们将使用以下记号：

$$\ell = \frac{1}{3}(m_1 + 2m_2 + m_1' + 2m_2' - m_1'' - 2m_2'') \quad \text{and} \quad n = \frac{1}{3}(2m_1 + m_2 + 2m_1' + m_2' - 2m_1'' - m_2'') \ .$$

我们考虑相应的不可约有限维表示 $V_{m_1,\ m_2}$、 $V_{m'_1,\ m'_2}$ 和 $V_{m''_1,\ m''_2}$。我们构造张量积 $V_{m_1,\ m_2} \otimes V_{m'_1,\ m'_2}$，并假设第三个表示 $V_{m''_1,\ m''_2}$ 出现在克莱布施–戈丹级数中：

$$V_{m_1,m_2} \otimes V_{m'_1,m'_2} = \bigoplus_{(m''_1,m''_2)} V_{m''_1,m''_2}^{\oplus d_{\mathbf{m}}} \ . \tag{III.9}$$

表示$V_{m''_1,m''_2}$ 在此分解中出现的重数 $d_{\mathbf{m}}$ 是 Littlewood–Richardson 系数。

缺失标签。重数 $d_{\mathbf{m}}$ 可能大于一，这时便出现了所谓的缺失标签问题。这一术语借自物理学，更确切地说，源自量子力学。“标签”指的是一种可能性：根据某个完备对易观测量集的特征值，对式（III.9）中空间的向量基进行标记。

在左边（未耦合基）中，可以分别处理张量积的每个因子。在这种情况下，存在一种标准方法，可以为例如V_{m_1,m_2}中的向量标记。在物理学文献中，这称为总同位旋、同位旋的一个分量以及超荷。这些可观测量来自包络代数 $U(sl_3)$（其确切含义与我们的讨论无关）。

然而，我们希望得到指向右边（耦合基）的标签。也就是说，我们认为自己已无法追踪张量积中的各个因子，但仍能利用来自 sl_3 的对角作用的可观测量（总同位旋、总超荷等）。现在，利用 Casimir元的对角嵌入（按我们的记号，即 k_3 和 l_3），我们可以区分式（III.9）中的和所包含的不同不可约表示。再利用标准标记算子的（对角嵌入），我们便可以指定给定表示$V_{m''_1,m''_2}$中的一个向量。但这无法区分和中出现的$V_{m''_1,m''_2}$ 的不同但同构的副本。

消除歧义。为消除这一歧义，可以考虑对角中心化子 $Z_2(sl_3)$。事实上，来自 $U(sl_3)$ 对角嵌入的算子都无法消除歧义，因此我们需要一个来自更大代数的算子，它作用于张量积 $V_{m_1,\ m_2} \otimes V_{m'_1,\ m'_2}$。显然，张量积 $U(sl_3) \otimes U(sl_3)$ 是这里的自然环境。此外，为了与已有的标签集合兼容，我们希望加入一个与 $U(sl_3)$ 的对角嵌入对易的算子。这正是 $Z_2(sl_3)$ 登场之处。我们可以将 $Z_2(sl_3)$ 视为包含所有可能的附加标记算子的代数。

在上一节中，我们已经确定了 $Z_2(sl_3)$ 的两个生成元 X 和 Y，因此我们将尝试使用其中任意一个作为提供缺失标签的算子。 X 的作用已在 [PST] 中计算。由此计算可知， X 确实能够区分 $V_{m''_1,\ m''_2}$ 的不同副本，因此它的特征值可以作为缺失标签。第二个算子 Y 可以通过 X 和 Y 的各种组合，从不同的缺失标签算子中进行选择；此前尚未对它进行考察。此外，[PST] 中得到的 X 矩阵，除显而易见的对称性外，并未显示出其他对称性。

在本节中，我们将给出 X 和 Y 的作用方式，使对称性显现出来。所谓缺失标签的对称性，是指参数 $\mathbf{m}$ 上的一种变换，使得 X和 Y 的矩阵变换为等价矩阵（对 X而言相差一个 $\pm$ 符号）。因此，在这些变换下，特征值保持不变（对 X而言相差一个符号）。

III.4.1 缺失标签算子的公式

我们记录张量积 $V_{m_1,m_2} \otimes V_{m'_1,m'_2}$ 中 $V_{m''_1,m''_2}$的重数，并记其重数空间为 $M_{\mathbf{m}}$：

$$V_{m_1,m_2} \otimes V_{m'_1,m'_2} = \cdots \oplus \ V_{m''_1,m''_2} \otimes M_{\mathbf{m}} \ \oplus \ldots \ ,$$

其中， $M_{\mathbf{m}}$ 的维数为重数 $d_{\mathbf{m}}$，而空间 $M_{\mathbf{m}}$ 可识别为$V_{m_1,m_2} \otimes V_{m'_1,m'_2}$中由权为 (m''_1, m''_2) 的最高权向量构成的子空间。按照第一章中阐述的一般思想，我们将空间 $M_{\mathbf{m}}$ 视为 sl_3的中心化子的一个表示，因此此处有 $Z_2(sl_3)$。事实上，正如上一节所述， $M_{\mathbf{m}}$ 是特化 $Z_2(sl_3)^{spec}$的一个表示：

$$\begin{aligned} Z_2(sl_3)^{spec} &\to \mathrm{End}(M_{\mathbf{m}}) \\ X, Y &\mapsto X_{\mathbf{m}}, Y_{\mathbf{m}} \, . \end{aligned}$$

我们将给出 $X_{\mathbf{m}}$ 和 $Y_{\mathbf{m}}$ 在 $M_{\mathbf{m}}$ 的一个基下的矩阵，该基是根据对称性考量精心选取的。我们将省略所有细节，仅给出最终得到的矩阵。

我们定义

$$(\xi_1\,,\ \xi_2\,,\ \xi_3) = \begin{cases} (\ell\,,\ m_2\,,\ m_1'+\ell-n) & \text{if } \ell \le n\,, \\ (n\,,\ m_1'\,,\ m_2+n-\ell) & \text{if } n \le \ell\,, \end{cases} \qquad \text{and} \quad (\xi_4\,,\ \xi_5\,,\ \xi_6) = (\ell-m_2'\,,\ n-m_1\,,\ 0)\,,$$

以及这些参数的以下线性组合

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{3}\xi_i - \sum_{i=4}^{6}\xi_i + 2|\ell-n| \quad \text{and} \quad \lambda_\pm = \pm\frac{1}{2}\Lambda + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\xi_i\ .$$

With th 在这些记号下，矩阵的大小（即重数） $d_{\mathbf{m}}$ 可以改写如下。

$$d_{\mathbf{m}} = \xi_a - \xi_b\,, \qquad \text{where} \quad \xi_a = \min\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\} \ \text{ and } \ \xi_b = \max\{\xi_4,\xi_5,\xi_6\}\ .$$

X 和 Y 的作用由以下三对角矩阵给出：

$$X_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{d-1,d} \\ 0 & \dots & 0 & a_{d,d-1} & a_{d,d} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{d-1,d} \\ 0 & \dots & 0 & b_{d,d-1} & b_{d,d} \end{pmatrix} \tag{III.10}$$

其中 $d = d_{\mathbf{m}}$ 和非对角系数为：

$$a_{j,j+1} = (j+\xi_b-\xi_1)(j+\xi_b-\xi_2)(j+\xi_b-\xi_3) \qquad \text{and} \qquad b_{j,j+1} = a_{j,j+1}(j+\xi_b-\lambda_-)\ ,$$
$$a_{j+1,j} = (j+\xi_b-\xi_4)(j+\xi_b-\xi_5)(j+\xi_b-\xi_6) \qquad \text{and} \qquad b_{j+1,j} = a_{j+1,j}(j+\xi_b-\lambda_+)\ .$$

为写出对角系数，我们设：

$$E_{j,k} = \sum_{i=1}^{6} x_i(j)^k\,, \qquad \text{where } x_i(j) = (\xi_i - j - \xi_b + \frac{1}{2}) \text{ for } i \in \{1,\dots,6\}\ .$$

于是我们有：

$$a_{jj} = -\frac{1}{108}\Big(\frac{7}{2}E_{j,1}^3 - 18E_{j,1}E_{j,2} + 18E_{j,3}\Big) - \frac{1}{24}E_{j,1}\Big(\Lambda^2+2\Big)\ ,$$

$$b_{jj} = \frac{1}{288}\Big(\frac{5}{2}E_{j,\ 1}^4 + 32E_{j,\ 1}E_{j,\ 3} + 6\big(E_{j,\ 2}^2 - 3E_{j,\ 1}^2E_{j,\ 2} - 4E_{j,\ 4}\big) + 6E_{j,\ 2}(\Lambda^2+2) - 3E_{j,\ 1}^2(\Lambda^2-2) - \frac{3}{2}\Lambda^4 + 6\Lambda^2 - 36\Big)\ .$$

非对角 $X_{\mathbf{m}}$ 和 $Y_{\mathbf{m}}$ 的系数形式非常简单，而它们的对角系数则较为 re
复杂（尽管 其选取的形式便于提取某些对称性）。

这种显式形式使我们能够证明， $X_{\mathbf{m}}$ 的特征值两两不同， $Y_{\mathbf{m}}$ 的特征值也同样如此（这是关于非对角系数非零的三对角矩阵的一个简单的一般性结论）。因此，两组特征值都可以用来标记张量积 $V_{m_1,\ m_2}\otimes V_{m_1',\ m_2'}$ 中出现的 $V_{m_1'',\ m_2''}$的不同副本。从这个意义上说，它们各自都为“缺失标签”问题提供了一种解法。

我们注意到，一般情况下，似乎不存在关于 $X_{\mathbf{m}}$ 或 $Y_{\mathbf{m}}$ 的精确公式。事实上，在一些例子中，对 $X_{\mathbf{m}}$ 进行对角化会立即使 $Y_{\mathbf{m}}$ 变得复杂（反之亦然）。因此，似乎上述关于 $X_{\mathbf{m}}$ 或 $Y_{\mathbf{m}}$ 的同时三对角形式是能够达到的最简表达；如此简单的形式竟然存在，或许颇为令人惊讶。

注 III.17. 矩阵 $X_{\mathbf{m}}$ 和 $Y_{\mathbf{m}}$ 特别给出了对角中心化子$Z_2(sl_3)$的一个表示。值得注意的是，可以利用与根系 E_6 相关联的多胞体，通过几何方法得到这一代数的一组无限维表示。有限维表示可以从无限维表示中提取出来，而上述表示也可以在这组表示 [2] 中找到。这个构造与通常的李代数 Verma 模构造颇为相似，令人玩味。▲

III.4.2 对称性

给定两组参数 m 和 m′，值得确定两对矩阵 $(X_{\mathbf{m}}, Y_{\mathbf{m}})$ 和 $(X_{\mathbf{m}'}, Y_{\mathbf{m}'})$ 何时能通过同一个基变换同时共轭。若确实如此，则 X 的特征值

以及 Y（可能的缺失标记）在 m 替换为 m′ 时将保持不变量。由于 X 和 Y 生成了整个中心化子（差一个中心元），从中心化子 $Z_2(sl_3)$ 中取出的任何缺失标记算子，在与 m 相关的表示和与 m′ 相关的表示中都会具有相同的特征值。

如果 $(X_{\mathbf{m}}, Y_{\mathbf{m}})$ 和 $(X_{\mathbf{m}'}, Y_{\mathbf{m}'})$ 共轭，我们就把相应的参数变换 m 到 m′ a 称为缺失标签算子的“对称性”（事实上，我们将考虑稍微更一般的情况，即 $X_{\mathbf{m}}$ 和 $X_{\mathbf{m}'}$ 至多相差一个符号）。

参数 m 上存在自然的（线性）对称操作候选，它们是上一节所述扩展魏尔群 $\pm W(E_6)$ 中的变换。从这个相当大的群（阶为 103680）中，我们提取出缺失标签算子的对称性子群（此处略去其作为 $\pm W(E_6)$ 的子群的明确描述。更多细节见 [2]）。

定理 III.18 ([2])。参数 m 上的缺失标签对称性可描述为以下排列的变换：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} m_1 & m_1' & m_2'' & m_1+\ell-n & m_1'+\ell-n & m_2''+\ell-n \\ m_1'+m_2'-\ell & m_1+m_2-\ell & n & m_1'+m_2'-n & m_1+m_2-n & \ell \\ m_2+n-\ell & m_2'+n-\ell & m_1''+n-\ell & m_2 & m_2' & m_1'' \end{array}\right] \tag{III.11}$$

它们由以下操作组合而成：
• 同时作用于左侧和右侧的 3×3 方阵：行的置换、列的置换以及矩阵转置；

• 交换左边和右边的 3×3 方阵。

准确地说，定理中的变换将 $X_{\mathbf{m}}$ 变为一个与 $\pm X_{\mathbf{m}}$等价的矩阵，其符号由行和列的对换次数决定；它们还将 $Y_{\mathbf{m}}$ 变为一个与 $Y_{\mathbf{m}}$等价的矩阵。注意，上述两个 3×3 方阵都是幻方，也就是说，按行、列、对角线或反对角线求和，结果都相同。

几点说明。• 该定理有一个非常实用的应用。给定一组参数，可以利用对称性得到一组新参数，使得 ℓ 是排列中18个数的最小值。在这种情况下， $X_{\mathbf{m}}$ 和 $Y_{\mathbf{m}}$ 的显式公式更容易应用，因为参数 ξ总是相同的，而且参数 ξ_b 为0。

• 缺失标记算子有一些“显而易见”的对称性，可通过置换表示并取其对偶得到。它们合起来构成一个12阶群。上述对称群比它更大（阶为144），因此实际上存在有趣的额外“隐藏”对称性。该群的结构实际上是一个半直积：

$$\Big((S_3\times S_3)\rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\Big)\times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ ,$$

在这里，我们可以依次看到行的置换、列的置换、对换以及两个方格的交换。这解释了该群的阶 $144=6\times 6\times 2\times 2$。

• 左右两个 3×3方格的交换与所有其他对称性对易，因此整个对称群是一个 72 阶群与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的直积。颇为令人惊讶的是，同时作用于两个 3×3 方格上的 72 阶子群，与描述 sl_2 的克莱布施–戈丹系数或 $3j$-符号的对称性的群具有相同的结构。

• 重数 $d_{\mathbf{m}}$ 是上述排列中出现的 18 个数的最小值（如果非零）。因此，m 在克莱布施–戈丹级数中对应非零重数的条件是，该数组中的每个数都是正整数。当然，缺失标签的对称性尤其保持矩阵的大小 $X_{\mathbf{m}}$ 和 $Y_{\mathbf{m}}$不变，因而也是数 $d_{\mathbf{m}}$的对称性。事实上，定理中的变换显然是利特尔伍德–理查森系数的对称性（它们置换了 18 个元素）。

• 另一种描述这个对称群的方法，是像图 III.1 所示那样，将上方数组中的 18 个元素画在环面上。正方形的相对两边彼此粘合。定理 III.18 中的 144 个变换，对应于保持这幅图中点的集合不变的仿射变换。给定 18 个点中的一个，固定该点的变换就是以该点为

中心的正方形的对称性（二面体群，阶为 8）。整个对称群是其中一个二面体群与保持点集不变的平移子群的半直积。例如，这些平移由两个阶为 6 的平移生成：比如，t_1 将 m_1 移到 m_2，而 t_2 将 m_1 移到 $m_2+m_2'-\ell$。这两个平移满足 $t_1^3=t_2^3$，因此平移子群的阶为 18。这与 $144=8\times 18$相符。

此外，如果某个对称性将灰色区域映射到灰色区域，那么它对应于一种变换 $\mathrm{m}\mapsto\mathrm{m}'$，使得 $X_{\mathbf{m}}$ 和 $X_{\mathbf{m}'}$ 共轭。否则，它对应于 $X_{\mathbf{m}}$ 和 $-X_{\mathbf{m}'}$ 共轭的情形。

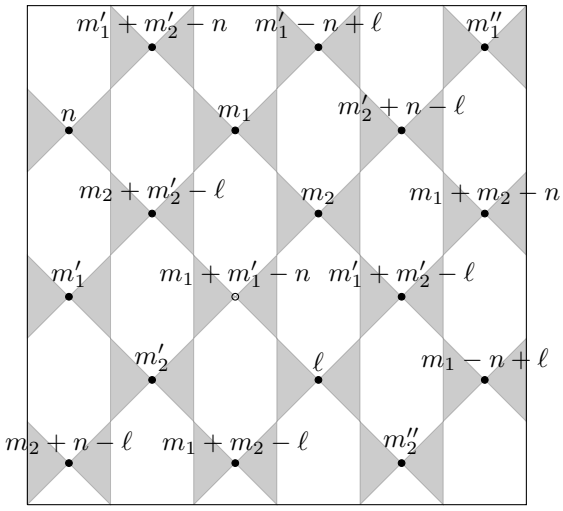


图 III.1：将缺失标签的对称性视为环面上的仿射变换。

III.5 结论与展望

根据本论文的一般理念——粗略地说，我们应当研究中心化子，以发现有趣的代数——我们考察了一些最简单李代数的对角中心化子。$Z_n(sl_2)$ 的情形如今已得到充分理解，而第一个超出 sl_2 的情形，即 $Z_2(sl_3)$，也已得到详细研究。在这两种情形中，出现的代数预计将在数学和数学物理的各种背景下发挥作用。上一节详细描述了这些预期应用之一，即 sl_3 的缺失标签。

我们注意到，Racah 代数的推广 $R(n)$的关系已在 [DBG+] 中出现，当时研究的是一个具有 n 维的超可积系统。最近，人们也在物理模型中观察到这些关系 [LMZ]，并已开始研究它们与多元拉卡多项式之间的关系 [DBVV]，但这仍是一个正在积极研究的课题。

一项重要的推广涉及量子群 $U_q(sl_2)$，其三重张量积导出 Askey–Wilson代数。许多尝试 [DBDC+] 将这一结果推广到 n 重张量积，得到了该中心化子的关系，但未能给出全部定义关系。为建立与纽结理论的联系，我们强调，三重张量积对应的对角中心化子 $U_q(sl_2)$已被证明与四带孔球面的考夫曼 skein 括号代数同构（例如，参见 [4] ）。最近的研究表明，n 重张量积的情形恰好对应于 $n+1$带孔球面 [CL]。关于 q推广 $R(n)$及其特殊商（由此可得到中心化子的一个表示）的研究仍在进行中。

本章节中出现的代数，对于 $Z_2(sl_3)$ 而言，似乎也与超可积系统 [CDO+] 的研究背景相关。更具体地说，在数学方面，这个代数属于 Calabi–Yau 代数 [EG, Gin] 所属的类别；联系 [ELOR], 的结果，它还是球面辛反射代数的一个特例（而且在这一框架下也会出现类型 E_6 ）。这些联系仍然相当神秘。此外，目前尚不清楚如何构造我们对 $Z_2(sl_3)$ 的描述的 q-变形，使其对应于 $U_q(sl_3)$。

关于不变多项式的经典结果已被证明与对角中心化子的描述密切相关。我们现在几乎已经穷尽了交换代数中不变多项式可被显式确定的情形。在研究过程中，我们发现了一个有趣的现象：在非交换情形中，所需的生成元更少，而且交换关系蕴含了更多关系。这或许正是非交换世界能够为其自身提供一些启示的例子。

交换类比。无论如何，研究由极化迹生成的非交换代数对于对角中心化子是必要的，而且这项研究也可能对研究不变多项式的交换代数有所帮助。

最后但同样重要的是，本章与前一章在某种意义上应当结合起来。当我们在表示的张量积上表示 $Z_n(sl_2)$ 时，便会重新得到前一章研究的中心化子。这意味着融合 Hecke 代数与 Racah/Askey–Wilson 代数及其推广之间存在目前尚不为人知的联系。对于三重张量积，我们有一个猜想：对于 sl_2，中心化子是 Racah 代数 $R(3)$ 的一个商 [9]（[CVZ] 也讨论了 q变形情形）。将这些想法推广到 n 重张量积的情形是值得探索的。

从辫群的角度出发，我们还可以提出以下有趣的问题：如果将 Askey–Wilson 关系加入辫群，是否足以得到有限维代数？如果是，这样是否就能得到张量积中心化子的一个表示？对于三重张量积，这些问题似乎已有一些肯定的答案。这项工作仍在进行中。

附录 xIII.A 关于 $Z_n(sl_2)$ 与 $Z_2(sl_3)$ 的希尔伯特–庞加莱级数

关于分次代数的希尔伯特–庞加莱级数，更多信息可参见 [Sta1]。记 $Z_n(sl_2)_{\le k}$ 为次数小于或等于 k 的元素所构成的子空间（次数按 $U(sl_2)^{\otimes n}$ 的生成元计算）。$Z_n(sl_2)$ 的希尔伯特–庞加莱级数记录了这一递增子空间序列的维数：

$$F_n(t) = \sum_{k\ge 0} \dim\big(Z_n(sl_2)_{\le k}/Z_n(sl_2)_{<k}\big)t^k, \tag{III.12}$$

从经典不变量理论的角度来看，t^k 前的系数是次数为 k 的齐次不变多项式的维数。

显式公式。采用不同方法，已有若干公式被推导出来，用于计算希尔伯特–庞加莱级数 $F_n(t)$（参见 [Dre、For、Tera] 中的参考文献）。下面的公式似乎是新的。

命题 III.19（[3]）。设 $n \ge 2$，并令 $r = n-2$。$Z_n(sl_2)$ 的希尔伯特–庞加莱级数为：

$$F_n(t) = \frac{P_r(t)}{(1-t^2)^{3(r+1)}},$$

其中分子为：

$$P_r(t) = (1+t)^r \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k a_k t^k, \qquad where \begin{cases} a_{2k} = \binom{r}{k}^2, \\ a_{2k+1} = \binom{r}{k}\binom{r}{k+1}. \end{cases}$$

我们从经典代数几何的角度对这个公式作几点评论。首先，$F_n(t)$ 分母中出现的指数 $3(r+1)$ 是不变多项式函数代数的克鲁尔维数，或称格尔范德–基里洛夫维数（见 [For, Kir]）。利用一般不变理论中的霍赫斯特–罗伯茨定理[HoRo],，存在一组由 $3(r+1)$ 个代数独立元素组成的参数系 $\theta_1, \dots, \theta_{3(r+1)}$，使得该代数是多项式子代数 $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_{3(r+1)}]$ 上的有限维自由模。上面的形式 $F_n(t)$，加上分子 $P_r(t)$的正性（见下文），强烈暗示参数系可能由 $3(r+1)$ 个次数为 2 的元素组成。

如果确实如此，那将非常有趣，因为此时 $P_r(1)$ 就是该代数在 $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_{3(r+1)}]$ 上的维数。此外，$P_r(t)$ 中不同的单项式将指出应当在哪些次数上寻找以 $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_{3(r+1)}]$ 为基的基元素。

最后，公式中分子 $P_r(t)$ 的回文性质直接表明，the 希尔伯特–庞加莱系列 级数满足如下函数方程：

$$F_n(t^{-1}) = (-1)^{(n-1)} t^{3n} F_n(t).$$

这就得到了一个已知性质，该性质与不变量多项式函数代数的一种称为戈伦斯坦的性质有关（参见 [Dre] 及其中的参考文献）。

一些组合学。我们得到了 $Z_n(sl_2)$ 的 Hilbert–Poincar´e 级数的一个如下形式的表达式：

$$F_n(t) = \frac{(1+t)^r Q_r(t)}{(1-t^2)^{3(r+1)}}, \qquad \text{where } Q_r(t) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k a_k t^k,$$

且系数 a_k 由上面的命题给出。各种相关多项式的系数与研究充分的“卡特兰”风格组合对象存在某些联系，这或许并不令人意外。

多项式 $Q_r(t)$。多项式 $Q_r(t)$中的系数 a_k 统计半长度为 $2r+1$、具有 $k+1$ 个峰的对称戴克路径的数量（见 [在线整数数列百科全书]中的 A088855）。它们用二项式系数表示，对应于在路径的前 r 步中选取一定数量的峰和谷。

事实上，多项式 $Q_r(t)$ 是著名卡特兰数的一种 t-变形，也就是说，$Q_r(t)$ 在 $t=1$ 处的取值就是第 r个卡特兰数：

$$Q_r(1) = c_r = \binom{2r}{r} - \binom{2r}{r+1}.$$

不难给出一个组合证明，说明 a_k之交错和等于卡特兰数 c_r （即长度为 $2r$的戴克路径的数量）。也许下面这种看法也很有意思。根据其显式表达式，多项式 $Q_r(t)$ 等于以下关于x的劳朗多项式的常数项：

$$Q_r(t) = \left[(1-x^2)(1+tx^2)^r(1+tx^{-2})^r\right]_0.$$

对于 $t=1$，合并后可得：

$$\left[(1-x^2)(1+x^2)^r(1+x^{-2})^r\right]_0 = \left[(1-x^2)(x+x^{-1})^{2r}\right]_0 = c_r\ .$$

从这个意义上说，多项式 $Q_r(t)$ 是第 r 个卡特兰数的一种自然的 t-变形 .

分子 $P_r(t)$。 $Z_n(sl_2)$ 的 Hilbert–Poincar´e 级数的分子为 $P_r(t) = (1+t)^r Q_r(t)$。其系数均为正，下面将明确证明这一点。

首先，根据上文关于 $Q_r(t)$ 的讨论，可知 $P_r(t)$ 是数 $2^r c_r$ 的一种 t-变形，也就是说，它在 $t=1$ 处的取值为 $P_r(1) = 2^r c_r$。这个数统计了若干类组合对象（参见在线整数数列百科全书中的 A151374）。与前面类似，给出 $P_r(t)$ 的 t-变形可表示为：

$$P_r(t) = \left[(1-x^2)(1+t)^r(1+tx^2)^r(1+tx^{-2})^r\right]_0.$$

现在将含有 r 次幂的项重新分组，可得以下表达式：

$$P_r(t) = \left[(1-x^2)\big(1+t^3+(t+t^2)(1+x^2+x^{-2})\big)^r\right]_0 = \sum_{k=0}^{r} R_k \binom{r}{k} (1+t^3)^{r-k}(t+t^2)^k,$$

其中，正整数 R_k 是里奥丹数，是与卡特兰数关系最密切的数之一（参见在线整数数列百科全书中的 A005043）。它们可由以下等式之一给出：

$$R_n = \left[(1-x^2)(1+x^2+x^{-2})^n\right]_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} c_i.$$

上面的 $P_r(t)$ 公式有一个优点：它明确显示其系数均为正。因此， $P_r(t)$ 是 $2^r c_r$ 的一个系数为正的 t-变形，因此应由某个 $2^r c_r$ 对象集合上的某种有趣统计量给出。

对角中心化子 $Z_2(sl_3)$。以下是 $Z_2(sl_3)$ 的 Hilbert–Poincar´e 级数：

$$\frac{1+t^6}{(1-t^2)^3(1-t^3)^4(1-t^4)}\ .$$

我们在分母中看到了生成元 $Z_2(sl_3)$ 的次数。分子表明还存在一个次数为 6 的额外元素（我们将其记为 Z），它的平方可以用生成元表示。我们不知道 $Z_n(sl_3)$ 有什么简洁统一的公式。

第四章

Yokonuma–Hecke 代数与链环不变量

目录

引言 65
IV.1 Yokonuma–Hecke 代数的同构定理. 66
IV.2 Yokonuma–Hecke 代数上马尔可夫迹的分类. 68
IV.3 由 Yokonuma–Hecke 代数得到的链环不变量. 68
IV.4 结论与展望 . 70

引言

本章我们将考察 Yokonuma–Hecke 代数。它们属于本论文所研究的代数范畴，因为它们是中心化子代数，尽管并非量子群表示张量积的中心化子代数。顾名思义，它们由 Yokonuma [Yok], 提出，属于 Hecke 代数的范畴，含义与第一章第 I.6 节中的相同。事实上，它们是某个群的一个置换表示的中心化子代数。

事实上，从置换表示的中心化子的角度来看，它们是对通常的 Iwahori–Hecke 代数最自然的推广之一。回顾一下，通常的 Iwahori–Hecke 代数是有限李型群 G 关于一个 Borel 子群的置换表示的中心化子代数。要定义 Yokonuma–Hecke 代数，只需将 Borel 子群替换为 G 的极大幺幂子群即可。对于 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, 极大幺幂子群由对角线上全为 1 的上三角矩阵构成。

Yokonuma–Hecke代数近来重新受到关注，其自然描述已转化为一种由生成元与关系构成的简洁表示 [Juy1]。从这一表示可以看出， $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的 Yokonuma–Hecke 代数（有时称为 A 型 Yokonuma–Hecke 代数）是 $G(d, 1, n)$ 型复反射群的群代数的一种变形，其中 $d = q-1$。特别是，它包含辫群在 n 股线上的一个同态像，因此，构造马尔可夫迹并生成链环不变量的整个工作便可由此 [Juy2] 开始。

在本章中，我们照例不再讨论其作为中心化子代数的起源，尤其不再讨论 q 是素数的幂以及 $d = q-1$。我们所称的 Yokonuma–Hecke 代数，记作 $Y_{d,\,n}$，是为任意正整数 d 定义、依赖于不定元 q 的泛代数（事实上，我们还会加入另一个不定元 u，因为这对于马尔可夫迹和链环不变量而言更为方便）。

与 Yokonuma–Hecke代数相关的链环不变量的来历。在 [Juy2], Juyumaya 于 $Y_{d,n}$ 引入了一个类似于 Iwahori–Hecke 代数（类型为 A）的 Ocneanu 迹。随后，Juyumaya 和 Lambropoulou 利用该迹构造了纽结与链环的不变量 [JL3]。此时，人们开始提出一个问题：这些不变量是否与 HOMFLYPT 多项式有关（也就是说，它们是等价的、更强的、更弱的，还是截然不同）？ [ChLa] 乍看之下，它们似乎没有理由相同。然而，这种构造与通常构造 HOMFLYPT 多项式的方式如此相似，以至于人们猜测二者之间存在联系。倘若这种对通常构造的扩展最终产生了一个真正更强的不变量，那倒会是个不错的惊喜。

最初的例子 [CJKL] 似乎表明，Juyumaya–Lambropoulou 不变量在拓扑上等价于 HOMFLYPT 多项式，但这些最初的例子只涉及纽结（只有一个连通分支的链环）。

对于链环，情况则有所不同，很快就发现了一个例子 [CJKL]：新不变量能够区分两个不同的链环，而它们的 HOMFLYPT 多项式却相同。因此，新不变量确实包含比 HOMFLYPT 多项式更多的信息。接下来需要弄清楚这些新信息是什么，因为人们仍怀疑这个新不变量与 HOMFLYPT 多项式存在某种联系。这个问题最终得到了解答：Juyumaya–Lambropoulou 不变量的完整描述被推导出来，它可以用子链环的 HOMFLYPT 多项式以及不同连通分支之间的链接数来表示（[CJKL，附录] 和 [12]）。这立即解释了为什么在纽结的情形下看不出差异，也解释了为什么有些链环能够被区分：它们是由链接数与各子链环 HOMFLYPT 多项式的精妙组合区分开的。

故事到此告一段落时，人们或许会感到有些失望，因为事实上，这个新不变量不过是其他已知不变量的组合。然而，整个过程颇为有趣，而且认识到这种已知不变量的组合可以通过 Yokonuma–Hecke 代数上的马尔可夫迹得到，显然并非 trivial 的事。Yokonuma–Hecke 代数还为纽结与链环相关研究开辟了若干新视角，本章结论部分将对此作简要介绍。

代数方法。在本章中，我们将阐述上述故事所概括的代数方法。简而言之，我们希望在 Yokonuma–Hecke 代数上构造马尔可夫迹 $Y_{d,\ n}$ 并以某种方式将其与 Hecke 代数上的通常马尔可夫迹联系起来。

整个思路如下。首先，应当弄清 $Y_{d,\ n}$ 与通常 Hecke 代数之间精确的代数联系。结果表明，可以证明 $Y_{d,\ n}$与由 Hecke 代数的张量积构成的矩阵代数直和之间存在一个显式同构定理。尽管这看起来颇为复杂，这一纯代数结果却是后续发展的关键。

利用同构定理，我们得到了 $\{Y_{d,n}\}_{n\geq 1}$ 上马尔可夫迹的分类，从而可以构造一族链环不变量。此外，马尔可夫迹还被明确表示为 Hecke 代数上通常的马尔可夫迹的形式。值得注意的是，这一分类使我们能够确信没有遗漏任何不变量；事实上，Juyumaya–Lambropoulou 不变量可以从所得的不变量集合中辨认出来。

充分运用同构所带来的代数工具后，我们对这族不变量进行了整理，并确定了一组基本不变量，其他所有不变量都可以由它们通过线性组合得到。最后，我们得到了用 HOMFLYPT 多项式和链接数表示这些基本不变量的主要公式，为本章内容画上了句号。

参考文献。本章节的相关出版物（可从中查阅更多详情）如下：[12, 13, 15, 17,18, 20]。

IV.1 Yokonuma–Hecke 代数的同构定理

IV.1.1 Yokonuma–Hecke 代数

定义。我们将环 $\mathbb{C}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ 上的 Yokonuma–Hecke 代数定义为由生成元构成的代数 $Y_{d,\ n}$:

$$g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, t_1, \ldots, t_n,$$

以及满足以下关系:

$$\begin{array}{rcll} g_i g_j & = & g_j g_i & \text{for all } i,j = 1,\ldots,n-1 \text{ such that } |i-j|>1, \\ g_i g_{i+1} g_i & = & g_{i+1} g_i g_{i+1} & \text{for all } i = 1,\ldots,n-2, \\ t_i t_j & = & t_j t_i & \text{for all } i,j = 1,\ldots,n, \\ g_i t_j & = & t_{s_i(j)} g_i & \text{for all } i = 1,\ldots,n-1 \text{ and } j = 1,\ldots,n, \\ t_j^d & = & 1 & \text{for all } j = 1,\ldots,n, \\ g_i^2 & = & u^2 + u(q-q^{-1}) e_i g_i & \text{for all } i = 1,\ldots,n-1, \end{array} \tag{IV.1}$$

其中，对所有的 $i = 1, \ldots, n-1$，s_i 表示对换 $(i, i+1)$，并且

$$e_i := \frac{1}{d} \sum_{0 \leq s \leq d-1} t_i^s t_{i+1}^{-s} \ .$$

元素 e_i 是幂等元，且 $g_i e_i = e_i g_i$。生成元 g_i 是可逆的，$g_i^{-1} = u^{-2} g_i - u^{-1}(q - q^{-1}) e_i$，因此由 g_i 生成的子代数是辫群代数的一个商。

若将 u 和 q 特化为 1，我们便得到群的定义关系。这个复反射群记作 $G(d, 1, n)$。该群是自然的半直积 $\left(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\right)^n \rtimes S_n$。因此，代数 $Y_{d,\ n}$ 是群 $G(d, 1, n)$ 的群代数的一个变形，并且这种变形在以下意义下是平坦的。

令 $g_w = g_{i_1} \dots g_{i_r}$，其中 $w \in S_n$，且 $s_{i_1} \dots s_{i_r}$ 是 w 的一个约化表达式，则 $Y_{d,\ n}$ 的一组基为

$$\{t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n} \widetilde{g}_w \mid w \in S_n,\ k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\}\ .$$

$Y_{d,\ n}$ 的秩因此等于 $d^n n!$，这正是 $G(d, 1, n)$ 的阶。

对于 $d = 1$，有 $t_i = e_i = 1$，而 $Y_{1,\ n}$ 就是通常赫克代数。

表示。在一般情形下（u 和 q 是不定元），$Y_{d,\ n}$ 的不可约表示由总大小为 n 的 d 元分拆组参数化。它们可以通过半正规形显式构造，类似于第一章附录中的构造。参见 [20]。$Y_{d,\ n}$ 的表示论也可以通过下文给出的同构定理来理解。

仿射 Yokonuma–Hecke 代数。我们向 $Y_{d,n}$ 添加生成元 $X_1, .., X_n$，并要求它们可逆，同时满足以下额外的定义关系：

$$\begin{array}{rcll} X_i X_j & = & X_j X_i & \text{for all } i, j = 1, \dots, n, \\ X_i t_j & = & t_j X_i & \text{for all } i, j = 1, \dots, n, \\ g_i X_i g_i & = & X_{i+1} & \text{for all } i = 1, \dots, n-1, \\ g_i X_j & = & X_j g_i & \text{if } j \neq i, i+1. \end{array} \tag{IV.2}$$

对于 $d = 1$，这就是众所周知的 GL 型仿射 Hecke 代数。仿射 Yokonuma–Hecke 代数最初是从 $Y_{d,n}$ [20] 的表示论角度引入的，随后在 [18] 中得到了更为深入的研究，并被用于构造实心环面中链环的不变量。下文的同构定理及其关于链环不变量的推论可推广至仿射 Yokonuma–Hecke 代数 [14]。

从有限群或 p-进群的诱导表示的中心化子角度来看，在考察下表时自然会产生一个问题：

$\mathrm{Ind}_H^G \mathbf{1}_H$	中心化子代数
$G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ 和 H =Borel 子群	Hecke 代数
$G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$和 H =Iwahori子群	仿射Hecke代数
$G = GL_n(\mathbb{F}_q)$和 H =幺幂子群	Yokonuma–Hecke代数
???	仿射Yokonuma–Hecke代数

当然，答案应当是：仿射Yokonuma–Hecke代数对应于 $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$，而 H是幺幂子群的类比。这样的子群称为pro-p-Iwahori子群，而由此得到的中心化子代数（称为pro-p-Iwahori–Hecke代数）确实与仿射 Yokonuma–Hecke代数 [CS]一致。

IV.1.2 同构定理

在本章节中，Hecke 代数生成元的二次方程取为 $\sigma_i^2 = u^2 + u(q - q^{-1})\sigma_i$。对于下文的陈述，约定 $H_0 = H_1 = \mathbb{C}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$。

一个由 n 个 d 部分组成的合成 μ，是一个由非负整数构成的 d 元组 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$，其和为 n。记作 $\mu \models_d n$。注意，有些部分可以为 0。

定理 IV.1 ([17])。在 $\mathbb{C}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ 上，我们有一个显式代数同构：

$$Y_{d,n} \cong \bigoplus_{\mu \models_d n} \mathrm{Mat}_{m_\mu}(H_{\mu_1} \otimes \dots \otimes H_{\mu_d})\ , \qquad where\ m_\mu = \frac{n!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_d!}\ .$$

事实上，这一结果是关于幺幂赫克代数 [Lus3], 的一项结果的特例。不过，上述陈述的一个重要特点是，我们对该同构有显式描述。这对接下来的内容至关重要，我们将用它来回答一些非常具体的问题。请注意维数之间优美的等式：

$$d^n.n! = \sum_{\mu \models_d n} \big(\frac{n!}{\mu_1!\mu_2!\dots\mu_d!}\big)^2 \mu_1!\mu_2!\dots\mu_d! = n! \sum_{\mu \models_d n} \frac{n!}{\mu_1!\mu_2!\dots\mu_d!} \ .$$

IV.2 Yokonuma–Hecke 代数上马尔可夫迹的分类

本节中，我们给出 $Y_{d,n}$ 上马尔可夫迹的完整分类，该分类是利用前一个定理中的显式同构得到的。与 Hecke 代数的情形一样，从现在起，我们将基环扩张为 $\mathbb{C}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}, (q-q^{-1})^{-1}]$。我们用 $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ 表示 Hecke 代数族上由 $\tau_1(1) = 1$ 归一化的唯一马尔可夫迹（参见第一章）。

以下定理背后的大致思路如下。我们处理定理 IV.1 中得到的矩阵代数的直和。对于其中每个矩阵代数，都有一种自然的迹可供考虑：先取矩阵的通常迹；随后我们处于张量积 $H_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes H_{\mu_d}$ 中，并对每个因子应用 Hecke 代数上的马尔可夫迹：$\tau_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \tau_{\mu_d}$。

上述过程显然在 $Y_{d,n}$ 上给出了一个迹函数，但它并未给出马尔可夫迹。然而，通过对其中一些迹函数求和，可以得到 $Y_{d,n}$ 上的马尔可夫迹。

首先，对于一个合成 $\mu \models_d n$，我们将其支集 supp(μ) 定义为 $\{1,\dots,d\}$ 的子集，其中各部分 μ_i 均非零。形式化地，我们设：

$$\mathrm{supp}(\mu) = \{i \in \{1,\dots,d\} \text{ such that } \mu_i \neq 0\} \ .$$

定理 IV.2。设 S 是 $\{1,\dots,d\}$ 的一个非空子集。映射族 $\{\rho_n^S\}_{n\geq 1}$ 在 $\{Y_{d,n}\}_{n\geq 1}$ 上构成一个马尔可夫迹，其中

$$\rho_n^S = \sum_{\substack{\mu \models_d n \\ supp(\mu)=S}} (\tau_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \tau_{\mu_d}) \circ \mathrm{Tr}_{\mathrm{Mat}_{m_\mu}} \ . \tag{IV.3}$$

此外，随着 S 变化，马尔可夫迹 $\{\rho_n^S\}_{n\geq 1}$ 构成 $\{Y_{d,n}\}_{n\geq 1}$ 上的马尔可夫迹空间的一组基。

在上面的公式中，我们默认，对于每个由 $\mu \models_d n$ 索引的求和项，所作用的都是相应的代数 Mat$^{m_\mu}$($H_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes H_{\mu_d}$)。

例 IV.3。这里我们用图示展示 $d = 2$ 的三个马尔可夫迹的支集。下面的每一对都表示与相应合成相关的矩阵代数。

$$\begin{array}{lccccccc}
(n=1) & & & \underline{(1,0)} & & (\mathbf{0},\mathbf{1}) & & \\
(n=2) & & \underline{(2,0)} & & (1,1) & & (\mathbf{0},\mathbf{2}) & \\
(n=3) & \underline{(3,0)} & & (2,1) & & (1,2) & & (\mathbf{0},\mathbf{3}) \\
\vdots & & & & \vdots & & \ddots & & \ddots
\end{array}$$

第一个马尔可夫迹定义在带下划线的直和项上。另一个定义在加粗的直和项上。这两个就是嵌入 $\{Y_{d,n}\}_{n\geq 1}$ 中的两条 Hecke 代数链上的通常马尔可夫迹。它们已由通常赫克代数（即 $d = 1$ 的情形）所知。第三个马尔可夫迹（定义在剩余的直和项上）是 $d = 2$ 中出现的唯一新马尔可夫迹。我们将在下文看到，对于每个 d，实际上都只会出现一个新的马尔可夫迹。

IV.3 来自 Yokonuma–Hecke 代数的链环不变量

现在我们已经完整描述了 $Y_{d,\ n}$ 的马尔可夫迹，接下来将利用它们推导纽结和链环的不变量。

不变量的定义。通常，要定义不变量，我们只需将马尔可夫迹与从 B_n 到 $Y_{d,\ n}$ $(\sigma_i \mapsto g_i)$ 的自然映射结合起来。不过，这里我们将采用稍微更一般的过程。

令 γ 为另一个不定元，并再次将我们的系数环扩展为 $\mathbb{C}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}, (q-q^{-1})^{-1}, \gamma^{\pm 1}]$，以纳入这个新的不定元。我们定义如下映射，不难证明它给出了一个从 B_n 到 $Y_{d,\ n}$的态射：

$$\pi_{\gamma,n} \ : \ \sigma_i \mapsto \big(\gamma + (1-\gamma)e_i\big)g_i \ \ (i = 1, \dots, n-1)\,.$$

对于 $\gamma = 1$，这只是自然映射 $\sigma_i \mapsto g_i$。事实证明，我们可以利用更一般的映射 $\pi_{\gamma,\ n}$ 来构造不变量。

定义 IV.4 。令 $d > 0$ 和 $S \subset \{1, \dots, d\}$。对于链环 L，令 β_L 为 B_n 中的一个辫子，其闭合后得到该链环，并定义 e:

$$T_d^S(L) = \rho_n^S\big(\pi_{\gamma,n}(\beta_L)\big)\ ,$$

其中 $\{\rho_n^S\}_{n\geq 1}$ 是 $Y_{d,\ n}$上的马尔可夫迹

The理 IV.5（[17]）。 $T_d^S(L)$是链环 L 的不变量，对任意 $d > 0$ 和任意 $S \subset \{1, \dots, d$均成立 $\}$,

当然，这一结果的大部分工作都已在证明 $\{\rho_n^S\}_{n\geq 1}$ 是 $Y_{d,\ n}$ 上的马尔可夫迹时完成。唯一剩下的事情是处理我们使用了更一般的映射 $\pi_{\gamma,\ n}$ 这一事实，而这并不困难。我们强调，考虑参数 γ 很重要，因为它在文献中采用的各种约定之间进行插值，因此上述不变量涵盖了此前考虑过的所有不变量，尤其是 Juyumaya–Lambropoulou 不变量（见 [15]）。参数 γ 也使得下面不变量的最终公式更加清晰。

不变量的描述。现在我们有了一大组不变量，是时候对它们加以整理，并考察它们能否与来自 Hecke 代数的不变量，也就是 HOMFLYPT 多项式进行比较。我们拥有的关键工具是显式同构，下面的所有结果都基于这一代数定理。此外，我们实际上一直在选取 $\{Y_{d,n}\}_{n\geq 1}$ 上的马尔可夫迹空间的一组基，而我们所作的选择是合理的，因为下面给出的公式相对简洁。

首先，需要考虑的不变量数量大幅减少了。这一结论基于对不同 d 对应的各种不变量进行比较。正如例 IV.3 中已经暗示的那样，我们基本上可以得出这样的结论：每当 d 取一个新的值时，就只会产生一个新的不变量。

事实上，令 $S \subset \{1, \dots, d\}$ 表示 d' 的大小为 S： $d' = |S|$。我们能够证明如下 [15]:

$$T_d^S(L) = T_{d'}^{\{1,\dots,d'\}}(L) \qquad \text{for any link } L.$$

因此，对于每个 $d > 0$，只需考虑完整子集 $S = \{1, \dots, d\}$。

现在我们可以陈述关于这些不变量的最终结果：完全用子链环的链接数和 HOMFLYPT 多项式来描述它们。下文的 $P(L)$ 表示一个链环的 HOMFLYPT 多项式。Lickorish 也独立地利用图示技术证明了一个类似的结果，适用于参数 γ 的某些特化（参见 [CJKL，附录]）。

定理 IV.6 ([12])。设 L 是一个链环，且 $d > 0$。我们有

$$T_d(L) = d! \sum_{\{L_1,\dots,L_d\}} (u\gamma)^{\ell(L_1,\dots,L_d)} P(L_1)\dots P(L_d),$$

其中 su m 遍历了 L 的所有由 d 个互不相同的非空子链环组成的完备族 $\{L_1, \dots, L_d\}$。

链环族的总链接数 $\ell(L_1, \dots, L_d)$ 为：

$$\ell(L_1, \dots, L_d) := \sum_{1\leq i<j\leq d} \mathrm{lk}(L_i, L_j)\ ,$$

其中，$\mathrm{lk}(L_i, L_j)$ 是链环 L_i 和 L_j之间的链接数。对于链环 L，子链环是其若干个不相连分支的并；对于 L，完整的子链环族 $\{L_1, \ldots, L_d\}$ 意味着 L 是 L_1、$\ldots$、L_d的并。

注意，求和中的子族必须由 L 的非空且互不相同的子链环组成。这意味着，如果 d 严格大于 L 的连通分支数，那么不变量 $T_d(L)$ 就为 0。因此，对于具有 N 个连通分支的链环，只需考虑以下有限个不变量：

$$T_1(L), \ldots, T_N(L) \ .$$

特别地，对于纽结 K （也就是说， $N = 1$），所有来自 Yokonuma–Hecke代数的不变量都归结为 $T_1(K)$，它恰好等于 HOMFLYPT 多项式。

IV.4 结论与展望

观察定理 IV.6 中的最终公式，很快就会事后意识到，它可以作为链环 L 的多项式 $T_d(L)$ 的定义。根据这一定义，它显然是不变量。较难从上述公式看出的是，这个不变量可以由 Yokonuma–Hecke代数上的马尔可夫迹给出。事实上，利用 $Y_{d,\ n}$ 上的马尔可夫迹，可以作为计算该不变量的另一种方法。

人们可以设想，使用类似公式，以HOMFLYPT 多项式以外的其他不变量来定义其他链环不变量，然后探究哪些代数能通过马尔可夫迹生成这些不变量。正如本章节所述，这些不变量在链环子族上的分解，是同构定理中出现的Yokonuma–Hecke代数分解在拓扑上的映射。因此，对于对应于其他不变量的其他代数，人们也会期待存在类似的同构定理。关于Jones多项式 [Chl] ，这一问题已得到全面研究，其中出现的代数称为 Temperley–Lieb 代数的框架化。还可以考虑例如二元Kauffman多项式，这应当会导向BMW代数的框架化。对于任何不变量，都可以进行这种探索，例如来自量子群的Reshetikhin–Turaev不变量。

人们已经研究了其他与Yokonuma–Hecke代数相关的代数。其中包括辫子与缠结代数 [AJ] ，它已推广到任意复反射群 [Ma2, Ma3]。Yokonuma–Hecke代数的分圆版本和仿射版本产生了实心环面中链环的不变量，而本章节的整套论述也可对这些不变量重复进行 [14, 18, 20]。

事实上，要根据本论文完整呈现 Yokonuma–Hecke代数，还缺少其与量子群的中心化子之间的联系。可以预期，这种联系确实存在；粗略地说，它应当是涉及 Hecke 代数的同构定理的“Schur–Weyl对偶转译”。Yokonuma–Hecke代数作用于向量空间张量积的作用确实是可用的 [ERH]。顺便说一句，既然谈到这里，我们注意到，Yokonuma–Hecke代数中存在一个杨–巴克斯特方程的解，其形式为

$$g_i(u) = g_i + (q - q^{-1})\frac{e_i}{u - 1} \ .$$

杨–巴克斯特方程是这篇论文的主要内容之一，因此以此作结是很合适的。

发表作品列表

1. L. Poulain d’Andecy，辫群与杨–巴克斯特方程的融合，Winter Braids Lecture Notes，第 7 卷（2020年），课程编号 III，第 1–49 页。2. N. Cramp´e，L. Poulain d’Andecy，L. Vinet，su_3 的缺失标签及其对称性，《数学物理通讯》（2023年）。https://doi.org/10.1007/s00220-022-04596-3 3. N. Cramp´e，J. Gaboriaud，L. Poulain d’Andecy，L. Vinet，Racah 代数、sl_2的中心化子 Z_n及其 Hilbert–Poincar´e 级数，《亨利·庞加莱研究所年刊》23（2022年），第 7 期，2657–2682。4. N. Cramp´e，L. Frappat，J. Gaboriaud，L. Poulain d’Andecy，E. Ragoucy，L. Vinet，Askey-Wilson代数及其各种表现，J. Phys. A 54（2021年），第 6 期，论文编号 063001，共 32 页。（2020年）。5. N. Cramp´e，L. Poulain d’Andecy，L. Vinet，一个具有 E_6 对称性的卡拉比–丘代数及 sl(3) 的 Clebsch-Gordan 级数，J. Lie Theory 31（2021年），第 4 期，1085–1112。6. N. Cramp´e，L. Poulain d’Andecy，融合 Hecke 代数的巴克斯特化及具有 $gl(N)$-对称性的 R矩阵，Lett. Math. Phys. 111（2021年），第 4 期，论文编号 92，共 21 页。7. N. Cramp´e，L. Poulain d’Andecy，gl_N(U_q) 张量表示的融合辫与中心化子，Algebr. Represent. Theor.（2022年）。https://doi.org/10.1007/s10468-022-10116-7 8. L. Poulain d’Andecy，S. Rostam，B型和D型分圆 Hecke 代数的莫里田等价，《法国数学学会通报》149（2021年），第 1 期，179–233。9. N. Cramp´e，L. Poulain d’Andecy，L. Vinet，Temperley–Lieb、Brauer 和 Racah 代数以及 $\mathfrak{su}(2)$ 的其他中心化子，《美国数学会汇刊》373（2020年），第 7 期，4907–4932。10. L. Poulain d’Andecy，R. Walker，D型仿射Hecke代数及箭图Hecke代数的推广，《代数杂志》552（2020年），1–37。11. L. Poulain d’Andecy，R. Walker，B型仿射Hecke代数及箭图Hecke代数的推广，《爱丁堡数学学会会刊》（第 2 辑）63（2020年），第 2 期，531–578。12. L. Poulain d’Andecy，E. Wagner，子链环的 HOMFLYPT多项式与 Yokonuma-Hecke代数，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 148（2018年），第 6 期，1269–1278。13. N. Jacon，L. Poulain d’Andecy，Yokonuma–Hecke代数的克利福德理论与复反射群的变形，《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑）96（2017年），501–523。14. L. Poulain d’Andecy，杨表与 ADE型 Hecke 代数的表示，J. Comb. Algebra 1（2017年），371–423。15. L. Poulain d’Andecy，来自经典与仿射Yokonuma–Hecke代数的链环不变量，拓扑与计算结构的代数建模及其应用，77–95，Springer Proc. Math. Stat.，219（2017年）。16. L. Poulain d’Andecy，杨–巴克斯特方程的融合公式与融合过程，Algebr. Repre- sent. Theory 20（2017年），第 6 期，1379–1414。17. N. Jacon，L. Poulain d’Andecy，Yokonuma–Hecke代数的同构定理及其在链环不变量中的应用，Mathematische Zeitschrift 283（2016年），第 1 期，301–338。18. M. Chlouveraki，L. Poulain d’Andecy，分圆与仿射Yokonuma–Hecke代数上的马尔可夫迹，《国际数学研究通报》IMRN（2016年），第 14 期，4167–4228。19. O. Ogievetsky，L. Poulain d’Andecy，仿射与分圆 Hecke 代数链的诱导表示与迹，Journal of Geometry and Physics，87（2015年），354–372。20. M. Chlouveraki，L. Poulain d’Andecy，Yokonuma–Hecke代数的表示论，Advances in Mathematics，259（2014年），第 10 期，134–172。21. L. Poulain d’Andecy，对称群与有限群花环积的融合过程，Alge- bras and Representation Theory，17（2014年），第 3 期，809–830。

22. O. Ogievetsky, L. Poulain d’Andecy, 《分圆 Hecke 代数的融合过程》, SIGMA，10（2014年），039，13页。23. O. Ogievetsky, L. Poulain d’Andecy, 《Hecke 代数的交错子代数与辫群的交错子群》, Communications in Algebra，42（2014年），第5期，1921–1936。24. O. Ogievetsky, L. Poulain d’Andecy, 《B型 Coxeter 群和复反射群 G(m,1,n) 的融合过程》, Proceedings of the AMS，142（2014年），第9期，2929–2941。25. O. Ogievetsky, L. Poulain d’Andecy, 《复反射群 G(m,1,n) 的表示》, Theoretical and Mathematical Physics，174（2013年），第1期，95–108。26. O. Ogievetsky, L. Poulain d’Andecy, 《Coxeter 群的交错子群及其旋量扩张》, Journal of Pure and Applied Algebra，217（2013年），第11期，2198–2211。27. O. Ogievetsky, L. Poulain d’Andecy, 《分圆 Hecke 代数的表示》, Modern Physics Letters A 26（2011年），第11期，795–803。

参考文献

[APV] P. Abramenko, J. Parkinson, H. Van Maldeghem, 《交换抛物 Hecke 代数的分类》, 《代数杂志》385（2013年）, 115–133。[AJ] F. Aicardi, J. Juyumaya, 《辫与系代数上的马尔可夫迹》, 《莫斯科数学杂志》16（2016年）, 第3期, 397–431。[Ale] J.W. Alexander, 《关于打结曲线系统的一个引理》, 《美国国家科学院院刊》9(3)（1923年）93。[AP] A. Appel, T. Przezdziecki, 《量子仿射对称对和定向反转 KLR 代数的广义 Schur–Weyl 对偶》, （2022年）arXiv:2204.04123。[AV] A. Appel, B. Vlaar, 《量子 Kac–Moody 代数的万有 K 矩阵》, （2020年）arXiv:2007.09218。[Ar1] E. Artin, 《辫子理论》, 《汉堡大学数学研讨班论文集》4（1925年）, 47–72。[Ar2] E. Artin, 《辫子理论》, 《数学年刊》（第2辑）48（1947年）, 101–126。[AYP] H. Au-Yang 和 J.H.H. Perk, 《Onsager 星三角方程：通向可积性的万能钥匙》, 《纯数学高级研究》19（1989年）57–94。[Bat] M.T. Batchelor, 《可积性的重要性：从纸上走进实验室》, 《国际现代物理学杂志 B》28.18（2014年）1430010。[BF] M.T. Batchelor 和 A. Foerster, 《实验中的 Yang–Baxter 可积模型：从凝聚态物质到超冷原子》, 《物理学杂志 A：数学与理论》49.17（2016年）: 173001。[Bax] R. J. Baxter, 《统计力学中的精确可解模型》, 学术出版社（1982年）。[Bir] J. Birman, 《辫子、链环与映射类群》, 《数学年刊研究》第82号。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州; 东京大学出版社, 东京, 1974年。ix+228页。[BW] J. S. Birman 和 H. Wenzl, 《辫子、链环多项式与一种新代数》, 《美国数学会汇刊》313（1989年）, 249–273。[Boh] F. Bohnenblust, 《代数辫群》, 《数学年刊》（第2辑）48（1947年）, 127–136。[BDVO] C. Bowman, M. De Visscher, R. Orellana, 《分划代数与 Kronecker 系数》, 《美国数学会汇刊》367（2015年）, 第5期, 3647–3667。[Br] R. Brauer, 《关于与半单连续群相关的代数》, 《数学年刊》（第2辑）38（1937年）, 第4期, 857–872。[Bro] W. Brown, 《一个与正交群相关的代数》, 《密歇根数学杂志》3（1955年）, 1–22。[BDK] J. Brundan, R. Dipper, A. Kleshchev, 《量子线性群与 $GL_n(F_q)$ 的表示》, 《美国数学会回忆录》149（2001年）, 第706号, viii+112页。[BK] J. Brundan, A. Kleshchev, 《分圆 Hecke 代数与 Khovanov–Lauda 代数的分块》, 《数学创刊》178(3)（2009年）451–484。[Bum] D. Bump, 《自守形式与表示》, 剑桥高等数学研究, 第55卷。剑桥大学出版社, 剑桥, （1997年）xiv+574页。[BZ] G. Burde, H. Zieschang, 《纽结》, 第二版。《德格鲁伊特数学研究》第5卷。Walter de Gruyter & Co., 柏林, 2003年。xii+559 页。[CP1] V. Chari 和 A. Pressley, 《量子仿射代数》, 《数学物理通讯》142（1991年）261–283。[CP2] V. Chari 和 A. Pressley, 《量子群指南》, 剑桥大学出版社（1995年）。[CP3] V. Chari 和 A. Pressley, 《量子群表示的最小仿射化：单边情形》, 《代数杂志》184.1（1996年）1–30。

[Cha] E. Chavli, 《3股辫群有限商的普适变形》, 《代数杂志》459（2016）, 238–271。[Chl] M. Chlouveraki, 《从Temperley–Lieb代数的框架化到Jones多项式：一种代数方法》, 《纽结、低维拓扑与应用》, Springer PROMS 284（2019）, 247–276。[CJKL] M. Chlouveraki、J. Juyumaya、K. Karvounis、S. Lambropoulou（附录作者：W.B.R. Lickorish）, 《从Yokonuma–Hecke代数识别经典纽结与链环的不变量》, Int. Math. Res. Not. IMRN（2020）, 第1期, 214–286。[ChLa] M. Chlouveraki 和 S. Lambropoulou, 《Yokonuma–Hecke代数与HOMFLYPT多项式》, 《结理论及其分支》22, 第14期（2013）, 1350080。[CS] M. Chlouveraki、V. S´echerre, 《仿射Yokonuma–Hecke代数与pro-p-Iwahori–Hecke代数》, 《数学研究快报》23（2016）, 第3期, 707–718。[CL] J. Cooke、A. Lacabanne, 《作为辫图代数的高秩Askey–Wilson代数》, arXiv:2205.04414。[CDO+] F. Correa、M. A. del Olmo、I. Marquette、J. Negro, 《来自 su(3)的多项式代数及二维球面上的一个二次超可积模型》, J. Phys. A 54（2021）, 第1期[CDVM1] A. Cox、M. De Visscher、P. Martin, 《特征零下Brauer代数的块》, 《表示论》13（2009）, 272–308。[CDVM2] A. Cox、M. De Visscher、P. Martin, 《Brauer代数块的几何刻画》, 《伦敦数学会杂志》（2）80（2009）, 第2期, 471–494。[CVZ] N. Cramp´e、L. Vinet、M. Zaimi, 《Temperley–Lieb代数、Birman–Murakami–Wenzl代数、Askey–Wilson代数及其他 $U_q(sl_2)$的中心化子》, Ann. Henri Poincar´e 22（2021）, 第10期, 3499–3528。[Cur] C. W. Curtis, 《关于Hecke代数的Lusztig同构定理》, 《代数杂志》92（1985）, 第2期, 348–365。[Cur2] C. W. Curtis, 《表示论先驱：Frobenius、Burnside、Schur与Brauer》, 数学史第15卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；伦敦数学会, 伦敦（1999）。[DBDC+] H. De Bie、H. De Clercq、W. van de Vijver, 《高秩q变形Bannai–Ito代数与Askey–Wilson代数》, 《数学物理通讯》374（2020）, 第1期, 277–316。[DBG+] H. De Bie、V. Genest、W. van de Vijver、L. Vinet, 《高秩Racah代数与Laplace–Dunkl算子》, J. Phys. A 51（2018）, 第2期, 025203, 20页。 $\mathbb{Z}_2^n$ DBI[H. De Bie、P. Iliev、W. van de Vijver、L. Vinet, 《Racah代数：综述与近期成果》, 《李群、数论与顶点代数》, 3–20, 《当代数学》768, 美国数学会, +] 罗得岛州普罗维登斯[RI（2021）。], DBVV[H. De Bie、W. van de Vijver, 《高秩Racah代数的离散实现》, 《构造逼近》52（2020）, 第1期, 1–29。] DG[S. Doty、A. Giaquinto, 《Schur代数的呈示》, 《国际数学研究通报》2002年第36期, 1907–1944。] Dre[V. Drensky, 《矩阵不变量的计算》, 《巴尔干数学》21, 141(172)（2007）。] Dri[V.G. Drinfeld, 《Hopf代数与Yang–Baxter量子方程》, 《苏联科学院通报》283卷, 第5期（1985）。1] Dri[V.G. Drinfeld, 《量子群》, 载于《国际数学家大会论文集》（A.M. Gleason 编）, 美国数学会（1986）, 798–820。2] EMTW[B. Elias、S. Makisumi、U. Thiel、G. Williamson, 《Soergel双模导论》, RSME Springer丛书, 第5卷。Springer, 尚（2020）, 588页。] EK[N. Enomoto、M. Kashiwara, 《对称晶体与B型仿射Hecke代数》, 《日本学士院纪要》82, A辑, 第8期（2006）, 131–136。] ERH[J. Espinoza、S. Ryom-Hansen, 《Yokonuma–Hecke代数与辫与系代数的胞腔结构》, 《纯粹与应用代数杂志》222（2018）, 第11期, 3675–3720。] EFK[P. Etingof、I. Frenkel、A.A. Kirillov, 《表示论与Knizhnik–Zamolodchikov方程讲义》, 第58号, 美国数学会（1998）。] EG[P. Etingof、V. Ginzburg, 《非交换del Pezzo曲面与Calabi–Yau代数》, 《欧洲数学会杂志》12（2010）, 1371–1416。] ELOR[P. Etingof、S. Loktev、A. Oblomkov、L. Rybnikov, 《球形辛反射代数的李论构造》, 《变换群》13（2008）, 541–556。

[Fad] L.D. Faddeev, 《可积模型的代数 Bethe Ansatz 如何发挥作用》, arXiv:hep-th/9605187[FST] L.D. Faddeev、E.K. Sklyanin、L.A. Takhtadzhyan, 《量子逆问题方法 I》, 《理论与数学物理》40（1979）, 86。[For] E. Formanek, 《$n \times n$ 矩阵的不变量》, 《不变量理论》, 18–43, 《数学讲义》1278, Springer, 柏林, 1987。[FR] I. Frenkel、N. Reshetikhin, 《量子仿射代数与全纯差分方程》, 《数学物理通讯》146（1992）, 1–60。[FYH+] P. Freyd、D. Yetter、J. Hoste、W.B.R. Lickorish、K. Millett、A. Ocneanu, 《纽结与链环的一个新多项式不变量》, 《美国数学会通报》（新辑）12（1985）, 第2期, 239–246。[Ful] W. Fulton, 《杨表：及其在表示论与几何中的应用》, 伦敦数学会学生教材第35卷。剑桥大学出版社, 剑桥, 1997。x+260页。[FH] W. Fulton、J. Harris, 《表示论：入门课程》, Springer（1991）。[GWH] S. Gao、Y. Wang、B. Hou, 《Racah型Leonard三元组的分类》, 《线性代数及其应用》439（2013）, 第7期, 1834–1861。[GJ] M. Geck、N. Jacon, 《单位根处Hecke代数的表示》, 《代数与应用》第15卷。施普林格伦敦有限公司, 伦敦（2011）, xii+401页。[GM] M. Geck、G. Malle, 《有限型李群的特征标理论：导览》, 剑桥高等数学研究第187卷。剑桥大学出版社, 剑桥（2020）。[GP] M. Geck、G. Pfeiffer, 《有限Coxeter群与Iwahori-Hecke代数的特征标》, 伦敦数学会专著第21卷, 牛津大学出版社, 2000。[GVZ] V. Genest、L. Vinet、A. Zhedanov, 《Racah代数与超可积模型》, 《物理学杂志：会议系列》512, 012011（2014）。[Gin] V. Ginzburg, 《Calabi–Yau代数》, arXiv:math/0612139。[GRS] C. Gomez、M. Ruiz-Altaba、G. Sierra, 《二维物理中的量子群》, 剑桥大学出版社（1996）。[GW] R. Goodman、R. Wallach, 《对称性、表示与不变量》, Springer（2009）。[GZ] Ya. A. Granovskii、A.S. Zhedanov, 《$6j$-符号的对称群的性质》, JETP 67：1982–1985（1988）。[Gre] J. A. Green, 《GL_n的多项式表示》, 《数学讲义》第830卷, Springer, 1980。[HR] T. Halverson、A. Ram, 《分划代数》, 《欧洲组合学杂志》26（2005）, 第6期, 869–921。[HW] P. Hanlon、D. Wales, 《Brauer中心化子代数的分解》, 《代数杂志》121（1989）, 第2期, 40–445。[Haw1] T. Hawkins, 《李群理论的兴起：一篇数学史论文, 1869–1926》, 《数学与物理科学史资料与研究》。施普林格出版社, 纽约（2000）。[Haw2] T. Hawkins, 《语境中的Frobenius数学：一次穿越18至20世纪数学的旅程》, 《数学与物理科学史资料与研究》。Springer, 纽约（2013）。.[Hec] E. Hecke, 《关于模函数与具有欧拉乘积展开的狄利克雷级数 I》, 《数学年刊》114（1937）, 第1期, 1–28。[Her] D. Hernandez, 《R矩阵及其应用的进展（继 Maulik-Okounkov、Kang-Kashiwara-Kim-Oh等之后）》, （2017）arXiv:1704.06039。[HoRo] M. Hochster、J. Roberts, 《约化群作用于正则环所得的不变量环是Cohen–Macaulay环》, 《数学进展》13（1974）, 115–175。[Hoe] P. Hoefsmit, 《具有BN对的有限经典型群的Hecke代数表示》, 博士论文, 不列颠哥伦比亚大学（1974）。[HL] R. B. Howlett、G. I. Lehrer, 《诱导尖点表示与广义 Hecke 环》, 《数学创刊》58（1980）, 第1期, 37–64。[Hum] J. E. Humphreys, 《反射群与Coxeter群》, 剑桥高等数学研究第29卷。剑桥大学出版社, 剑桥（1990）, xii+204 页。

[IMO] A.P. Isaev, A.I. Molev, O.V. Ogievetsky, 《Brauer代数的一种新融合过程及求值同态》, 《国际数学研究通报》IMRN 2012年, 第11期, 2571–2606页。[IO1] A. Isaev 和 O. Ogievetsky, 《关于 Hecke 代数的表示》, 《捷克物理学杂志》55, 第11期（2005年）1433–1441页。[IO2] A. Isaev, O. Ogievetsky, 《反射方程的 Baxter化解及可积链模型》, 《核物理 B》 760[PM] （2007年）167–183页。[Iwah] N. Iwahori, 《有限域上 Chevalley 群的 Hecke 环的结构》, 东京大学理学部学报第一辑 10（1964年）, 215–236页。[IM] N. Iwahori, H. Matsumoto, 《关于某些 Bruhat分解及 p进Chevalley群的 Hecke 环结构》, 高等科学研究所数学出版物第25号（1965年）, 5–48页。[Iwa] H. Iwaniec, 《经典自守形式专题》, 《数学研究生课程》17。美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯（1997年）。xii+259 页。[JS] J. C. Jantzen, G. M. Seitz, 《关于对称群的表示论》, 《伦敦数学会会刊》（3）65（1992年）, 第3期, 475–504页。[Jim1] M. Jimbo, 《（g）的 A q-差分类比及杨–巴克斯特方程》, Lett. Math. Phys. 10（1985年）63–69页。[Jim2] M. Jimbo, 《（$\mathfrak{gl}$（$N+1$））的 q 类比、Hecke 代数及杨–巴克斯特方程》, Lett. Math. Phys. 11（1986年）, 247–252页。[Jim3] M. Jimbo, 《杨–巴克斯特方程导论》, 载于《辫群、纽结理论与统计力学》9（1991年）, 111页。[Jim4] M. Jimbo（编）, 《可积系统中的Yang–Baxter方程》, 第10卷。世界科学出版社（1990年）。[JM] M. Jimbo, T. Miwa, 《可解格点模型的代数分析》, 美国数学会第85卷（1994年）。[Jo1] V.F.R. Jones, 《辫群的 Hecke 代数表示与链环多项式》, 《数学年刊》126（1987年）, 第2期, 335–388页。[Jo2] V.F.R. Jones, 《考夫曼多项式的某个值》, 《数学物理通讯》125（1989年）459页。[Jo3] V.F.R. Jones, 《Baxter化》, Int. J. Mod. Phys.B 4（1990年）701页。[Jo4] V.F.R. Jones, 《波茨模型与对称群》, 《子因子》（九重, 1993年）, 259–267页, 世界科学出版社, 新泽西州里弗埃奇, 1994年。[Juy1] J. Juyumaya, 《关于 Hecke 代数 H(G,U,1) 的新生成元》, 《代数杂志》204（1998年）49–68页。[Juy2] J. Juyumaya, 《Yokonuma–Hecke代数上的马尔可夫迹》, 《结理论及其分支》13（2004年）25–39页。[JL3] J. Juyumaya, S. Lambropoulou, 《Jones多项式的阿代尔扩张》, M. Banagl, D. Vogel（编）, 《结的数学》, 《数学与计算科学论丛》第1卷（2011年）, Springer。[KMP] G. Kalnins, W. Miller Jr., and S. Post, 《二维二阶量子超可积系统的收缩及超几何正交多项式的 Askey 方案》, 《SIGMA：对称性、可积性与几何方法及其应用》9（2013年）, 论文057, 28页。[Kam] S. Kamada, 《四维的辫与纽结理论》, 《数学调查与专著》95。美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯（2002年）。[KK] S.-J. Kang, M. Kashiwara, 《通过 Khovanov–Lauda–Rouquier 代数对最高权模进行范畴化》, 《数学创刊》190（2012年）699–742页。[KKK] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, 《对称箭图Hecke代数与量子仿射代数的 R矩阵》, 《数学创刊》211（2018年）, 第2期, 591–685页。[KM] M. Kashiwara, V. Miemietz, 《D型晶体与仿射Hecke代数》, 《日本学士院纪要》83 A辑 数学科学 第7期（2007年）135–139页。[Kas] C. Kassel, 《量子群》, Springer（1995年）。[KRT] C. Kassel, M. Rosso, V. Turaev, 《量子群与结不变量》, 《全景与综合》5。法国数学会, 巴黎（1997年）。[KT] C. Kassel, V. Turaev, 《辫群》, 《数学研究生教材》第247卷, Springer, 2008年。

[Kau] L.H. Kauffman, 《正则同位的不变量》, 《美国数学会汇刊》318（1990年）, 第2期, 417–471页。[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, 《Coxeter 群与 Hecke代数的表示》, 《数学创刊》53（1979年）, 第2期, 165–184页。[KhLa1] M. Khovanov, A. D. Lauda, 《量子群范畴化的图示方法 I》, 《表示论》13（2009年）309–347页。[KhLa2] M. Khovanov, A. D. Lauda, 《量子群范畴化的图示方法 II》, 《美国数学会汇刊》363（2011年）2685–2700页。[Kir] A.A. Kirillov, 《有理函数域上的某些除代数》, Funct Anal Its Appl 1（1967年）87–88页。[KS] A. Klimyk, K. Schm¨udgen, 《量子群及其表示》, Springer, 2012年。[Knu] D. Knuth, 《置换、矩阵与广义杨表》, 《太平洋数学杂志》34(3)（1970年）709–727页。[KLS] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, 《超几何正交多项式及其 q-类比》, Tom H. Koornwinder 作序。Springer 数学专著。施普林格出版社, 柏林（2010年）。[KBI] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, 《量子逆散射方法与关联函数》, 剑桥大学出版社（1993年）。[KR] P.P. Kulish, N.Y. Reshetikhin, 《正弦-戈登方程的量子线性问题与高阶表示》, J. Soviet Math. 23(4)（1983年）2435–2441页。[Lam] S. Lambropoulou, 《实心环面链环与 B 型 Hecke 代数》, 载于量子拓扑会议论文集（堪萨斯州曼哈顿, 1993年）, 225–245页, 世界科学出版社, 新泽西州里弗埃奇（1994年）。[LMZ] D. Latini, I. Marquette, Y.-Z. Zhang, 《Racah代数（n）的嵌入与超可积性》, 《物理年刊》426（2021年）, 论文编号168397, 18页。[LR] R. Leduc, A. Ram, 《以带状 Hopf 代数方法研究中心化子代数的不可约表示：Brauer、Birman–Wenzl 及 A 型 Iwahori–Hecke 代数》, 《数学进展》125（1997年）, 第1期, 1–94页。[Leh] G. Lehrer, 《Hecke 代数与 Artin 辫群综述》, 《辫子》（加利福尼亚州圣克鲁斯, 1986年）, 365–385页, 《当代数学》78, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯（1988年）。[LZ1] G. Lehrer, R. Zhang, 《李代数与量子群的强重数自由模》, 《代数杂志》306(1)（2006年）138–174页。[LZ2] G. Lehrer, R. Zhang, 《BMW代数的 Temperley–Lieb 类比》, 载于《代数群与量子群的表示论》。波士顿 Birkhäuser（2010年）155–190页。[Lus1] G. Lusztig, 《有限域上约化群的特征标》, 《数学年刊研究》107。普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿（1984年）xxi+384页。[Lus2] G. Lusztig, 《带不等参数的 Hecke 代数》, CRM 专著丛书18。美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯（2003年）vi+136 页。[Lus3] G. Lusztig, 《非连通群上的特征层。VII》, 《表示论》9（2005年）, 209–266页。[Mac1] G.W. Mackey, 《交换与非交换调和分析的范围与历史》, 《数学史》5。美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯; 伦敦数学会, 伦敦（1992年）。[Ma1] I. Marin, 《至多五股的三次 Hecke 代数》, J. Pure Applied Algebra 216（2012年）, 2754–2782页。[Ma2] I. Marin, 《Artin 群与 Yokonuma–Hecke代数》, 《国际数学研究通报》IMRN 2018年, 第13期, 4022–4062页。[Ma3] I. Marin, 《Hecke 代数的格扩张》, 《代数杂志》503（2018年）, 104–120页。[Ma4] I. Marin, 《辫代数的一个极大三次商 I》, 《代数杂志》（2020年）。.[Mark] A.A. Markov, 《关于闭辫的自由等价性》, Rec. Soc. Math. Moscou 1（1935年）: 73–78页。[Mar1] P. Martin, 《波茨模型及统计力学中的相关问题》, 《统计力学进展丛书》5。世界科学出版有限公司, 新泽西州蒂内克, 1991年。[Mar2] P. Martin, 《非平面统计力学的 Temperley–Lieb 代数——分划代数构造》, 《结理论及其分支》3（1994年）, 51–82页。

[Mar3] P. Martin, 《分拆代数的结构》, 《代数杂志》183（1996年）, 319–358。[Mar4] P. Martin, 《高维情形下分拆代数与波茨模型转移矩阵谱》, J. Phys. A: Math. Gen. 33（2000）, 3669–3695。[Mar5] P. Martin, 《复数域上 Brauer 代数的分解矩阵》, 《美国数学会汇刊》367（2015）, 第3期, 179–1825。[MMcA] P.P. Martin、D.S. McAnally, 《统计力学中的交换子、对偶对与非半单代数》, 《无限分析》, A、B辑（京都, 1991）, 675–705, Adv. Ser. Math. Phys., 16, 世界科学出版社, 新泽西州里弗埃奇, （1992）。[MR] P. Martin、G. Rollet, 《波茨模型表示与分拆代数的罗宾逊–申斯特德对应》, 《组合数学》112（1998）, 第2期, 237–254。[McG] J.B. McGuire, 《一维恰可解 N体问题研究》, 《数学物理学杂志》5（1964年）622–636。[MRR] A. Morin-Duchesne、J. Rasmussen 和 D. Ridout, 《对数极小模型的边界代数与卡茨模》, 《核物理 B》899, 677（2015）[Mor] H. Morton, 《Birman–Wenzl 代数的一组基》, math.QA/1012.3116, （2010）。[MT] H. Morton、P. Traczyk, 《纽结与代数》, 萨拉戈萨 201（1990）: 220。[Mu1] J. Murakami, 《链环的考夫曼多项式与表示论》, 《大阪数学杂志》24（1987）745–758。[Mu2] J. Murakami, 《可解格点模型与面算子代数》, Adv. Studies in Pure Math. 19（1989）399–415[Na1] M. Nazarov, 《Brauer 中心化子代数的杨正交形式》, 《代数杂志》182（1996）, 第3期, 664–693。[OEIS] OEIS 基金会, 《在线整数数列百科全书》, http://oeis.org（2021年）[Ogg] A. Ogg, 《模形式与狄利克雷级数》, W. A. Benjamin, Inc., 纽约-阿姆斯特丹（1969）xvi+173 页。[OV] A. Okounkov 和 A. Vershik, 《对称群表示论的新方法 II》, 《数学精选》（新系列）2, 第4期（1996）581–605。[Ons] L. Onsager, 《晶体统计学 I：具有有序-无序转变的二维模型》, Phys. Rev. 65（1944）117–149[PAY] J. H.H. Perk 和 H. Au-Yang, 《杨–巴克斯特方程》, 载于《数学物理百科全书》, J.-P. Fran¸coise、G.L. Naber 和 Tsou S.T. 编, 2006年, 第5卷, 第465–473页。[PST] Z. Pluha˘r、Yu. F. Smirnov 和 V. N. Tolstoy, 《具有简单对称性质的 SU(3) 克莱布施–戈丹系数》, J. Phys. A 19（1986）21。[Pro] C. Procesi, 《矩阵的不变量理论》, 《数学进展》19（1976）306–381。 $n \times n$ PT[J.H. Przytycki、P. Traczyk, 《康威型链环不变量》, 《神户数学杂志》4（1988）, 第2期, 115–139。] Rac[G. Racah, 《复谱理论 II》, 《物理评论》62（9-10）: 438–46（1942）。] Ram[A. Ram, 《Brauer 中心化子代数的特征标》, 《太平洋数学杂志》169（1995）, 第1期, 173–200。] Ram[A. Ram, 《斜形表示不可约》, 《组合与几何表示论》（首尔, 2001）, 《当代数学》325（美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2003）161–189。2] Raz[Yu.P. Razmyslov, 《特征零域上全矩阵代数的迹恒等式》（俄文）, 《苏联科学院通报》, 数学系列38（1974）723–756。译文: 《苏联数学通报》8（1974）727–760。] Res[N. Yu. Reshetikhin, 《量子化泛包络代数、杨–巴克斯特方程与链环不变量》, I、II, LOMI 预印本 E-4-87 和 E-17-87, 列宁格勒（1987）。] Rou[R. Rouquier, 《2-卡茨–穆迪代数》（2008）arXiv:0812.5023。] Rut[D. Rutherford, 《替代分析》。爱丁堡大学出版物, 科学与数学第1号。爱丁堡大学出版社, 爱丁堡（1948）。] ..Sch[I. Schur, 《一类可与给定矩阵对应的矩阵》, 载于《论文集》第I卷。施普林格出版社, 柏林-纽约, 1973。xv] 页。+491 SVV[P. Shan、M. Varagnolo、E. Vasserot, 《B型典范基与仿射Hecke代数》, 《数学进展》227, 第1期（2011）267–291。

[Shi] G. Shimura, 《自守函数算术理论导论》, 1971年原版重印本。日本数学会出版物, 11。Kanˆo 纪念讲座, 1。普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, (1994) xiv+271页。[Sib] K. S. Sibirskii, 《矩阵系统的代数不变量》, Sibirsk. Mat. Z. 9 (1968年) 152–164。[Skl] E.K. Sklyanin, 《与杨–巴克斯特方程相关的一些代数结构》, , Funct. Anal. Appl, 16(4) (1982) 263-270。[Sol1] M. Solleveld, 《约化p进群的自同态代数与 Hecke 代数》, arXiv:2005.07899 (2020年)。[Sol2] M. Solleveld, 《仿射Hecke代数及其表示》, Indag. Math. (新系列) 32 (2021), 第5期, 1005–1082。[Sta1] R. Stanley, 《分次代数的希尔伯特函数》, 数学进展28 (1978), 第1期, 57–83。[Sta2] R. Stanley, 《枚举组合学》第2卷, 剑桥高等数学研究丛书 (1999)。[Tera] Y. Teranishi, 《矩阵的不变量环》, Nagoya Math. J. 104 (1986), 149–161。[Ter] P. Terwilliger, 《两个线性变换, 各自相对于另一个变换的特征基均为三对角形式》, 线性代数及其应用330 (2001), 第1–3期, 149–203。[Tur] T.G. Turaev, 《杨–巴克斯特方程与链环不变量》, 《数学创刊》92 (1988) 527–553。[VV] M. Varagnolo、E. Vasserot, 《B型典范基与仿射Hecke代数》, 《数学创刊》183(3) (2011) 593–693。[Wen] H. Wenzl, 《Brauer 中心化子代数的结构》, 《数学年刊》 (第2辑) 128 (1988), 第1期, 173–193。[Wey1] H. Weyl, 《广义黎曼矩阵与因子集》, 《数学年刊》 (第2辑) 37 (1936), 第3期, 709–745。[Wey2] H. Weyl, 《经典群: 其不变量与表示》, 普林斯顿大学出版社 (1946年)。[Wey3] H. Weyl, 《群论与量子力学》, Courier Corporation (1950年)。[Yan1] C. N. Yang, 《一维排斥 δ-函数相互作用多体问题的一些精确结果》, Phys. Rev. Lett. 19 (1967年) 1312。[Yan2] C. N. Yang, 《具有排斥或吸引 S-函数相互作用的一维 n体问题的 δ-矩阵》, Phys. Rev. 168 (1968年) 1920。[Yok] T. Yokonuma, 《有限 Chevalley 群的 Hecke 环的结构》, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 264 (1967年) 344–347。[You] A. Young, 《定量置换分析 (第六篇与第八篇)》, 《伦敦数学会会刊》34(2) (1931年) 196–230, 以及37 (1934年) 441–495。[ZZ] A. B. Zamolodchikov、A. B. Zamolodchikov, 《二维因子化S矩阵作为若干相对论量子场论模型的精确解》, 《物理年刊》120 (1979年) 253–291。[ZGB] R.B. Zhang、M.D. Gould、A.J. Bracken, 《量子群不变量与链环多项式》, 《数学物理通讯》137 (1991), 第1期, 13–27。[Zhe] A. Zhedanov, 《Askey–Wilson多项式的"隐藏对称性"》, Theoret. and Math. Phys. 89 (1991), 第2期, 1146–1157。[ZJ2] P. Zinn-Justin, 《三角E8 R矩阵》, Lett. Math. Phys. 110 (2020), 第12期, 3279–3305。