arXiv:2304.00852v1 [cs.RO] 3 Apr 2023

Bubble Explorer：利用无遮挡球体在大规模、杂乱三维环境中实现快速无人机探索

Benxu Tang*、Yunfan Ren*、Fangcheng Zhu、Rui He、Siqi Liang、Fanze Kong 和 Fu Zhang

摘要——自主探索是机器人学的重要组成部分，具有广泛的应用。现有的大多数方法都采用贪心策略，选择能够最大化即时回报的目标。这种策略计算效率较高，但不足以提升整体探索效率。近年来，研究者提出了一些先进方法，通过生成全局覆盖路径显著提高了整体探索效率。然而，全局优化会带来较高的计算开销，导致规划器更新频率低、规划运动不连贯。本文提出一种新方法，以支持在大规模、杂乱的三维环境中快速进行无人机探索。我们提出一种利用新型无遮挡球体、计算代价较低的视点生成方法。此外，我们将贪心策略与全局优化相结合，兼顾计算效率和探索效率。我们将所提方法与先进方法进行基准测试，以展示其在探索效率和计算时间方面的优势。我们还开展了多项真实环境实验，以证明该方法在大规模、杂乱环境中的出色表现。

I. 引言

自主探索是指机器人独立探索未知环境并收集信息。近年来，这项技术在矿山勘探、工业巡检以及搜救行动等应用中日益普及。机器人能够进入人类难以到达的区域，并降低人类在危险环境中面临的风险。

自主探索的任务是规划一条路径，尽可能快速地探索整个未知环境。近年来，人们提出了多种探索方法来完成这一任务。其中大多数方法采用贪心策略。[1]–[3]在环境中扩展快速扩展随机树 [4]，并选择信息增益最高的节点进行访问。 [5]，[6]选择遍历代价或无人机方向变化最小的前沿边界作为目标。基于贪心策略的方法计算效率较高，但整体探索效率不足，因为它们忽略了全局最优性，并生成往返式

向前移动。其他方法，例如 [7],采用一种

*这两位作者对本文贡献相同。B. Tang、Y. Ren、F. Zhu、R. He、F. Kong 和 F. Zhang 均来自香港大学机械工程系， {tangbenx、renyf、zhufc、herui、kongfz}@connect.hku.hk、fuzhang@hku.hk；S. Liang 来自哈尔滨工业大学机械工程与自动化学院，邮箱为 sqliang@stu.hit.edu.cn。

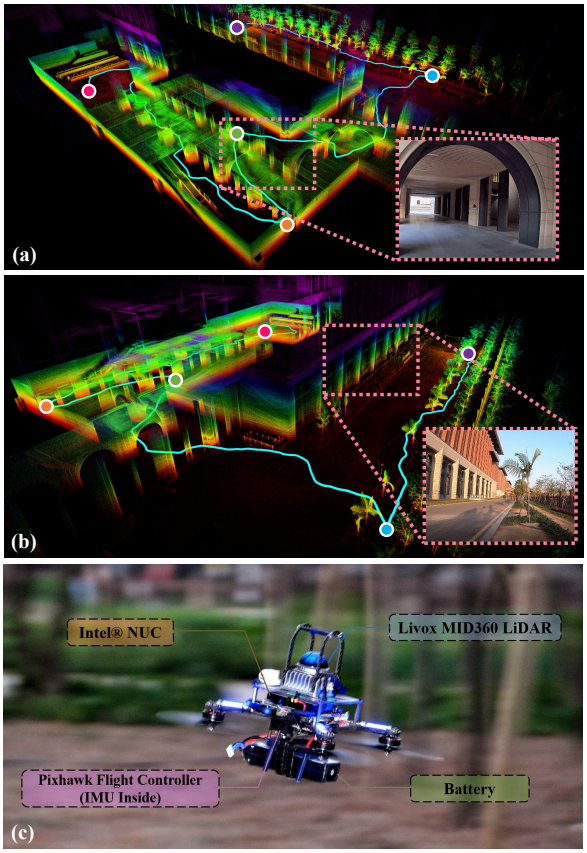

图 1. 在由室内和室外空间组成的大规模环境中执行探索任务。(a) 和 (b)：在线构建的点云地图的两个不同视图，以及无人机执行的轨迹（浅蓝色线条），图中还显示了环境图像。颜色相同的点表示相同的位置。(c)：用于探索的四旋翼平台。

全局优化策略，寻找一条全局巡回路径以访问未探索区域。这种策略提高了整体探索效率，但会导致计算时间过长，进而降低规划器更新频率，并造成规划运动不连贯。此外，现有方法通过采样生成视点，并使用计算成本高昂的射线投射过程评估视点的收益，这进一步增加了计算成本。

受这些事实启发，我们提出了一种新方法，可支持无人机在大规模、杂乱的三维环境中快速高效地进行探索。我们提出了两项关键贡献：1）一种全新的

无遮挡球体概念，可用较低的计算成本生成高质量视点。2）基于生成的视点，我们提出了一种将贪心策略与全局优化相结合的新策略，从而找到一条高效的全局巡回路径，以访问高收益视点，并在整体探索效率与计算成本之间取得平衡。最后，我们设计了一种局部规划器，可为无人机生成安全且符合运动学约束的轨迹。我们通过大量仿真和真实环境实验验证了所提方法，结果表明，在探索效率和计算时间方面，该方法均优于最先进的基线方法。

总之，本文的贡献如下：

1）我们提出了一种新颖的无遮挡自由球体概念，用于生成高质量的视点，从而显著减少计算时间并提高探索效率。2）基于生成的视点，我们提出了一种结合贪心策略与全局优化的新策略，可规划高效的全局巡回路径以访问高收益未探索区域，在整体探索效率与计算成本之间取得平衡。3）大量仿真实验表明，与最先进的基线方法相比，所提出的规划器在探索效率和计算时间方面具有优势。4）我们将所提出的规划器部署于全自主四旋翼平台。多项真实世界测试表明，该规划器在大规模、杂乱的真实环境中表现出色。

II. 相关研究

近年来，自主探索一直是一个活跃的研究领域，人们提出了多种方法来解决这一问题。基于采样的探索 [1]–[3], [8] 是经典方法之一。该方法在自由空间中扩展快速探索随机树（RRT） [4] 。它根据未知区域的覆盖范围评估 RRT 中各节点的信息增益，并结合从当前位置到达该节点所需的遍历代价进行加权。覆盖范围通过计算位于传感器视场（FoV）内且未被占据体素遮挡的未知体素数量来衡量（例如，使用射线投射）。选择增益最高的节点作为目标，并从 RRT 中导出一条可通行路径通往该节点。该方案最初由下一最佳视点规划器（NBVP） [1], 提出，随后由 GBP [2] 和 MBP [3]进一步改进。在 GBP [2],中，局部探索过程中会构建全局拓扑地图。当局部区域已被充分探索，或飞行器遇到死路时，该方法会在全局地图上寻找路径，并引导飞行器前往尚未探索的区域。MBP [3] 使用运动基元构建 RRT，并生成平滑的轨迹供飞行器执行。

另一种经典方法是基于前沿的探索 [5]–[7], [9]–[11]。在基于前沿的探索中，飞行器会飞近前沿边界（即空闲空间与未知空间之间的边界），以继续探索未知空间。该方法最初由 [5],提出，其中将最近的前沿边界选作下一个目标。为实现高速飞行，[6] 选择传感器视场内的前沿边界，并将飞行器的速度变化降至最低。 [12] 分析了基于采样的方法与基于前沿的方法各自的优缺点，并将二者结合起来：通过改进 NBVP [1]实现局部探索，同时采用基于前沿的方法进行全局探索。

上述方法均基于贪心策略，在每次规划迭代中选择能够最大化即时收益的目标进行访问。这种策略计算效率高，但整体探索效率不足，因为它会产生来回折返的规划动作。快速无人机探索规划器（FUEL） [7] 考虑了全局最优性。它首先使用区域生长算法对前沿单元进行聚类，然后执行主成分分析（PCA），沿第一主轴将较大的前沿聚类拆分为较小的聚类。随后，在柱坐标系中围绕前沿聚类采样视点，并通过射线投射评估其前沿覆盖率。选取前沿覆盖率最高的视点。之后，该方法寻找一条全局巡回路径，使全局遍历代价最小，并从当前车辆位置出发，途经所有选定视点。它将此问题建模为旅行商问题（TSP）的一种变体。为求解该问题，算法首先在体素栅格地图上使用 A* 算法，搜索每对视点之间以及每个视点与当前车辆位置之间的无碰撞路径。然后，算法根据无碰撞路径的长度评估连接代价，并构建 $n_v \times n_v$ 代价矩阵 $\mathbb{M}_{tsp}$。最后，可使用现有的 TSP算法 [13]求解该问题。与基于贪心策略的方法相比，该方法在整体探索效率方面表现更佳；但在整个环境中进行全局优化会带来较高的计算开销，尤其是在大规模环境中。

在所提出的方法中，我们通过使用无遮挡球体生成高质量视点，并结合贪心策略与全局优化策略，进一步改进了 FUEL [7] 方案。我们将该方法与最先进的基线方法进行比较：FUEL [7],GBP [2] 和 NBVP [1]

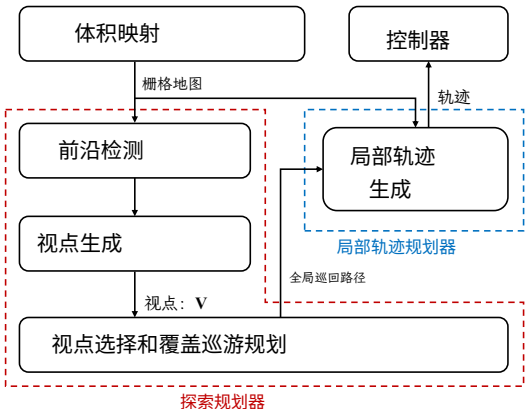

图 2. 所提出的系统框架概览

III. 提出的规划器

图 2 展示了所提出系统框架的概览，包括：**1)** 使用无遮挡球体进行前沿检测和视点生成（第 III-A 节和第 III-B 节）；**2)** 全局探索路径规划（第 III-C 节）；**3)** 局部轨迹生成（第 III-D 节）；

A. 无遮挡球体

无遮挡球体由其中心$\mathbf{p}_c \in \mathbb{R}^3$定义，该中心位于目标前沿边界上，半径为：

$$r = ||\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_o||_2 \tag{1}$$

其中$\mathbf{p}_o \in \mathbb{R}^3$ 是最近邻障碍点（NN 点）。因此，球体内部没有占据栅格。由于球体是凸的，连接球体内部（包括其表面）任意点与前沿边界的线段均不会受到遮挡，如图 3 所示。通过在球体表面采用视点采样策略，无需使用计算开销大的光线投射技术，即可获得高质量的视点。

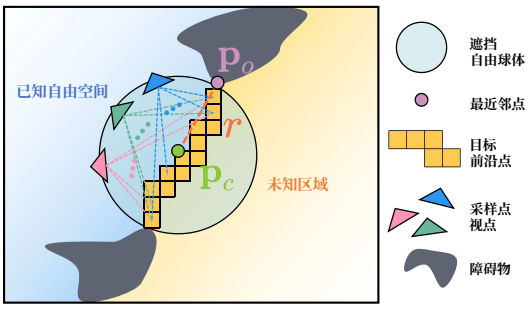

图 3. 无遮挡球体的定义。

为加快球体生成过程，我们采用[14]，[15]中概述的增量式KD树方法。最近邻搜索（最近邻搜索）的时间复杂度为 $O(\log n)$，其中 n 是树中的节点数。因此，即使在大规模

算法 1： 生成视点

符号说明：输入前沿单元$\mathbf{F}$；视点$\mathbf{V}$；按半径排序的无遮挡球体优先队列$\mathbf{S}$；球心列表$\mathbf{C}$；生成的视点 v_b；由 v_b覆盖的前沿单元：$\mathbf{F}_v$；球体由 v_b覆盖的球心：$\mathbf{S}_v$

输入： $\mathbf{F}$
输出： $\mathbf{V}$

$\mathbf{C}$ = DownsampleFrontier($\mathbf{F}$);
对于 $\mathbf{p}_c \in \mathbf{C}$ **执行**
  s_i =GenerateNewSphere($\mathbf{p}_c$) ;
  $\mathbf{S}$.PushBack(s_i);
结束
当不 $\mathbf{S}$.为空 **do**
  s_l =$\mathbf{S}$。front();
  $\mathbf{S}$.pop();
  v_b,$\mathbf{F}_v$,$\mathbf{S}_v$ = GenerateViewpoint(s_l,$\mathbf{F}$);
  $\mathbf{F}$.remove($\mathbf{F}_v$);
  $\mathbf{S}$.remove($\mathbf{S}_v$);
  $\mathbf{V}$.推回(v_b);
结束
返回 $\mathbf{V}$

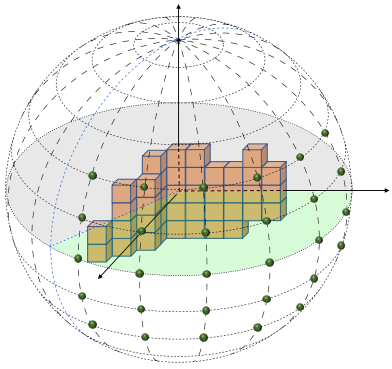

图4. 使用球坐标系在球面上均匀采样视点。绿色点是自由空间中的视点候选点。橙色方框是球体中的前沿单元。

环境中，球体生成过程在计算上仍然高效。我们将此过程记为GenerateNewSphere($\mathbf{p}_c$)，并将在后续分析中使用。

B. 视点生成

生成无遮挡球体 s_l后，所提出的方法使用球坐标系在球面上均匀采样一组视点，如图4所示。与球体内部的视点相比，球面上的视点对球体内前沿单元的观测距离更远，因此能够提供更大的覆盖范围。我们优化采样视点的偏航方向，使其实现对前沿单元的最大覆盖，方法与 [16]类似。随后，我们移除位于未知空间中的视点，并执行传感器视场检查，统计每个剩余视点所覆盖的前沿单元数量。最后，我们选择

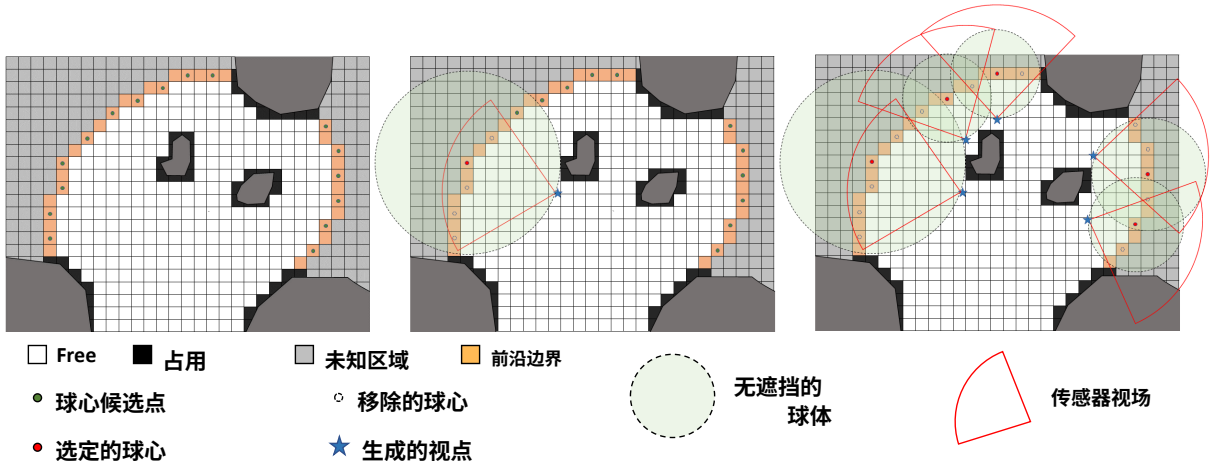

图 5. 视点生成示意图。左：均匀降采样，生成球心候选点。中：寻找最大的球体并生成一个视点。移除该视点覆盖的球心。右：对剩余的球心候选点重复相同的步骤，生成一组视点

覆盖范围最大的视点。整个过程称为 GenerateViewpoint(s_l, **F**)，后续分析中也将使用该过程。

算法 1 展示了整个视点生成过程的工作流程。首先，算法以增量方式搜索环境中的前沿单元，这与 FUEL 类似。随后，对前沿单元进行均匀降采样，生成一组球心候选点 **C**。这一过程称为 DownsampleFrontier(**F**)（第 2 行）。接着，对于每个球心 $\mathbf{p}_c$，**C**中的球心，使用 GenerateNewSphere($\mathbf{p}_c$)生成相应的无遮挡球体 s_i，具体方法见第 III.A 节。随后，将生成的球体 s_i加入按球体半径排序的优先队列**S**。每次迭代中，从优先队列**S**中选出最大的球体s_l。然后，算法使用 GenerateViewpoint(s_l,**F**)生成覆盖范围最大的视点 v_b，具体方法见第 III.B 节。生成的视点 v_b 覆盖一组前沿单元$\mathbf{F}_v$ 以及一组球心$\mathbf{S}_v$。随后，分别从**F** 和 **S**中移除这些集合。当球体列表**S** 为空时，迭代终止。请注意，如果选中的球体 s_l 小于某一阈值，所提方法会采用与 FUEL 类似的方法生成视点 v_b。具体而言，算法在球坐标系中均匀采样视点，最小采样半径设为与 s_l 相同，最大半径设为最小半径的三倍。在这种情况下，使用射线投射评估视点的前沿覆盖率。请注意，由于小球体 s_l中仅包含少量前沿单元，且采样半径较小，射线投射过程的计算量并不大。我们将上述部分称为算法的前端。图 5 展示了整个过程。

如第 III-A 节所述，我们的方法生成的视点能够无遮挡地覆盖球体内的任意前沿单元。因此，我们的方法不再需要使用现有方法中常用于评估传感器覆盖范围、计算开销较大的射线投射过程。这显著降低了计算复杂度。

位于远离前沿边界处的视点可以覆盖更多前沿单元，但也更容易受到障碍物遮挡。我们的方法在开阔区域生成较大的无遮挡球体，其视点与前沿边界的观测距离较长，因此可以覆盖更多前沿单元。相比之下，在杂乱空间中生成较小的球体和距离较近的视点，以避免遮挡。请注意，遮挡和较短的观测距离都会降低视点覆盖范围。现有方法（如 FUEL）需要在柱坐标系的半径维度上进行密集采样，以生成覆盖范围较大的视点，因此会产生大量采样点。请注意，每个采样得到的视点都需要执行射线投射来评估其覆盖范围，这会显著增加计算时间。另一方面，低密度采样会导致无法生成覆盖范围较大的视点，从而降低探索效率。

C. 全局路径规划

我们将视点 v 的增益定义为

$$g(v) = r(s)e^{-\lambda c(v,\xi)} \tag{2}$$

其中，$r(s)$ 是对应无遮挡球体的半径。$c(v,\xi)$ 是从车辆当前构型 ξ 前往视点 v 的代价。该代价根据 v 与 ξ 之间的欧几里得距离计算。λ 是调节因子。

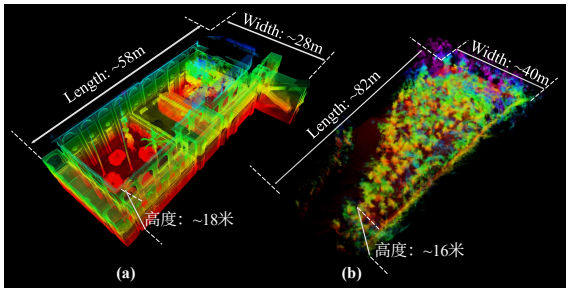

图 6. 两种仿真场景的可视化。(a)：建筑场景。(b)：森林 场景。

前沿边界周围较大的无遮挡球体表示可以在不受遮挡的情况下覆盖相对较大的区域，从而提高发现更多未知区域的可能性。较低的 λ 值会优先访问这些视点。较高的 λ 值会大幅增加前往视点的距离代价。在这种情况下，规划器倾向于选择距离较近的视点，并优先访问这些视点。

所提出的方法维护一个视点优先队列**Q**，其大小固定为 n_q。如第 III.B 节所述，所提出的方法生成一组视点 **V**，总数为 n_v。对于**V**中的每个视点 v_i，我们计算由 2 定义的 v_i 的增益。然后，我们贪心地选择增益最高的视点并将其放入优先队列**Q**，直到队列满为止。

全局规划问题是寻找一条开环巡回路线，该路线从当前车辆位置出发并经过**Q**中的视点。我们定义一个 $n_q \times n_q$代价矩阵 $\mathbb{M}_q$，用于描述 $\mathbb{M}_q$中每两个元素之间的连接代价。连接代价通过 A* 算法搜索得到的无碰撞路径长度进行评估。与 FUEL 类似，我们将该问题表述为非对称旅行商问题（ATSP），这是旅行商问题的一种变体，并使用可用算法 [13] 求解。本节称为探索规划器的后端。

D. 局部轨迹生成

给定第 III-C 节生成的无碰撞全局路径，我们采用先前工作的一个改进版本 BubblePlanner [17]，在激光雷达点上实现平滑且节能的局部规划。我们使用分段多项式表示轨迹。局部规划器首先沿路径执行批量采样算法，并生成球形安全飞行走廊（SSFC）。随后，采用时空分解方法 [18]，求解受走廊约束的轨迹优化问题，同时考虑平滑性和较短的轨迹执行时间。我们还对最大速度 $v_{\max}$ 和最大加速度$a_{\max}$ 施加约束，以确保满足运动学与动力学可行性。局部规划器采用滚动时域规划框架，将规划时域设为 15 米。当轨迹与新感知到的障碍物发生碰撞，或全局规划器发送新的目标时，就会触发重新规划。

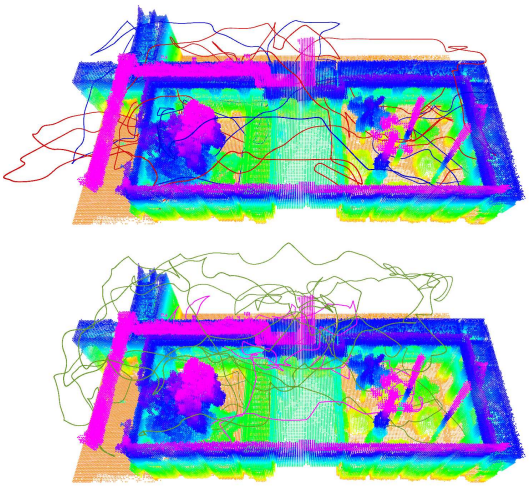

图 7. 在建筑 场景中所有基准方法执行的轨迹。上：本文提出的方法（蓝色）和 FUEL [7]（红色）的轨迹。下：GBP [2]（绿色）和 NBVP [1]（粉色）的轨迹。

表 I 运行时间比较

场景	各方法的平均运行时间（秒）			
	本文提出的方法	FUEL [7]	GBP [2]	NBVP [1]
建筑	**0.155**	0.419	2.821	7.456
森林	**0.288**	1.139	3.423	10.078
森林（MID360）	**0.313**	1.467	5.438	19.622

与新感知到的障碍物发生碰撞，或全局规划器发送新的目标时，就会触发重新规划。

IV. 实验

A. 基准对比

本节对所提出的方法与三种最先进的探索算法进行了比较分析，即 FUEL [7], GBP [2], 和 NBVP [1]。我们在两个大规模场景中，使用点云真实感模拟器 [19] 评估了这些算法的性能，如图 6 所示。这些场景通过激光雷达扫描真实环境构建。我们在每个场景中对所有算法分别运行四次，每次采用不同的初始配置。需要注意的是，每次运行时，所有算法采用的初始配置都相同。我们将所有方法中的无人机最大速度限制为 $v_{\max}$ =2.5m/s。探索过程的时间限制设为 1200 秒（20 分钟）。所有测试均在配备 Intel Core i7-8700@3.2GHz 中央处理器的设备上进行。

1) 建筑：我们首先在一个场景中进行探索，该场景包含一栋两层建筑，建筑环绕着中间的一座花园（图 6(a)）。图 9 展示了所有算法的已探索体积随时间的变化。彩色半透明区域由四次算法运行的上界和下界构成，而

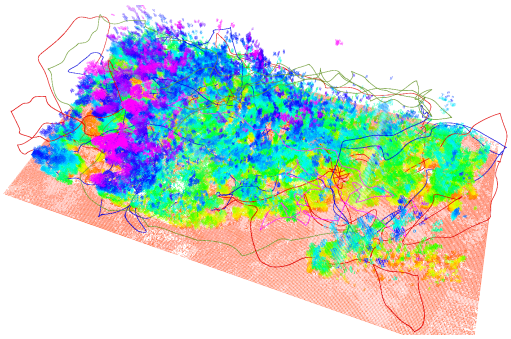

图 8. 森林场景中所有方法执行的轨迹：所提方法（蓝色）、FUEL [7]（红色）、GBP [2]（绿色）和 NBVP [1]（粉色）

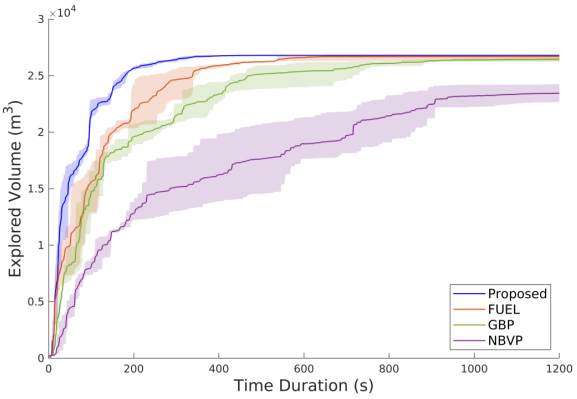

图 9. 建筑场景（上）和森林场景（下）中已探索体积随时间的变化

实线表示这四次运行的均值。在整个探索过程中，所提出的方法都展现出比所有基准方法更高的探索率。图 7 展示了探索结束后所有方法执行的轨迹。在此场景中，所提出的方法以平均 655.8 m 的飞行距离完成了全部探索，而 FUEL 和 GBP 的飞行距离分别为 876.7 m 和 1060.3 m。NBVP 无法在时间限制内完成对该场景的全部探索。表 I 展示了总体计算时间。所提出的方法展现出良好的性能

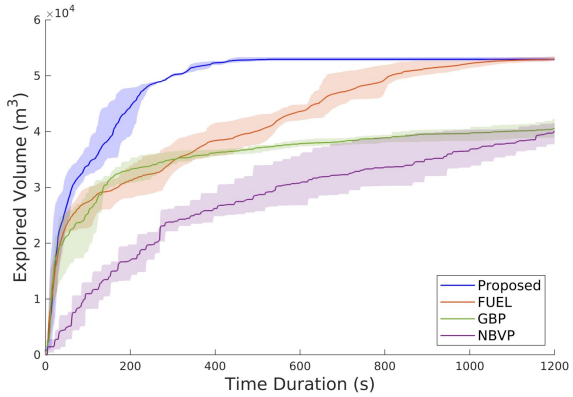

图 10. 森林（MID360）场景中已探索体积随时间的变化

表 II 组件计算时间

场景	方法	视点生成（前端）（秒）			全局优化（后端）（秒）		
		前沿视点。	总成本。		TSP	总计	
建筑	提出的方法	0.046	0.019	0.065	0.048	0.009	0.057
	FUEL [7]	0.069	0.078	0.147	0.210	0.036	0.246
森林	本文方法	0.129	0.036	0.165	0.046	0.013	0.059
	FUEL [7]	0.208	0.172	0.380	0.621	0.115	0.736

速度比 FUEL 快 2.5+ 倍，比 GBP 快 18+ 倍，比 NBVP 快 48+ 倍。

2）森林：第二项测试在茂密的森林场景中进行（图 6(b)）。如图 9 所示，所有方法都需要更长时间才能完整探索环境。这是因为森林 场景的规模是建筑场景的两倍，且更加杂乱、复杂。尽管如此，所提出的方法仍展现出出色的性能。在此场景中，该方法平均用时 579.8s 完成探索，平均飞行距离为 804.1m；FUEL 平均用时 1139.6s，平均飞行距离为 1098.4m。GBP 和 NBVP 未能在给定的时间限制内完成探索。在计算时间方面，我们的算法比 FUEL 快 4 倍，比 GBP 快 11+ 倍，比 NBVP 快 35 倍。

值得注意的是，在探索过程的早期阶段，GBP 通过以贪心方式访问高收益未探索区域，其探索率高于 FUEL。然而，由于缺乏全局最优性，它在探索后期表现不佳。所提出的方法结合贪心策略与全局优化，在探索过程早期探索较大范围，随后高效覆盖未探索区域，从而实现对环境的完整探索。

为进一步详细地将我们的方法与 FUEL 进行基准比较，我们对比了两种方法各组件的计算时间。统计结果见表 II。结果表明，我们的方法运行速度快 2+

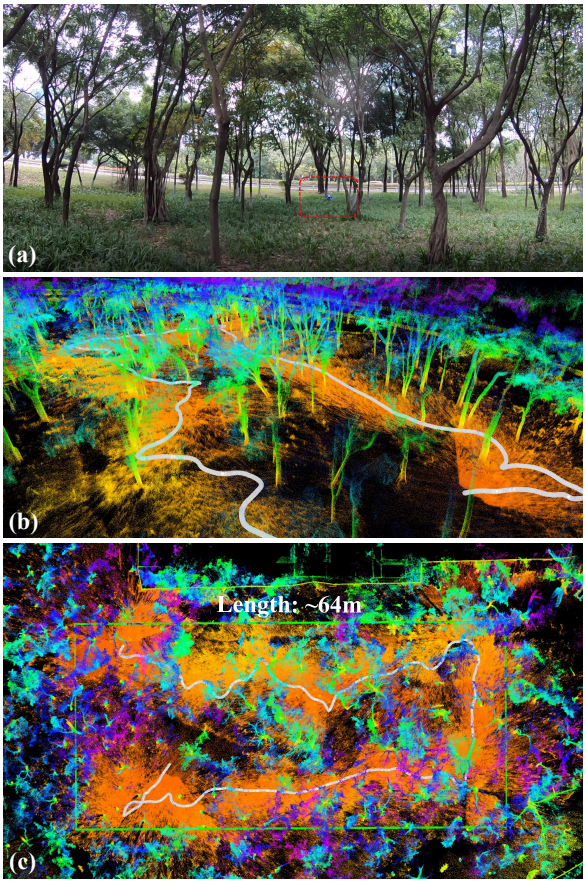

图 11. (a)：在森林中进行的真实环境实验。(b) 和 (c)：无人机在线构建的点云地图及其执行轨迹的两个不同视角。绿色框为待探索区域的包围盒。由于激光雷达测量范围较远，也观测到了包围盒以外的区域。

倍，前端平均比 FUEL 快，后端则快 5 到 10 倍。

3）森林（*MID360*）：为展示我们的方法在各种类型激光雷达上的通用性，我们使用 360 度视场激光雷达 Livox MID360，在密集森林场景中进行了仿真测试。结果见图 10 和表 I，由此可以得出类似的结论。

B. 真实环境实验

我们进行了多项真实环境实验，以进一步验证所提方法。我们搭建了一个基于激光雷达的四旋翼平台。该平台配备了一台搭载 CPU i7-10710U 的 Intel NUC 机载计算机、Pixhawk飞行控制器和激光雷达（Livox AVIA 或 Livox MID360）。在定位和建图方面，我们依靠激光雷达以及飞行控制器内置的惯性测量单元，运行 [20], 修改版 FAST-LIO2 [15],，实现高精度、高频率的状态估计。激光雷达与惯性测量单元之间的时间偏移和外参通过 [21]进行标定。轨迹跟踪方面，我们使用流形上的模型预测控制器 [22]。

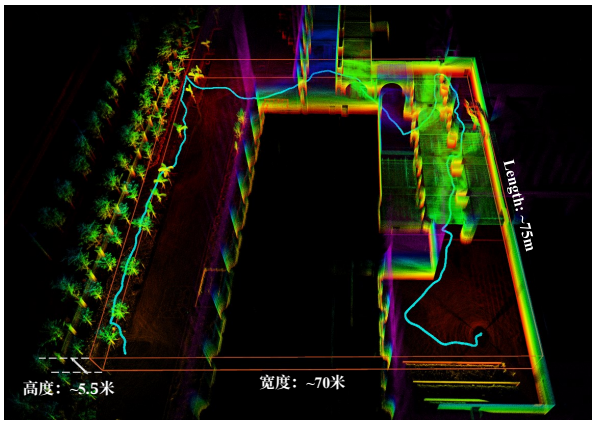

图 12. 无人机在线构建的点云地图及其执行轨迹概览。橙色框为待探索区域的包围盒。场景中央有一栋封闭的建筑，因此不存在可行路径。

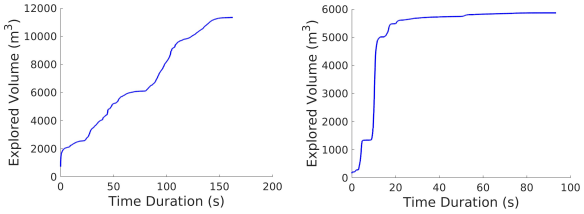

图 13. 场景 1（左）和场景 2（右）随时间变化的已探索体积。

首先，我们使用无人机探索一个兼具室内和室外空间的大规模、杂乱环境（场景 1）。待探索区域的大小为 $[75 \times 70 \times 5.5]m^3$。在该场景中，我们为无人机配备了 Livox MID360 激光雷达。在一次有代表性的运行中，无人机用时 155.8 秒完成探索，飞行距离为 268.4 米。在线构建的点云地图和执行的轨迹如图 1 和图 12 所示。随时间变化的已探索体积见图 13。在这次测试中，无人机从一片开阔区域出发，随后探索走廊并继续前往室外空间。大约 70 秒后，无人机几乎完成了对走廊的探索，因此图 13 中曲线斜率趋于平缓。约 85 秒时，无人机进入室外空间，并覆盖了大量未知区域，曲线斜率因而陡增。最后，在约 160 秒时，无人机完成了对室外空间的探索，整个探索过程也随之结束。从图 12 所示结果可以看出，在整个探索过程中，所提方法很少出现重复访问或来回规划运动。

其次，我们使用无人机探索一个大小为 $[64 \times 30 \times 3.2]m^3$ 的杂乱森林场景（场景 2）。在此测试中，无人机搭载 Livox AVIA 激光雷达，其视场为 $[70.4° \times 77.2°]$ 锥形。

无人机用时 92s 完成探索，飞行距离为 159.2m。点云和轨迹显示在图 11 中，统计结果见图 13。

V. 结论与未来工作

本文提出了一种新方法，用于支持在大规模且杂乱的三维环境中进行高效自主探索。在前端，我们引入了无遮挡球体这一新颖概念，以较低的计算成本生成高质量视点。在后端，我们采用了一种将贪心策略与全局优化相结合的新策略。所提出的方法显著提高了探索效率，并节省了计算时间。大量仿真和真实环境实验展示了该方法在大规模、杂乱且复杂环境中的卓越性能。未来，可将该方法部署于多架无人机，以支持对更大场景的探索。

致谢

本研究获得香港大学资助委员会早期职业生涯计划（项目编号：27202219）、香港研究资助局普通研究基金（项目编号：17206920）以及大疆研究捐赠的支持。作者谨此感谢大疆提供经费支持，并感谢 Livox Technology 提供设备支持。作者感谢中山大学的吕希敏博士在整个研究期间提供实验场地支持。

参考文献

[1] Andreas Bircher、Mina Kamel、Kostas Alexis、Helen Oleynikova 和 Roland Siegwart。《用于三维探索的滚动时域“下一最佳视点”规划器》。载于*2016*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议（*ICRA*），第 1462–1468 页。IEEE，2016年。[2] Tung Dang、Frank Mascarich、Shehryar Khattak、Christos Pa-pachristos 和 Kostas Alexis。《用于地下环境自主机器人探索的基于图的路径规划》。载于*2019*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*），第 3105–3112 页。IEEE，2019年。[3] Mihir Dharmadhikari、Tung Dang、Lukas Solanka、Johannes Loje、Huan Nguyen、Nikhil Khedekar 和 Kostas Alexis。《利用空中机器人进行快速敏捷探索的基于运动基元的路径规划》。载于*2020*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议（*ICRA*），第 179–185 页。IEEE，2020年。[4] Steven M LaValle 等。《快速探索随机树：一种新的路径规划工具》。1998年。[5] Brian Yamauchi。《一种用于自主探索的基于前沿的方法》。载于*1997*年 *IEEE* 机器人与自动化计算智能国际研讨会论文集（*CIRA'97*）：迈向机器人与自动化的新计算原理，第 146–151 页。IEEE，1997年。[6] Titus Cieslewski、Elia Kaufmann 和 Davide Scaramuzza。《多旋翼飞行器快速探索：一种适用于高速飞行的前沿选择方法》。载于*2017*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*），第 2135–2142 页。IEEE，2017年。[7] Boyu Zhou、Yichen Zhang、Xinyi Chen 和 Shaojie Shen。《FUEL：利用增量式前沿结构和分层规划实现快速无人机探索》。*IEEE*《机器人与自动化快报》，6(2):779–786，2021年。

[8] Lukas Schmid、Michael Pantic、Raghav Khanna、Lionel Ott、Roland Siegwart 和 Juan Nieto。《一种用于未知环境在线信息路径规划的高效采样方法》。*IEEE*《机器人与自动化快报》，5(2):1500–1507，2020年。[9] Miguel Juli´a、Arturo Gil 和 Oscar Reinoso。《针对未知环境自主探索与建图的路径规划策略比较》。《自主机器人》，33 444，2012 427：–。[10] Shaojie Shen、Nathan Michael 和 Vijay Kumar。《利用微型飞行器进行自主室内三维探索》。载于*2012*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议，第 9–15 页。IEEE，2012年。[11] Chao Cao、Hongbiao Zhu、Howie Choset 和 Ji Zhang。《TARE：高效探索复杂三维环境的分层框架》。载于机器人学：科学与系统，第 5 卷，2021年。[12] Magnus Selin、Mattias Tiger、Daniel Duberg、Fredrik Heintz 和 Patric Jensfelt。《大规模三维环境的高效自主探索规划》。*IEEE*《机器人与自动化快报》，4(2):1699–1706，2019年。[13] Shen Lin 和 Brian W Kernighan。《一种有效的旅行商问题启发式算法》。《运筹学》，21(2):498–516，1973年。[14] Yixi Cai、Wei Xu 和 Fu Zhang。《ikd-tree：一种面向机器人应用的增量式 kd 树》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2102 10808*，2021年.。[15] Wei Xu、Yixi Cai、Dongjiao He、Jiarong Lin 和 Fu Zhang。《FAST-LIO2：快速直接激光雷达-惯性里程计》。*IEEE*《机器人学汇刊》，38(4):2053–2073，2022年。[16] Christian Witting、Marius Fehr、Rik B¨ ahnemann、Helen Oleynikova 和 Roland Siegwart。《在受限环境中利用微型飞行器进行历史感知自主探索》。载于*2018*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*），第 1–9 页。IEEE，2018年。[17] Yunfan Ren、Fangcheng Zhu、Wenyi Liu、Zhepei Wang、Yi Lin、Fei Gao 和 Fu Zhang。《Bubble Planner：利用滚动走廊规划高速平滑四旋翼轨迹》。载于*2022*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*），第 6332–6339 页。IEEE，2022年。[18] Zhepei Wang、Xin Zhou、Chao Xu 和 Fei Gao。《多旋翼飞行器的几何约束轨迹优化》。*IEEE*《机器人学汇刊》，38(5):3259–3278，2022年。[19] Fanze Kong、Xiyuan Liu、Benxu Tang、Jiarong Lin、Yunfan Ren、Yixi Cai、Fangcheng Zhu、Nan Chen 和 Fu Zhang。《Marsim：一种轻量级点云真实感模拟器，适用于基于激光雷达的无人机》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2211.10716*，2022年。[20] Fangcheng Zhu、Yunfan Ren、Fanze Kong、Huajie Wu、Siqi Liang、Nan Chen、Wei Xu 和 Fu Zhang。《分布式激光雷达-惯性群集里程计》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209 06628*，2022年.。[21] Fangcheng Zhu、Yunfan Ren 和 Fu Zhang。《鲁棒实时激光雷达-惯性初始化》。载于*2022*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*），第 3948–3955 页。IEEE，2022年。[22] Guozheng Lu、Wei Xu 和 Fu Zhang。《用于机器人系统轨迹跟踪的流形上模型预测控制》。*IEEE*《工业电子学汇刊》，2022年。