arXiv:2304.00853v1 [math.CO] 3 Apr 2023

关于 $\mathbb{R}$ 上迭代和与乘积的优于 $3/2$ 的指数

OLIVER ROCHE-NEWTON

Abstract. 本文证明了以下界

$$\max\{|8A-7A|,|5f(A)-4f(A)|\} \gg |A|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{54}-o(1)}$$

对所有 $A \subset \mathbb{R}$，以及所有满足一项附加技术条件的凸函数 f，该结论均成立。对数函数满足这一技术条件，利用这一事实可以推出一个和积估计

$$\max\{|16A|,|A^{(16)}|\} \gg |A|^{\frac{3}{2}+c},$$

适用于某个 $c>0$。此前，对于任意变量个数，都没有已知指数严格大于 $3/2$ 的 $\mathbb{R}$ 上和积估计。此外，关于 f 的技术条件似乎在大多数有意义的情形下都成立，我们还给出了一些进一步的应用。特别地，我们证明

$$|AA| \leq K|A| \implies \forall d \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ |\{(a,b)\in A\times A : a-b=d\}| \ll K^C|A|^{\frac{2}{3}-c'},$$

其中 c、$C>0$ 是绝对常数。

1. Introduction

给定一个有限集 $A \subset \mathbb{R}$，令 $A+A$ 和 AA 分别表示 A的和集与积集。也就是说，

$$A+A := \{a+b : a,b \in A\}, \qquad AA := \{ab : a,b \in A\}.$$

Erd˝os -Szemer´edi [4] 和积猜想指出，对所有 $\epsilon>0$，该界 d

$$\max\{|A+A|,|AA|\} \geq |A|^{2-\epsilon} \tag{1}$$

对所有充分大的 $A \subset \mathbb{N}$均成立。

还可以考虑具有更多变量的 Erd˝os-Szemer´edi 猜想的类似形式。记号 kA 和 $A^{(k)}$ 分别用于表示 k重和集与 k重积集。也就是说，

$$kA := \{a_1+\cdots+a_k : a_1,\dots,a_k \in A\}, \qquad A^{(k)} := \{a_1\cdots a_k : a_1,\dots,a_k \in A\}.$$

在 [4] 中也有人猜想

$$\max\{|kA|,|A^{(k)}|\} \geq |A|^{k-\epsilon}$$

对于所有充分大的 $A \subset \mathbb{N}$，这一猜想都成立，但目前看来它仍遥不可及。

然而，Bourgain 和 Chang 的一项杰出成果 [1] 证明，迭代和集或积集至少有一个必定会无限增长。他们证明，对于所有$h \in \mathbb{N}$，都存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$\max\{|kA|, |A^{(k)}|\} \geq |A|^h \tag{2}$$

对所有 $A \subset \mathbb{N}$均成立。另见 [10]，其中给出了 Bourgain-Chang 定理的一种替代证明，且更易理解。

也可以针对 $A \subset \mathbb{R}$研究和积问题；事实上，当代关于猜想中的界（1）的研究大多采用适用于实数域的几何论证。目前针对这一猜想的最佳估计是界[1]

$$\max\{|A+A|, |AA|\} \gg |A|^{\frac{4}{3}+\frac{2}{1167}-o(1)},$$

这是 Rudnev 和 Stevens 给出的 [8]。该估计对所有 $A \subset \mathbb{R}$均成立；即使附加限制 $A \subset \mathbb{N}$，目前也没有已知的定量改进。

另一方面，实数域上的 Erd˝os-Szemer´edi 猜想的 k 重迭代版本，其进展远远落后于在 $\mathbb{N}$上已知的最佳结果。例如，对于 $A \subset \mathbb{R}$，即便是 $h = 3/2$，也尚不知界（2）是否成立；此时，主流几何方法似乎已达到其局限。

本文的主要结果为这一问题带来了一些进展，将 k 重和积问题的增长指数推过阈值 $3/2$。

定理 1.1. 存在一个绝对常数 $c > 0$，使得对于任意有限集 $A \subset \mathbb{R}$

$$\max\{|16A|, |A^{(16)}|\} \geq |A|^{\frac{3}{2}+c}.$$

定理 1.1 是一个更一般结果的特例（参见即将给出的定理 5.1），该结果讨论凸性与和集之间的关系。这里的指导思想是，严格凸函数或凹函数会扰乱集合中存在的任何加法结构。多篇论文都探讨了这一思想，其中包括 Elekes、Nathanson 和 Ruzsa 的开创性工作 [3]，他们利用关联理论开辟了新的研究方向。

最近，Solymosi 提出了一种新的初等方法（见 [9]），推动了该领域的进一步发展。这种“挤压”技巧被用于 [5]，以证明以下界

$$|A+A-A||f(A)+f(A)-f(A)| \gg \frac{|A|^3}{\log|A|} \tag{3}$$

对所有 $A \subset \mathbb{R}$均成立。后来，Bradshaw [2]进一步改进了这一结果，去除了对数因子。这一技巧也曾用于 [6]，以改进由 $\mathbb{R}^2$中的一个点集确定的不同点积数量的界限。相同的挤压技巧是本文的主要工具，而更深入的分析使我们能够改进

[1]本文中及下文中，记号 $X \gg Y$、$Y \ll X$、$X = \Omega(Y)$ 和 $Y = O(X)$ 都是等价的，表示 $X \geq cY$，其中某个绝对常数为 $c > 0$。

通过引入更多变量得到的界限 (3)，前提是凸函数 f 满足一个额外的技术条件。

作为我们一般性结果的另一项应用，我们证明了以下关于乘法倍增较小的集合的加法表示数量的结果。

定理 1.2. 存在绝对常数 c、$C > 0$，使得对于任意正实数有限集 A 以及任意 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$|AA| \leq K|A| \implies |\{(a,b) \in A \times A : a - b = t\}| \ll K^C |A|^{\frac{2}{3}-c}.$$

定理 1.2 的一个较弱版本（不含常数 c）可以通过简单应用 Szemer´edi-Trotter 定理证明。在和积问题领域，这类结果有时称为阈值界。如今，这些界中的大多数都已通过改进和扩充这些基本论证而得到提升。定理 1.2 改进了和积理论中最后尚存的阈值界之一。

1.1. 记号。除非另有说明，本文中引入的所有集合均假定为有限集。我们用 log 表示以 2 为底的对数函数，用 ln 表示以 e 为底的对数函数。如前文脚注所述，本文中记号 $X \gg Y$、$Y \ll X$、$X = \Omega(Y)$ 和 $Y = O(X)$ 均等价，表示$X \geq cY$ 对某个绝对常数 $c > 0$ 成立。$X \gg_a Y$ 表示隐含常数不再是绝对常数，而是依赖于 a。我们有时还用符号 $\gtrsim$ 和 . 来额外吸收对数因子。也就是说，$X \gtrsim Y$ 和 $Y \lesssim X$ 均表示对某个绝对常数 $c > 0$，有 $X \gg Y/(\log Y)^c$。

2. Preliminary results

本文将用到的主要外部结果取自 [5], ，讨论当 f 是高度凸函数且 A 具有较小的加法增长时，$f(A)$的迭代和集的增长。

对于一个区间 I，若 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 I上严格单调，则称其为 0-凸函数；一般而言，若 f的各阶导数 $f^{(1)}$，.....，$f^{(k+1)}$在 I上均为 k-凸，且对所有 $x \in I$和 $1 \leq j \leq k+1$，$f^j(x) \neq 0$（因此，除最后一个导数外，其余导数均严格单调）。

定理 2.1. 设 A 是一个包含于区间 I 中的实数有限集，且令$f: I \to \mathbb{R}$ 为一个 k-凸函数，其中 $k \geq 1$。假设 $|A| > 10k$ 且$|A + A - A| \leq K|A|$。则

$$|2^k f(A) - (2^k - 1)f(A)| \geq \frac{|A|^{k+1}}{(CK)^{2^{k+1}-k-2}(\log |A|)^{2^{k+2}-k-4}}$$

其中 $C > 0$ 是某个绝对常数。

我们将使用 Elekes、Nathanson 和 Ruzsa 的以下结果 [3]。

定理 2.2. 设 I 为一个区间，设 $f: I \to \mathbb{R}$ 为严格凸函数或凹函数，并假设 $A \subset I$。那么，对所有 $k \in \mathbb{N}$,

$$|kA||kf(A)| \gg |A|^{3-2^{1-k}}.$$

在定理 2.2 中令 $f(x) = \ln x$，即可得到对所有 $h < 3/2$，不等式 (2) 在实数范围内成立。定理 2.2 的证明迭代地应用了 Szemer´edi–Trotter 定理的一个变体。

我们将使用 Pl¨unnecke–Ruzsa 定理来控制迭代和集的增长。

定理 2.3。设 X 和 Y 是阿贝尔群中的集合。则对于任意非负整数 k 和 l，只要满足 $k + l > 1$,

$$|kX - lX| \leq \frac{|X + Y|^{k+l}}{|Y|^{k+l-1}}.$$

我们还将使用以下形式的鲁扎三角不等式。

定理 2.4。对于阿贝尔群中的任意集合 X、Y、Z，

$$|Y - Z| \leq \frac{|X + Y||X + Z|}{|X|}.$$

3. The main general result

引言中提到的所有结果均由下面的定理 3.1 推导得出，本节旨在陈述并证明这一结果。

在此之前，我们需要介绍函数 f_d，它是本文的核心。令$a \in \mathbb{R}$，并令 I 表示区间 $I = (a, \infty)$。设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是严格凸或凹函数。令 d 为一个严格正实数。定义函数

$$f_d : I \to J, \quad f_d(x) := f(x + d) - f(x).$$

这里， J 表示 f_d的值域，而 J 始终是一个区间。由于 f 是严格凸或凹的，因此函数 f_d 是单调的。特别地，反函数$f_d^{-1}: J \to I$ 有定义。

定理 3.1. 令 $a \in \mathbb{R}$，并令 I 表示区间 $I = (a, \infty)$，且令 $m \in \mathbb{N}$。设 $A \subset I$ 是一个有限集。设 $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ 是严格凸或凹函数。另设，对于任意 $d \in (0, \infty)$，函数 $f_d^{-1}: J \to I$满足以下性质：其前三阶导数的零点总数至多为 m 。那么

$$|8A - 7A|^{16}|5f(A) - 4f(A)|^{11} \gg_m \frac{|A|^{41}}{(\log |A|)^{77}}. \tag{4}$$

特别是,

$$\max\{|8A - 7A|, |5f(A) - 4(A)|\} \gtrsim_m |A|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{54}}. \tag{5}$$

证明。不等式（5）由（4）通过鸽巢原理得出。因此，只需证明（4）。

我们只考虑 f 严格凸的情形。对于严格凹的 f，只需稍作修改即可采用相同的证明。记 $A = \{a_1 < \cdots < a_n\}$ 并定义

$$D := \{a_{i+1} - a_i : 1 \le i \le n-1\}$$

为由 A 确定的连续差集合。我们将先进行二进分解，以便对集合 D 进行正则化。

对于 $d \in D$，定义

$$A_d := \{a_i \in A : a_{i+1} - a_i = d\}.$$

注意到

$$\sum_{d \in D} |A_d| = n - 1.$$

经过二进分解和鸽巢原理法，可得存在 $D' \subset D$ 和某个 $K \in \mathbb{N}$，使得

$$K \le |A_d| < 2K, \quad \forall\, d \in D'$$

and

$$|D'|K \gg \frac{|A|}{\log |A|}. \tag{6}$$

为简化记号，我们假设 $|A_d| = K$，并在必要时舍弃任何多余元素（严格来说，这里我们转而考虑另一个子集，但不为这个子集引入新的记号）。我们还作出简化假设，即 K 能被 4 整除。

以下 的下界基本上照搬自 [5 的一个论证，适用于 $A + A - A$].

断言1。

$$|A + A - A| \gg \frac{|A||D'|}{\log |A|}.$$

断言1的证明。将 $D' = D'_{big} \sqcup D'_{small}$ 分解为两个大小尽可能相等的不相交部分（特别是 $|D_{small}| - 1 \le |D_{big}| \le |D_{small}|$），使得 D'_{big} 中的每个元素都大于 D'_{small} 中的每个元素。令 $A' \subset A$ 表示集合

$$A' = \{a_i \in A : a_{i+1} - a_i \in D'_{big}\} = \bigcup_{d \in D'_{big}} A_d.$$

注意到 $|A'| \ge |D'_{big}|K \gg |D'|K$。此外，对于每个 $a_i \in A'$，注意到

$$a_i + D'_{small} \subset (a_i, a_{i+1}).$$

这意味着区间 (a_i, a_{i+1}) 中存在 $|D'|/2$ 个 $A+A-A$ 元素。对所有 $a \in A'$ 求和并应用 (6)，可得

$$|A + A - A| \gg |D'|^2 K \gg \frac{|A||D'|}{\log |A|}.$$

□

断言1使我们接下来可以假设

$$K \geq 8m. \tag{7}$$

事实上，假设情况并非如此。那么结合断言1和式 (6)，可得

$$|A + A - A| \gg \frac{|A|^2}{m(\log |A|)^2},$$

这足以推出所需的下界 (4)。

接下来，我们对集合 D' 和 A_d 作一些进一步的细化，以便为 $f(A)$ 的迭代和建立下界。

回顾本节开头的定义，$f_d(x) := f(x + d) - f(x)$。对于给定的 $d \in D'$，记

$$A_d = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_K}\}$$

其中 $i_1 < \dots < i_K$。令 A'_d 表示 A_d 中较小的一半，于是

$$A'_d = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{K/2}}\}.$$

注意到，由于 f 是严格凸的，

$$f_d(a_{i_1}) < \dots < f_d(a_{i_K}).$$

定义

$$t_d := f_d(a_{i_{K/2}}).$$

也就是说，t_d 是 $f_d(A'_d)$ 中的最大元素。因此，$f_d(A'_d) \subset (0, t_d]$。

在接下来的论证中，让 $f_d(A'_d)$ 的各元素彼此稍微靠近一些会有所帮助。对于每个 $a_{i_j} \in A'_d$，像 $f_d(a_{i_j})$ 都属于区间 $(0, t_d/2]$ 或 $(t_d/2, t_d]$，因此至少一半的元素 $f_d(a_{i_j})$ 位于同一个区间内。为进一步简化记号，我们不妨假设第一个区间中包含的元素较多。特别地，如果我们定义

$$A''_d := \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{K/4}}\},$$

于是 $f_d(A''_d) \subset (0, t_d/2]$，由此可得

$$2f_d(A''_d) - 2f_d(A''_d) \subset (t_d, t_d).$$

我们根据差集 $2f_d(A''_d) - 2f_d(A''_d)$ 的大小对 D' 进行二进分解。注意到

$$|D'| = \sum_{j=1}^{4\log|A|} \sum_{\substack{d\in D': \\ 2^{j-1}K\le|2f_d(A''_d)-2f_d(A''_d)|<2^jK}} 1.$$

因此，存在 $D'' \subset D'$ 使得

$$|D''| \gg \frac{|D'|}{\log|A|}$$

并且，对所有 $d \in D''$,

$$LK \le |2f_d(A''_d) - 2f_d(A''_d)| < 2LK, \tag{8}$$

其中 $L \ge 1$ 是某个固定整数。在证明的其余部分，我们只处理差 $d \in D''$。

以下断言基于 [5], 的工作；他们曾用这一论证的一个基本版本证明界 $|2f(A) - f(A)| \gg \frac{|A|K}{\text{对数 }|A|}$，再将其与断言1的界结合起来即可证明界 (2)。以下断言采用的不同方法是将一个迭代差集挤入这些间隙中；除非先前定义的参数 L是常数，否则这会带来一定改进。 [7]最近也采用了类似的方法。

断言2。

$$|5f(A) - 4f(A)| \gg \frac{|A|KL}{(\log|A|)^2}.$$

断言2的证明。设 $d \in D''$，并令 E_d 表示 $2f_d(A''_d)$ –$2f_d(A''_d)$的非负元素。因此，$E_d \subset [0, t_d)$，且由于差集具有对称性，

$$|E_d| \gg |2f_d(A''_d) - 2f_d(A''_d)| \ge LK. \tag{9}$$

现在，令 $K/2 < j \le K$ 并考虑和集

$$f(a_{i_j}) + E_d \subset [f(a_{i_j}), f(a_{i_j}) + t_d) \subset [f(a_{i_j}), f(a_{i_j+1})). \tag{10}$$

上面的第一个包含关系成立，因为 $E_d \subset [0, t_d)$。第二个包含关系等价于不等式

$$f(a_{i_j}) + t_d \le f(a_{i_j+1}). \tag{11}$$

由于 $a_{i_j} \in A_d$，可得 $a_{i_j+1} = a_{i_j} + d$，因此不等式 (11) 可写为$f_d(a_{i_j}) \ge t_d = f_d(a_{i_{K/2}})$。这是成立的，因为 f_d单调递增，且 $j > K/2$。由此我们验证了包含关系 (10)。

另一方面，由集合 E_d 的构造可知， $E_d \subset 4f(A)-4f(A)$，因此

$$f(a_{i_j}) + E_d \subset (5f(A) - 4f(A)) \cap [f(a_{i_j}), f(a_{i_j+1})).$$

因此，我们已经找到了位于 $f(A)$ 的相邻元素之间的 $5f(A)-4f(A)$ 个元素。回顾 (9)，有 $|E_d| \gg LK$。我们对每个 $K/2 < j < K$ 重复这一过程，然后对每个 $d \in D''$ 重复。由 (6) 可得

$$|5f(A) - 4f(A)| \gg LK^2|D''| \gg \frac{LK^2|D'|}{\log|A|} \gg \frac{LK|A|}{(\log|A|)^2},$$

从而完成了该论断的证明。

□

结合前两个论断，除非 L 非常小，否则我们就完成了。不过，若确实如此，下一个论断便能帮助我们在 A 一侧取胜。这里的思路是：如果 L 确实很小，那么这意味着 $f(A)$ 中蕴含着某种加法结构，进而应当意味着 A 具有加法增长。

论断 3。

$$|8A - 7A| \gg \frac{K^4}{(Lm)^{11}(\log|A|)^{25}}.$$

论断 3 的证明。由 (8) 可知

$$|f_d(A_d'') + f_d(A_d'') - f_d(A_d'')| \leq 2LK = 8L|f_d(A_d'')|.$$

现在，回想定理陈述中的假设：函数 $f_d^{-1}: J \to I$ 存在，且其前三阶导数的零点总数至多为 m 。我们利用这些零点将f_d^{-1} 的陪域划分为 $m-1$ 个两两不相交的子区间$J_1, \ldots, J_{m+1} \subset J$，使得在每个子区间上，前三阶导数都不为零。

Let

$$I_1 = f_d^{-1}(J_1), \ldots, I_{m+1} = f_d^{-1}(J_{m+1}).$$

注意，区间 $I_1, \ldots, I_{m+1} \subset I$ 两两不相交，且其并集 $\bigcup_{i=1}^{m+1} I_i$与集合 I 至多相差 m 个点。由于 $A_d'' \subset I$，可知存在某个指标 i 使得

$$|A_d'' \cap I_i| \geq \frac{|A_d''| - m}{m+1} \geq \frac{K}{16m}.$$

上面的最后一个不等式用到了 7。令

$$A_d''' := A_d'' \cap I_i$$

并定义 $g: J_i \to I$ 为函数 f_d^{-1}，其定义域限制为 J_i。由于 g 的前三阶导数在 J_i中均不为零，因此根据定义，函数 g 是 3-凸的。

由 (8) 可得

$$\begin{aligned}|g(A_d''') + g(A_d''') - g(A_d''')| &\leq |f_d(A_d'') + f_d(A_d'') - f_d(A_d'')| \\ &\leq 2LK \leq 32Lm|g(A_d''')|.\end{aligned}$$

应用定理 2.1，取

$$f = g, \quad k = 3, \quad A = f_d(A_d'''), \quad K = 32Lm.$$

由此可得

$$\begin{aligned} |8A - 7A| &\geq |8A_d''' - 7A_d'''| \\ &\geq \frac{|A_d''|^4}{(C'mL)^{11}(\log|A|)^{25}} \\ &\gg \frac{K^4}{(Lm)^{11}(\log|A|)^{25}}. \end{aligned}$$

□

最后，我们将前面三个论断中的不等式结合起来，以完成证明。我们有

$$\begin{aligned} |8A - 7A|^{16}|5f(A) - 4f(A)|^{11} &\geq |8A - 7A||A + A - A|^{15}|5f(A) - 4f(A)|^{11} \\ &\gg \frac{K^4}{(Lm)^{11}(\log|A|)^{25}} \cdot \left(\frac{|A||D'|}{\log|A|}\right)^{15} \cdot \left(\frac{|A|KL}{(\log|A|)^2}\right)^{11} \\ &= \frac{|A|^{26}K^{15}|D'|^{15}}{m^{11}(\log|A|)^{62}} \\ &\gg \frac{|A|^{41}}{m^{11}(\log|A|)^{77}} \\ &\gg_m \frac{|A|^{41}}{(\log|A|)^{77}} \end{aligned}$$

上面的最后一个不等式是对（6）的应用。由此完成了（4）的证明，因此也完成了定理 3.1 的证明。

□

4. Applying Theorem 3.1 for some particular convex functions of interest

推论 4.1。假设 $A \subset (0,\infty)$ 是一个有限集。那么

$$\max\left\{|8A - 7A|, \left|\frac{AAAAA}{AAAA}\right|\right\} \gtrsim |A|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{54}}.$$

证明。将定理 3.1 应用于 $f(x) = \ln x$。函数 $f_d : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 定义为

$$f_d(x) = \ln\left(\frac{x+d}{x}\right).$$

它的逆函数为

$$f_d^{-1} : (0,\infty) \to (0,\infty), \quad f_d^{-1}(x) = \frac{d}{e^x - 1}.$$

直接计算可知， f_d^{-1} 的前三阶导数在 $(0,\infty)$ 内均不为零。事实上，前三阶导数为

$$
\begin{aligned}
(f_d^{-1})^{(1)}(x) &= \frac{-de^x}{(e^x-1)^2},\\
(f_d^{-1})^{(2)}(x) &= \frac{de^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3},\\
(f_d^{-1})^{(3)}(x) &= \frac{-de^x(e^{2x}+4e^x+1)}{(e^x-1)^4}.
\end{aligned}
$$

□

在这种情况下， A 仅由正元素组成这一条件并不重要。对于任意有限集 $A\subset\mathbb{R}$，至少有 $\frac{|A|-1}{2}$ 个元素的符号（严格）相同。设$A'\subset A$ 为一个大小至少为 $\frac{|A|-1}{2}$ 的集合，且 A' 中的所有元素符号相同。若$A'\subset(0,\infty)$，则对 A'应用推论 4.1。否则，可将其应用于 $-A'$，得到相同的结果。

推论 4.2. 设 λ 为任意严格正实数，并假设 $X\subset(0,\infty)$ 是一个有限集。则

$$
\max\left\{\left|\frac{X^{(8)}}{X^{(7)}}\right|,\left|\frac{(X+\lambda)^{(5)}}{(X+\lambda)^{(4)}}\right|\right\}\gtrsim |X|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{54}}.
$$

证明. 将 $A=\ln X$ 和 $f(x)=\ln(e^x+\lambda)$ 代入定理 3.1。函数 $f_d\colon\mathbb{R}\to(0,d)$ 定义为

$$
f_d(x)=\ln\left(\frac{e^{x+d}+\lambda}{e^x+\lambda}\right).
$$

其逆函数为

$$
f_d^{-1}:(0,d)\to\mathbb{R},\quad f_d^{-1}(x)=\ln\left(\frac{\lambda(e^x-1)}{e^d-e^x}\right).
$$

f_d^{-1} 的前三阶导数为

$$
\begin{aligned}
(f_d^{-1})^{(1)}(x) &= \frac{(e^d-1)e^x}{(e^x-1)(e^d-e^x)},\\
(f_d^{-1})^{(2)}(x) &= \frac{(e^d-1)e^x(e^{2x}-e^d)}{(e^x-1)^2(e^d-e^x)^2},\\
(f_d^{-1})^{(3)}(x) &= \frac{(e^d-1)e^x[e^{4x}+(e^d+1)e^{3x}-6e^de^{2x}+(e^{2d}+e^d)e^x+e^{2d}]}{(e^x-1)^3(e^d-e^x)^3}.
\end{aligned}
$$

这三个导数在 $(0,d)$ 中的零点总数至多为 5，因此确实可以在 $m=5$ 的情况下应用定理 3.1。□

遗憾的是， A 由正实数组成这一条件对于推论 4.2似乎是一个更有意义的限制，而且无法通过将该结果应用于该集合的数乘变换来轻易去除。

我们还直接验证了，定理 3.1的附加条件对于其他一些值得注意的函数也成立，例如 $f(x) = e^x$和 $f(x) = x^3$。这些计算的细节从略。定理 3.1似乎也很可能适用于 $f(x) = x^d$，其中 $d \geq 3$ 为整数。然而，对于二次函数 $f(x) = x^2$，附加条件并不成立。

现在我们利用推论 4.2 证明定理 1.2。下面给出并证明该定理的一个定量上更精确的版本。

推论 4.3. 设 A 为一组正实数，并假设 $|AA| \leq K|A|$。那么，对于所有满足 $t \neq 0$的 $t \in \mathbb{R}$，

$$|\{(a,b) \in A \times A : a - b = t\}| \lesssim K^{\frac{405}{41}}|A|^{\frac{2}{3}-\frac{1}{123}}.$$

证明. 记

$$r_{A-A}(t) := |\{(a,b) \in A \times A : a - b = t\}|.$$

由于 $r_{A-A}(t) = r_{A-A}(-t)$，不失一般性，我们可以假设 t 为正数。

记 $A(t) = A \cap (A - t)$，并注意到 $|A(t)| = r_{A-A}(t)$。还要注意， $A(t)$ $A(t) + t \subset A$。应用推论 4.2，其中取

$$X = A(t), \quad \lambda = t.$$

由此可得

$$\left|\frac{A^{(8)}}{A^{(7)}}\right| \geq \max\left\{\left|\frac{A(t)^{(8)}}{A(t)^{(7)}}\right|, \left|\frac{(A(t)+t)^{(5)}}{(A(t)+t)^{(4)}}\right|\right\} \gtrsim |A(t)|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{54}}.$$

然而，在乘法情形下应用定理 2.3，并利用假设 $|AA| \leq K|A|$，可得

$$|A(t)|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{54}} \lesssim K^{15}|A|.$$

对该不等式作一番变形，即完成证明。

□

5. Proof of Theorem 1.1

本节将证明定理 1.1。事实上，我们将证明以下更一般的结论，只需令 $f(x) = \ln x$，即可推出定理 1.1。文中给出了定理 1.1 中常数 c 的一个具体取值，即 $c = \frac{1}{162}$，但此处并未充分探讨如何优化该常数。

定理 5.1. 令 $a \in \mathbb{R}$，并令 I 表示区间 $I = (a, \infty)$。假设 $A \subset I$ 是一个有限集。假设 $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ 是严格凸函数或凹函数。还假设，对于任意 $d \in (0, \infty)$，函数 $f_d^{-1} : J \to I$ 是 3-凸的。则

$$\max\{|16A|, |13f(A)|\} \gtrsim |A|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{162}}.$$

证明. 将定理 2.2 应用于 $k=8$，可得如下界

$$|8A||8f(A)| \gg |A|^{3-\frac{1}{128}}. \tag{12}$$

由此可知，我们可以假设

$$|8A| \geq |A|^{\frac{3}{2}-\frac{1}{64}}. \tag{13}$$

事实上，若 (13) 不成立，则由 (12) 可得界 $|8f(A)| \gg |A|^{\frac{3}{2}+\frac{1}{128}}$，这比定理 5.1 陈述中所声称的结果更强。

应用两次定理 2.4，可得界

$$|8A-7A| \leq |8A-8A| \leq \frac{|8A+8A|^2}{|8A|} = \frac{|16A|^2}{|8A|}$$

类似地，

$$|5f(A)-4f(A)| \leq \frac{|13f(A)|^2}{|8f(A)|}.$$

将这些界与 (4) 结合，可得

$$\frac{|16A|^{32}}{|8A|^{16}} \cdot \frac{|13f(A)|^{22}}{|8f(A)|^{11}} \geq |8A-7A|^{16}|5f(A)-4f(A)|^{11} \gtrsim |A|^{41}.$$

重排此不等式，再应用 (12)，得到

$$|16A|^{32}|13f(A)|^{22} \gtrsim |A|^{41}(|A|^{3-\frac{1}{128}})^{11}|8A|^5.$$

应用（13）并整理后可得

$$|16A|^{32}|13f(A)|^{22} \gtrsim |A|^{81+\frac{1}{2}-\frac{21}{128}} \geq |A|^{81+\frac{1}{3}}.$$

最后，所声称的界由鸽巢原理得出。 □

Acknowledgements

作者获得了奥地利科学基金 FWF 项目 P 34180 的资助。感谢 Brandon Hanson、Audie Warren 和 Dmitrii Zhelezov 的宝贵交流。

References

[1] J. Bourgain 和 M.-C. Chang，《关于整数的 k 重和集与积集的大小》，J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), 473–497。[2] P. J. Bradshaw，《高阶凸函数的和集增长》，arXiv:2111.03586。[3] G. Elekes、M. Nathanson 和 I. Ruzsa，《凸性与和集》，J Number Theory. 83 (1999), 194-201。[4] P. Erd˝os 和 E. Szemer´edi，《关于整数的和与积》，载于《纯数学研究》，Birkh¨auser，巴塞尔 (1983), 213-218。[5] B. Hanson、O. Roche-Newton 和 M. Rudnev，《高阶凸性与迭代和集》，Combinatorica 42 (2022), no. 1, 71-85。[6] B. Hanson、O. Roche-Newton 和 S. Senger，《凸性、超二次增长与点积》，即将在 J. London Math. Soc. 发表。[7] O. Roche-Newton 和 D. Zhelezov，《凸性、初等方法与距离》，即将出版。[8] M. Rudnev 和 S. Stevens，《和积问题最新进展》，Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 173 (2022), no. 2, 411-430。

[9] I. Z. Ruzsa、G. Shakan、J. Solymosi 和 E. Szemer´edi, 《关于互异连续差》, 《组合与加法数论 IV》425-434, Springer Proc. Math. Stat., 347, Springer, 查姆 (2021)。[10] D. Zhelezov 和 D. P´alv¨olgyi, 《查询复杂度与多项式 Freiman–Ruzsa 猜想》, Adv. Math. 392 (2021), 402-408。

Institute for Algebra, Johannes Kepler Universität, Linz, Austria
电子邮件地址：o.rochenewton@gmail.com