arXiv:2304.00856v1 [math.AP] 3 Apr 2023

纳维–斯托克斯方程的整体正则轴对称解。第1部分

Wojciech M. Zaj˛aczkowski

波兰科学院数学研究所，´Sniadeckich 8, 00-656华沙，波兰，电子邮箱：wz@impan.pl；军事技术大学控制论学院数学与密码学研究所，S. Kaliskiego 2, 00-908华沙，波兰

摘要

本文研究有界圆柱体 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中的纳维–斯托克斯方程轴对称解，该圆柱体具有对称轴。 S_1 是与对称轴平行的圆柱体边界， S_2 则与其垂直。我们将边界分为两部分 S_2。为简便起见，假设 S_2上满足周期边界条件。在 S_1 上，我们要求速度法向分量、速度角向分量以及涡量角向分量为零。我们证明了全局正则解的存在性。为证明这一点，需要速度沿对称轴方向的坐标分量在该轴上为零。需要强调的是，在证明整体正则轴对称解的过程中，对流函数使用加权空间的技巧起着关键作用。

关键词：纳维–斯托克斯方程、轴对称解、柱形区域、全局正则解的存在性

1 引言

本文证明了在圆柱形区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中纳维–斯托克斯方程的全局正则轴对称解的存在性：

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 < R^2, |x_3| < a\},$$

其中， a、 R 为给定的正数。我们用 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 表示笛卡尔坐标。假设 x_3-轴是 Ω 的对称轴。

此外，

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R, x_3 \in (-a, a)\},$$
$$S_2(a_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x_1^2 + x^2} < R, x_3 = a_0 \in \{-a, a\}\},$$

其中， S_1 平行于对称轴， $S_2(a_0)$与其垂直。 $S_2(a_0)$与对称轴相交于 a_0。

为描述所考虑的问题，我们通过以下关系引入柱坐标r、 φ、 z

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z. \tag{1.1}$$

以下正交归一系

$$\bar{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \quad \bar{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \bar{e}_z = (0, 0, 1) \tag{1.2}$$

与柱坐标相对应。

轴对称运动中的任意向量 u 均可分解如下

$$u = u_r(r, z, t)\bar{e}_r + u_\varphi(r, z, t)\bar{e}_\varphi + u_z(r, z, t)\bar{e}_z, \tag{1.3}$$

其中， u_r、 u_φ、 u_z 是 u的柱坐标。

因此，速度 v 和涡量 $\omega = \operatorname{rot} v$ 分解为以下形式

$$v = v_r(r, z, t)\bar{e}_r + v_\varphi(r, z, t)\bar{e}_\varphi + v_z(r, z, t)\bar{e}_z \tag{1.4}$$

and

$$\omega = \omega_r(r, z, t)\bar{e}_r + \omega_\varphi(r, z, t)\bar{e}_\varphi + \omega_z(r, z, t)\bar{e}_z. \tag{1.5}$$

本文旨在证明该问题存在全局正则的轴对称解

$$\begin{aligned}
&v_{,t} + v \cdot \nabla v - \nu\Delta v + \nabla p = f && \text{in } \Omega^T = \Omega \times (0, T),\\
&\operatorname{div} v = 0 && \text{in } \Omega^T,\\
&v \text{ satisfies periodic boundary conditions} && \text{on } S_2^T = S_2 \times (0, T),\\
&v \cdot \bar{n}|_{S_1} = 0, \quad \omega_\varphi|_{S_1} = 0, \quad v_\varphi|_{S_1} = 0 && \text{on } S_1^T = S_1 \times (0, T),\\
&v|_{t=0} = v(0) && \text{in } \Omega,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

其中，$v=(v_1(x,t)\ v_2(x,t)\ v_3(x,t))\in\mathbb{R}^3$ 是流体的速度，$p=p(x,t)\in\mathbb{R}$ 是压力，$f=(f_1(x,t)\ f_2(x,t)\ f_3(x,t))\in\mathbb{R}^3$ 是外力场，$\nu>0$ 是常数黏性系数。

将问题 (1.6) 用速度的柱坐标表示，得到

$$
\begin{aligned}
&v_{r,t}+v\cdot\nabla v_r-\frac{v_\varphi^2}{r}-\nu\Delta v_r+\nu\frac{v_r}{r^2}=-p_{,r}+f_r,\\
&v_{\varphi,t}+v\cdot\nabla v_\varphi+\frac{v_r}{r}v_\varphi-\nu\Delta v_\varphi+\nu\frac{v_\varphi}{r^2}=f_\varphi,\\
&v_{z,t}+v\cdot\nabla v_z-\nu\Delta v_z=-p_{,z}+f_z,\\
&(rv_r)_{,r}+(rv_z)_{,z}=0\\
&v_r|_{S_1}=0,\quad v_\varphi|_{S_1}=0,\quad v_{r,z}-v_{z,r}|_{S_1}=0,\\
&v_r|_{t=0}=v_r(0),\quad v_\varphi|_{t=0}=v_\varphi(0),\quad v_z|_{t=0}=v_z(0),
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

其中我们在 S_2 上采用周期边界条件，并且

$$
\begin{aligned}
&v\cdot\nabla=(v_r\bar e_r+v_z\bar e_z)\cdot\nabla=v_r\partial_r+v_z\partial_z,\\
&\Delta u=\frac{1}{r}(ru_{,r})_{,r}+u_{,zz}.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

将问题 (1.1) 用涡量的柱坐标表示，可得

$$
\begin{aligned}
&\omega_{r,t}+v\cdot\nabla\omega_r-\nu\Delta\omega_r+\nu\frac{\omega_r}{r^2}=\omega_r v_{r,r}+\omega_z v_{r,z}+F_r,\\
&\omega_{\varphi,t}+v\cdot\nabla\omega_\varphi-\frac{v_r}{r}\omega_\varphi-\nu\Delta\omega_\varphi+\nu\frac{\omega_\varphi}{r^2}=\frac{2}{r}v_\varphi v_{\varphi,z}+F_\varphi,\\
&\omega_{z,t}+v\cdot\nabla\omega_z-\nu\Delta\omega_z=\omega_r v_{z,r}+\omega_z v_{z,z}+F_z,\\
&\omega_r|_{t=0}=\omega_r(0),\quad \omega_\varphi|_{t=0}=\omega_\varphi(0),\quad \omega_z|_{t=0}=\omega(0)
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

并且我们有边界条件 $(1.7)_5$ 在 S_1 上，以及在 S_2上的周期边界条件，其中 $F=\mathrm{rot}\,f$ 并且

$$
F=F_r(r,z,t)\bar e_r+F_\varphi(r,z,t)\bar e_\varphi+F_z(r,z,t)\bar e_z.
\tag{1.10}
$$

函数

$$
u=rv_\varphi
\tag{1.11}
$$

称为旋流。它是该问题的一个解

$$
\begin{aligned}
&u_{,t}+v\cdot\nabla u-\nu\Delta u+\frac{2\nu}{r}u_{,r}=rf_\varphi\equiv f_0,\\
&u|_{S_1}=0 \text{ and } u \text{ satisfies periodic boundary conditions on } S_2,\\
&u|_{t=0}=u(0).
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

涡量的柱坐标分量可以用速度的柱坐标分量和旋流表示如下

$$
\begin{aligned}
&\omega_r = -v_{\varphi,z} = -\frac{1}{r}u_{,z},\\
&\omega_\varphi = v_{r,z} - v_{z,r},\\
&\omega_z = \frac{1}{r}(rv_\varphi)_{,r} = v_{\varphi,r} + \frac{v_\varphi}{r} = \frac{1}{r}u_{,r}.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

方程 (1.7)$_4$ 意味着流函数 ψ 的存在，它是以下问题的解

$$
\begin{aligned}
&-\Delta\psi + \frac{\psi}{r^2} = \omega_\varphi,\\
&\psi|_{S_1} = 0,\\
&\psi \text{ satisfies periodic boundary conditions on } S_2.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

此外，速度的柱坐标分量可以用流函数表示如下

$$
\begin{aligned}
&v_r = -\psi_{,z}, \quad v_z = \frac{1}{r}(r\psi)_{,r} = \psi_{,r} + \frac{\psi}{r},\\
&v_{r,r} = -\psi_{,zr}, \quad v_{r,z} = -\psi_{,zz},\\
&v_{z,z} = \psi_{,rz} + \frac{\psi_{,z}}{r}, \quad v_{z,r} = \psi_{,rr} + \frac{1}{r}\psi_{,r} - \frac{\psi}{r^2}.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

引入这一对

$$
(\Phi, \Gamma) = (\omega_r/r, \omega_\varphi/r). \tag{1.16}
$$

[CFZ] 中的公式 (1.6)意味着量 (1.16) 满足以下方程

$$
\Phi_{,t} + v\cdot\nabla\Phi - \nu\left(\Delta + \frac{2}{r}\partial_r\right)\Phi - (\omega_r\partial_r + \omega_z\partial_z)\frac{v_r}{r} = F_r/r \equiv \bar{F}_r \tag{1.17}
$$

and

$$
\Gamma_{,t} + v\cdot\nabla\Gamma - \nu\left(\Delta + \frac{2}{r}\partial_r\right)\Gamma + 2\frac{v_\varphi}{r}\Phi = F_\varphi/r \equiv \bar{F}_\varphi. \tag{1.18}
$$

我们为 (1.17) 和 (1.18) 的解补充以下初始条件和边界条件

$$
\begin{aligned}
&\Phi|_{S_1} = 0, \quad \Gamma|_{S_1} = 0, \ \Phi, \ \Gamma \text{ satisfy the periodic}\\
&S_2 \text{上的边界条件,}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi(0), \quad \Gamma|_{t=0} = \Gamma(0). \tag{1.20}$$

接下来，我们用 $\psi_1 = \psi/r$ 表示速度的柱坐标分量

$$\begin{aligned} &v_r = -r\psi_{1,z}, && v_z = (r\psi_1)_{,r} + \psi_1 = r\psi_{1,r} + 2\psi_1, \\ &v_{r,r} = -\psi_{1,z} - r\psi_{1,rz}, && v_{r,z} = -r\psi_{1,zz}, \\ &v_{z,z} = r\psi_{1,rz} + 2\psi_{1,z}, && v_{z,r} = 3\psi_{1,r} + r\psi_{1,rr}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

本文旨在证明问题 (1.6) 存在整体正则轴对称解。为此，我们需要找到一个全局估计，以保证全局正则解的存在。

函数 ψ_1 是该问题的一个解

$$\begin{aligned} &-\Delta\psi_1 - \frac{2}{r}\psi_{1,r} = \omega_1 \quad \text{in} \ \ \Omega = (0,R)\times(-a,a), \\ &\psi_1|_{r=R} = 0, \\ &\psi_1 \text{ satisfies the periodic boundary conditions on } S_2, \end{aligned} \tag{1.22}$$

其中

$$\omega_1 = \omega_\varphi/r. \tag{1.23}$$

我们有 $\omega_1 = \Gamma$。

为陈述主要结果，我们先引入一些假设。

假设 1.1. 假设以下量均为有限值:

$$\begin{aligned} &D_1 = \|f\|_{L_2(\Omega^t)} + \|v(0)\|_{L_2(\Omega)}, \\ &D_2 = \|f_0\|_{L_{\infty,1}(\Omega^t)} + \|u(0)\|_{L_\infty(\Omega)}, \\ &f_0 = rf_\varphi, \quad u = rv_\varphi, \\ &D_3^2 = D_1^2 D_2^2 + \|u_{,z}(0)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f_0\|^2_{L_2(\Omega^t)}, \\ &D_4^2 = D_1^2(1+D_2) + \|u_{,r}(0)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f_0\|^2_{L_2(\Omega^t)} + \|f_0\|_{L_2(0,t;L_{4/3}(S_1))}, \end{aligned}$$

其中， D_1、 D_2 分别在（2.1）和（2.7）中引入， D_3、 D_4 分别在（5.2）和（5.3）中引入。令

$$\begin{aligned} D_5 &= D_2(D_1 + D_2 + D_3), \\ D_6 &= D_2^{1-\varepsilon_0} D_3, \end{aligned}$$

其中 ε_0 是任意小的正数。此外,

$$\begin{aligned} D_7 = \|F_r\|^2_{L_2(0,t;L_{6/5}(\Omega))} + \|F_z\|^2_{L_2(0,t;L_{6/5}(\Omega))} \\ + \|\omega_r(0)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\omega_z(0)\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

定义见引理 6.1。

接下来,

$$D_8 = \phi(D_2)(\|\bar{F}_r\|^2_{L_2(0,t;L_{6/5}(\Omega))} + \|\bar{F}_\varphi\|^2_{L_2(0,t;L_{6/5}(\Omega))}) + \|\Phi(0)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Gamma(0)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

其中， $\bar{F}_r = F_r/r$、 $\bar{F}_\varphi = F_\varphi/r$、 $\Phi = \frac{\omega_r}{r}$、 $\Gamma = \frac{\omega_\varphi}{r}$ 和 D_8 出现在（4.1）中。

在引理 4.5 中定义了以下量

$$D_9(12) = 12\|f_\varphi\|_{L_{12}(0,t;L_{36/25}(\Omega))} + \|v_\varphi(0)\|_{L_{12}(\Omega)}.$$

最后，在引理 4.7 中我们引入了该量

$$D_{10} = \|f_\varphi/r\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))} + \|v_\varphi(0)\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

主要结果

定理 1.2。假设假设 1.1 成立。则存在一个递增的正函数 ϕ ，使得

$$\|\Phi\|_{V(\Omega^t)} + \|\Gamma\|_{V(\Omega^t)} \le \phi(D_1, \cdots, D_{10}). \tag{1.24}$$

注 1.3. 估计 (1.24) 表明，只要数据具有足够的正则性，问题 (1.6) 的解就具有任意阶正则性。

为证明 (1.24)，我们需要 ψ_1 和 v_z 在对称轴上消失。定理 1.2 的证明分为以下几个步骤:

1. 在引理 2.2 和引理 2.3 中，我们证明问题 (1.6) 的解满足能量估计，并证明旋流的 L_∞-估计。

2. 在引理 2.5 中，我们证明：对于给定的 $\omega_1 = \omega/r$，问题 (1.22) 存在关于流函数 ψ_1 的弱解。问题 (1.22) 的解具有 $\psi_1 = \psi/r$ 的形式。引理 2.5 中证明的问题 (1.22) 的弱解在对称轴上不消失。

3. 在第 3 节中，对于给定的 $\omega_1 \in H^1(\Omega)$，我们得到了许多关于 ψ_1 的估计。在引理 3.3 中，我们推导出了这样一个估计： ψ_1 必须在对称轴上消失。我们在 (1.24) 的证明中需要这个估计。引理 3.3 的结果表明，引理 2.5 中证明存在的弱解必须在对称轴上消失。根据流函数的性质，这意味着 v_z 也在对称轴上消失。本节使用了来自 [NZ] 的加权索 Sobolev 空间理论。

4. 在第 4 节中，我们得以推导出一个关于.....的估计

$$\|\Phi\|_{V(\Omega^t)} + \|\Gamma\|_{V(\Omega^t)} \tag{1.25}$$

关于 $\|v_\varphi\|_{L_\infty(0,t;L_{12}(\Omega))}$ 和 $\|v_\varphi\|^{\varepsilon_0}_{L_\infty(\Omega^t)}$，其中 ε_0 可以任意小。根据引理 6.1 和不等式 (2.12)，该估计成立。

5. 最后，在第 4 节末尾和第 5 节中，我们根据 (1.25) 的界估计了 $\|v_\varphi\|_{L_\infty(0,t;L_{12}(\Omega))}$ 和 $\|v_\varphi\|_{L_\infty(\Omega^t)}$ 。

轴对称解的正则性问题在 Navier-Stokes 方程研究中由来已久。关于零旋流情形的首批正则性结果由 O. A. Ladyzhenskaya 和 Ukhovskii-Yudovich 分别在 [L2] 和 [UY] 中得到。关于非零旋流情形的许多参考文献可见于 [NZ1]。

我们必须强调，之所以能够证明定理 1.2，是因为采用了 [NZ] 中发展的加权索 Sobolev 空间理论。

2 记号与辅助结果

首先，我们介绍一些记号

定义 2.1. 我们采用以下记号表示勒贝格空间和索博列夫空间

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = |u|_{p,\Omega}, \quad \|u\|_{L_p(\Omega^t)} = |u|_{p,\Omega^t},$$
$$\|u\|_{L_{p,q}(\Omega^t)} = \|u\|_{L_q(0,t;L_p(\Omega))} = |u|_{p,q,\Omega^t},$$

其中 $p, q \in [1, \infty]$。接下来

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \|u\|_{s,\Omega}, \quad \|u\|_{W^s_p(\Omega)} = \|u\|_{s,p,\Omega},$$
$$\|u\|_{L_q(0,t;W^k_p(\Omega))} = \|u\|_{k,p,q,\Omega^t}, \quad \|u\|_{k,p,p,\Omega^t} = \|u\|_{k,p,\Omega^t},$$

其中 $s, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $H^s(\Omega) = W^s_2(\Omega)$。

我们需要能量型空间 $V(\Omega^t)$，以适当地描述纳维–斯托克斯方程的弱解

$$\|u\|_{V(\Omega^t)} = |u|_{2,\infty,\Omega^t} + |\nabla u|_{2,\Omega^t}.$$

我们回顾一下如下定义的加权索 Sobolev 空间

$$\|f\|_{H^k_\mu(\mathbb{R}_+)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} \sum_{j=0}^{k} |\partial^j_r f|^2 r^{2(\mu+j-k)} r dr \right)^{1/2}$$

and

$$\|f\|_{H^k_\mu(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{k} |D^\alpha_{r,z} f|^2 r^{2(\mu+|\alpha|-k)} r dr dz \right)^{1/2},$$

其中 Ω 包含对称轴，$D^\alpha = \partial_r^{\alpha_1} \partial_z^{\alpha_2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$,$\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$。此外，我们有

$$H^0_0(\Omega) = L_{2,0}(\Omega) = L_2(\Omega),$$
$$H^0_\mu(\Omega) = L_{2,\mu}(\Omega)$$

and

$$\|f\|_{L_{2,\mu}(\Omega)} = |f|_{2,\mu,\Omega}.$$

引理 2.2. 设 $f \in L_{2,\,1}(\Omega^t)$, $v(0) \in L_2(\Omega)$。则 (1.7) 的解满足以下估计

$$\begin{aligned} &\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \nu \int\limits_{\Omega^t} (|\nabla v_r|^2 + |\nabla v_\varphi|^2 + |\nabla v_z|^2) dx dt' \\ &+ \nu \int\limits_{\Omega^t} \left(\frac{v_r^2}{r^2} + \frac{v_z^2}{r^2} \right) dx dt' \le 3\|f\|^2_{L_{2,1}(\Omega^t)} + 2\|v(0)\|^2_{L_2(\Omega)} \equiv D_1^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

证明。将 $(1.7)_1$ 乘以 v_r，将 $(1.7)_2$ 乘以 v_φ，将 $(1.7)_3$ 乘以 v_z，将所得结果相加并在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega (v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2) dx + \nu \int\limits_\Omega (|\nabla v_r|^2 + |\nabla v_\varphi|^2 + |\nabla v_z|^2) dx \\ &+ \nu \int\limits_\Omega \left(\frac{v_r^2}{r^2} + \frac{v_\varphi^2}{r^2} \right) dx + \int\limits_\Omega (p_{,r} v_r + p_{,z} v_z) dx \\ &= \int\limits_\Omega (f_r v_r + f_\varphi v_\varphi + f_z v_z) dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.2) 左端的最后一项由于连续性方程 $(1.7)_4$ 和边界条件而消失。

利用 $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2$, (2.2) 可写成

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{L_2(\Omega)} + \nu \int\limits_\Omega (|\nabla v_r|^2 + |\nabla v_\varphi|^2 + |\nabla v_z|^2) dx \\ &+ \nu \int\limits_\Omega \left(\frac{v_r^2}{r^2} + \frac{v_\varphi^2}{r^2} \right) dx = \int\limits_\Omega (f_r v_r + f_\varphi v_\varphi + f_z v_z) dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

对 (2.3) 的等式右侧应用 H¨older 不等式可得

$$\frac{d}{dt}\|v\|_{L_2(\Omega)} \le \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.4}$$

其中 $f^2 = f_r^2 + f_\varphi^2 + f_z^2$。

对 (2.4) 关于时间积分，得到

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \le \|f\|_{L_{2,1}(\Omega^t)} + \|v(0)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.5}$$

对 (2.3) 关于时间积分，在等式右侧使用 H¨older 不等式，并利用 (2.5)，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \nu \int\limits_{\Omega^t} (|\nabla v_r|^2 + |\nabla v_\varphi|^2 + |\nabla v_z|^2) dx dt' \\ &\quad + \nu \int\limits_{\Omega^t} \left(\frac{v_r^2}{r^2} + \frac{v_\varphi^2}{r^2} \right) dx dt' \le \|f\|_{L_{2,1}(\Omega^t)} (\|f\|_{L_{2,1}(\Omega^t)} \\ &\quad + \|v(0)\|_{L_2(\Omega)}) + \frac{1}{2}\|v(0)\|^2_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

上述不等式推出 (2.1)。证明至此结束。 □

引理 2.3。考虑问题 (1.12)。假设 $f_0 \in L_{\infty,\,1}(\Omega^t)$ 且 $u(0) \in L_\infty(\Omega)$。那么

$$\|u(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|f_0\|_{L_{\infty,1}(\Omega^t)} + \|u(0)\|_{L_\infty(\Omega)} \equiv D_2. \tag{2.7}$$

证明。将 $(1.12)_1$ 乘以 $u|u|^{s-2}$, $s > 2$, 在 Ω 上积分并分部积分，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s}\frac{d}{dt}\|u\|^s_{L_s(\Omega)} + \frac{4\nu(s-1)}{s^2}\||\nabla|u|^{s/2}\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\nu}{s}\int\limits_\Omega (|u|^s)_{,r} dr dz \\ &= \int\limits_\Omega f_0 u|u|^{s-2} dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

由 [LW] 可得 $u|_{r=0} = 0$。此外，利用边界条件，由 (2.8) 可知

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L_s(\Omega)} \le \|f_0\|_{L_s(\Omega)}. \tag{2.9}$$

对时间进行积分并令 $s \to \infty$ 通过，可得 (2.7)。证明至此结束。

□

引理 2.4. 假设估计 (2.1) 和 (2.7) 成立，则

$$\|v\|_{L_4(\Omega^t)} \le D_1^{1/2} D_2^{1/2}. \tag{2.10}$$

证明。我们有

$$\int\limits_{\Omega^t} |v_\varphi|^4 dxdt' = \int\limits_{\Omega^t} r^2 v_\varphi^2 \frac{v_\varphi^2}{r^2} dxdt' \le \|r v_\varphi\|^2_{L_\infty(\Omega^t)} \int\limits_{\Omega^t)} \frac{v_\varphi^2}{r^2} dxdt' \le D_2^2 D_1^2.$$

这推出了 (2.10)，并完成了证明。 □

引理 2.5。考虑问题 (1.22)。假设 $\omega_1 \in L_{6/5}(\Omega)$，其中 $\Omega = (0, R) \times (-a, a)$。那么存在问题 (1.22) 的一个弱解，使得 $\psi_1 \in H^1(\Omega)$，且估计

$$\|\psi_1\|_{1,\Omega} \le c|\omega_1|_{6/5,\Omega} \tag{2.11}$$

成立。

证明。将 $(1.22)_1$ 乘以 ψ_1，并利用边界条件，我们得到

$$\|\psi_1\|^2_{1,\Omega} + \int\limits_{-a}^{a} \psi_1^2|_{r=R} dz = \int\limits_{\Omega} \omega_1 \psi_1 dx.$$

对等式右侧应用 H¨older 不等式和杨氏不等式，可推出 (2.11)。弗雷德霍姆定理保证了存在性。证明至此结束。 □

注 2.6. 我们必须强调，方程 (1.22) 的弱解 ψ_1 在对称轴上不为零。这也可由 [LW]推出。

由 [CFZ] 中的引理 2.4，我们还有

引理 2.7. 设 $f \in C^\infty((0, R) \times (-a, a))$，$f|_{r \ge R} = 0$。设 $1 < r \le 3$，$0 \le s \le r$，$s \le 2$，$q \in \left[r, \frac{r(3-s)}{3-r}\right]$。则存在正常数$c = c(s, r)$，使得

$$\left(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^q}{r^s} dx \right)^{1/q} \le c |f|^{\frac{3-s}{q} - \frac{3}{r} + 1}_{r,\Omega} |\nabla f|^{\frac{3}{r} - \frac{3-s}{q}}_{r,\Omega}, \tag{2.12}$$

其中 f 不依赖于 φ。

记号 2.8（见 [NZ]）。首先，我们引入傅里叶变换。设$f \in S(\mathbb{R})$，其中 $S(\mathbb{R})$ 是由定义在 $\mathbb{R}$上的所有复值快速衰减无穷次可微函数构成的施瓦茨空间。那么， f 的傅里叶变换及其逆变换定义为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda\tau} f(\tau) d\tau, \quad \check{\hat{f}}_{(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\tau} \hat{f}(\lambda) d\lambda \tag{2.13}$$

$\check{}$ $\hat{}$ $\check{}$和 $f = f = f$。

用 $H^k_\mu(\mathbb{R}_+)$ 表示一个加权空间，其范数为

$$\|u\|_{H^k_\mu(\mathbb{R}_+)} = \sum_{i=0}^{k} \int_{\mathbb{R}_+} |\partial_r^i u|^2 r^{2(\mu-k+i)} r dr.$$

根据变换 $\tau = -\ln\, r$, $r = e^{-\tau}$, $dr = -e^{-\tau} d\tau$，我们有如下等价关系

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{\mathbb{R}_+} |\partial_r^i u|^2 r^{2(\mu-k+i)} r dr \sim \sum_{i=0}^{k} \int_{\mathbb{R}} |\partial_\tau^i u'|^2 e^{2h\tau} d\tau \tag{2.14}$$

该关系对 $u'(\tau) = u'(-\ln\, r) = u(r)$, $h = k + 1 - \mu$ 成立。

In 根据傅里叶变换 (2.13) 和帕塞瓦尔恒等式，我们有

$$\int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} \sum_{j=0}^{k} |\lambda|^{2j} |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{k} |\partial_\tau^j u|^2 e^{2h\tau} d\tau. \tag{2.15}$$

3 流函数 ψ_1 的估计

回顾一下， ψ_1 是该问题的一个解

(3.1)

$$-\psi_{1,rr} - \psi_{1,zz} - \frac{3}{r}\psi_{1,r} = \omega_1 \qquad \text{in } \Omega = (0, R) \times (-a, a),$$

$\psi_1|_{r=R} = 0$,

ψ_1 在 S_2. 上满足周期性边界条件

引理 3.1. 对于方程 (3.1) 的充分正则解，以下估计成立

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}(\psi_{1,rr}^2+\psi_{1,rz}^2+\psi_{1,zz}^2)dx+\int_{\Omega}\frac{1}{r^2}\psi_{1,r}^2dx+\int_{-a}^{a}\psi_{1,z}^2|_{r=0}dz\\&+\int_{-a}^{a}\psi_{1,r}^2|_{r=R}dz\le c|\omega_1|_{2,\Omega}^2\end{aligned}\tag{3.2}$$

and

$$\int_{\Omega}(\psi_{1,zzr}^2+\psi_{1,zzz}^2)dx+\int_{-a}^{a}\psi_{1,zz}^2|_{r=0}dz\le c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}^2\tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}(\psi_{1,rrz}^2+\psi_{1,rzz}^2+\psi_{1,zzz}^2)dx+\int_{-a}^{a}\psi_{1,zz}^2|_{r=0}dz\\&+\int_{-a}^{a}\psi_{1,rz}^2|_{r=R}dz\le c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}^2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

证明。首先证明 (3.2)。将 $(3.1)_1$ 乘以 $\psi_{1,\ zz}$ 并在 Ω 上积分，得到

$$-\int_{\Omega}\psi_{1,rr}\psi_{1,zz}dx-\int_{\Omega}\psi_{1,zz}^2dx-3\int_{\Omega}\frac{1}{r}\psi_{1,r}\psi_{1,zz}dx=\int_{\Omega}\omega_1\psi_{1,zz}dx.\tag{3.5}$$

对第一项关于 r 进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega}(\psi_{1,r}\psi_{1,zz}r)_{,r}drdz+\int_{\Omega}\psi_{1,r}\psi_{1,zzr}dx+\int_{\Omega}\psi_{1,r}\psi_{1,zz}drdz\\&-\int_{\Omega}\psi_{1,zz}^2dx-3\int_{\Omega}\psi_{1,r}\psi_{1,zz}drdz=\int_{\Omega}\omega_1\psi_{1,zz}dx.\end{aligned}$$

继续可得

$$\begin{aligned}&-\int_{-a}^{a}\psi_{1,r}\psi_{1,zz}r\Big|_{r=0}^{r=R}dz+\int_{\Omega}\psi_{1,r}\psi_{1,zzr}dx-\int_{\Omega}\psi_{1,zz}^2dx\\&-2\int_{\Omega}\psi_{1,r}\psi_{1,zz}drdz=\int_{\Omega}\omega_1\psi_{1,zz}dx.\end{aligned}\tag{3.6}$$

(3.6) 中的第一个积分为零，因为 $\psi_{1,r}r|_{r=0} = 0$, $\psi_{1,zz}|_{r=R} = 0$。对 (3.6) 左端最后一项关于 z 进行分部积分，并利用 S_2 上的周期边界条件，得到

$$\int_\Omega \psi_{1,r}\psi_{1,zzr}dx - \int_\Omega \psi_{1,zz}^2 dx + 2\int_\Omega \psi_{1,rz}\psi_{1,z}drdz = \int_\Omega \omega_1\psi_{1,zz}dx. \tag{3.7}$$

对 (3.7) 中的第一项关于 z 分部积分，并利用 S_2 上的边界条件，得到

$$\int_\Omega (\psi_{1,zr}^2 + \psi_{1,zz}^2)dx - \int_\Omega (\psi_{1,z}^2)_{,r}drdz = -\int_\Omega \omega_1\psi_{1,zz}dx, \tag{3.8}$$

其中，等式左侧的最后一项等于

$$-\int_{-a}^{a} \psi_{1,z}^2\Big|_{r=0}^{r=R} dz = \int_{-a}^{a} \psi_{1,z}^2\Big|_{r=0} dz$$

因为 $\psi_{1,\ z}|_{r=R} = 0$。将此代入 (3.8)，并对 (3.8) 的等式右侧应用赫¨尔德不等式和杨氏不等式，得到

$$\int_\Omega (\psi_{1,rz}^2 + \psi_{1,zz}^2)dx + \int_{-a}^{a} \psi_{1,z}^2|_{r=0}dz \le c|\omega_1|_{2,\Omega}^2. \tag{3.9}$$

将 $(3.1)_1$ 乘以 $\frac{1}{r}\psi_{1,\ r}$ 并在 Ω 上积分。于是有 (3.10
)

$$3\int_\Omega \left|\frac{1}{r}\psi_{1,r}\right|^2 dx = -\int_\Omega \psi_{1,rr}\frac{1}{r}\psi_{1,r}dx - \int_\Omega \psi_{1,zz}\frac{1}{r}\psi_{1,r}dx - \int_\Omega \omega_1\frac{1}{r}\psi_{1,r}dx.$$

(3.10) 的等式右侧的第一项等于

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_r\psi_{1,r}^2 drdz = -\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \psi_{1,r}^2\Big|_{r=0}^{r=R} dz = -\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \psi_{1,r}^2|_{r=R}dz,$$

因为 $\psi_{1,\ r}|_{r=0} = 0$ （见 [LW]）。对 (3.10) 等式右侧的最后两项应用 Hölder 不等式和 Young 不等式可得

$$\int_\Omega \left|\frac{1}{r}\psi_{1,r}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \psi_{1,r}^2\Big|_{r=R} dz \le c(|\psi_{1,zz}|_{2,\Omega}^2 + |\omega_1|_{2,\Omega}^2). \tag{3.11}$$

不等式 (3.9) 和 (3.11) 推出如下估计

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\psi_{1,rz}^2+\psi_{1,zz}^2)dx+\int_\Omega\left|\frac{1}{r}\psi_{1,r}\right|^2dx+\int_{-a}^{a}\psi_{1,z}^2\Big|_{r=0}dz\\&+\int_{-a}^{a}\psi_{1,r}^2\Big|_{r=R}dz\le c|\omega_1|_{1,\Omega}^2.\end{aligned}\tag{3.12}$$

由 $(3.1)_1$ 可得

$$|\psi_{1,rr}|_{2,\Omega}^2\le|\psi_{1,zz}|_{2,\Omega}^2+3\left|\frac{1}{r}\psi_{1,r}\right|_{2,\Omega}^2+|\omega_1|_{2,\Omega}^2.\tag{3.13}$$

不等式 (3.12) 和 (3.13) 推出 (3.2)。

现在，我们证明 (3.3)。对 $(3.1)_1$ 关于 z求导，乘以$-\psi_{1,\ zzz}$ 并在 Ω 上积分。于是得到

$$\int_\Omega\psi_{1,rrz}\psi_{1,zzz}dx+\int_\Omega\psi_{1,zzz}^2dx+3\int_\Omega\frac{1}{r}\psi_{1,rz}\psi_{1,zzz}dx=-\int_\Omega\omega_{1,z}\psi_{1,zzz}dx.\tag{3.14}$$

对 z 分部积分可得

$$\int_\Omega\psi_{1,rrz}\psi_{1,zzz}dx=\int_\Omega(\psi_{1,rrz}\psi_{1,zz})_{,z}dx-\int_\Omega\psi_{1,rrzz}\psi_{1,zz}dx,\tag{3.15}$$

其中，第一个积分由于S_2上的周期边界条件而消失。对 (3.15) 中第二个积分关于 r 分部积分，得到

$$-\int_\Omega(\psi_{1,rzz}\psi_{1,zz}r)_{,r}drdz+\int_\Omega\psi_{1,rzz}^2dx+\int_\Omega\psi_{1,rzz}\psi_{1,zz}drdz,$$

其中，第一个积分消失，因为

$$\psi_{1,rzz}r|_{r=0}=0,\quad\psi_{1,zz}|_{r=R}=0.$$

鉴于上述考虑，(3.14) 可写为

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\psi_{1,rzz}^2+\psi_{1,zzz}^2)dx+\int_\Omega\psi_{1,rzz}\psi_{1,zz}drdz\\&+3\int_\Omega\psi_{1,rz}\psi_{1,zzz}drdz=-\int_\Omega\omega_{1,z}\psi_{1,zzz}dx.\end{aligned}\tag{3.16}$$

对 (3.16) 左端最后一项中关于 z 的部分进行分部积分，并利用 S_2 上的周期边界条件，可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\psi_{1,rzz}^2+\psi_{1,zzz}^2)dx-\int_\Omega\partial_r\psi_{1,zz}^2drdz\\&=-\int_\Omega\omega_{1,z}\psi_{1,zzz}dx.\end{aligned}\tag{3.17}$$

对 (3.17) 等式右侧应用 Hölder 不等式和 Young 不等式，得到

$$\int_\Omega(\psi_{1,rzz}^2+\psi_{1,zzz}^2)dx+\int_{-a}^a\psi_{1,zz}^2\Big|_{r=0}dz\le c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}^2,$$

其中我们用到了 $\psi_{1,\ zz}|_{r=R}=0$。

上述不等式蕴含 (3.3)。

最后，我们证明 (3.4)。对 $(3.1)_1$ 关于 z求导，乘以 $\psi_{1,\ rrz}$ 并在 Ω 上积分。于是得到

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega\psi_{1,rrz}^2dx-\int_\Omega\psi_{1,zzz}\psi_{1,rrz}dx-3\int_\Omega\frac{1}{r}\psi_{1,rz}\psi_{1,rrz}dx\\&=\int_\Omega\omega_{1,z}\psi_{1,rrz}dx.\end{aligned}\tag{3.18}$$

对 (3.18) 的第二项关于 z 分部积分，得到

$$\begin{aligned}-\int_\Omega\psi_{1,zzz}\psi_{1,rrz}dx&=\int_\Omega\psi_{1,zz}\psi_{1,rrzz}dx=\int_\Omega(\psi_{1,zz}\psi_{1,rzz}r)_rdrdz\\&-\int_\Omega\psi_{1,rzz}^2dx-\int_\Omega\psi_{1,zz}\psi_{1,rzz}drdz,\end{aligned}$$

其中第一项为零，因为

$$\psi_{1,rzz}r|_{r=0}=0,\quad\psi_{1,zz}|_{r=R}=0.$$

于是 (3.18) 具有如下形式

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\psi_{1,rrz}^2+\psi_{1,rzz}^2)dx+\int_\Omega\psi_{1,zz}\psi_{1,rzz}drdz\\&+3\int_\Omega\psi_{1,rz}\psi_{1,rrz}drdz=-\int_\Omega\omega_{1,z}\psi_{1,rrz}dx.\end{aligned}\tag{3.19}$$

(3.19) 中的第二项等于

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,zz}^2\Big|_{r=0}^{r=R}dz=-\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,zz}^2\Big|_{r=0}dz$$

因为 因为 $\psi_{1,zz}|_{r=R}=0$，且 (3.19) 等式左侧的最后一项具有如下形式

$$\frac{3}{2}\int_{\Omega}\partial_r\psi_{1,rz}^2drdz=\frac{3}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,rz}^2\Big|_{r=0}^{r=R}dz=\frac{3}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,rz}^2\Big|_{r=R}dz$$

因为 $\psi_{1,rz}|_{r=0}=0$。

将上述表达式代入 (3.19) 得到等式

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}(\psi_{1,rrz}^2+\psi_{1,rzz}^2)dx-\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,zz}^2\Big|_{r=0}dz+\frac{3}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,rz}^2\Big|_{r=R}dz\\&=-\int_{\Omega}\omega_{1,z}\psi_{1,rrz}dx.\end{aligned}\tag{3.20}$$

在 (3.20) 等式右侧应用 Hölder 不等式和 Young 不等式，得到

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}(\psi_{1,rrz}^2+\psi_{1,rzz}^2)dx-\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,zz}^2\Big|_{r=0}dz\\&\quad+\frac{3}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,rz}^2\Big|_{r=R}dz\le c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}^2.\end{aligned}\tag{3.21}$$

不等式 (3.21) 和 (3.3) 推出 (3.4)。证明至此完成。 □

引理3.2. 对于方程(3.1)的充分正则解，以下不等式

$$\left|\frac{1}{r}\psi_{1,rz}\right|_{2,\Omega}\le c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}\tag{3.22}$$

成立。

证明。对 (3.1) 关于 z 求导可得

$$-\psi_{1,rrz}-\psi_{1,zzz}-\frac{3}{r}\psi_{1,rz}=\omega_{1,z}\tag{3.23}$$

由 (3.23) 可得

$$\left|\frac{1}{r}\psi_{1,rz}\right|_{2,\Omega} \le c(|\psi_{1,rrz}|_{2,\Omega} + |\psi_{1,zzz}|_{2,\Omega} + |\omega_{1,z}|_{2,\Omega}). \tag{3.24}$$

在 (3.24) 中使用 (3.4) 得到 (3.22)。证明至此完成。 □

现在我们估计 $\left|\psi_{1,\ r}\right|_{2,\ \Omega}^{zz}$。

引理 3.3. 设 ψ_1 是问题 (3.1) 的一个在对称轴上消失的弱解。那么，问题 (3.1) 的此类充分正则解满足估计

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\psi_{1,zz}^2}{r^2}dx + \int\limits_{\Omega}\left(\psi_{1,zrr}^2 + \frac{\psi_{1,zr}^2}{r^2} + \frac{\psi_{1,z}^2}{r^4}\right)dx \le c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}^2. \tag{3.25}$$

证明. 对 (3.1) 关于 z 求导，得到

$$\begin{aligned} &-\Delta\psi_{1,z} - \frac{3}{r}\psi_{1,zr} = \omega_{1,z},\\ &\psi_{1,z}|_{S_1} = 0,\\ &\psi_{1,z} \text{ satisfies periodic boundary conditions on } S_2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

将 NZ 中的引理 3.1 应用于问题 (3.26)，得到

$$\int\limits_{\Omega}\left(\psi_{1,zrr}^2 + \frac{\psi_{1,zr}^2}{r^2} + \frac{\psi_{1,z}^2}{r^4}\right)dx \le c(|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}^2 + |\psi_{1,zzz}|_{2,\Omega}^2) \le c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}^2, \tag{3.27}$$

其中最后一个不等式用到了 (3.3)。

为考察方程 (3.26) 的解，我们使用以下记号

$$u = \psi_{1,z}. \tag{3.28}$$

于是 (3.26) 可写为

$$\begin{aligned} &-\Delta u - \frac{2}{r}u_{,r} = \omega_{1,z},\\ &u|_{S_1} = 0,\\ &u \text{ satisfies periodic boundary conditions on } S_2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

将 $(3.28)_1$ 乘以 ur^{-2}，在 Ω 上积分，并用柱坐标表示拉普拉斯算子。于是得到

$$-\int\limits_{\Omega}\left(u_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r} + u_{,zz}\right)ur^{-2}dx - 2\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r}u_{,r}ur^{-2}dx = \int\limits_{\Omega}\omega_{1,z}ur^{-2}dx. \tag{3.30}$$

对第一个积分下第三项中的 z 进行分部积分，得到

$$\int_\Omega \frac{u_{,z}^2}{r^2}dx = \int_\Omega \left(u_{,rr} + \frac{3}{r}u_{,r}\right)ur^{-2}dx + \int_\Omega \omega_{1,z}ur^{-2}dx. \tag{3.31}$$

对等式右侧的积分应用 Hölder 不等式和 Young 不等式，并利用 $u = \psi_{1,z}$ 以及 (3.27)，可得

$$\int_\Omega \frac{\psi_{1,zz}^2}{r^2}dx \le c\int_\Omega \left(\psi_{1,zrr}^2 + \frac{\psi_{1,zr}^2}{r^2} + \frac{\psi_{1,z}^2}{r^4}\right)dx + c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}^2. \tag{3.32}$$

在 (3.32) 中使用 (3.27) 可推出 (3.25)。证明至此完成。 □

注 3.4. 引理 3.3 对证明问题 (1.6) 的全局正则轴对称解是必要的。然而，它对问题 (1.6) 的解施加了严格限制，因为条件 $\psi_1|_{r=0} = 0$ 意味着 $v_z|_{r=0} = 0$。在本文所给出的证明中，我们不知道如何去掉这一限制。

引理 3.5. 设 $\mu > 0$ 且 $\omega_1 \in H_\mu^1(\Omega)$。那么，对于足够光滑的 (3.1) 的解，以下估计成立

$$\int_\Omega \left(\psi_{1,rrr}^2 + \frac{\psi_{1,rr}^2}{r^2} + \frac{\psi_{1,r}^2}{r^4}\right)r^{2\mu}dx \le cR^{2\mu}\|\omega_1\|_{1,\Omega}^2. \tag{3.33}$$

证明. 为证明该引理，我们引入单位分解 $\{\zeta^{(i)}(r)\}_{i=1,2}$，使得

$$\sum_{i=1}^{2}\zeta^{(i)}(r) = 1$$

and

$$\zeta^{(1)}(r) = \begin{cases} 1 & r \le r_0, \\ 0 & r \ge r_0 + \lambda, \end{cases}$$

$$\zeta^{(2)}(r) = \begin{cases} 0 & r \le r_0, \\ 1 & r \ge r_0 + \lambda, \end{cases}$$

其中 $r_0 < R$ 和 $\zeta^{(i)}(r)$、$i = 1$、2 均为光滑函数。

引入记号

$$\psi_1^{(i)} = \psi_1\zeta^{(i)}, \quad \omega_1^{(i)} = \omega_1\zeta^{(i)}, \quad i = 1, 2. \tag{3.34}$$

则函数 (3.34) 满足方程

$$
\begin{aligned}
&-\psi_{1,rr}^{(i)}-\psi_{1,zz}^{(i)}-\frac{3}{r}\psi_{1,r}^{(i)}=-2\psi_{1,r}\dot{\zeta}^{(i)}-\psi_1\ddot{\zeta}^{(i)}-\frac{3}{r}\psi_1\dot{\zeta}^{(i)}\\
&+\omega_1^{(i)}\equiv g^{(i)},\quad i=1,2,
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

其中，点表示对 r 的导数。

首先考虑情形 $i=1$。对 $i=1$ 关于 r 对 (3.35) 求导，得到

$$
-\psi_{1,rrr}^{(1)}-\psi_{1,rzz}^{(1)}-\frac{3}{r}\psi_{1,rr}^{(1)}+\frac{3}{r^2}\psi_{1,r}^{(1)}=g_{,r}^{(1)}.
\tag{3.36}
$$

引入记号

$$
v=\psi_{1,r}^{(1)},\quad f=g_{,r}^{(1)}.
\tag{3.37}
$$

则 (3.36) 可写为

$$
\begin{aligned}
&-v_{,rr}-v_{,zz}-\frac{3}{r}v_{,r}+\frac{3}{r}v=f\quad\text{in }\ \Omega_{r_0},\\
&v|_{r=r_0}=0,\\
&v|_{S_2}\text{ satisfies periodic boundary conditions,}
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

其中 $\Omega_{r_0}=\{x\in\Omega:\ \ r\in(0,r_0)\ \ z\in(-a,a)\}$，且 $r_0<R$。

将 $(3.38)_1$ 乘以 r^2，得到

$$
-r^2v_{,rr}-3rv_{,r}+3v=r^2(f+v_{,zz})\equiv g(r,z)
$$

或者等价地

$$
-r\partial_r(r\partial_rv)-2r\partial_rv+3v=g(r,z).
\tag{3.39}
$$

引入新变量

$$
\tau=-\ln r,\quad r=e^{-\tau}.
$$

由于 $r\partial_r=-\partial_\tau$ 方程 (3.39) 具有如下形式

$$
-\partial_\tau^2v+2\partial_\tau v+3v=g(e^{-\tau},z)\equiv g'(\tau,z).
\tag{3.40}
$$

对 (3.40) 应用傅里叶变换 (2.13)，得到

$$
\lambda^2\hat{v}+2i\lambda\hat{v}+3\hat{v}=\hat{g}'.
\tag{3.41}
$$

求代数方程的解

$$\lambda^2 + 2i\lambda + 3 = 0$$

我们看到它有两个解

$$\lambda_1 = -3i, \quad \lambda_2 = i.$$

对于 $\lambda \notin \{-3i, i\}$，我们可以将 (3.41) 的解写成如下形式

$$\hat{v} = \frac{1}{\lambda^2 + 2i\lambda + 3}\hat{g}' \equiv R(\lambda)\hat{g}'. \tag{3.42}$$

由于 $R(\lambda)$ 在直线 $\mathrm{Im}\,\lambda = 1 - \mu = h$, $\mu \in (0, 1)$ 上没有极点，我们可以使用 [NZ]中的引理 3.1。于是得到

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} \sum_{j=0}^{2} |\lambda|^{2(2-j)} |\hat{v}|^2 d\lambda \le c \int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} \sum_{j=0}^{2} |\lambda|^{2(2-j)} |R(\lambda)\hat{g}'|^2 d\lambda \\ &\le c \int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |\hat{g}'|^2 d\lambda. \end{aligned} \tag{3.43}$$

根据帕塞瓦尔恒等式，不等式 (3.43) 变为

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{2} |\partial_\tau^j v|^2 e^{2h\tau} d\tau \le c \int_{\mathbb{R}} |g'|^2 e^{2h\tau} d\tau.$$

换元为 r 后得到

$$\sum_{j=0}^{2} \int_{\mathbb{R}_+} |\partial_r^j v|^2 r^{2(\mu+j-2)} r dr \le c \int_{\mathbb{R}_+} |g|^2 r^{2(\mu-2)} r dr.$$

利用 $g = r^2(f + v_{,\,zz})$，我们得到

$$\sum_{j=0}^{2} \int_{\mathbb{R}_+} |\partial_r^j v|^2 r^{2(\mu+j-2)} r dr \le c \int_{\mathbb{R}_+} |f + v_{,zz}|^2 r^{2\mu} r dr. \tag{3.44}$$

回忆记号 (3.37)，由 (3.44) 可得不等式

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2} \int_{\Omega} |\partial_r^j \psi_{1,r}^{(1)}|^2 r^{2(\mu+j-2)} dx \le c \int_{\Omega} |g_{,r}^{(1)}|^2 r^{2\mu} dx \\ &\quad + c \int_{\Omega} |\psi_{1,rzz}|^2 r^{2\mu} dx. \end{aligned} \tag{3.45}$$

鉴于 (3.3),

$$|\psi_{1,rzz}|_{2,\Omega} \le c|\omega_{1,z}|_{2,\Omega}. \tag{3.46}$$

等式右侧 (3.45) 的第一项可估计为

$$|g^{(1)}_{,r}|_{2,\mu,\Omega} \le c(|\psi_{1,rr}|_{2,\Omega} + |\psi_{1,r}|_{2,\Omega} + |\psi_1|_{2,\Omega} + |\omega_{1,r}|_{2,\Omega} + |\omega_1|_{2,\Omega}). \tag{3.47}$$

由引理 3.1 和不等式 (3.45)、(3.46) 及 (3.47) 可得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\psi^{(1)}_{1,rrr}|^2 + \frac{|\psi^{(1)}_{,rr}|^2}{r^2} + \frac{|\psi^{(1)}_{,r}|^2}{r^4} \right) r^{2\mu} r dr dz \\ &\quad + \int_\Omega |\psi_{1,rzz}|^2 dx \le c(|\omega_{1,r}|^2_{2,\Omega} + |\omega_1|^2_{2,\Omega}). \end{aligned} \tag{3.48}$$

函数 $\psi^{(2)}_1$ 是问题的一个解

$$\begin{aligned} &-\Delta\psi^{(2)}_1 = -2\psi_{1,r}\dot\zeta^{(2)} - \psi_1\ddot\zeta^{(2)} + \frac{2}{r}\psi^{(2)}_{1,r} \\ &\quad - \frac{3}{r}\psi_1\dot\zeta^{(2)} + \omega^{(2)}_1 && \text{in } \ \bar\Omega_{r_0}, \\ &\psi^{(2)}_1|_{r=R} = 0, \ \ \psi^{(2)} = 0 && \text{for } \ r \le r_0, \\ &\psi^{(2)} \text{ satisfies periodic boundary conditions} && \text{on } \ S_2, \end{aligned} \tag{3.49}$$

其中 $\bar\Omega_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \ r_0 \le r \le R, z \in (-a, a)\}$，点表示关于 r 的导数。

方程 (3.49) 的解满足以下估计

$$\|\psi^{(2)}_1\|_{3,\Omega} \le c(\|\psi_{1,r}\|_{1,\Omega} + \|\psi_1\|_{1,\Omega} + \|\omega^{(2)}_1\|_{1,\Omega}) \le c\|\omega_1\|_{1,\Omega}. \tag{3.50}$$

由 (2.11)、(3.48) 和 (3.50) 可得不等式 (3.33)。证明至此结束。

□

4 对 Φ和 Γ 的估计

设 $\Omega = \{(r, z) \colon \ r \in (0, R) \ z \in (-a, a)\}$。设 $\Phi = \omega_r/r$、$\Gamma = \omega_\varphi/r$ 和 Φ、Γ 是问题 (1.17)–(1.20) 的解。

引理 4.1. 假设 $\Phi(0)\ \Gamma(0) \in L_2(\Omega)$, $F_r, F_\varphi \in L_2(0, t; L_{6/5}(\Omega))$. 令 D_2 由 (2.7) 定义，并令

$$I_3 = \int_{\Omega^t} \left| \frac{v_\varphi}{r} \Phi\Gamma \right| dx dt' < \infty.$$

Then

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(t)|_{2,\Omega}^2+|\Gamma(t)|_{2,\Omega}^2+\nu(\|\Phi\|_{1,2,\Omega^t}^2+\|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t}^2)\\
&\le \phi(D_2)\left|\int\limits_{\Omega^t}\frac{v_\varphi}{r}\Phi\Gamma dxdt'\right|+\phi(D_2)(|\bar F_r|_{6/5,2,\Omega^t}^2\\
&\quad+|\bar F_\varphi|_{6/5,2,\Omega^t}^2)+|\Phi(0)|_{2,\Omega}^2+|\Gamma(0)|_{2,\Omega}^2\\
&\equiv \phi(D_2)I_3+D_8.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

证明. 乘以 (1.17) Φ 并在 Ω 上积分，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac12\frac{d}{dt}|\Phi|_{2,\Omega}^2+|\nabla\Phi|_{2,\Omega}^2-\int\limits_{-a}^{a}\Phi\Big|_{r=0}^{r=R}dz\\
&=\int\limits_\Omega(\omega_r\partial_r+\omega_z\partial_z)\frac{v_r}{r}\Phi dx+\int\limits_\Omega\bar F_r\Phi dx.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

为推导 (4.2) 左端的第二项，我们考虑其中的 (1.17)

$$\bar\Omega=\{x\in\mathbb{R}^3\colon r<R,z\in(-a,a),\varphi\in(0,2\pi)\}.$$

然后，根据格林定理和边界条件，我们得到 Ω 上 (4.2) 左端的第二项。利用 (4.2) 中的所有量都不依赖于 φ 这一点，我们可以省去对 φ 的积分，从而得到 (4.2)。

利用 $\Phi|_{r=R}=0$ 和 (1.13)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac12\frac{d}{dt}|\Phi|_{2,\Omega}^2+|\nabla\Phi|_{2,\Omega}^2\le\int\limits_\Omega(\omega_r\partial_r+\omega_z\partial_z)\frac{v_r}{r}\Phi dx+\int\limits_\Omega\bar F_r\Phi dx\\
&\le\int\limits_\Omega\bigg(-v_{\varphi,z}\partial_r\frac{v_r}{r}+\frac{\partial_r(rv_\varphi)}{r}\partial_z\frac{v_r}{r}\bigg)\Phi r dr dz+\int\limits_\Omega\bar F_r\Phi dx\\
&=\int\limits_\Omega v_\varphi\bigg(\partial_z\partial_r\frac{v_r}{r}\bigg)\Phi+\partial_r\frac{v_r}{r}\partial_z\Phi\bigg)dx\\
&\quad+\int\limits_\Omega\partial_r\bigg(rv_\varphi\partial_z\frac{v_r}{r}\Phi\bigg)drdz-\int\limits_\Omega v_\varphi\bigg(\bigg(\partial_z\partial_r\frac{v_r}{r}\bigg)\Phi+\partial_z\frac{v_r}{r}\partial_r\Phi\bigg)dx\\
&\quad+\int\limits_\Omega\bar F_r\Phi dx=\int\limits_{-a}^{a}rv_\varphi\partial_z\frac{v_r}{r}\Phi\Big|_{r=0}^{r=R}dz+\int\limits_\Omega v_\varphi\bigg(\partial_r\frac{v_r}{r}\partial_z\Phi-\partial_z\frac{v_r}{r}\partial_r\Phi\bigg)dx\\
&\quad+\int\limits_\Omega\bar F_r\Phi dx\equiv\int\limits_{-a}^{a}rv_\varphi\partial_z\frac{v_r}{r}\Phi\Big|_{r=0}^{r=R}dz+I+\int\limits_\Omega\bar F_r\Phi dx,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

其中，由于在 S_2 上采用周期边界条件，边界项消失，因为 $v_\varphi|_{r=R}=0$, $v_r|_{r=R}=0$, $\Phi|_{r=R}=0$ 和

$$\int_{-a}^{a} r v_\varphi \partial_z \frac{v_r}{r}\Phi\bigg|_{r=0} dz = 0$$

由于 [LW]，可得对称轴附近的如下展开式

$$\begin{aligned} v_\varphi &= a_1(z,t)r + a_2(z,t)r^3 + \cdots, \\ v_r &= \bar{a}_1(z,t)r + \bar{a}_2(z,t)r^3 + \cdots \end{aligned}$$

以及 $\Phi = -\frac{v_\varphi}{r}$。

最后， $I \le I_1 + I_2$，其中

$$\begin{aligned} I_1 &\le \int_\Omega \left| v_\varphi \partial_r \frac{v_r}{r}\Phi_{,z}\right| dx, \\ I_2 &\le \int_\Omega \left| v_\varphi \partial_z \frac{v_r}{r}\Phi_{,r}\right| dx. \end{aligned} \tag{4.4}$$

现在，我们估计 I_1 和 I_2。回顾一下，$\frac{v_r}{r} = -\psi_{1,z}$。于是

$$\begin{aligned} I_1 &\le \int_\Omega |v_\varphi \psi_{1,rz}\Phi_{,z}| dx = \int_\Omega \left| r v_\varphi \frac{\psi_{1,rz}}{r}\Phi_{,z}\right| dx \\ &\le |r v_\varphi|_{\infty,\Omega} \left|\frac{\psi_{1,rz}}{r}\right|_{2,\Omega} |\Phi_{,z}|_{2,\Omega} \equiv I_1^1. \end{aligned}$$

由 (2.7) 和 (3.22) 可得（回顾一下， $\Gamma = \omega_1$）

$$I_1^1 \le cD_2 |\Gamma_{,z}|_{2,\Omega} |\Phi_{,z}|_{2,\Omega}. \tag{4.5}$$

类似地，我们计算

$$\begin{aligned} I_2 &\le \int_\Omega |v_\varphi \psi_{1,zz}\Phi_{,r}| dx \le |r v_\varphi|_{\infty,\Omega} \left|\frac{\psi_{1,zz}}{r}\right|_{2,\Omega} |\Phi_{,r}|_{2,\Omega} \\ &\le cD_2 |\Gamma_{,z}|_{2,\Omega} |\Phi_{,r}|_{2,\Omega}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中用到了 (3.25)。

最后，(4.3) 等式右侧的最后一项有如下界

$$\varepsilon |\Phi|_{6,\Omega}^2 + c(1/\varepsilon)|\bar{F}_r|_{6/5,\Omega}^2. \tag{4.7}$$

在 (4.3) 中使用估计 (4.5)–(4.7)，假设 ε 足够小，并应用庞加莱´不等式，我们得到

$$\frac{d}{dt}|\Phi|_{2,\Omega}^2+\|\Phi\|_{1,\Omega}^2\le cD_2|\Gamma_{,z}|_{2,\Omega}|\nabla\Phi|_{2,\Omega}+c|\bar{F}_r|_{6/5,\Omega}^2. \tag{4.8}$$

将 (1.18) 乘以 Γ，在 Ω 上积分，并使用边界条件以及下文 (4.2) 下方关于应用格林定理的说明，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Gamma|_{2,\Omega}^2+|\nabla\Gamma|_{2,\Omega}^2-\int_{-a}^{a}\Gamma^2\Big|_{r=0}^{r=R}dz\\&\le 2\left|\int_\Omega\frac{v_\varphi}{r}\Phi\Gamma dx\right|+\int_\Omega\bar{F}_\varphi\Gamma dx.\end{aligned} \tag{4.9}$$

利用 $\Gamma|_{r=R}=0$，对 (4.9) 等式右侧的最后一项应用 H¨older 和 Young 不等式，并使用 Poincar´e 不等式，我们推得

$$\frac{d}{dt}|\Gamma|_{2,\Omega}^2+\|\Gamma\|_{1,\Omega}^2\le 2\int_\Omega\frac{v_\varphi}{r}\Phi\Gamma dx+c|\bar{F}_\varphi|_{6/5,\Omega}^2. \tag{4.10}$$

由 (4.8) 和 (4.10) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(|\Phi|_{2,\Omega}^2+|\Gamma|_{2,\Omega}^2)+\|\Phi\|_{1,\Omega}^2+\|\Gamma\|_{1,\Omega}^2\le\phi(D_2)\left|\int_\Omega\frac{v_\varphi}{r}\Phi\Gamma dxdt'\right|\\&\quad+\phi(D_2)(|\bar{F}_r|_{6/5,\Omega}^2+|\bar{F}_\varphi|_{6/5,\Omega}^2),\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 ϕ 是一个递增的正函数。对 (4.11) 关于时间积分，得到 (4.1)。证明至此结束。 □

引理 4.2. 设引理 6.1 的假设成立。设 $v_\varphi\in L_\infty(0,t;\,L_d(\Omega))$，$d>3$。设 $\theta=\left(1-\frac{3}{d}\right)\varepsilon_1-\frac{3}{d}\varepsilon_2>0$, $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$。设 $\varepsilon_0>0$ 任意小。则

$$\begin{aligned}I_3\le c|v_\varphi|_{d,\infty,\Omega^t}^{\varepsilon}[c_1(1+|v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}^{\frac{1}{2}\theta\varepsilon_0})\|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t}^{\frac{1}{2}\theta}\\+c_2]|\nabla\Phi|_{2,\Omega^t}^{1-\theta}|\nabla\Gamma|_{2,\Omega^t},\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中，c_1、c_2 依赖于 D_5，D_7 将在下文的 L_1^4 中引入。

证明。我们考察

$$I_3 = \int\limits_{\Omega^t} \left| r v_\varphi \frac{\Phi}{r} \frac{\Gamma}{r} \right| dx dt' \\ \le \int\limits_{\Omega^t} |r v_\varphi|^{1-\varepsilon} |v_\varphi|^{\varepsilon} \left| \frac{\Phi}{r^{1-\varepsilon_1}} \right| \left| \frac{\Gamma}{r^{1-\varepsilon_2}} \right| dx dt' = I_3^1,$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 和 ε_i、 $i = 1$、2 均为正数。

利用 (2.7)，并在 I_3^1 中应用 H¨older 不等式，得到

$$I_3^1 \le D_2^{1-\varepsilon} \left(\int\limits_{\Omega^t} |v_\varphi|^{2\varepsilon} \left| \frac{\Phi}{r^{1-\varepsilon_1}} \right|^2 dx dt' \right)^{1/2} \left| \frac{\Gamma}{r^{1-\varepsilon_2}} \right|_{2,\Omega^t} \\ \equiv D_2^{1-\varepsilon} L |\Gamma / r^{1-\varepsilon_2}|_{2,\Omega^t} \equiv I_3^2.$$

由哈代不等式可得

$$\left\| \frac{\Gamma}{r} \right\|_{L_{2,\varepsilon_2}(\Omega^t)} \le c \|\nabla \Gamma\|_{L_{2,\varepsilon_2}(\Omega^t)} \le c R^{\varepsilon_2} |\nabla \Gamma|_{2,\Omega^t}. \tag{4.13}$$

现在，我们估计 L,

$$L = \left(\int\limits_0^t \int\limits_\Omega |v_\varphi|^{2\varepsilon} \left| \frac{\Phi}{r^{1-\varepsilon_1}} \right|^2 dx dt' \right)^{1/2} \\ \le \left[\int\limits_0^t |v_\varphi|^{2\varepsilon}_{2\varepsilon\sigma,\Omega} \left(\int\limits_\Omega \left| \frac{\Phi}{r^{1-\varepsilon_1}} \right|^q dx \right)^{2/q} dt' \right]^{1/2} \equiv L_1,$$

其中 $1/\sigma + 1/\sigma' = 1$、 $q = 2\sigma'$。令 $d = 2\varepsilon\sigma$。则

$$\sigma' = \frac{d}{d - 2\varepsilon} \quad \text{so} \quad q = \frac{2d}{d - 2\varepsilon}.$$

继续推导,

$$L_1 \le \sup_t |v_\varphi|^{\varepsilon}_{d,\Omega} \left(\int\limits_0^t \left| \frac{\Phi}{r^{1-\varepsilon_1}} \right|^2_{q,\Omega} dt' \right)^{1/2} \equiv L_1^1 L_1^2.$$

现在，我们估计第二个因子 L_1^2。

为此，我们对 $r=2$ 使用引理 2.7。令 $\frac{s}{q}=1-\varepsilon_1$。则$q\in[2,2(3-s)]$。由于 $s=(1-\varepsilon_1)q$，我们有约束条件 $2<q<6-2s=6-2(1-\varepsilon_1)q$。于是

$$2<q\le\frac{6}{3-2\varepsilon_1} \tag{4.14}$$

且对任意 $\varepsilon_1\in\in(0,1)$，有 $\frac{6}{3-2\varepsilon_1}>2$。

因此，引理 2.7 推出

$$\begin{aligned}L_1^2&=\left(\int_0^t\left|\frac{\Phi}{r^{1-\varepsilon_1}}\right|_{q,\Omega}^2dt'\right)^{1/2}\\&\le c\left(\int_0^t|\Phi|_{2,\Omega}^{2(\frac{3-s}{q}-\frac12)}|\nabla\Phi|^{2(\frac32-\frac{3-s}{q})}dt'\right)^{1/2}\\&\le c|\Phi|_{2,\Omega^t}^{\frac{3-s}{q}-\frac12}|\nabla\Phi|_{2,\Omega^t}^{\frac32-\frac{3-s}{q}}\equiv L_1^3,\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\theta=\frac{3-s}{q}-\frac12$ $1-\theta=\frac32-\frac{3-s}{q}$，因此可以应用 H¨older 不等式。

在 L_1^3中使用 (6.1)，可得

$$\begin{aligned}L_1^3&\le c(D_5^{\frac12\theta}|\nabla\Gamma|_{2,\Omega^t}^{\frac12\theta}+D_5^{\frac12\theta}|v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}^{\frac12\theta\varepsilon_0}\|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t}^{\frac12\theta}+D_7^{\frac12\theta})\cdot|\nabla\Phi|_{2,\Omega^t}^{1-\theta}\\&\equiv[c_1(1+|v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}^{\frac12\theta\varepsilon_0})\|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t}^{\frac12\theta}+c_2]|\nabla\Phi|_{2,\Omega^t}^{1-\theta}\equiv L_1^4,\end{aligned}$$

其中 c_1、 c_2 依赖于 D_5、 D_7。

为证明上述不等式，我们需要知道以下不等式成立

$$\theta=\frac{3-s}{q}-\frac12>0 \tag{4.15}$$

and

$$1-\theta=\frac32-\frac{3-s}{q}>0. \tag{4.16}$$

考虑 (4.15)。利用 q 和 $\frac{s}{q}$ 的形式，我们有

$$\frac3q-\frac{s}{q}-\frac12>0\quad\text{so}\quad\frac{3(d-2\varepsilon)}{2d}-(1-\varepsilon_1)-\frac12>0.$$

因此

$$\frac32-\frac3d\varepsilon-1+\varepsilon_1-\frac12>0\quad\text{so}\quad\varepsilon_1-\frac3d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)>0.$$

因此，以下不等式

$$\left(1-\frac{3}{d}\right)\varepsilon_1-\frac{3}{d}\varepsilon_2>0 \tag{4.17}$$

当 $d>3$ 和 ε_2 充分小时成立。此外，(4.17) 意味着

$$\varepsilon_1>\frac{3}{d}\frac{d}{d-3}\varepsilon_2=\frac{3}{d-3}\varepsilon_2. \tag{4.18}$$

为考察 (4.16)，我们计算

$$\frac{3}{2}-\frac{3(d-2\varepsilon)}{2d}+1-\varepsilon_1=1+\frac{3}{d}\varepsilon-\varepsilon_1=1-\left(1-\frac{3}{d}\right)\varepsilon_1+\frac{3}{d}\varepsilon_2. \tag{4.19}$$

由于 (4.19) 必须为正，我们有如下限制

$$1+\frac{3}{d}\varepsilon_2>\left(1-\frac{3}{d}\right)\varepsilon_1 \tag{4.20}$$

将 (4.18) 代入 (4.20) 可得

$$1+\frac{3}{d}\varepsilon_2>\frac{3}{d}\varepsilon_2$$

因此并不存在矛盾。

因此，我们有

$$\begin{aligned}\theta&=\left(1-\frac{3}{d}\right)\varepsilon_1-\frac{3}{d}\varepsilon_2,\\ 1-\theta&=1-\left(1-\frac{3}{d}\right)\varepsilon_1+\frac{3}{d}\varepsilon_2,\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中 $d>3$。

最后

$$I_3\le c|v_\varphi|^{\varepsilon}_{d,\infty,\Omega^t}[c_1(1+|v_\varphi|^{\frac{1}{2}\theta\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t})\|\Gamma\|^{\frac{1}{2}\theta}_{1,2,\Omega^t}+c_2]|\nabla\Phi|^{1-\theta}_{2,\Omega^t}\cdot|\nabla\Gamma|_{2,\Omega^t}.$$

这就推出了 (4.12)，并结束了证明。 □

引入如下量

$$X(t)=\|\Phi\|_{V(\Omega^t)}+\|\Gamma\|_{V(\Omega^t)}. \tag{4.22}$$

引理 4.3。设引理 4.1 和引理 4.2 的假设成立。设 $\theta = (1-\frac{3}{d})\varepsilon_1 - \frac{3}{d}\varepsilon_2$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$。则

$$X^2 \le c_0 |v_\varphi|^{\frac{4\varepsilon}{\theta}}_{d,\infty,\Omega^t}(1 + |v_\varphi|^{2\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t}) + c_0 |v_\varphi|^{\frac{2\varepsilon}{\theta}}_{d,\infty,\Omega^t} + D_8, \tag{4.23}$$

其中 $c_0 = \phi(D_5, D_7)$。

证明。根据记号 (4.22)，不等式 (4.1) 和 (4.12) 可得

$$\begin{aligned} X^2 \le{}& c|v_\varphi|^{\varepsilon}_{d,\infty,\Omega^t}[c_1(1 + |v_\varphi|^{\frac{1}{2}\theta\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t})X^{1-\frac{1}{2}\theta} \\ &+ c_2 X^{1-\theta}]X + D_8 \equiv \alpha_1 X^{2-\frac{1}{2}\theta} + \alpha_2 X^{2-\theta} + D_8. \end{aligned} \tag{4.24}$$

在 (4.24) 中应用杨氏不等式可得

$$X^2 \le c\alpha_1^{\frac{4}{\theta}} + c\alpha_2^{\frac{2}{\theta}} + D_8.$$

由此得到 (4.23)，证明完成。 □

注记 4.4。考虑 (4.23) 中的指数，则

$$\delta = \frac{4\varepsilon}{\theta} = \frac{4\varepsilon}{(1-\frac{3}{d})\varepsilon_1 - \frac{3}{d}\varepsilon_2}, \quad \delta_0 = \frac{2\varepsilon}{(1-\frac{3}{d})\varepsilon_1 - \frac{3}{d}\varepsilon_2}. \tag{4.25}$$

当 ε_2 较小时，我们有

$$\delta = \frac{4}{1-\frac{3}{d}} + \varepsilon_*, \quad \delta_0 = \frac{2}{1-\frac{3}{d}} + \varepsilon_{0*},$$

其中，ε_*、ε_{0*} 是可以任意取很小的正数。

对于 $d = 12$，可得

$$\delta = \frac{16}{3} + \varepsilon_*, \quad \delta_0 = \frac{8}{3} + \varepsilon_{0*}. \tag{4.26}$$

这就结束了这条注记。

引理 4.5. 假设 $\varepsilon_1 > 11\varepsilon_2$, $s > 1$ 和

$$D_9^s(s) = s^2 |f_\varphi|^s_{\frac{3s}{2s+1},s,\Omega^t} + |v_\varphi(0)|^s_{s,\Omega} < \infty.$$

Then

$$|v_\varphi|^6_{12,\infty,\Omega^t} \le c|v_\varphi|^{\frac{6(3\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1-11\varepsilon_2}\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} + \phi(D_5, D_7) + c(D_8 + D_9^{12}) \tag{4.27}$$

证明。将 (1.7)$_2$ 乘以 $v_\varphi|v_\varphi|^{s-2}$，在 Ω 上积分，并利用关系$\frac{v_r}{r}=-\psi_{1,z}$。于是得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\frac{d}{dt}|v_\varphi|^s_{s,\Omega}+\frac{4\nu(s-1)}{s^2}|\nabla|v_\varphi|^{s/2}|^2_{2,\Omega}=\int\limits_\Omega \psi_{1,z}|v_\varphi|^s dx\\ +\int\limits_\Omega f_\varphi v_\varphi|v_\varphi|^{s-2}dx.\end{aligned}\tag{4.28}$$

对 (4.28) 等式右侧的第一项分部积分，并应用 H¨older 不等式和 Young 不等式，可得

$$\left|\int\limits_\Omega \psi_{1,z}|v_\varphi|^s dx\right|\le\varepsilon\left|\partial_z|v_\varphi|^{s/2}\right|^2_{2,\Omega}+c(1/\varepsilon)\int\limits_\Omega\psi_1^2|v_\varphi|^s dx.$$

由 Poincar´e 不等式,

$$|\nabla|v_\varphi|^{s/2}|^2_{2,\Omega}\ge c|v_\varphi|^s_{3s,\Omega}$$

因此，我们可以用下式估计 (4.28) 等式右侧的第二项:

$$|f_\varphi|_{\frac{3s}{2s+1},\Omega}|v_\varphi|^{s-1}_{3s,\Omega}\le\varepsilon_1|v_\varphi|^s_{3s,\Omega}+c(1/\varepsilon_1)|f_\varphi|^s_{\frac{3s}{2s+1},\Omega}.$$

在 (4.28) 中取充分小的 ε, ε_1 ，并利用上述估计，可得不等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s}\frac{d}{dt}|v_\varphi|^s_{s,\Omega}+\frac{1}{s}|\nabla|v_\varphi|^{s/2}|^2_{2,\Omega}+\frac{1}{s}|v_\varphi|^s_{3s,\Omega}\\ &\le cs\int\limits_\Omega\psi_1^2|v_\varphi|^s dx+cs|f_\varphi|^s_{\frac{3s}{2s+1},\Omega}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

根据引理 2.3，(4.29) 等式右侧的第一项有如下界:

$$cs|u|^6_{\infty,\Omega^t}\int\limits_\Omega\frac{\psi_1^2}{r^6}|v_\varphi|^{s-6}dx\le csD_2^6|v_\varphi|^{s-6}_{\infty,\Omega}\int\limits_\Omega\frac{\psi_1^2}{r^6}dx.$$

利用式 (4.29) 中的估计可得

$$\frac{1}{s}\frac{d}{dt}|v_\varphi|^s_{s,\Omega}\le csD_2^6|v_\varphi|^{s-6}_{\infty,\Omega}\int\limits_\Omega\frac{\psi_1^2}{r^6}dx+cs|f_\varphi|^s_{\frac{3s}{2s+1},\Omega}.\tag{4.30}$$

对式 (4.30) 关于时间积分，并利用 [NZ], 中的引理 3.1，可得

$$
\begin{aligned}
|v_\varphi|_{s,\Omega}^s &\le cs^2 D_2^6 |v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}^{s-6} \|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t}^2 \\
&\quad + cs^2 |f_\varphi|_{\frac{3s}{2s+1},s,\Omega^t}^s + |v_\varphi(0)|_{s,\Omega}^s \\
&\equiv cs^2 D_2^6 |v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}^{s-6} \|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t}^2 + cD_9^s(s)
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

将 (4.31) 除以$|v_\varphi|_{\infty}^{s-6}$, Ω^t 可得

$$
\left| \frac{|v_\varphi|_{s,\infty,\Omega^t}}{|v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}} \right|^{s-6} |v_\varphi|_{s,\Omega}^6 \le cs^2 D_2^6 \|\Gamma\|_{1,\Omega^t}^2 + \frac{c}{|v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}^{s-6}} D_9^s(s). \tag{4.32}
$$

除以$|v_\varphi|_{\infty,\ \Omega^t}$ 是合理的，因为本文不考虑以下两种情况:

(4.33) 在 $v_\varphi = 0$ 的情况下，问题 (1.6) 的全局正则解的存在性已在 [L1, L2, UY]. 中得到证明

(4.34) 当v_φ 充分小时，问题 (1.6) 的全局正则解的存在性已在附录 B 中得到证明。

由于本文不考虑情况 (4.33) 和 (4.34)，我们可以证明存在正常数 c_0 和 c_1 使得

$$
\frac{|v_\varphi|_{s,\infty,\Omega^t}}{|v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}} \ge \bar{c}_0 \tag{4.35}
$$

and

$$
\frac{1}{|v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}} \le \bar{c}_1. \tag{4.36}
$$

根据 (4.35) 和 (4.36)，不等式 (4.32) 可写为

$$
\bar{c}_0 |v_\varphi|_{s,\infty,\Omega^t}^6 \le cs^2 \|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t}^2 + c\bar{c}_1 D_9^s(s). \tag{4.37}
$$

令 $d = 12$。则 $\theta = \frac{1}{4}(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$，且当 $d = 12$ 时，(4.23) 化为

$$
X^2 \le c_0 |v_\varphi|_{12,\infty,\Omega^t}^{\frac{16\varepsilon}{3\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} (1 + |v_\varphi|_{\infty,\Omega^t}^{2\varepsilon_0}) + c_0 |v_\varphi|_{12,\infty,\Omega^t}^{\frac{8\varepsilon}{3\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} + D_8. \tag{4.38}
$$

将 (4.37) 用于 $s=12$ 并利用 (4.38)，得到

$$|v_\varphi|^6_{12,\infty,\Omega^t} \le c_0|v_\varphi|^{\frac{16\varepsilon}{3\varepsilon_1-\varepsilon_2}}_{12,\infty,\Omega^t}(1+|v_\varphi|^{2\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t}) + c_0|v_\varphi|^{\frac{8\varepsilon}{3\varepsilon_1-\varepsilon_2}}_{12,\infty,\Omega^t} + cD_8 + cD_9^{12}. \tag{4.39}$$

要从 (4.39) 推导出任何估计，我们需要

$$\frac{16\varepsilon}{3\varepsilon_1-\varepsilon_2} < 6 \tag{4.40}$$

我们看到，对于.....，(4.40) 成立

$$\varepsilon_1 > 11\varepsilon_2 \tag{4.41}$$

根据杨氏不等式，(4.39) 推出

$$|v_\varphi|^6_{12,\infty,\Omega^t} \le c|v_\varphi|^{\frac{6(3\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1-11\varepsilon_2}\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} + c + c(D_8+D_9^{12}) \tag{4.42}$$

上述不等式推出 (4.27)，证明至此完成。 □

注 4.6. 将 (4.42) 用于 (4.38) 可推出不等式

$$X^2 \le c(1+|v_\varphi|^{2\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t})|v_\varphi|^{\frac{96\varepsilon}{\varepsilon_1-11\varepsilon_2}\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} + \phi(D_5,D_7,D_8,D_9), \tag{4.43}$$

其中 X 在 (4.22) 中引入。

为了证明定理 1.2，我们需要对, Ω^t作出估计。为此，我们需要以下结果

引理 4.7. 假设量 D_2, D_5, D_7, D_8, D_9 有界。假设 $f_\varphi/r \in L_1(0,t;\ L_\infty(\Omega))$, $v_\varphi(0) \in L_\infty(\Omega)$。那么存在一个递增的正函数 ϕ ，使得

$$\|v_\varphi\|_{\infty,\Omega^t} \le \phi(D_2,D_5,D_7,D_8,D_9,\|f_\varphi/r\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))},|v_\varphi(0)|_{\infty,\Omega}). \tag{4.44}$$

证明。回顾关于v_φ的方程 (1.7)

$$v_{\varphi,t} + v\cdot\nabla v_\varphi - \nu\left(\Delta v_\varphi - \frac{1}{r^2}v_\varphi\right) = \psi_{1,z}v_\varphi + f_\varphi, \tag{4.45}$$

其中 $\frac{v_r}{r} = -\psi_{1,\ z}$。

将（4.45）乘以 $v_\varphi|v_\varphi|^{s-2}$ 并在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s}\frac{d}{dt}|v_\varphi|^s_{s,\Omega}+\frac{4\nu(s-1)}{s^2}|\nabla|v_\varphi|^{s/2}|^2_{2,\Omega}+\nu\int\limits_\Omega\frac{|v_\varphi|^s}{r^2}dx\\&=\int\limits_\Omega\psi_{1,z}v_\varphi^2|v_\varphi|^{s-2}dx+\int\limits_\Omega f_\varphi v_\varphi|v_\varphi|^{s-2}dx.\end{aligned}\tag{4.46}$$

等式右侧 (4.46) 的第一项有界于

$$\int\limits_\Omega|\psi_{,z}|\,|v_\varphi|^{s/2}\frac{|v_\varphi|^{s/2}}{r}dx\le\varepsilon\int\limits_\Omega\frac{|v_\varphi|^s}{r^2}dx+c(1/\varepsilon)\int\limits_\Omega\psi_{,z}^2|v_\varphi|^s dx,$$

其中第二个积分有界于

$$|rv_\varphi|^2_{\infty,\Omega}\int\limits_\Omega|\psi_{1,z}|^2|v_\varphi|^{s-2}dx\le D_2^2|\psi_{1,z}|^2_{s,\Omega}|v_\varphi|^{s-2}_{s,\Omega}.$$

等式右侧 (4.46) 的第二项估计为

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega|f_\varphi|\,|v_\varphi|^{s-1}dx=\int\limits_\Omega\left|\frac{f_\varphi}{r}\right|r|v_\varphi|^{s-1}dx\\&\le|rv_\varphi|_{\infty,\Omega}\int\limits_\Omega\left|\frac{f_\varphi}{r}\right||v_\varphi|^{s-2}dx\le D_2\left|\frac{f_\varphi}{r}\right|_{s/2,\Omega}|v_\varphi|^{s-2}_{s,\Omega}.\end{aligned}$$

将上述估计代入 (4.46)，并假设 ε 足够小，我们得到不等式

$$\frac{1}{s}\frac{d}{dt}|v_\varphi|^s_{s,\Omega}\le D_2^2\left(|\psi_{1,z}|^2_{s,\Omega}|v_\varphi|^{s-2}_{s,\Omega}+\left|\frac{f_\varphi}{r}\right|_{s/2,\Omega}|v_\varphi|^{s-2}_{s,\Omega}\right).$$

化简后，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\varphi|^2_{s,\Omega}\le D_2^2\left(|\psi_{1,z}|^2_{s,\Omega}+\left|\frac{f_\varphi}{r}\right|_{s/2,\Omega}\right).$$

对时间积分并令 $s\to\infty$ 趋于无穷，我们得到

$$|v_\varphi(t)|^2_{\infty,\Omega}\le D_2^2\left(\int\limits_0^t|\psi_{1,z}|^2_{\infty,\Omega}dt'+\int\limits_0^t\left|\frac{f_\varphi}{r}\right|_{\infty,\Omega}dt'\right)+|v_\varphi(0)|^2_{\infty,\Omega}.\tag{4.47}$$

由于 $\int_0^t |\psi_{1,\ z}|^2_{\infty,\ \Omega} dt' \le X^2$ 我们可以应用 (4.43)。于是 (4.47) 可写为

$$
\begin{aligned}
|v_\varphi|^2_{\infty,\Omega^t} \le D_2^2(1+|v_\varphi|^{2\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t})|v_\varphi|^{\frac{96\varepsilon}{\varepsilon_1-11\varepsilon_2}\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} + D_2\phi(D_5,D_7,D_8,D_9) \\
+ D_2^2 \int_0^t \left|\frac{f_\varphi}{r}\right|_{\infty,\Omega} dt' + |v_\varphi(0)|^2_{\infty,\Omega}.
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

因此，当 ε_0 充分小时，我们得到（4.44）。证明至此结束。 □

注 4.8。不等式（4.43）和（4.44）意味着

$$
X \le \phi(D_2, D_5, D_7, D_8, D_9, |f_\varphi/r|_{\infty,1,\Omega^t}, |v_\varphi(0)|_{\infty,\Omega}) \tag{4.49}
$$

上述不等式证明了定理 1.2。

5 旋流的估计

在本节中，我们将对问题的解进行估计

$$
\begin{aligned}
&u_{,t} + v\cdot\nabla u - \nu\Delta u + 2\nu\frac{u_{,r}}{r} = r f_\varphi \equiv f_0 \quad \text{in } \Omega^t, \\
&u|_{S_1} = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{in } \Omega^t, \\
&u|_{S_2} \ - \ \text{periodic boundary conditions}, \\
&u|_{t=0} = u(0) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{in } \Omega.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

引理 5.1。假设 D_1和 D_2 分别由（2.1）和（2.7）描述。令$u_{,\ z}(0)u_{,\ r}(0) \in L_2(\Omega)$, $f_0 \in L_2(\Omega^t)$。
那么，(5.1) 的解满足以下估计

$$
|v_{,z}(t)|^2_{2,\Omega} + \nu|\nabla u_{,z}|^2_{2,\Omega^t} \le c(D_1^2D_2^2 + |u_{,z}(0)|^2_{2,\Omega} + |f_0|^2_{2,\Omega^t}) \equiv cD_3^2, \tag{5.2}
$$

$$
\begin{aligned}
|u_{,r}(t)|^2_{2,\Omega} + \nu(|u_{,rr}|^2_{2,\Omega^t} + |u_{,rz}|^2_{2,\Omega^t}) \le cD_1^2(1+D_2^2) \\
+ |u_{,r}(0)|^2_{2,\Omega} + |f_0|^2_{2,\Omega^t} + |f_0|^2_{4/3,2,S_1^t} \equiv cD_4^2.
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

证明。对 (5.1) 关于 z 求导，乘以 $u_{,\ z}$ 并在 Ω 上积分。为应用格林定理，我们必须在区域 $\bar{\Omega} = \{x\in\mathbb{R}^3 : r<R, z\in(-a,a)\ \varphi\in(0,2\pi)\}$ 中考虑问题 (5.1)。于是得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{,z}|^2_{2,\bar{\Omega}} - \nu\int_{\bar{\Omega}} \operatorname{div}(\nabla u_{,z}u_{,z})d\bar{x} + \nu\int_{\bar{\Omega}} |\nabla u_{,z}|^2 d\bar{x} \\
&= -\int_{\bar{\Omega}} v_{,z}\cdot\nabla u\cdot u_{,z} d\bar{x} + \int_{\bar{\Omega}} f_{0,z}u_{,z}d\bar{x},
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

其中 $d\bar{x} = dxd\varphi$。左端的第二项会产生一个边界项，它根据边界条件为零。由于 (5.4) 中的所有函数都不依赖于 φ，因此可以省去关于 φ 的任何积分。

对 (5.4) 等式右侧的项关于 z 分部积分，并利用 S_2 上的边界条件，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{,z}|^2_{2,\Omega} + \nu|\nabla u_{,z}|^2_{2,\Omega} - \frac{\nu}{2}\int\limits_{-a}^{a} u^2_{,z}\Big|_{r=0}^{r=R} dz \\ &= \int\limits_{\Omega} v_{,zz}\cdot\nabla u u dx + \int\limits_{\Omega} v_{,z}\cdot\nabla u_{,z}\cdot u dx - \int\limits_{\Omega} f_0 u_{,zz} dx.\end{aligned} \tag{5.5}$$

(5.5) 左侧的最后一项为零，右侧的第一项等于

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} v_{,zz}\cdot\nabla u^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_{S_1} v_{,zz}\cdot\bar{n}u^2 dS_1 = 0.$$

对 (5.5) 等式右侧的其他项应用 H¨older 不等式和 Young 不等式，得到

$$\frac{d}{dt}|u_{,z}|^2_{2,\Omega} + \nu|\nabla u_{,z}|^2_{2,\Omega} \le c|u|^2_{\infty,\Omega}|v_{,z}|^2_{2,\Omega} + c|f_0|^2_{2,\Omega}. \tag{5.6}$$

对 (5.6) 关于时间积分，得到

$$\begin{aligned}&|u_{,z}(t)|^2_{2,\Omega} + \nu|\nabla u_{,z}|^2_{2,\Omega} \le c|u|^2_{\infty,\Omega^t}|v_{,z}|^2_{2,\Omega^t} + |u_{,z}(0)|^2_{2,\Omega} \\ &\quad + c|f_0|^2_{2,\Omega^t} \le cD_1^2 D_2^2 + |u_{,z}(0)|^2_{2,\Omega} + c|f_0|^2_{2,\Omega^t}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

上述不等式蕴含 (5.2)。

对 (5.1) 关于 r 求导，得到

$$u_{,rt} + v\cdot\nabla u_{,r} + v_{,r}\cdot\nabla u - \nu(\Delta u)_{,r} + \frac{2\nu}{r}u_{,rr} - \frac{2\nu}{r^2}u_{,r} = f_{0,r}. \tag{5.8}$$

将 (5.8) 乘以 $u_{,r}$ 并在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{,r}|^2_{2,\Omega} + \int\limits_{\Omega} v_{,r}\cdot\nabla u u_{,r} dx - \nu\int\limits_{\Omega}(\Delta u)_{,r}u_{,r}dx \\ &\quad + 2\nu\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r}u_{,rr}u_{,r}dx - 2\nu\int\limits_{\Omega}\frac{u^2_{,r}}{r^2}dx = \int\limits_{\Omega} f_{0,r}u_{,r}dx.\end{aligned} \tag{5.9}$$

现在，我们来考察 (5.9) 中的具体项。第二项等于

$$\int_\Omega v_{,r}\cdot\nabla u u_{,r} r dr dz = \int_\Omega (v_{r,r}\partial_r u + v_{z,r}\partial_z u)u_{,r} r dr dz$$
$$= \int_\Omega (r v_{r,r} u_{,r} + r v_{z,r} u_{,z})u_{,r} dr dz$$
$$= \int_\Omega (r v_{r,r} u_{,r} u_{,r} + r v_{z,r} u_{,r} u_{,z}) dr dz$$
$$= -\int_\Omega [(r v_{r,r} u_{,r})_{,r} + (r v_{z,r} u_{,r})_{,z}] u dr dz \equiv I,$$

其中我们用到了 $r v_{r,r} u_{,r} u|_{r=0} = 0$ （见 [LW]）。继续推导，我们将 I 写成如下形式

$$I = -\int_\Omega [(r v_{r,r})_{,r} + (r v_{z,r})_{,z}] u_{,r} u dr dz$$
$$-\int_\Omega [r v_{r,r} u_{,rr} + r v_{z,r} u_{,rz}] u dr dz \equiv I_1 + I_2.$$

为估计 I_1，我们计算

$$I_1^1 = (r v_{r,r})_{,r} + (r v_{z,r})_{,z} = r v_{r,rr} + v_{r,r} + r v_{z,rz}.$$

由于 $v = v_r \bar{e}_r + v_z \bar{e}_z$是无散的，我们有

$$v_{r,r} + v_{z,z} + \frac{v_r}{r} = 0. \tag{5.10}$$

由于方程 (5.10) 在 Ω 中恒成立，我们可以对 (5.10) 关于 r求导。于是得到

$$v_{r,rr} + v_{z,zr} + \frac{v_{r,r}}{r} - \frac{v_r}{r^2} = 0.$$

因此

$$I_1^1 = \frac{v_r}{r}.$$

那么， I_1 等于

$$I_1 = -\int_\Omega \frac{v_r}{r} u_{,r} u dr dz.$$

因此

$$\left|\int_0^t I_1 dt'\right| \le \left|\frac{v_r}{r}\right|_{2,\Omega^t} \left|\frac{u_{,r}}{r}\right|_{2,\Omega^t} |u|_{\infty,\Omega^t}. \tag{5.11}$$

Next

$$|I_2| \le \varepsilon(|u_{,rr}|^2_{2,\Omega} + |u_{,rz}|^2_{2,\Omega}) + c(1/\varepsilon)|u|^2_{\infty,\Omega}(|v_{r,r}|^2_{2,\Omega} + |v_{z,r}|^2_{2,\Omega}).$$

（5.9）中的第三个积分等于

$$\begin{aligned} J &= -\nu \int_\Omega (\Delta u)_{,r} u_{,r} dx = -\nu \int_\Omega \left(u_{,rrr} + \left(\frac{1}{r}u_{,r}\right)_{,r} + u_{,rzz} \right) u_{,r} r dr dz \\ &= -\nu \int_\Omega \left[\left(u_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r} \right) u_{,r} r \right]_{,r} dr dz + \nu \int_\Omega u_{,rr}(u_{,r}r)_{,r} dr dz \\ &\quad + \nu \int_\Omega \frac{1}{r} u_{,r}(u_{,r}r)_{,r} dr dz + \int_\Omega u^2_{,rz} dx = -\nu \int_{-a}^{a} \left(u_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r} \right) u_{,r} r \Big|_{r=0}^{r=R} dz \\ &\quad + \nu \int_\Omega (u^2_{,rr} + u^2_{,rz}) dx + \nu \int_\Omega \frac{u^2_{,r}}{r^2} dx + 2\nu \int_\Omega u_{,rr} u_{,r} dr dz, \end{aligned}$$

其中最后一项等于

$$\nu \int_\Omega (u^2_{,r})_{,r} dr dz = \nu \int_{-a}^{a} u^2_{,r} \Big|_{r=0}^{r=R} dz = \nu \int_{-a}^{a} u^2_{,r} \Big|_{r=R} dz \tag{5.12}$$

因为 $u_{,\ r}|_{r=0} = (v_\varphi + v_{\varphi,\ r}r)|_{r=0} = 0$。

为考察 J 中的边界项，我们回顾对称轴附近 v_φ 的展开（见 [LW]）

$$v_\varphi = a_1(z,t)r + a_2(z,t)r^3 + \cdots,$$

so

$$u = a_1(z,t)r^2 + a_2(z,t)r^4 + \cdots$$

于是 $\left(u_{,\ rr} + \frac{1}{r}u_{,\ r}\right) u_{,\ r}r|_{r=0} = 0$，并且我们必须强调，本文中的所有计算均针对充分正则解进行。

因此，J 中的边界项等于

$$J_1 = -\nu \int_{-a}^{a} \left(u_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r} \right) u_{,r} r \Big|_{r=R} dz.$$

将 $(5.1)_1$ 投影到 S_1 上，得到

$$-\nu \left(u_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r} \right) + 2\nu \frac{u_{,r}}{r} = f_0 \quad \text{on} \quad S_1.$$

因此

$$u_{,rr}|_{S_1} = \left(\frac{u_{,r}}{r} - \frac{1}{\nu} f_0\right)\Big|_{S_1}.$$

利用 J_1 中的表达式可得

$$J_1 = -2\nu \int_{-a}^{a} u_{,r}^2\Big|_{r=R} dz + \int_{-a}^{a} f_0 u_{,r} r\Big|_{r=R} dz.$$

(5.9) 中的第四项等于 (5.12)。

利用上述估计以及 (5.9) 中的表达式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{,r}|_{2,\Omega}^2 + \nu \int_{\Omega} (u_{,rr}^2 + u_{,rz}^2) dx + \nu \int_{\Omega} \frac{u_{,r}^2}{r^2} dx \\
&\quad - 2\nu \int_{\Omega} \frac{u_{,r}^2}{r^2} dx \le \int_{\Omega} \left|\frac{v_r}{r} u_{,r} u\right| dr dz \\
&\quad + \varepsilon(|u_{,rr}|_{2,\Omega}^2 + |u_{,rz}|_{2,\Omega}^2) + c(1/\varepsilon)|u|_{\infty,\Omega}^2 (|v_{r,r}|_{2,\Omega}^2 + |v_{z,r}|_{2,\Omega}^2) \\
&\quad + c(1/\varepsilon)|f_0|_{2,\Omega}^2 + \left| \int_{-a}^{a} f_0 u_{,r} r\Big|_{r=R} dz. \right.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

对 (5.13) 关于时间积分，并假设 ε 足够小，可得

$$\begin{aligned}
&|u_{,r}(t)|_{2,\Omega}^2 + \nu(|u_{,rr}|_{2,\Omega^t}^2 + |u_{,rz}|_{2,\Omega^t}^2) \le \nu \left|\frac{u_{,r}}{r}\right|_{2,\Omega^t}^2 \\
&\quad + c\left|\frac{v_r}{r}\right|_{2,\Omega^t} \left|\frac{u_{,r}}{r}\right|_{2,\Omega^t} |u|_{\infty,\Omega^t} + c|u|_{\infty,\Omega^t}^2 (|v_{r,r}|_{2,\Omega^t}^2 + |v_{z,r}|_{2,\Omega^t}^2) \\
&\quad + c|f_0|_{2,\Omega^t}^2 + |u_{,r}(0)|_{2,\Omega}^2 + \nu \int_0^t \int_{-a}^{a} u_{,r}^2\Big|_{r=R} dx dt' \\
&\quad + \left| \int_0^t \int_{-a}^{a} f_0 u_{,r} r\Big|_{r=R} dx dt' \right|.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

利用

$$\int_{\Omega^t} \left|\frac{u_{,r}}{r}\right|^2 dx dt' \le \int_{\Omega^t} \left(|v_{\varphi,r}|^2 + \frac{v_\varphi^2}{r^2}\right) dx dt' \le c D_1^2$$

and

$$\int_0^t \int_{-a}^{a} u_{,r}^2 \Big|_{r=R} dxdt' \le \varepsilon |\nabla u_{,r}|^2_{2,\Omega^t} + c(1/\varepsilon)|u_{,r}|^2_{2,\Omega^t},$$

$$\begin{aligned}\Big| \int_0^t \int_{-a}^{a} f_0 u_{,r} \Big|_{r=R} dxdt' &\le \varepsilon_1 |u_{,r}|^2_{4,2,S_1^t} + c(1/\varepsilon_1)|f_0|^2_{4/3,2,S_1^t} \\ &\le \varepsilon_1 (|u_{,rr}|^2_{2,\Omega^t} + |u_{,rz}|^2_{2,\Omega^t}) + c(1/\varepsilon_1)|f_0|^2_{4/3,2,S_1^t}\end{aligned}$$

以及引理 2.2、2.3，我们得到

$$\begin{aligned}|u_{,r}(t)|^2_{2,\Omega} + \nu(|u_{,rr}|^2_{2,\Omega^t} + |u_{,rz}|^2_{2,\Omega^t}) &\le c(D_1^2 + D_1^2 D_2 + D_1^2 D_2^2) \\ + c|f_0|^2_{2,\Omega^t} + c|f_0|^2_{4/3,2,S_1^t} &+ |u_{,r}(0)|^2_{2,\Omega}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

该不等式推出 (5.3)，并完成证明。 □

6 ω_r、 ω_z 的估计

引理 6.1. 假设 $D_5 = D_2(D_1 + D_3 + D_4)$、 $D_6 = D_2^{1-\varepsilon_0} D_3$ （其中D_1、 D_2 在 (2.1) 和 (2.7) 中引入，而 D_3、 D_4 分别在 (5.2) 和 (5.3) 中引入）。令

$$\begin{aligned}D_7 = |F_r|^2_{6/5,2,\Omega^t} + |F_z|^2_{6/5,2,\Omega^t} + |\omega_r(0)|^2_{2,\Omega} + |\omega_z(0)|^2_{2,\Omega} \\ + |f_\varphi|_{2,S_1^t}(D_3 + D_4) < \infty.\end{aligned}$$

令 ε_0 为任意小的正数，并令 $v_\varphi \in L_\infty(\Omega^t)$。令 $\Gamma \in L_2(0,t;\ H^1(\Omega))$。
Then

$$\begin{aligned}\|\omega_r\|^2_{V(\Omega^t)} + \|\omega_z\|^2_{V(\Omega^t)} + |\Phi|^2_{2,\Omega^t} &\le cD_5 |\Gamma_{,z}|_{2,\Omega^t} \\ + cD_6 |v_\varphi|^{\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} \|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t} &+ cD_7.\end{aligned} \tag{6.1}$$

证明。 将 $(1.9)_1$ 乘以 ω_r，将 $(1.9)_3$ 乘以 ω_z，在 Ω^t 上积分并相加

得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(|\omega_r(t)|^2_{2,\Omega}+|\omega_z(t)|^2_{2,\Omega})+\nu(|\nabla\omega_r|^2_{2,\Omega^t}+|\nabla\omega_z|^2_{2,\Omega^t})\\
&\quad+\nu\left|\frac{\omega_r}{r}\right|^2_{2,\Omega^t}-\nu\int\limits_{S_1^t}\bar{n}\cdot\nabla\omega_r\omega_r dS_1dt'-\nu\int\limits_{S_1^t}\bar{n}\cdot\nabla\omega_z\omega_z dS_1dt'\\
&=\int\limits_{\Omega^t}[v_{r,r}\omega_r^2+v_{z,z}\omega_z^2+(v_{r,z}+v_{z,r})\omega_r\omega_z]dxdt' \qquad (6.2)\\
&\quad+\int\limits_{\Omega^t}(F_r\omega_r+F_z\omega_z)dxdt'+\frac{1}{2}(|\omega_r(0)|^2_{2,\Omega}+|\omega_z(0)|^2_{2,\Omega})\\
&\equiv J+\int\limits_{\Omega^t}(F_r\omega_r+F_z\omega_z)dxdt'+\frac{1}{2}(|\omega_r(0)|^2_{2,\Omega}+|\omega_z(0)|^2_{2,\Omega}).
\end{aligned}
$$

由于 $\omega_r=-v_{\varphi,\ z}$ 且 $v_\varphi|_{r=R}=0$，我们得到

$$-\int\limits_{S_1}\bar{n}\cdot\nabla\omega_r\omega_r dS_1=0.$$

利用 $\omega_z=v_{\varphi,\ r}+\frac{v_\varphi}{r}$，我们推导出

$$-\nu\int\limits_{S_1^t}\bar{n}\cdot\nabla\omega_z\omega_z dS_1dt'=-\nu\int\limits_0^t\int\limits_{-a}^a\partial_r\left(v_{\varphi,r}+\frac{v_\varphi}{r}\right)\left(v_{\varphi,r}+\frac{v_\varphi}{r}\right)\Big|_{r=R}Rdzdt'\equiv I_1.$$

由于 $v_\varphi|_{r=R}=0$ I_1 取以下形式

$$I_1=-\nu\int\limits_0^t\int\limits_{-a}^a\left(v_{\varphi,rr}+\frac{v_{\varphi,r}}{r}\right)v_{\varphi,r}\Big|_{r=R}Rdzdt'.$$

将 $(1.7)_2$ 投影到 S_1 上可得

$$-\nu\left(v_{\varphi,rr}+\frac{1}{r}v_{\varphi,r}\right)=f_\varphi\quad\text{on}\quad S_1.$$

因此

$$I_1=R\int\limits_0^t\int\limits_{-a}^a f_\varphi v_{\varphi,r}\Big|_{r=R}dzdt'=\int\limits_0^t\int\limits_{-a}^a f_\varphi\left(u_{,r}-\frac{1}{R}u\right)\Big|_{r=R}dzdt'. \qquad (6.3)$$

在 J 中使用 (1.13) 和 (1.21) 可得

$$J=\int\limits_{\Omega^t}\Big[-\frac{1}{r^2}u_{,z}^2(\psi_{1,z}+r\psi_{1,rz})+\Big(\frac{1}{r}u_{,r}\Big)^2(r\psi_{1,zr}+2\psi_{1,z})$$
$$-\frac{1}{r^2}u_{,r}u_{,z}(-r\psi_{1,zz}+3\psi_{1,r}+r\psi_{1,rr})\Big]dxdt'\equiv J_1+J_2+J_3.$$

我们在 J_1 中进行分部积分，并使用 S_2上的边界条件。于是得到

$$J_1=\int\limits_{\Omega^t}\frac{1}{r^2}uu_{,zz}(\psi_{1,z}+r\psi_{1,rz})dxdt'+\int\limits_{\Omega^t}\frac{1}{r^2}uu_{,z}(\psi_{1,zz}+r\psi_{1,rzz})dxdt'.$$

现在，我们估计 J_1中的特定项,

$$J_{11}=\Big|\int\limits_{\Omega^t}uu_{,zz}\frac{1}{r}\psi_{1,rz}dxdt'\Big|\le|u|_{\infty,\Omega^t}|u_{,zz}|_{2,\Omega^t}\Big|\frac{1}{r}\psi_{1,rz}\Big|_{2,\Omega^t},$$
$$J_{12}=\Big|\int\limits_{\Omega^t}u\frac{u_{,z}}{r}\psi_{1,rzz}dxdt'\Big|\le|u|_{\infty,\Omega^t}\Big|\frac{u_{,z}}{r}\Big|_{2,\Omega^t}|\psi_{1,rzz}|_{2,\Omega^t},$$
$$J_{13}=\Big|\int\limits_{\Omega^t}u\frac{u_{,z}}{r}\frac{\psi_{1,zz}}{r}dxdt'\Big|\le|u|_{\infty,\Omega^t}\Big|\frac{u_{,z}}{r}\Big|_{2,\Omega^t}\Big|\frac{\psi_{1,zz}}{r}\Big|_{2,\Omega^t},$$
$$J_{14}=\Big|\int\limits_{\Omega^t}\frac{1}{r^2}uu_{,zz}\psi_{1,z}dxdt'\Big|=\Big|\int\limits_{\Omega^t}uu_{,zz}\frac{\psi_{1,z}}{r^2}dxdt'\Big|$$
$$\le|u|_{\infty,\Omega^t}|u_{,zz}|_{2,\Omega^t}\Big|\frac{\psi_{1,z}}{r^2}\Big|_{2,\Omega^t},$$

鉴于 S_2上的周期边界条件，可以进行分部积分。

接下来，我们考虑 J_2,

$$J_2=\int\limits_{\Omega^t}\frac{1}{r^2}u_{,r}^2(r\psi_{1,zr}+2\psi_{1,z})rdrdzdt'=\int\limits_{\Omega^t}\frac{1}{r}u_{,r}^2(r\psi_{1,zr}+2\psi_{1,z})drdzdt'$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_{-a}^{a}\Big[\frac{1}{r}uu_{,r}(r\psi_{1,zr}+2\psi_{1,z})\Big]\Big|_{r=0}^{r=R}dzdt'$$
$$-\int\limits_{\Omega^t}uu_{,rr}\Big(\frac{1}{r}\psi_{1,zr}+\frac{2}{r^2}\psi_{1,z}\Big)dxdt'$$
$$-\int\limits_{\Omega^t}uu_{,r}\Big(\psi_{1,zrr}-\frac{2}{r^2}\psi_{1,z}+\frac{2}{r}\psi_{1,zr}\Big)drdzdt',$$

其中， $r=R$ 的边界项为零，因为 $u|_{r=R}=0$。为了考察 $r=0$ 处的边界项，我们回顾一下 [LW] 中对称轴附近的表达式

$$u=a_1(z,t)r^2+a_2(z,t)r^4+\cdots,$$

so

$$u_{,r}=2a_1(z,t)r+4a_2(z,t)r^3+\cdots$$

Then

$$\frac{1}{r}uu_{,r}(r\psi_{1,zr}+2\psi_{1,z})\sim cr^2(r\psi_{1,zr}+2\psi_{1,z}).$$

上述表达式在 $r=0$ 处为零，因为 $\psi_{1,\ z}$ 在对称轴附近有界。

现在，我们估计 J_2 中的特定项，

$$\begin{aligned}
J_{21}&=\left|\int_{\Omega^t}uu_{,rr}\frac{1}{r}\psi_{1,rz}dxdt'\right|\le|u|_{\infty,\Omega^t}|u_{,rr}|_{2,\Omega^t}\left|\frac{1}{r}\psi_{1,zr}\right|_{2,\Omega^t},\\
J_{22}&=\left|\int_{\Omega^t}uu_{,rr}\frac{1}{r^2}\psi_{1,z}dxdt'\right|\le|u|_{\infty,\Omega^t}|u_{,rr}|_{2,\Omega^t}\left|\frac{1}{r^2}\psi_{1,z}\right|_{2,\Omega^t},\\
J_{23}&=\left|\int_{\Omega^t}u\frac{u_{,r}}{r}\psi_{1,zrr}dxdt'\right|\le|u|_{\infty,\Omega^t}\left|\frac{u_{,r}}{r}\right|_{2,\Omega^t}|\psi_{1,zrr}|_{2,\Omega^t},\\
J_{24}&=\left|\int_{\Omega^t}u\frac{u_{,r}}{r}\frac{1}{r^2}\psi_{1,z}dxdt'\right|\le|u|_{\infty,\Omega^t}\left|\frac{u_{,r}}{r}\right|_{2,\Omega^t}\left|\frac{1}{r^2}\psi_{1,z}\right|_{2,\Omega^t},\\
J_{25}&=\left|\int_{\Omega^t}u\frac{u_{,r}}{r}\frac{1}{r}\psi_{1,zr}dxdt'\right|\le|u|_{\infty,\Omega^t}\left|\frac{u_{,r}}{r}\right|_{2,\Omega^t}\left|\frac{1}{r}\psi_{1,zr}\right|_{2,\Omega^t}.
\end{aligned}$$

最后，我们考察 J_3。对 z 积分并利用 S_2 上的周期边界条件，得到

$$\begin{aligned}
J_3=&\int_{\Omega^t}u\frac{1}{r^2}u_{,rz}(-r\psi_{1,zz}+3\psi_{1,r}+r\psi_{1,rr})dxdt'\\
&+\int_{\Omega^t}u\frac{1}{r^2}u_{,r}(-r\psi_{1,zzz}+3\psi_{1,rz}+r\psi_{1,rrz})dxdt'.
\end{aligned}$$

现在，我们估计 J_3 中的特定项,

$$
\begin{aligned}
J_{31} &= \left| \int\limits_{\Omega^t} u u_{,rz} \frac{1}{r} \psi_{1,zz} dx dt' \right| \le |u|_{\infty,\Omega^t} |u_{,rz}|_{2,\Omega^t} \left| \frac{\psi_{1,zz}}{r} \right|_{2,\Omega^t}, \\
J_{32} &= \left| \int\limits_{\Omega^t} u \frac{1}{r^2} u_{,rz} \psi_{1,r} dx dt' \right| = \left| \int\limits_{\Omega^t} \frac{u}{r^{\varepsilon_0}} u_{,rz} \frac{\psi_{1,r}}{r^{2-\varepsilon_0}} dx dt' \right| \\
&\le |u|^{1-\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} |v_\varphi|^{\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} |u_{,rz}|_{2,\Omega^t} \left| \frac{\psi_{1,r}}{r^2} \right|_{L_2(0,t;L_{2,\varepsilon_0}(\Omega))},
\end{aligned}
$$

其中， $\varepsilon_0 > 0$ 可以取得任意小。因此

$$
\begin{aligned}
J_{33} &= \left| \int\limits_{\Omega^t} \frac{u}{r^{\varepsilon_0}} u_{,rz} \frac{1}{r^{1-\varepsilon_0}} \psi_{1,rr} dx dt' \right| \\
&\le |u|^{1-\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} |v_\varphi|^{\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} |u_{,rz}|_{2,\Omega^t} \left| \frac{\psi_{1,rr}}{r^{1-\varepsilon_0}} \right|_{2,\Omega^t}, \\
J_{34} &= \left| \int\limits_{\Omega^t} u \frac{u_{,r}}{r} \psi_{1,zzz} dx dt' \right| \le |u|_{\infty,\Omega^t} \left| \frac{u_{,r}}{r} \right|_{2,\Omega^t} |\psi_{1,zzz}|_{2,\Omega^t}, \\
J_{35} &= \left| \int\limits_{\Omega^t} u \frac{u_{,r}}{r} \frac{1}{r} \psi_{1,rz} dx dt' \right| \le |u|_{\infty,\Omega^t} \left| \frac{u_{,r}}{r} \right|_{2,\Omega^t} \left| \frac{\psi_{1,rz}}{r} \right|_{2,\Omega^t}, \\
J_{36} &= \left| \int\limits_{\Omega^t} u \frac{u_{,r}}{r} \psi_{1,rrz} dx dt' \right| \le |u|_{\infty,\Omega^t} \left| \frac{u_{,r}}{r} \right|_{2,\Omega^t} |\psi_{1,rrz}|_{2,\Omega^t}.
\end{aligned}
$$

总结上述估计，我们得到

$$
\begin{aligned}
|J| \le c|u|_{\infty,\Omega^t} \Bigg[& (|u_{,zz}|_{2,\Omega^t} + |u_{,zr}|_{2,\Omega^t} + |u_{,rr}|_{2,\Omega^t}) \cdot \\
& \cdot \left(\left| \frac{1}{r} \psi_{1,rz} \right|_{2,\Omega^t} + \left| \frac{1}{r} \psi_{1,zz} \right|_{2,\Omega^t} + \left| \frac{1}{r^2} \psi_{1,z} \right|_{2,\Omega^t} \right) \\
& + \left(\left| \frac{u_{,r}}{r} \right|_{2,\Omega^t} + \left| \frac{u_{,z}}{r} \right|_{2,\Omega^t} \right) \Bigg(|\psi_{1,rzz}|_{2,\Omega^t} + |\psi_{1,zrr}|_{2,\Omega^t} \\
& + |\psi_{1,zzz}|_{2,\Omega^t} + \left| \frac{1}{r} \psi_{1,zz} \right|_{2,\Omega^t} + \left| \frac{1}{r} \psi_{1,zr} \right|_{2,\Omega^t} + \left| \frac{1}{r^2} \psi_{1,z} \right|_{2,\Omega^t} \Bigg) \Bigg] \\
& + c|u|^{1-\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} |v_\varphi|^{\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} |u_{,rz}|_{2,\Omega^t} \left(\left| \frac{\psi_{1,rr}}{r} \right|_{L_2(0,t;L_{2,\varepsilon_0}(\Omega))} + \left| \frac{\psi_{1,r}}{r^2} \right|_{L_2(0,t;L_{2,\varepsilon_0}(\Omega))} \right).
\end{aligned}
$$

利用 (2.7)、(5.2)、(5.3) 以及由 (2.1) 得到的估计

$$\left|\frac{u_{,r}}{r}\right|_{2,\Omega^t} \le \left|\frac{v_\varphi}{r}\right|_{2,\Omega^t} + |v_{\varphi,r}|_{2,\Omega^t} \le cD_1,$$
$$\left|\frac{u_{,z}}{r}\right|_{2,\Omega^t} \le |v_{\varphi,z}|_{2,\Omega^t} \le cD_1$$

我们得到关于 J 的以下估计,

$$|J| \le c[D_2(D_3+D_4)+D_1D_2]\Bigg(|\psi_{1,rrz}|_{2,\Omega^t} + |\psi_{1,rzz}|_{2,\Omega^t}$$
$$+ |\psi_{1,zzz}|_{2,\Omega^t} + \left|\frac{1}{r}\psi_{1,rz}\right|_{2,\Omega^t} + \left|\frac{1}{r}\psi_{1,zz}\right|_{2,\Omega^t} + \left|\frac{1}{r^2}\psi_{1,z}\right|_{2,\Omega^t}\Bigg)$$
$$+ cD_2^{1-\varepsilon_0}D_3|v_\varphi|^{\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t}\left(\left|\frac{1}{r}\psi_{1,rr}\right|_{L_2(0,t;L_{2,\varepsilon_0}(\Omega))} + \left|\frac{1}{r^2}\psi_{1,r}\right|_{L_2(0,t;L_{2,\varepsilon_0}(\Omega))}\right) \equiv J'.$$

由 (3.4) 可得（回忆一下， $\omega_1 = \Gamma$）

$$|\psi_{1,rrz}|_{2,\Omega^t} + |\psi_{1,rzz}|_{2,\Omega^t} + |\psi_{1,zzz}|_{2,\Omega^t} \le c|\Gamma_{,z}|_{2,\Omega^t}. \tag{6.4}$$

估计 (3.22) 和 (3.25) 推出

$$\left|\frac{\psi_{1,rz}}{r}\right|_{2,\Omega^t} + \left|\frac{\psi_{1,zz}}{r}\right|_{2,\Omega^t} + \left|\frac{\psi_{1,z}}{r^2}\right|_{2,\Omega^t} \le c|\Gamma_{,z}|_{2,\Omega^t}. \tag{6.5}$$

最后，(3.33) 得出

$$\left|\frac{1}{r}\psi_{1,rr}\right|_{L_2(0,t;L_{2,\varepsilon_0}(\Omega))} + \left|\frac{1}{r^2}\psi_{1,r}\right|_{L_2(0,t;L_{2,\varepsilon_0}(\Omega))} \le cR^{\varepsilon_0}\|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t} \tag{6.6}$$

回忆一下，(6.5) 对 $\psi_1|_{r=0} = 0$ 成立。

这一限制意味着 $v_z|_{r=0} = 0$，因此这是本文所证明的关于解的一项强限制。

在 J' 中使用 (6.4)–(6.6) 得到

$$J' \le cD_2(D_1+D_3+D_4)|\Gamma_{,z}|_{2,\Omega^t} + cD_2^{1-\varepsilon_0}D_3|v_\varphi|^{\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t}\|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t}.$$

根据引理 5.1，(6.3) 中引入的项 I_1 有界，满足

$$I \le c|f_\varphi|_{2,S_1^t}\|u\|_{2,2,\Omega^t} \le c|f_\varphi|_{2,S_1^t}(D_3+D_4).$$

利用 (6.2) 中的估计，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\|\omega_r\|_{V(\Omega^t)} + \|\omega_z\|_{V(\Omega^t)} + |\Phi|_{2,\Omega^t} \\
&\le cD_2(D_1 + D_3 + D_4)|\Gamma_{,z}|_{2,\Omega^t} + cD_2^{1-\varepsilon_0} D_3 |v_\varphi|^{\varepsilon_0}_{\infty,\Omega^t} \|\Gamma\|_{1,2,\Omega^t} \\
&\quad + c(|F_r|_{6/5,2,\Omega^t} + |F_z|_{6/5,2,\Omega^t}) + c(|\omega_r(0)|_{2,\Omega} \\
&\quad + |\omega_z(0)|_{2,\Omega}) + c|f_\varphi|_{2,S_1^t}(D_3 + D_4),
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

其中我们用到了

$$
\begin{aligned}
\left| \int_\Omega (F_r\omega_r + F_z\omega_z) dx dt' \right| &\le \varepsilon(|\omega_r|^2_{6,\Omega} + |\omega_z|^2_{6,\Omega}) \\
&\quad + c(1/\varepsilon)(|F_r|^2_{6/5,\Omega} + |F_z|^2_{6/5,\Omega}).
\end{aligned}
$$

因此，(6.7) 蕴含 (6.1)，并完成了证明。 □

B. 小数据下 (1.1) 正则解的存在性

回顾这些量

$$
u_1 = \frac{v_\varphi}{r}, \quad \omega_1 = \frac{\omega_\varphi}{r}, \quad \psi_1 = \frac{\psi}{r}, \quad f_1 = \frac{f_\varphi}{r}, \quad F_1 = \frac{F_\varphi}{r}. \tag{B.1}
$$

鉴于 [HL]，系统 (1.1) 等价于下列系统

$$
\begin{aligned}
&u_{1,t} + v \cdot \nabla u_1 - \nu\left(\Delta u_1 + \frac{2}{r} u_{1,r}\right) = 2u_1\psi_{1,z} + f_1, \\
&\omega_{1,t} + v \cdot \nabla \omega_1 - \nu\left(\Delta \omega_1 + \frac{2}{r}\omega_{1,r}\right) = 2u_1 u_{1,z} + F_1, \\
&-\Delta\psi_1 - \frac{2}{r}\psi_{1,r} = \omega_1, \\
&\text{periodic boundary condtions on } S_2, \\
&u_1|_{t=0} = u_1(0), \\
&\omega_1|_{t=0} = \omega_1(0).
\end{aligned} \tag{B.2}
$$

F函数 u_1, ω_1, ψ_1 关于变量 r 具有紧支撑 .

将 $(B.2)_1$ 乘以 $u_1|u_1|^2$，在 Ω 上积分并利用边界条件，得到

$$
\frac{d}{dt}|u_1|^4_{4,\Omega} + \nu|u_1|^4_{4,\Omega} \le c|\omega_1|^2_{2,\Omega}|u_1|^4_{4,\Omega} + c|f_1|^4_{4,\Omega}. \tag{B.3}
$$

将 $(B.2)_2$ 乘以 ω_1，在 Ω 上积分并利用边界条件。于是有

$$\frac{d}{dt}|\omega_1|^2_{2,\Omega} + \nu|\omega_1|^2_{2,\Omega} \le c|u_1|^4_{4,\Omega} + c|F_1|^2_{2,\Omega}. \tag{B.4}$$

引入以下量

$$X(t) = |u_1(t)|^4_{4,\Omega} + |\omega_1(t)|^2_{2,\Omega}. \tag{B.5}$$

于是，(B.3) 和 (B.4) 推出

$$\frac{d}{dt}X + \nu X \le c_0 X^2 + G(t), \tag{B.6}$$

其中

$$G(t) = c(|f_1(t)|^4_{4,\Omega} + |F_1(t)|^2_{2,\Omega}). \tag{B.7}$$

在时间区间 $(0,T)$ 上考虑 (B.6)。假设对于 $t \in (0,T)$，下列不等式成立

$$G(t) \le k_0. \tag{B.8}$$

于是，(B.6) 可写为

$$\frac{d}{dt}S \le c_0 k_0 \left(\frac{1}{k_0}X^2 + 1\right). \tag{B.9}$$

令 $X = \alpha X'$。则

$$\frac{d}{dt}X' \le \frac{c_0 k_0}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{k_0}X'^2 + 1\right).$$

令 $\alpha^2 = k_0$，得到

$$\frac{d}{dt}X' \le c_0\sqrt{k_0}(X'^2 + 1). \tag{B.10}$$

对 (B.10) 关于时间积分可得

$$\operatorname{arctg} X'(t) - \operatorname{arctg} X'(0) \le c_0\sqrt{k_0}t.$$

因此

$$X'(t) \le \frac{\operatorname{tg}(c_0\sqrt{k_0}t) + X'(0)}{1 - X'(0)\operatorname{tg}(c_0\sqrt{k_0}t)}.$$

回想起 $X'(0) = {}^{X_{(0)}}\overline{\sqrt{k_0}}$，并令 $y = c_0\sqrt{k_0}t$，我们得到

$$X(t) \le \frac{(\operatorname{tg} y + \frac{X(0)}{\sqrt{k_0}})\sqrt{k_0}}{1 - X(0)c_0 t\frac{\operatorname{tg} y}{y}} \le \beta(T), \tag{B.11}$$

其中 $t \le T$。因此，当 T 足够大时，对于足够小的 $X(0)$ 和k_0，(B.11) 成立。

考虑区间 $(0, T)$ 上的 (B.6)。利用 (B.11)，可将 (B.6) 写成如下形式

$$\frac{d}{dt}X + \nu_* X \le G(t), \tag{B.12}$$

其中$\nu_* = \nu - c_0\beta$。

对时间积分 (B.12)，得到

$$X(t) \le e^{-\nu_* t}\int_0^t G(t')e^{\nu_* t'}dt' + e^{-\nu_8 t}X(0). \tag{B.13}$$

令 $t = T$，则有

$$X(T) \le \int_0^T G(t)dt + e^{-\nu_* T}X(0). \tag{B.14}$$

对于足够小的 $X(0)$，k_0时间区间 $(0, T)$ 可以取足够大。于是，由 (B.14) 可推出

$$X(T) \le X(0). \tag{B.15}$$

因此，对于任意时间区间 $(kT, (k+1)T)$，$k \in \mathbb{N}$，都可以进行上述考察。

参考文献

[LW] Liu, J.G.; Wang, W.C.：轴对称无散向量场的刻画与正则性及其在 Navier-Stokes 方程中的应用，SIAM 数学分析杂志 41 (2009), 1825–1850。

[CFZ]Chen, H.; Fang, D.; Zhang, T.: 三维轴对称纳维–斯托克斯方程的正则性, 离散与连续动力系统 37 (4) (2017), 1923– 1939.

[L1] Ladyzhenskaya, O.A.: 黏性不可压缩流体的数学理论, Nauka, 莫斯科 1970（俄文）；第二版英文版，经过修订和扩充，由 Richard A. Silverman 和 John Chu 翻译。数学及其应用，第 2 卷，xviii+224 页。Gordon and Breach 科学出版社，纽约。[BIN] Besov, O.V.; Il'in, V.P.; Nikolskii, S.M.: 函数的积分表示与嵌入定理, Nauka, 莫斯科 1975（俄文）；英文译本第 I 卷。Scripta 数学丛书。V.H. Win- ston，纽约（1978）。[K] Kondrat'ev, V.: 圆锥形或具有角点的区域中椭圆方程的边值问题, 莫斯科数学会会刊 16 (1967), 209–292（俄文）；英文译本：莫斯科数学会汇刊 16 (1967), 227–313。[NZ] Nowakowski, B.; Zaj˛aczkowski, W.M.: 有界圆柱体内纳维–斯托克斯方程轴对称解的流函数加权估计, doi: 10.48550/ArXiv.2210.15729。[LSU] Ladyzhenskaya, O.A.; Solonnikov, V.A.; Uraltseva, N.N.: 线性与拟线性抛物型方程, Nauka, 莫斯科 1967（俄文）。[L2]Ladyzhenskaya, O.A.: 轴对称情况下纳维–斯托克斯方程三维柯西问题的唯一整体可解性, 列宁格勒数学研究所科学讨论班纪要, 7 (1968), 155– 177（俄文）。[UY] Ukhovskii, M.R.; Yudovich, V.I.: 充满整个空间的理想流体和黏性流体的轴对称流动, 应用数学与力学杂志 32 (1968), 52–61。[HL] Hou, T,Y.; Li, C.: 带旋流的三维轴对称纳维–斯托克斯方程的动力稳定性, 纯粹与应用数学通讯 61 (5) (2008), 661–697。[NZ1]Nowakowski, B.; Zaj˛aczkowski, W.M.: 小旋流条件下纳维–斯托克斯方程的整体正则轴对称解, arXiv: 2302.00730。