X (202X) XX–XX
DOI：XXX

图的强度与支配数

Yukio Takahashi[1,*], Rikio Ichishima[2], Francesc A. Muntaner-Batle[3]

[1] *Department of Science and Engineering, Faculty of Electronics and Informatics, Kokushikan University, 4-28-1 Setagaya, Setagaya-ku, Tokyo 154-8515, Japan*[2] *Department of Sport and Physical Education, Faculty of Physical Education, Kokushikan University, 7-3-1 Nagayama, Tama-shi, Tokyo 206-*8515, *Japan*[3] *Graph Theory and Applications Research Group, School of Electrical Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering and BuiltEnvironment, The University of Newcastle, NSW 2308, Australia*

（收稿日期：Day Month 202X。 修订稿收到日期：Day Month 202X。接受日期：Day Month 202X。在线发表日期：Day Month 202X .）

arXiv:2304.00859v1 [math.CO] 3 Apr 2023

摘要

图 G 的一种编号 f 是指将集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中的不同元素分配给 G的各个顶点的一种标记，其中图 G 的阶为 n。编号 f: $V(G) \to \{1,2,\ldots,n\}$ G 的强度 str$_f(G)$ 定义为

$$\mathrm{str}_f(G) = \max\{f(u) + f(v) \,|uv \in E(G)\},$$

也就是说，str$_f(G)$ 是 G 的最大边标记，而图 G 本身的强度 str(G) 为

$$\mathrm{str}(G) = \min\{\mathrm{str}_f(G) \,| f \text{ is a numbering of } G\}.$$

本文根据图的支配数以及其（边）覆盖数和（边）独立数，给出了图的强度的一个紧下界。我们还根据图的子图结构，给出了图的强度达到先前下界的充分必要条件。此外，我们在一定条件下建立了图的支配数的一个紧下界。

关键词：强度；（边）覆盖；（边）独立数；支配数；图标号；组合优化

2020年数学主题分类：05C78, 90C27

1. 引言

W我们参阅了 Chartrand 和 Lesniak 所著的书籍，其中介绍了本文未述及的图论符号和术语
pa特别地，图的顶点集记为 G，而图 G 的边集记为 $E(G)$。

我们将使用符号 $[a,b]$ 表示满足 $a \le x \le b$ 的整数区间 x。对于阶为 n 的图 G，一个编号
f G 的编号是一种标记，它将集合 $[1,n]$ 中的不同元素分配给 G 的顶点，其中每个 $uv \in E(G)$ 都被标记
$f(u) + f(v)$。编号 f: $V(G) \to [1,n]$ of G 的强度 str$_f(G)$ 定义为

$$\mathrm{str}_f(G) = \max\{f(u) + f(v) \,|uv \in E(G)\},$$

th也就是说，str$_f(G)$ 是 G 的最大边标记，而图 G 本身的强度 str(G) 为

$$\mathrm{str}(G) = \min\{\mathrm{str}_f(G) \,| f \text{ is a numbering of } G\}.$$

图 G 的编号 f 若满足 str$_f(G)$ = str(G)，则称为 G的强度标号。由于空图 nK_1 没有边，因此此定义不适用于这类图。因此，对于每个正整数 n，我们可以定义 str$(nK_1) = +\infty$。这种编号方式最初在 [7] 中提出，作为寻找图是否为超边幻图这一问题的推广（超边幻图的定义见 [3]；关于同一概念的其他定义，以及通常更实用的定义，也可参阅 [1] 或 [4]）。

图标记领域还研究了其他相关参数。Gallian 的详尽综述是了解这一主题的极佳资料来源 [5], ，其中也介绍了其他类型的图标记问题及其应用。

已有研究根据图上定义的其他参数，得出了图的强度的若干界（见[6,7,11,15]）。其中， [7] 中确立的以下结果尤其有用：它根据图的阶和最小度 $\delta(G)$，给出了图的强度的下界G。

*通讯作者（takayu@kokushikan.ac.jp）

引理 1.1. 对于每个阶为 n 且满足 $\delta(G) \geq 1$ 的图 G，

$$\operatorname{str}(G) \geq n + \delta(G).$$

值得一提的是，引理 1.1 给出的下界是紧的，因为存在无穷多个图 G，使得 $\operatorname{str}(G) = |V(G)| + \delta(G)$（关于这类图及其他紧下界的详细列表，见 [6–8, 11]）。

对于每个阶为 n 的图 G，显然有 $3 \leq \operatorname{str}(G) \leq 2n-1$。事实上，文献 [10] 表明，对于每个$k \in [1, n-1]$，都存在一个阶为 n 的图 G，满足 $\delta(G) = k$ 且 $\operatorname{str}(G) = n + k$。

在解决如下问题的过程中（该问题见 [7] 提出）：寻找图 G 的充分条件，使其阶为 n 且满足$\delta(G) \geq 1$，从而保证 $\operatorname{str}(G) = n + \delta(G)$。文献 [9] 给出了以下图类的一种等价定义。对于整数 $k \geq 2$，设 F_k 为满足 $V(F_k) = \{v_i \,|\, i \in [1,k]\}$ 的图，并且

$$E(F_k) = \{v_i v_j \,|\, i \in [1, \lfloor k/2 \rfloor] \text{ and } j \in [1+i, k+1-i]\}.$$

令 $\overline{G}$ 表示图 G 的补图。[9] 中的以下结果给出了阶为 n 的图 G 满足不等式 $\operatorname{str}(G) \leq 2n-k$ 的充分必要条件，其中 $k \in [2, n-1]$。

定理 1.1. 设 G 是一个阶为 n 的图。那么，$\operatorname{str}(G) \leq 2n-k$ 当且仅当 $\overline{G}$ 含有 F_k 作为子图，其中 $k \in [2, n-1]$。

前述结果在图的强度研究中发挥着重要作用（例如参见 [12–14]）。以下结果由引理 1.1 和定理 1.1 推得。

定理 1.2. 设 G 是一个阶为 n 的图，且 $\delta(G) = n-k$，其中 $k \in [2, n-1]$。那么，$\operatorname{str}(G) = n + \delta(G)$ 当且仅当 $\overline{G}$ 含有 F_k 作为子图。

2. 涉及支配数的结果

本节给出一些关于图的支配数的结果，并给出一个关于无孤立顶点图的强度的新紧下界。

下面的结果根据图的支配数给出了图的强度下界。

引理 2.1. 对于每个阶为 n 的图 G,

$$\operatorname{str}(G) \geq 2n - 2\gamma(G) + 1.$$

证明. 设 G 是一个满足 $V(G) = \{v_i \,|\, i \in [1,n]\}$ 的图，并考虑其强度标号 f。由于 $1 \leq \gamma(G) \leq n$，可知集合

$$S = [n - \gamma(G), n]$$

至少包含两个整数。根据鸽巢原理，S 中至少有两个整数被赋予两个相邻顶点，设为 $f(v_s)$ 和 $f(v_t)$，其中 $s, t \in [1,n]$。现在，不妨假设 $f(v_s) > f(v_t)$。于是

$$\begin{aligned} \min\{f(v_s) + f(v_t) \,|\, s,t \in [1,n]\} &\geq (n - \gamma(G)) + (n - \gamma(G) + 1) \\ &= 2n - 2\gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

因此,

$$\operatorname{str}(G) = \operatorname{str}_f(G) \geq n - 2\gamma(G) + 1,$$

证明完毕。 □

引理 2.1 给出的界是紧的，因为存在无穷多个图 G 满足 $\operatorname{str}(G) = 2|V(G)| - 2\gamma(G) + 1$。为此，只需考虑阶为 n 的完全图 K_n。显然，$\operatorname{str}(K_n) = 2n-1$，且 $\gamma(K_n) = 1 (n \geq 2)$。这意味着 $\operatorname{str}(K_n) = 2n - 2\gamma(K_n) + 1 (n \geq 2)$。

下面的结果给出了一个阶为 n 的图 G 满足 $\operatorname{str}(G) = 2n - 2\gamma(G) + 1$ 的充分必要条件。

定理 2.1. 设 G 是一个阶为 n、具有 $\gamma(G) = k$ 的图，其中 $k \in [2, \lceil n/2 \rceil]$。那么，$\operatorname{str}(G) = 2n - 2\gamma(G) + 1$ 当且仅当 $\overline{G}$ 包含 F_{2k-1} 作为子图。

证明。首先，假设 str $(G) = 2n-2k+1$，其中 $\gamma(G) = k(k \in [2, \lceil n/2 \rceil])$。设 $V(G) = \{v_i \mid i \in [1,n]\}$，并且不失一般性地假设，存在一种 G 的强度标号，它将 i 指派给 $v_i(i \in [1,n])$。由于 str $(G) = 2n-2k+1$，任意两个满足 $i+j > 2n-2k+1$ 的顶点 v_i 和 v_j 在 G 中都不相邻。这意味着，任意两个满足 $i+j > 2n-2k+1$ 的顶点 v_i 和v_j 在 $\overline{G}$ 中都相邻。设 $v_i = w_{n+1-i}(i \in [1,n])$，使得 $V\left(\overline{G}\right) = \{w_i \mid i \in [1,n]\}$。那么，如果 w_{n+1-i} 和 w_{n+1-j} 在 $\overline{G}$ 中相邻，则可推出

$$\begin{aligned}(n+1-i)+(n+1-j) &= 2n+2-(i+j)\\ &< 2n+2-(2n-2k+1) = 2k+1.\end{aligned}$$

因此，$\overline{G}$ 包含 F_{2k-1} 作为子图。

接下来，假设 $\overline{G}$ 包含 F_{2k-1} 作为子图，其中 $\gamma\ (G)\ = k\ (k \in [2, \lceil n/2 \rceil])$。由定理 1.1 可得

$$\operatorname{str}(G) \leq 2n-(2k-1) = 2n-2\gamma(G)+1.$$

□

以下结果见于 [15]，它给出了图 G（阶为 n）满足 str（G）$= 2n-2\beta$（G）$+1$的充分必要条件，其中 β（G）表示 G的独立数。

定理2.2。设 G是一个阶为 n的图，且 β（G）$= k$，其中 $k \in [2, \lceil n/2 \rceil]$。那么，str（$G$）$= 2n-2\beta$（$G$）$+1$当且仅当$\overline{G}$ 包含 F_{2k-1} 作为子图。

下一个结果由定理2.1和2.2推出，它揭示了支配数与独立数之间的联系。

推论2.1. 设 G是一个阶为 n且满足 $\gamma(G) = k$的图，其中 $k \in [2, \lceil n/2 \rceil]$，并假设 $\overline{G}$包含 F_{2k-1}作为子图。那么 $\gamma(G) = \beta(G)$。

下一个下界　　根据其最小度，立即可由引理2得到关于支配的下界　　.1.

C推论 2.2. 设 G是一个阶为 n且满足 str $(G) = n+\delta(G)$ 的图，其中 $\delta(G) \geq 1$。那么

$$\gamma(G) \geq \lceil (n-\delta(G)+1)/2 \rceil.$$

有无穷多个图能达到推论 2.3 中给出的界。例如，若 $G = K_n\ (n \geq 2)$，则 str $(G) = 2n-1$。此外，我们还有

$$|V(G)| = n \text{ and } \delta(G) = n-1.$$

这意味着 $|V(G)| - \delta(G) = 1$。另一方面，我们有

$$\gamma(G) = 1 \text{ and } \lceil (|V(G)| - \delta(G)+1)/2 \rceil = 1.$$

已知，不含孤立顶点的图的支配数不大于其覆盖数和独立数（例如，参见 [2, p. 307]）。注意，我们分别用 $\alpha(G)$、$\alpha_1(G)$ 和 $\beta_1(G)$ 表示 G 的覆盖数、边覆盖数和边独立数。

定理 2.3. 若 G 是一个不含孤立顶点的图，则

$$\gamma(G) \leq \min\{\alpha(G), \alpha_1(G), \beta(G), \beta_1(G)\}.$$

上述定理结合引理 2.1，给出了不含孤立顶点的图的强度的如下下界。

推论 2.3. 对于每个不含孤立顶点的图 G，

$$\operatorname{str}(G) \geq 2n-2\min\{\alpha(G), \alpha_1(G), \beta(G), \beta_1(G)\}+1.$$

由 [7] 可知，str $(C_{2n+1}) = 2n+3\ (n \geq 1)$。此外，注意到

$$\alpha(C_{2n+1}) = \alpha_1(C_{2n+1}) = n+1 \text{ and } \beta(C_{2n+1}) = \beta_1(C_{2n+1}) = n\ (n \geq 1).$$

由此可知，推论 2.3 给出的界是紧的。

参考文献

[1] B.D. Acharya 和 S.M. Hegde，强可索引图， *Discrete Math*。，93 (1991) 123–129。[2] G. Chartrand 和 L. Lesniak， *Graphs & Digraphs* 3 版，CRC出版社，1996。[3] H. Enomoto、A. Llad´o、T. Nakamigawa 和 G. Ringel，超边幻图， *SUT J. Math.*，34 (1998) 105–109。[4] R.M. Figueroa-Centeno、R. Ichishima 和 F.A. Muntaner-Batle，超边幻方标号在其他标号类别中的位置，*Discrete Math*。，231 (2001) 153–168。[5] J.A. Gallian，图标号动态综述， *Electron*。 *J*。 *Combin*。，(2022) #DS6。[6] Z.B. Gao、G.C. Lau 和 W.C. Shiu，具有最小强度的图， *Symmetry*，13 (2021) 513。[7] R. Ichishima、F.A. Muntaner-Batle 和 A. Oshima，图强度的界， *Australas*。 *J*。 *Combin*。，72 (2018) 492–508。[8] R. Ichishima、F.A. Muntaner-Batle 和 A. Oshima，某些树的强度， *AKCE Int*。 *J*。 *Graphs Comb*。，17 (2020) 486–494。[9] R. Ichishima、F.A. Muntaner-Batle 和 A. Oshima，图的强度与带宽的最小度条件， *Discrete*。 *Appl*。*Math*。，340 (2022) 191–198。[10] R. Ichishima、F.A. Muntaner-Batle 和 A. Oshima，完全图因子分解给出的一个图强度结果，

Discrete Math. 。，*Lett* **8** 2022 78 82 ( ) – 。[11] R. Ichishima、F.A. Muntaner-Batle、A. Oshima 和 Y. Takahashi，图的强度及相关不变量，*Memoirs Kokushikan Univ Sci* **41** 2020 1 8 。*Inf*。。，( ) – 。[12] R. Ichishima、F.A. Muntaner-Batle、A. Oshima 和 Y. Takahashi，Ramsey理论与图的强度，预印本。[13] R. Ichishima、A. Oshima 和 Y. Takahashi，图的边强度， *Discrete Math. Lett*。，3 (2020) 44–49。[14] R. Ichishima、A. Oshima 和 Y. Takahashi，关于图的边强度和强度的一些新结果， *Discrete Math. Lett*。，12 (2023) 22–25。[15] R. Ichishima、F.A. Muntaner-Batle 和 Y. Takahashi，关于图的强度与独立数， *Contrib. Math*。，6 (2022) 25–29。