arXiv:2304.00866v2 [cond-mat.mes-hall] 3 Sep 2024

朗道能级及其高陈数类比的唯一性

Bruno Mera[1,2] 和 Tomoki Ozawa[1]
[1] *Advanced Institute for Materials Research (WPI-AIMR), Tohoku University, Sendai 980-8577, Japan*
[2] *Instituto de Telecomunicações and Departmento de Matemática,Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa,Avenida Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal*（日期：2024年9月4日）

朗道能级是带电粒子在二维磁场中的本征态，也是整数和分数量子霍尔效应的核心；这两种效应是展现拓扑特征的典型现象。随着近期在范德华材料中发现分数量子霍尔相，人们对稳定分数量子霍尔相所需的精确条件展开了迅速深入的研究。如今人们已经认识到，要获得分数量子霍尔相，关键在于能带的本征态在实空间和动量空间坐标中都是全纯函数。朗道能级确实是这类能带的例子，而且还具有几何特征平坦这一特殊性质。本文证明，事实上，具有平坦几何且波函数为全纯函数的能量本征态只有朗道能级及其高陈数类比。已知任意全纯本征态都可以由具有平坦几何的本征态（如朗道能级）构造而来，因此，我们对朗道能级唯一性的证明使人们能够构造任何可能用于稳定分数量子霍尔相的全纯本征态。

引言

人们对拓扑平带的兴趣日益浓厚。这里，形容词 平坦 不仅可以指能量色散，还可以指动量空间中的几何性质，例如贝里曲率和量子度量。最低朗道能级就是这种在能量和几何上都平坦的能带的一个例子。此外，最低朗道能级还具有一项特殊性质：波函数在实空间和动量空间中都可以取为全纯函数 [1, 2]。众所周知，当能带满足全纯性条件且贝里曲率平坦时，其投影密度算符遵循 Girvin-MacDonald-Platzman（GMP）代数 [3], ，这意味着短程相互作用可以稳定分数拓扑相 [4]。最近的研究发现，全纯性是获得分数拓扑相的关键，而贝里曲率严格平坦并非必要条件[5]。已知任何全纯态都可以通过修饰具有均匀贝里曲率的全纯波函数来构造。手征极限下的扭转双层石墨烯 [6–12] 就是这类全纯态的一个例子。随着近期在双层石墨烯中发现分数量子霍尔态 [13, 14] ，以及在扭转莫尔´晶格中发现分数量子反常霍尔态 [15–19], 亟需确定能够稳定分数拓扑相的波函数类别。

本文表明，最低朗道能级不仅是满足全纯性条件的几何平带的一个例子，而且是在二维空间中陈数为 1 的各向同性平带的唯一可能形式。我们还表明，一旦固定陈数以及一个控制各向异性的参数——模参数，陈数更高的几何平带（例如在 [20], 中构造的平带）也被唯一确定。最后，我们给出了这些波函数的显式表达式。一方面，我们的结果对研究满足 GMP 代数的能带时可考虑的波函数类型施加了严格限制。另一方面，由于唯一性，我们给出的目标波函数显式表达式是完备的，可为进一步研究这类能带中的分数量子拓扑物理提供坚实基础。

本文结构如下。在第I 节中，我们展示研究结果。首先回顾并讨论近期提出的 K¨ahler 能带这一概念（见第IA节），然后在第IB节陈述主定理，并在第IC 节给出证明。在第II 节讨论研究结果。在第III 节介绍证明主定理所用的一些技术性结果。

I. 研究结果

A. K¨ahler 能带

在陈述主定理并给出其证明之前，我们先介绍布洛赫能带的基本术语以及 K¨ahler 能带的概念，这些内容将在下文讨论中用到。我们聚焦于二维空间。

周期势中粒子的能带根据布洛赫定理由准动量 k 表征。准动量 k 是一个取自称为布里渊区 BZ^2的二维环面的参数。对于给定的 k，某条能带的一个本征态由布洛赫波函数 $|u_{\mathbf{k}}\rangle$ 描述，该函数取值于适当的希尔伯特空间$\mathcal{H}$中。由于将 $|u_{\mathbf{k}}\rangle$ 乘以任意非零复数所定义的量子态相同，因此，一个量子态是

由 $\mathcal{H}$ 的一维向量子空间所指定的，即复射影空间中的一个点。因此，一条布洛赫能带定义了一个从布里渊区到复射影空间的映射。

在文献 [21–23], 中，我们引入了（反）K¨ahler 能带的概念。对于这类布洛赫能带，从布里渊区到量子态空间的关联映射，在将其恰当地视为复流形之间的映射时，是一个（反）全纯映射，且导数处处非零 [；从数学上说，该映射是一个（反）全纯浸入]。对于（反）K¨ahler 能带，量子度规 g 与贝里曲率 F 通过复结构 J相联系；该张量的平方等于 -1，从而赋予 BZ^2 以（反）K¨ahler 流形结构。在 BZ^2 [24],的周期坐标 $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ 中，分别用相同字母 g表示代表 g、 F 和J的二乘二矩阵，则= $[g_{ij}]_{1\le i,\ j\le 2}$、$F(\mathbf{k}) = [F_{ij}]_{1\le i,\ j\le 2}$和 $J(\mathbf{k}) = [J_{ij}]_{1\le i,\ j\le 2}$。K¨ahler 能带必须满足的条件等价于以下矩阵方程

$$g(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2}F(\mathbf{k})J(\mathbf{k}), \tag{1}$$

对其取行列式，得到量子度规—贝里曲率关系

$$\sqrt{\det(g(\mathbf{k}))} = \frac{|F_{12}(\mathbf{k})|}{2}. \tag{2}$$

（注意，我们采用的约定是贝里曲率 F 为纯虚数。）在文献 [21], 中，最低朗道能级作为具有 $\mathcal{C} = 1$ 的 K¨ahler 能带的一个特例出现；对于该能带，布里渊区的量子几何与 k 无关，即在布里渊区的整个平移群 $\mathbb{R}^2$ 作用下保持不变——我们将这类布洛赫能带称为几何平坦的 K¨ahler 能带 [25]。

B. 主定理

本文的主要结果是以下定理:

定理 1 (几何平坦 K¨ahler 能带的唯一性)。几何平坦的（反）K¨ahler 能带，即满足等式（*1*）且 g 与 $\mathbf{k}$ 无关的能带，在给定陈数 $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 和常复结构 J的条件下，除规范选择外是唯一的 。

下面给出几点说明。 $\mathcal{C} > 0$ 对应于 K¨ahler 能带，而 $\mathcal{C} < 0$ 对应于反 K¨ahler 能带。下文假设 $\mathcal{C} > 0$, 但唯一性证明对 $\mathcal{C} < 0$ 也同样成立；特别地，只需对 $\mathcal{C} > 0$对应的波函数取复共轭，即可得到 $\mathcal{C} < 0$ 对应的波函数。

.....为常数的假设 g ，结合式（2），意味着 F 在动量空间中也是常数。此外，由式（1）可知， J 是也是常数。因此，这样的 K¨ahler 能带在动量空间中具有平移不变性。布里渊区 BZ^2 中的平移不变复结构 J 可以方便地用模参数 $\tau \in \mathbb{H}$进行参数化，如下所示: $J = \frac{1}{\mathrm{Im}(\tau)} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\tau) & -|\tau|^2 \\ 1 & -\mathrm{Re}(\tau) \end{pmatrix}$，其中 $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 是复平面的上半部 [23]。随后，我们用复坐标 $z_\tau = k_x + \tau k_y$来参数化动量空间。注意，赋予该复坐标的布里渊区将成为一个复环面 $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$, 其中 $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$。

我们将看到，无法得到总能带数有限的几何平坦 K¨ahler 能带——这一结果此前也已在参考文献 [23, 26] 中通过另一种方式证明。

定理的证明思路如下。我们首先考虑 J 为常数的 K¨ahler 能带，并证明布洛赫波函数必须写成带特征的 theta 函数的线性组合。然后假设 g为常数，因而 F也为常数，并借助 Stone-von Neumann 定理证明，只有一种 theta 函数组合是允许的。

C. 证明

平移不变 J 的 K¨ahler 能带。——我们用一族由 $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ 光滑参数化的非零向量 $|u_\mathbf{k}\rangle \in \mathcal{H}$ 来描述二维空间中的布洛赫波函数 [27] ，其中 $\mathbb{R}^2$ 是 BZ^2, 的万有覆盖， $\mathcal{H}$ 是固定的希尔伯特空间，其维数可以有限也可以无限。对于倒格子中的任意 G，我们需要 $|u_\mathbf{k}\rangle$ 和 $|u_{\mathbf{k}+\mathbf{G}}\rangle$ 定义同一个量子态。若动量空间哈密顿量 $H_\mathbf{k}$ 满足周期性 $H_{\mathbf{k}+\mathbf{G}} = H_\mathbf{k}$，则 $|u_\mathbf{k}\rangle$和 $|u_{\mathbf{k}+\mathbf{G}}\rangle$ 一般相差一个非零复数 $e_\mathbf{G}(\mathbf{k})$ 的乘积:

$$|u_{\mathbf{k}+\mathbf{G}}\rangle = |u_\mathbf{k}\rangle e_\mathbf{G}(\mathbf{k}). \tag{3}$$

根据求和的结合律（见式（6））， 可以证明函数 $e_\mathbf{G}(\mathbf{k})$ 满足余循环条件

$$e_{\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2}(\mathbf{k}) = e_{\mathbf{G}_1}(\mathbf{k}+\mathbf{G}_2)e_{\mathbf{G}_2}(\mathbf{k}). \tag{4}$$

这族函数随后定义了所谓的线丛 $L \to \mathrm{BZ}^2$ 的乘子系（例如，参见文献[28, 29]） 。定义布洛赫波函数 $|u_\mathbf{k}\rangle$ 时存在规范自由度，因为量子力学中的一个态是希尔伯特空间的一个一维子空间。下文中，我们确实会频繁使用未归一化的向量，因为这在全纯框架下很方便。具体而言，我们可以自由地将$|u_\mathbf{k}\rangle$ 乘以 $g(\mathbf{k}) \in \mathrm{GL}(1;\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ ，其中它随 k 平滑变化 $\in \mathbb{R}^2$。这会使乘子变为 $^{g\,(\mathbf{k}+\mathbf{G})}\ ^{g\,(\mathbf{k})}\ ^{e_\mathbf{G}}(\mathbf{k})$，但不会改变 L [29]的同构类。~~我们~~假设这个线丛的陈数为 $\mathcal{C}$，这正是所讨论能带的陈数。

更一般地，动量空间哈密顿量可以按如下方式变换：$H_{\mathbf{k}+\mathbf{G}} = V_{\mathbf{G}} H_{\mathbf{k}} V^{-1}{}_{\mathbf{G}}$；根据维格纳定理，[30]，$V_{\mathbf{G}}$是幺正或反幺正变换，对应于由倒格子$\mathbb{Z}^2$构成的对称群的射影表示。从物理上说，$V_{\mathbf{G}}$由晶胞内的空间结构决定，而这种结构会影响最终的量子几何[31]。因此，可能存在一组关于$V_{\mathbf{G}}$的幺正或反幺正变换$\mathcal{H}$，$\mathbf{G} \in \mathbb{Z}^2$，使得

$$|u_{\mathbf{k}+\mathbf{G}}\rangle = (V_{\mathbf{G}}|u_{\mathbf{k}}\rangle)\, e_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}), \tag{5}$$

并且满足$V_{\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2}$等于$V_{\mathbf{G}_1}V_{\mathbf{G}_2}$，相差一个依赖于$\mathbf{G}_1$和$\mathbf{G}_2$的相位因子。这些矩阵不能依赖于k，否则作为布里渊区中的张量，贝里曲率和量子度规将不会关于倒格子平移而在k上呈周期性。由于反幺正$V_{\mathbf{G}}$必然会改变贝里曲率的符号，这意味着贝里曲率必然存在零点，与假设[32]，矛盾，因此该射影表示必须是幺正的。此外，我们注意到，根据加法的结合律，

$$\begin{aligned} |u_{\mathbf{k}+(\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2)}\rangle &= (V_{\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2}|u_{\mathbf{k}}\rangle)\, e_{\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2}(\mathbf{k}) \\ =|u_{(\mathbf{k}+\mathbf{G}_2)+\mathbf{G}_1}\rangle &= (V_{\mathbf{G}_1}V_{\mathbf{G}_2}|u_{\mathbf{k}}\rangle)\, e_{\mathbf{G}_1}(\mathbf{k}+\mathbf{G}_2) e_{\mathbf{G}_2}(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{6}$$

由于这一条件对每个k都成立，因此就布洛赫波函数而言，我们可以设$V_{\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2} = V_{\mathbf{G}_1}V_{\mathbf{G}_2}$，即我们有$\mathbb{Z}^2$的酉表示。随后可以将$V_{\mathbf{G}}$分解为酉不可约表示，这些表示由实空间原胞中的位置r参数化：$e^{-2\pi i \mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$，其中对于任意$\mathbf{R} \in \mathbb{Z}^2$，r和r +R确定同一个不可约表示。这一分解给出$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \in \mathcal{H}_{\mathbf{r}}$，其中$\mathcal{H}_{\mathbf{r}}$是该表示分解为不可约表示时的一个直和项，并且对每个$\mathbf{G} \in \mathbb{Z}^2$，它满足：$V_{\mathbf{G}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-2\pi i \mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$。我们注意到，$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$可以是包含多个分量的旋量。如果$\mathcal{H}$是有限维希尔伯特空间，那么r取实空间原胞中某个离散子集的值；否则，r可以遍及整个晶胞，此时该分解为直积分分解。本讨论使我们能够推导出如下关系

$$u_{\mathbf{k}+\mathbf{G}}(\mathbf{r}) = e_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) e^{-2\pi i \mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{7}$$

也就是说，$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$的行为如同线丛$L_{\mathbf{r}} \to \mathrm{BZ}^2$的光滑截面，其乘子为$e_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) e^{-2\pi i \mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$。我们指出，$L$是布里渊区上的“基本线”线丛，负责产生$|u_{\mathbf{k}}\rangle$的拓扑扭曲；而线丛$L_{\mathbf{r}}$虽然都与$L$在拓扑上同构，却通过变量r携带了有关实空间晶胞的信息。与早期研究[2, 5]，不同，我们不假设$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$具有空间周期性，而是允许更一般的准周期性条件：$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$平移一个晶格矢量后会获得一个相位，该相位与单位晶胞中可能存在的净磁场相容。我们看到，这种相位因子是获得朗道能级所必需的，正如第39节公式（III）中明确推导的那样。

现在，我们在BZ^2上固定一个平移不变复结构，其复坐标为$z_\tau = k_x + \tau k_y$。使$|u_{\mathbf{k}}\rangle$确定一个K¨ahler能带的条件是[22]

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\tau}|u_{\mathbf{k}}\rangle - \frac{\langle u_{\mathbf{k}}|\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\tau}|u_{\mathbf{k}}\rangle}{\langle u_{\mathbf{k}}|u_{\mathbf{k}}\rangle}|u_{\mathbf{k}}\rangle = 0, \tag{8}$$

这实质上意味着，$|u_{\mathbf{k}}\rangle$除一个整体的、非全纯且处处非零的乘法因子外是全纯的。因此，在选取全纯规范，使贝里规范场表示为一个(1,0)-形式（$\langle u_{\mathbf{k}}|\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\tau}|u_{\mathbf{k}}\rangle = 0$）后，

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\tau}|u_{\mathbf{k}}\rangle = 0, \tag{9}$$

这正是对$|u_{\mathbf{k}}\rangle$全纯性的要求。

通过适当的规范选择，这一全纯性条件进而意味着，乘子$e_{\mathbf{G}}(\mathbf{k})$关于$z_\tau$是全纯的，并且$L \to \mathrm{BZ}^2$以及事实上所有r取遍实空间原胞时的$L_{\mathbf{r}} \to \mathrm{BZ}^2$，都是全纯线丛。复环面上的全纯线丛（即配备平移不变复结构J的$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$）在同构意义下由其全纯截面空间可用θ函数描述的全纯线丛决定[28, 33]，因此，$|u_{\mathbf{k}}\rangle$的形式已受到很大限制。这是因为，这一条件结合式（7）表明，$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$的行为如同$L_{\mathbf{r}}$的全纯截面。此类截面构成一个有限维向量空间，记作$H^0(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, L_{\mathbf{r}})$；根据黎曼–罗赫定理，其维数等于[34, 35]，$\mathcal{C} = \deg(L_{\mathbf{r}})$。此外，我们可以用θ函数相当明确地描述$H^0(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, L_{\mathbf{r}})$。具体而言，我们可以假设，在将$|u_{\mathbf{k}}\rangle$乘以一个适当的全局处处非零全纯函数$g(\mathbf{k})$（定义在万有覆盖$\mathbb{R}^2$上）后，[29]，

$$e_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) = e^{-i\pi\tau\mathcal{C}m_y^2 - 2\pi i \mathcal{C} m_y z_\tau}, \text{ with } \mathbf{G} = (m_x, m_y) \in \mathbb{Z}^2, \tag{10}$$

因此，一旦选定$\mathcal{H}_{\mathbf{r}}$的基，$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \in \mathcal{H}_{\mathbf{r}}$的各分量就必然是theta函数的线性组合，其系数可能依赖于r

$$\theta_{\mathbf{r},\alpha}(z_\tau) := \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\mathcal{C}} - \frac{x}{\mathcal{C}} \\ y \end{bmatrix} (\mathcal{C} z_\tau, \mathcal{C}\tau), \ \alpha = 0, \ldots, \mathcal{C}-1, \tag{11}$$

其中$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z_\tau, \tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n+a)^2 + 2\pi i (n+a)(z_\tau + b)}$称为由$a, b \in \mathbb{R}$指定的带特征的θ函数。

平坦 K¨ahler 能带的唯一性。— 现在我们要求量子度规是平坦的，并推导出对 $|u_{\mathbf{k}}\rangle$ 更严格得多的条件。由于 K¨ahler 能带本质上是复环面到射影空间的全纯浸入，量子几何的平移不变性意味着，在固定一个参考准动量（例如零向量）之后，每个平移向量 $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ 都会提升为一个量子对称性——即赋有 Fubini-Study 度量的目标射影空间的对称性——将 $|u_0\rangle$ 与 $|u_{\mathbf{k}}\rangle$ 联系起来。同样，由于维格纳定理，量子对称性由相关对称群的一个射影表示实现，其中变换或者是幺正的，或者是反幺正的。现在的关键步骤是注意到，存在某些幺正或反幺正算符 $U_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$，使得在适当的规范下，

$$|u_{\mathbf{k}}\rangle = U_{\mathbf{k}}|u_0\rangle, \text{ for } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \tag{12}$$

这是 Calabi 刚性定理的推论 [36]；有关上述结果的证明，请参见第 III 节。我们不能允许 $U_{\mathbf{k}}$ 是反幺正的，因为若如此，$\mathbf{k}$ 处的贝里曲率将与 0 处的贝里曲率符号相反，这与假定其为常数相矛盾。因此，我们转而考察$\mathbb{R}^2$的射影酉表示。这意味着，对于所有 $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^2$，都有

$$U_{\mathbf{k}_1}U_{\mathbf{k}_2} = U_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2), \tag{13}$$

其中 $\psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ 是一个取值于 U(1) 的 2-余循环，即 $\psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ 是满足以下条件的相位

$$\psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\psi(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = \psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\psi(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3). \tag{14}$$

注意，对于倒格矢 $\mathbf{G}$，$U_{\mathbf{G}} = V_{\mathbf{G}}$。$\mathbb{R}^2$ 的射影幺正表示等价于中心扩张 G of $\mathbb{R}^2$ by U(1) 的某些幺正表示。用数学语言来说，这意味着存在如下群的短正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{U}(1) \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0, \tag{15}$$

其中每个箭头都是群同态，且每个箭头的核都是前一个箭头的像。群 G 作为集合就是笛卡尔积 $\mathbb{R}^2 \times$U(1)。作为群，我们赋予它如下乘法法则

$$(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\cdot(\mathbf{k}_2,\lambda_2) = (\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \lambda_1\lambda_2\psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)). \tag{16}$$

由此不难看出，对于所有 g_1、$g_2 \in G$，$U(g)$：$= U_{\mathbf{k}}\lambda$ with$g = (\mathbf{k}\ \lambda) \in G$ 满足 $U(g_1)U(g_2) = U(g_1 \cdot g_2)$，因此给出了 G 的酉表示。定义交换子 $s(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)/\psi(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1)$ 很有用；它满足（参见文献 [37],）

(i) Antisymmetry: $s(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = s^{-1}(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1)$

(ii) 交替：$s(\mathbf{k},\mathbf{k}) = 1$

(iii) Bimultiplicativity: $s(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = s(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_3)s(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)$
$s(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3) = s(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)s(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_3)$.

这三个性质意味着存在一个反对称双线性形式 $_{1,\ 2} = e^{i\omega(\mathbf{k}_1,\ 2}$ $\omega_{\ 1,\ 2} = D\ _1\times\ _2,$ $D \in \mathbb{R}$，定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，并满足性质 (k k) k)，其中 (k k) : k k，对某些和 $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{k}_2 = k_{1,\ x}k_{2,\ y} - k_{1,\ y}k_{2,\ x}$。

文献[37]（另见文献 [33, 38]，关于海森堡群和中心扩张的更多内容）蕴含 G 在同构意义下，由唯一确定 s（$\mathbf{k}_1$,$\mathbf{k}_2$）。当 ω 是非退化的，即对于 $D \neq 0$，则 G 称为海森堡群。给定一个特定的实现 G 对于给定的 D，由以下设定确定：

$$\psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = e^{iDk_{1,x}k_{2,y}}. \tag{17}$$

所有其他实现都可通过非零的 U(1) 值函数 $g(\mathbf{k})$ 表示为 $\psi'(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = g(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\, g(\mathbf{k}_1)g(\mathbf{k}_2)\,\psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$（注意，$s(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ 在这种变换下保持不变）。请注意，采用这种中心扩张的实现时，G, $D = 0$ 对应于平凡中心扩张，其中 G 实际上是群 $\mathbb{R}^2 \times$U(1) 的直积。正如我们将在下文看到的，这种最后的情形与我们无关，因为 $\mathcal{C} \neq 0$。

现在，Stone-von Neumann 定理 [33], 指出，海森堡群 G 在酉同构意义下，存在唯一的酉不可约表示，使得 U(1) 的作用为 $(\mathbf{0},\lambda)\cdot\psi = \lambda\cdot\psi, (0,\lambda) \in \mathrm{U}(1) \subset G$ 和$\psi \in \mathcal{H}$。我们稍后将看到，这种酉自由度对应于酉规范变换。这个不可约表示就是熟知的单变量平方可积函数希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$，其中变量 q满足对易关系 $[q,p] = i/D$，其中 $p = \frac{1}{iD}\frac{\partial}{\partial q}$。此处，变量 q 描述一个抽象坐标，但我们将在第 q III 节推导如何将其变换为更具物理意义的位置坐标 $\mathbf{r}$。然后，

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{k}}\psi(q) &= e^{iDk_yp}e^{-iDk_xx}\psi(q) \\ &= e^{-iDk_x(q+k_y)}\psi(q+k_y). \end{aligned} \tag{18}$$

事实上，很容易看出 $U_{\mathbf{k}_1}U_{\mathbf{k}_2} = U_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\psi(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$。注意，在 $L^2(\mathbb{R})$ 中，D 起到了普朗克常数倒数的作用。我们注意到，正是这一步要求能带数（即希尔伯特空间 $\mathcal{H}$的维数）必须是无限的。

利用贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式，我们可以写为，

$$U_{\mathbf{k}} = e^{iD(k_yp-k_xq)}e^{\frac{i}{2}Dk_xk_y}. \tag{19}$$

利用 $z_\tau = k_x + \tau k_y$，我们可以写为

$$i\,(k_yp - k_xq) = \frac{1}{2\tau_2}\left[z_\tau\,(\bar\tau q + p) - \bar z_\tau\,(\tau q + p)\right]. \tag{20}$$

现在注意到，由于 q和 p是自伴的，$\bar\tau q+p$是 $\tau q+p$ 的伴随算符，并且

$$[\bar\tau q + p, \tau q + p] = i\frac{\bar\tau}{D} - i\frac{\tau}{D} = \frac{2\tau_2}{D}. \tag{21}$$

接下来，引入玻色子产生与湮灭算符会很方便

$$a_\tau := \sqrt{\frac{D}{2\tau_2}}\,(\tau q + p) \;\text{ and }\; a_\tau^\dagger := \sqrt{\frac{D}{2\tau_2}}\,(\bar\tau q + p)\,, \quad (22)$$

它们满足正则对易关系$[a_\tau, a_\tau^\dagger] = 1$，并且我们可以写作

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{k}} &= e^{i\frac{D}{2}k_x k_y} e^{\frac{1}{\sqrt{2D\tau_2}}\left(z_\tau a_\tau^\dagger - \bar z_\tau a_\tau\right)} \\ &= e^{i\frac{D}{2}k_x k_y} e^{-\frac{1}{4\tau_2 D}|z_\tau|^2} e^{\frac{1}{\sqrt{2D\tau_2}} z_\tau a_\tau^\dagger} e^{-\frac{1}{\sqrt{2D\tau_2}}\bar z_\tau a_\tau}. \end{aligned} \quad (23)$$

因此显然，经过规范变换并消去所有非全纯且非零的乘法因子后，要使其全纯，$|u_{\mathbf{k}}\rangle$ 必须满足 $\frac{\partial}{\partial \bar z_\tau}\left(e^{-\frac{1}{\sqrt{2D\tau_2}}\bar z_\tau a_\tau}|u_0\rangle\right) = 0 \iff a_\tau|u_0\rangle = 0$。现在，条件 $a_\tau|u_0\rangle = 0$ 恰好表示 $|u_0\rangle$ 是玻色模 a_τ的基态。除整体常数因子外，唯一的解是

$$u_0(q) = e^{-\frac{iD\tau}{2}q^2}, \quad (24)$$

当且仅当 $D < 0$时，它属于 $L^2(\mathbb{R})$。因此，当且仅当 $D < 0$ 时，全纯态才存在。这并不妨碍我们考虑 G 的其他非不可约表示。然而，由于上述结果表明 $|u_0\rangle \in \mathcal{H}$ 是唯一的（只差一个缩放因子），这实际上意味着所得的 K¨ahler 能带在一个精确的意义下是唯一的。理由如下。假设 $U_{\mathbf{k}}$ 是可约的。那么希尔伯特空间具有如下形式：
$\mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H} \cong \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^l$，其中$\mathcal{H}$ 是 G 的唯一不可约表示，而 l 是它出现的次数（l 不一定有限，但这不影响论证）。此时，群 G 仅作用于 $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^l$中的左侧因子。由于在 $\mathcal{H}$ 中可供我们代入式（12）的 $|u_0\rangle$ 只有一种可能的选择（只差一个缩放因子），这意味着扩充后的态在 $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^l$ 中必然具有如下形式：$|u_{\mathbf{k}}\rangle \otimes |c\rangle$，其中 $|c\rangle \in \mathbb{C}^l$ 是某个非零常向量，而 $|u_{\mathbf{k}}\rangle \in \mathcal{H}$ 如式（12）所示。这只相当于取同一个布洛赫能带并引入一个新的自由度，例如自旋；该自由度彼此解耦，因此所得的布洛赫能带具有确定的“自旋极化”。

最后，我们利用条件方程（5）求出 D 的值。注意

$$|u_{\mathbf{k}+\mathbf{G}}\rangle = \psi^{-1}(\mathbf{G},\mathbf{k}) U_{\mathbf{G}} U_{\mathbf{k}} |u_0\rangle = \psi^{-1}(\mathbf{G},\mathbf{k}) U_{\mathbf{G}} |u_{\mathbf{k}}\rangle. \quad (25)$$

那么，$e_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) := \psi^{-1}(\mathbf{G},\mathbf{k})$ 应当是布里渊区 BZ^2，上线丛的幺正乘子（因为 $U_{\mathbf{k}}$ 是幺正的），因此

$$e_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) = e^{-iDm_x k_y} \text{ with } \mathbf{G} = (m_x, m_y) \in \mathbb{Z}^2. \quad (26)$$

线丛 L 上的联络由一个与乘子系统相容的 1-形式确定：

$$A(\mathbf{k}+\mathbf{G}) = A(\mathbf{k}) + e_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) d e_{\mathbf{G}}^{-1}(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}) + iDm_x dk_y. \quad (27)$$

一种可能的选择是 $A = iDk_x dk_y$。由此可见，L 的陈数等于 $\mathcal{C}$，这就迫使 $D = -2\pi\mathcal{C}$。至此，定理的证明完成，因为我们要寻找的 Kähler 能带恰好是由陈数 $\mathcal{C}$ 和 $|u_0\rangle$ 确定的海森堡群的$|u_{\mathbf{k}}\rangle = U_{\mathbf{k}}|u_0\rangle$，且满足 $a_\tau|u_0\rangle = 0$。请注意，$\mathcal{C}$ 如何进入 G 并确定了 $U_{\mathbf{k}}$ 和 $\mathcal{H}$；τ 则确定了 $|u_0\rangle$ 必须是什么。

现在我们给出 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 的 θ 函数显式表达式——即采用 G 的特定实现。请参阅第 III 节，其中我们证明 $\mathcal{H}_{\mathbf{r}} \cong \mathbb{C}^{\mathcal{C}}$ 对应于内部“颜色”自由度，并且

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{2\pi i\mathcal{C}k_x k_y} e^{i\pi\mathcal{C}\tau k_y^2} \left(\theta_{\mathbf{r},0}(z_\tau), \ldots, \theta_{\mathbf{r},\mathcal{C}-1}(z_\tau)\right). \quad (28)$$

对于特定情形 $\mathcal{C} = 1$ 和 $\tau = i$，这恰好是朗道规范下的最低朗道能级布洛赫波函数——详见第 III 节，其中详细推导了这一结论；而对于更高的 $\mathcal{C}$，则是文献中先前研究过的色纠缠最低朗道能级布洛赫波函数[5, 20]。

我们指出，G 的酉不可约表示在酉同构意义下唯一，这对应于规范选择的自由度。事实上，由于该同构交织着 G 的作用，因此它尤其必须保留与倒格子平移 $\mathbf{r}$ 相关联的量子数。这意味着我们可以对 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 施加 U($\mathcal{C}$)-规范变换。我们注意到，这也等价于选择另一组与陈数 $\mathcal{C}$ 以及与 $\mathbf{r}$ 相关联的倒格子不可约表示相一致的 θ 函数正交基。总之，在方程（28）中，我们有两类规范自由度：

(i) $\mathrm{U}(\mathcal{C})$ real space gauge transformations $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \mapsto S(\mathbf{r})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, for $S(\mathbf{r}) \in \mathrm{U}(\mathcal{C})$;

(ii) $\mathbb{C}^*$ momentum space gauge transformations $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \mapsto g(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, for $g(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}^*$.

从更具物理意义的角度来说，变换（i）例如在最低朗道能级的情形下，对应于从朗道规范变换到对称规范；而变换（ii）则对应于为每个动量选择布洛赫波函数的归一化和相位。

II. 讨论

我们已经证明，对于给定的陈数和模参数，几何平坦的 K¨ahler 能带具有唯一性。以往的研究很少探讨模参数 τ 的影响；当粒子的有效质量具有各向异性时，就 $\tau \neq i$ 可能出现这种情况，参见文献 [39]，其中伽利略度规包含了 τ的信息。我们的结果表明，存在一个连续的

由 τ 参数化的几何平坦 K¨ahler 能带族，为利用平坦 K¨ahler 能带探索分数量子拓扑物理提供了新的自由度。

众所周知，任何具有常数 J的全纯波函数，也称为理想陈能带或理想K¨ahler能带，都可以通过调制几何平坦的K¨ahler能带 [5]得到。已证明，对于这类理想K¨ahler能带，密度算符的GMP代数得以恢复；该代数对于实现稳定的阿贝尔分数量子霍尔相至关重要。以理想K¨ahler能带为起点，还构造出了一系列更高朗道能级类比态，它们能够支持非阿贝尔分数量子化态 [40]。因此，本工作证明的几何平坦K¨ahler能带的唯一性，使我们能够写出所有可能的波函数，作为这些分数量子霍尔相的构建基元。

III. 技术结果

A. 平坦性假设下平移群的射影酉表示存在性的证明

我们希望证明主文式（12）中 $U_{\mathbf{q}}$ 的存在性。证明基于Calabi刚性定理。正如我们将看到的，我们只能确定 $U_{\mathbf{q}}$ 在 $\mathbb{C}P^n$的最小线性子空间上的作用；该子空间是通过对 $\mathbb{C}^{n+1}$的一个向量子空间进行射影化得到的，并且包含由$|u_{\mathbf{k}}\rangle$ 确定的浸入子流形（具体而言，span$\{|u_{\mathbf{k}}\rangle : \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$）。然而，$\mathbb{C}P^n$ 的这个线性子空间通常远大于与占据能带对应的各个一维子空间。（例如，对于陈绝缘体，即使我们将一个具有非零陈数的能带视为占据态，也应取多个陈数之和为零的能带。）因此，只有当我们将布洛赫波函数限制为目标空间中的 $\mathbb{C}P^n$ 与所需考虑的最小线性子空间重合时，$U_{\mathbf{q}}$ 才能确定一个射影表示。从物理上说，如果我们加入“平庸未占据能带”，就无法确定 $U_{\mathbf{q}}$ 如何作用于这些能带；这是很合理的。因此，我们将讨论范围限制在排除这类平庸能带的情形。

定理 2 (刚性定理（Calabi） [36, 41])。设 M ¨ ¨ f M $\to$是 $\mathbb{C}P^n$ f' M $\to \mathbb{C}P^{n'}$ ¨ ¨

一个连通的凯勒流形，并设 : 和 : 是凯勒浸入（即 M 的全纯浸入，且其 K ¨ahler 结构与诱导的 K ¨ahler 结构一致），其像均不包含于射影空间的任何真线性子空间中（即由向量子空间射影化得到的射影空间子空间）。则$n = n'$，并且存在一个幺正算子 $U \in \mathrm{U}(n+1)$使得 $U \circ f = f'$，其中，按通常的记法，我们也将 U 在 $\mathbb{C}P^n$中的诱导微分同胚记作。

我们指出，上述定理 n 中的维数2以及下文中的维数都可以是无穷大。假设这些像不包含在射影空间的任何真线性子空间中，这意味着我们排除了无害的平庸能带，不予考虑，正如我们上文所述。

命题 1。设我们有一个凯 ¨勒浸入f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^n$ ，相对于平面上的某个复结构j 。另设其像 $f(\mathbb{R}^2)$ 不包含于 $\mathbb{C}P^n$的任何真线性子空间中。设ϕ : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一个双全纯映射（相对于 j），且保持 f 的拉回所诱导的 Fubini–Study 度量 f^*g_{FS}，即是 f^*g_{FS}的全纯等距变换。则存在一个幺正算子 $U_\phi \in \mathrm{U}(n+1)$，其唯一性相差一个相位，使得 $f \circ \phi = U_\phi \circ f$，其中我们也将 U_ϕ 在 $\mathbb{C}P^n$中的诱导微分同胚记作此符号。

证明。根据假设，映射 $f \circ \phi$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^n$ 和f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^n$ 均为 K¨ahler 浸入。由定理 2 可知，存在 $U_\phi \in \mathrm{U}(n+1)$ 使得 $f \circ \phi = U_\phi \circ f$。现在，我们仿照参考文献 [42], 中定理 4.3 的证明，证明 U_ϕ 除一个相位因子外是唯一的。下面简要重述相关论证。设两个酉矩阵 $U_\phi, U'_\phi \in \mathrm{U}(n+1)$ 满足 $U_\phi \circ f = f \circ \phi$ 和 $U'_\phi \circ f = f \circ \phi$。于是可得 $\left(\left(U'_\phi\right)^{-1} U_\phi\right) \circ f = f$。定义$U := \left(U'_\phi\right)^{-1} U_\phi \in \mathrm{U}(n+1)$，并证明 U 只是一个相位因子，这意味着 U_ϕ 和 U'_ϕ 仅相差一个相位因子。

我们选择 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一组正交基，使U 在其中对角化；相应地， U 由对角矩阵 $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_r)$ 给出，其中每个特征值 α_i都可能具有一定的重数。现在注意，若 $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ 是 U的特征向量，则由v生成的 $\mathbb{C}P^n$ 的一维子空间，记作 $\ell_v \in \mathbb{C}P^n$，是诱导映射 U: $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$的不动点，即 $U(\ell_v) = \ell_v$。由此可知，等距变换 U: $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ 的不动点集合为不交并 $\coprod_{i=1}^r S(\alpha_i)$，其中 $S(\alpha_i)$是与特征值 α_i 对应的本征空间在商映射 π: $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$,$i = 1, \ldots, r$下的像。由于在 $f(\mathbb{R}^2)$上，由酉算子 U 诱导的映射是恒等映射，且 $f(\mathbb{R}^2)$ 是连通的（$\mathbb{R}^2$ 是连通的，且 f 是连续的），因此对某个 i，有$f(\mathbb{R}^2) \subset S(\alpha_i)$。然而，每个 $S(\alpha_i)$都是 $\mathbb{C}P^n$ 的线性子空间。根据假设， $f(\mathbb{R}^2)$不包含在 $\mathbb{C}P^n$ 的任何真线性子空间中，因此 $r = 1$ ，且 $S(\alpha_1) = \mathbb{C}P^n$。因此，$U$ 只是乘以一个相位因子的恒等算子，正如我们所要证明的。 □

定理 3. 假设我们有一个 K ¨ahler 浸入 f :$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^n$ ，相对于平面中的某个复结构 j 。还假设像 $f(\mathbb{R}^2)$ 不包含在 $\mathbb{C}P^n$ 的任何真线性子空间中。设群 G 通过全纯等距变换作用于 $\mathbb{R}^2$， $\phi_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ for$g \in G$，其中 f^*g_{FS}。那么存在一个射影酉表示 U : $G \to \mathrm{PU}(n+1)$，满足性质$f \circ \phi_g = U(g) \circ f$。

证明。对于每个 $g \in G$， ϕ_g 是$f^* g_{FS}$的全纯等距变换。因此，由命题 1 可知，存在一个 $U_g := U_{\phi_g} \in \mathrm{U}(n+1$, 它在相位意义下唯一确定，使得$f \circ \phi_g = U_g \circ f$。此外，根据假设，我们有$\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}$，这意味着

$$(U_{g_1} \circ U_{g_2}) \circ f = U_{g_1 g_2} \circ f. \tag{29}$$

利用与命题证明中相同的论证可知，前一个方程1 在证明U_ϕ 在相位意义下唯一性时，表明 $U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$ 在射影意义下成立，因此映射 $g \mapsto U_g$ 确定了 G的射影幺正表示。 □

令 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^n$ 为由布洛赫波函数 $|u_{\mathbf{k}}\rangle$诱导的映射，令 G 为平移群 $\mathbb{R}^2$ ，它在 $\mathbb{R}^2$ 上以全纯等距变换的方式作用；该空间配备了平移不变的度量和复结构，即平移不变的量子几何。射影表示 $U_{\mathbf{q}}$ 由定理3可得。

上述讨论并未给出 $U_{\mathbf{q}}$的具体形式，而只是保证了它们的存在。该射影表示在射影表示的同构意义下是唯一确定的。从本质上说，这意味着可以取 $U'_{\mathbf{q}} = U_{\mathbf{q}} g^{-1}(\mathbf{q})$, 其中 $g(\mathbf{q})$是一个相位因子，因为这不会改变 $\langle u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} | u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle$。这意味着，如果

$$U_{\mathbf{q}_1} U_{\mathbf{q}_2} = U_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2} \psi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \tag{30}$$

then

$$U'_{\mathbf{q}_1} U'_{\mathbf{q}_2} = U'_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2} \psi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \frac{g(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{g(\mathbf{q}_1) g(\mathbf{q}_2)}, \tag{31}$$

并且我们看到， $\psi(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ 和 $\psi(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\ ^{g(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)\ g(\mathbf{q}_1) g(\mathbf{q}_2)}$ 相差一个恰当余循环。在正文后文中可以发现，这个余循环由陈数 $\mathcal{C}$ 唯一确定。

因此， $U_{\mathbf{q}}$ 的显式构造源于表示唯一性的论证（其中相位因子按标准方式作用）：平移群通过 U(1) 作中心扩张，而 Stone-von Neumann 定理阐述的正是这一点。

B. 从海森堡群 G 的显式实现中获得最低朗道能级型波函数

我们用 θ 函数推导出 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 的显式表达式——这将使我们能够重新得到最低朗道能级波函数和颜色纠缠波函数。为此，我们需要提取与由 $\mathbf{r}$ 标记的 $\mathbb{Z}^2$ 的不可约表示相对应的分量 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$。因此，对于所有 $\mathbf{G} \in \mathbb{Z}^2$， $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 的定义性质是 $U_{\mathbf{G}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-2\pi i \mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$。这可以通过布洛赫-扎克变换来实现，该变换将 $|u_{\mathbf{k}}\rangle \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ 变为

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}\in\mathbb{Z}^2} e^{2\pi i \mathbf{r}\cdot\mathbf{G}} U_{\mathbf{G}} |u_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{32}$$

并给出一个希尔伯特空间同构 $L^2(\mathbb{R}) \cong \int^{\oplus}_{\mathrm{u.c.}} d^2\mathbf{r}\ \mathcal{H}_{\mathbf{r}}$，其中 u.c. 表示实空间原胞，用于标记倒格子的不可约表示 $\mathbb{Z}^2$。要使该变换成为同构，我们需要适当地定义 $\mathcal{H}_{\mathbf{r}}$ 中的内积。对于一般元素 $|f\rangle \in L^2(\mathbb{R})$，令其在点 $q \in \mathbb{R}$ 处的取值为 $f(q)$。布洛赫 - 扎克变换根据 $|f\rangle \in L^2(\mathbb{R})$ 确定一个元素$f(\mathbf{r}) \in \mathcal{H}_{\mathbf{r}}$，其在点 $q \in \mathbb{R}$ 处的取值为

$$\begin{aligned}
(f(\mathbf{r}))(q) &= \sum_{\mathbf{G}\in\mathbb{Z}^2} e^{2\pi i \mathbf{r}\cdot\mathbf{G}} U_{\mathbf{G}} f(q) \\
&= \sum_{m_x, m_y \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i \mathcal{C} m_x (q+m_y) + 2\pi i x m_x + 2\pi i y m_y} f(q+m_y) \\
&= \sum_{m_x, m_y \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i (\mathcal{C} q + x) m_x + 2\pi i y m_y} f(q+m_y),
\end{aligned} \tag{33}$$

其中，我们记 $\mathbf{G} = (m_x, m_y)$ 和 $\mathbf{r} = (x, y)$，并使用了正文中的公式（18）。容易验证，逆变换为 $|f\rangle = \int_{\mathrm{u.c.}} d^2\mathbf{r}\ f(\mathbf{r})$。利用狄拉克梳状函数的级数展开表达式，$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta(t-p) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i t m}$，我们得到

$$\begin{aligned}
(f(\mathbf{r}))(q) &= \sum_{m_y\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta(\mathcal{C} q + x - p) e^{2\pi i y m_y} f(q+m_y) \\
&= \sum_{m_y\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta(\mathcal{C} q + x - p) e^{2\pi i y m_y} f\left(-\frac{x}{\mathcal{C}} + \frac{p}{\mathcal{C}} + m_y\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

现在我们写作 $p = \alpha + \tilde{p}\mathcal{C}$，其中 $\alpha \in \{0, \ldots, \mathcal{C}-1\}$，且$\tilde{p} \in \mathbb{Z}$，使得 $\sum_{p\in\mathbb{Z}} = \sum_{\alpha=0}^{\mathcal{C}-1} \sum_{\tilde{p}\in\mathbb{Z}}$。于是，

$$
\begin{aligned}
(f(\mathbf{r}))(q) &= \sum_{m_y\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha=0}^{\mathcal{C}-1}\sum_{\tilde{p}\in\mathbb{Z}}\delta(\mathcal{C}q+x-\alpha-\mathcal{C}\tilde{p})e^{2\pi i y m_y} f\left(-\frac{x}{\mathcal{C}}+\frac{\alpha}{\mathcal{C}}+m_y+\tilde{p}\right)\\
&= \sum_{m_y\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha=0}^{\mathcal{C}-1}\sum_{\tilde{p}\in\mathbb{Z}}\delta(\mathcal{C}q+x-\alpha-\mathcal{C}\tilde{p})e^{2\pi i y(m_y-\tilde{p})} f\left(-\frac{x}{\mathcal{C}}+\frac{\alpha}{\mathcal{C}}+m_y\right)\\
&= \sum_{\alpha=0}^{\mathcal{C}-1}\left(\sum_{m_y\in\mathbb{Z}} f\left(-\frac{x}{\mathcal{C}}+\frac{\alpha}{\mathcal{C}}+m_y\right)e^{2\pi i\frac{1}{\mathcal{C}}y(-x+\alpha+\mathcal{C}m_y)}\right)\left(\sum_{\tilde{p}\in\mathbb{Z}}\delta(\mathcal{C}q+x-\alpha-\mathcal{C}\tilde{p})e^{-2\pi i\frac{1}{\mathcal{C}}y(-x+\alpha+\mathcal{C}\tilde{p})}\right)\\
&\equiv \sum_{\alpha=0}^{\mathcal{C}-1} f_\alpha(\mathbf{r})\delta_\alpha^{\mathbf{r}}(q),
\end{aligned}
\tag{35}
$$

其中我们定义了

$$
\delta_\alpha^{\mathbf{r}}(q) := \sum_{p\in\mathbb{Z}}\delta(\mathcal{C}q+x-\alpha-\mathcal{C}p)e^{-2\pi i\frac{1}{\mathcal{C}}y(-x+\alpha+\mathcal{C}p)},
\tag{36}
$$

$$
f_\alpha(\mathbf{r}) := \sum_{m_y\in\mathbb{Z}} f\left(-\frac{x}{\mathcal{C}}+\frac{\alpha}{\mathcal{C}}+m_y\right)e^{2\pi i\frac{1}{\mathcal{C}}y(-x+\alpha+\mathcal{C}m_y)}.
\tag{37}
$$

我们可以将向量空间 $\mathcal{H}_{\mathbf{r}}$ 视为由分布 $\delta_\alpha^{\mathbf{r}}(q)$ 张成的空间。由于 $\delta_\alpha^{\mathbf{r}}(q)$ 与 $f_\alpha(\mathbf{r})$ 的变换方式相反，因此周期性 $f(\mathbf{r}+\mathbf{R}) = f(\mathbf{r})$ 成立；对于 $\mathbf{R}=(a_x,a_y)\in\mathbb{Z}^2$，

$$
\delta_\alpha^{\mathbf{r}+\mathbf{R}}(q) = e^{-2\pi i\frac{1}{\mathcal{C}}a_y(-x+a_x+\alpha)}\delta_{\alpha-a_x}^{\mathbf{r}}(q) \text{ and } \delta_{\alpha+\mathcal{C}}^{\mathbf{r}} = \delta_\alpha^{\mathbf{r}},\ \alpha=0,\dots,\mathcal{C}-1,
\tag{38}
$$

$$
f_\alpha(\mathbf{r}+\mathbf{R}) = e^{2\pi i\frac{1}{\mathcal{C}}a_y(-x+a_x+\alpha)}f_{\alpha-a_x}(\mathbf{r}) \text{ and } f_{\alpha+\mathcal{C}}(\mathbf{r}) = f_\alpha(\mathbf{r}),\ \alpha=0,\dots,\mathcal{C}-1.
\tag{39}
$$

这种周期性符合希尔伯特空间的周期性要求，$\mathcal{H}_{\mathbf{r}+\mathbf{R}}=\mathcal{H}_{\mathbf{r}}$ 该要求源自 $e^{-2\pi i\mathbf{G}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{R})} = e^{-2\pi i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$，且对倒格子中的任意 G 都成立。

如果我们通过规定以下内容来定义希尔伯特空间结构

$$
\langle\delta_\alpha^{\mathbf{r}},\delta_\beta^{\mathbf{r}}\rangle = \frac{1}{\mathcal{C}}\delta_{\alpha\beta},
\tag{40}
$$

于是我们得到了所需的希尔伯特空间同构

$L^2(\mathbb{R}) \cong \int^{\oplus}_{\text{u.c.}} d^2\mathbf{r}\ \mathcal{H}_{\mathbf{r}}$，其中右侧可解释为实空间原胞环面上的希尔伯特丛的平方可积截面空间，该丛通过识别 $\mathbf{r}\sim\mathbf{r}+\mathbf{R}$ 与$\mathbf{R}\in\mathbb{Z}^2$而得到，其纤维为 $\mathcal{H}_{\mathbf{r}}$。该希尔伯特丛的一个截面可视为一组光滑函数 $f_0(\mathbf{r})$ ....., $f_{\mathcal{C}-1}(\mathbf{r})$，满足式（39）中的条件。这组函数$\{\delta_\alpha^{\mathbf{r}}\}_{\alpha=0}^{\mathcal{C}-1}$可进一步解释为该希尔伯特丛的全局多值正交标架场。为证明它确实是希尔伯特空间同构，只需验证对于 f, $g\in L^2(\mathbb{R})$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathcal{C}}\sum_{\alpha=0}^{\mathcal{C}-1}\int_{\text{u.c.}} d^2\mathbf{r}\ \overline{f_\alpha(\mathbf{r})}g_\alpha(\mathbf{r})\\
&= \frac{1}{\mathcal{C}}\sum_{\alpha=0}^{\mathcal{C}-1}\int_0^1 dx\ \sum_{m_y\in\mathbb{Z}}\overline{f\left(-\frac{x}{\mathcal{C}}+\frac{\alpha}{\mathcal{C}}+m_y\right)}g\left(-\frac{x}{\mathcal{C}}+\frac{\alpha}{\mathcal{C}}+m_y\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}} dq\ \overline{f(q)}g(q) = \langle f|g\rangle,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

其中我们对 $m,n\in$ 使用了 $\int_0^1 dy\ e^{2\pi i y(m-n)} = \delta_{m,n}$

$\mathbb{Z}$。我们也将 $(f_0(\mathbf{r})\dots,f_{\mathcal{C}-1}(\mathbf{r}))$ 称为 Bloch-Zak

变换——我们明确使用由 $\delta_\alpha^{\mathbf{r}}$'s 确定的正交基所提供的同构$\mathcal{H}_{\mathbf{r}} \cong \mathbb{C}^{\mathcal{C}}$ $|f\rangle$。从物理上讲，这些 $\mathcal{C}$ 自由度可以是自旋、轨道或其他内部自由度。

现在我们明确计算布洛赫-扎克变换

对于 $|f\rangle = |u_{\mathbf{k}}\rangle$。首先注意，根据正文中的式（18）和，(24)

$$u_{\mathbf{k}}(q) = U_{\mathbf{k}} u_0(q) = e^{i\pi\mathcal{C}\tau(q+k_y)^2 + 2\pi i\mathcal{C}k_x(q+k_y)}. \tag{42}$$

于是我们得到，

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r}) &= \sum_{m_y\in\mathbb{Z}} u_{\mathbf{k}}\left(-\frac{x}{\mathcal{C}} + \frac{\alpha}{\mathcal{C}} + m_y\right) e^{2\pi i\frac{1}{\mathcal{C}}y(-x+\alpha+\mathcal{C}m_y)} \qquad (43)\\ &= \sum_{m_y\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\mathcal{C}\tau\left(-\frac{x}{\mathcal{C}}+\frac{\alpha}{\mathcal{C}}+k_y+m_y\right)^2 + 2\pi i\mathcal{C}k_x\left(-\frac{x}{\mathcal{C}}+\frac{\alpha}{\mathcal{C}}+k_y+m_y\right) + 2\pi i\frac{1}{\mathcal{C}}y(-x+\alpha+\mathcal{C}m_y)} \\ &= e^{2\pi i\mathcal{C}k_xk_y} e^{i\pi\mathcal{C}\tau k_y^2} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\mathcal{C}} - \frac{x}{\mathcal{C}} \\ y \end{bmatrix}(\mathcal{C}z_\tau, \mathcal{C}\tau), \qquad (44) \end{aligned}$$

其中 $z_\tau = k_x + \tau k_y$，并引入了 theta

带特征的函数 $a, b \in \mathbb{R}$，定义为

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n+a)^2 + 2\pi i(n+a)(z+b)}, \tag{45}$$

对于 $z \in \mathbb{C}$。因此，布洛赫态 $|u_{\mathbf{k}}\rangle$ 的实空间表示由如下形式的 $\mathcal{C}$ 分量波函数给出：

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{2\pi i\mathcal{C}k_xk_y} e^{i\pi\mathcal{C}\tau k_y^2} \left(\vartheta\begin{bmatrix} -\frac{x}{\mathcal{C}} \\ y \end{bmatrix}(\mathcal{C}z_\tau, \mathcal{C}\tau), \ldots, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\mathcal{C}-1}{\mathcal{C}} - \frac{x}{\mathcal{C}} \\ y \end{bmatrix}(\mathcal{C}z_\tau, \mathcal{C}\tau)\right). \tag{46}$$

由于波函数的整体归一化可以任意选取，因此如果需要，可以去掉 theta 函数前依赖于 $\mathbf{k}$ 的指数因子。这一自由度对应于选择$U_{\mathbf{k}}$ 以及不同于式（ $u_0(q)$）中所用的 42 归一化方式。此外，正如正文中所指出的，还存在一种 $U(\mathcal{C})$ 实空间规范自由度；即将 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 乘以 $U(\mathcal{C})$ 中的一个元素，该元素可以依赖于 $\mathbf{r}$。

对于特定情形 $\mathcal{C} = 1$ 和 $\tau = i$，波函数 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 就是最低朗道能级布洛赫波函数（采用朗道规范）；而对于更高的 $\mathcal{C}$，它就是所谓的色纠缠最低朗道能级布洛赫波函数。由于以 theta 函数表示的朗道能级波函数对一些读者而言可能并不熟悉，为了完整起见，我们在附录中给出其推导。

致谢

B. M. 衷心感谢 J. P. Nunes、J. M. Mour˜ao 和 T. Baier 富有成效的讨论。本研究获得 JSPS KAKENHI Grant No. JP20H01845、JST PRESTO Grant No. JPMJPR19L2 和 JST CREST Grant No. JPMJCR19T1 的资助。B. M. 感谢里斯本 Instituto de Telecomunica,c˜oes 的安全与量子信息组（SQIG）提供支持。本研究由 FCT（Funda.c˜ao para a Ciˆencia e a Tecnologia）通过 FCT I.P. 国家基金资助；在符合条件的情况下，还获得 COMPETE 2020 FEDER 基金资助，资助项目为 UIDB/50008/2020 和科学就业激励计划——个人申请（CEEC Individual）——2022.05522.CEECIND/CP1716/CT0001，数字对象标识符为 10.54499/2022.05522.CEECIND/CP1716/CT0001。

[1] D. Yoshioka, *The quantum Hall effect* （施普林格出版社（柏林、海德堡），2002年）。

[2] J. Wang、J. Cano、A. J. Millis、Z.Liu 和 B. Yang, 《朗道能级几何与相互作用的精确描述》一

平带，《物理评论快报》**127**，246403（2021年）。[3] S. M. Girvin、A. H. MacDonald 和 P. M. Platzman，分数量子霍尔效应中集体激发的磁旋子理论，《物理评论B》**33**，2481（1986年）。[4] R. Roy，分数拓扑绝缘体的能带几何，《物理评论B》**90**，165139（2014年）。[5] J. Wang、S. Klevtsov 和 Z. Liu，所有拓扑理想平带中模型分数陈绝缘体的起源：显式颜色纠缠波函数与精确密度代数，《物理评论研究》**5**，023167（2023年）。[6] R. Bistritzer 和 A. H. MacDonald，扭转双层石墨烯中的莫尔′能带，《美国国家科学院院刊》**108**，12

[7] Y. Cao, V. Fatemi, S. Fang, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Kaxiras 和 P. Jarillo-Herrero，《魔角石墨烯超晶格中的非常规超导性》，《自然》556，43（2018年）。[8] Y. Cao, V. Fatemi, A. Demir, S. Fang, S. L. Tomarken, J. Y. Luo, J. D. Sanchez-Yamagishi, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Kaxiras, *et al.*，《魔角石墨烯超晶格半填充时的关联绝缘体行为》，《自然》556，80（2018年）。[9] E. Y. Andrei 和 A. H. MacDonald，《带扭转角的石墨烯双层》，《自然·材料》19，1265（2020年）。[10] P. J. Ledwith, G. Tarnopolsky, E. Khalaf 和 A. Vishwanath，《扭转双层石墨烯中的分数陈绝缘体态：解析方法》，《物理评论研究》2，023237（2020年）。[11] J. Wang 和 Z. Liu，《手性扭转多层石墨烯模型中理想平带的层级结构》，《物理评论快报》128，176403（2022年）。[12] J. Herzog-Arbeitman, A. Chew 和 B. A. Bernevig，《磁性布洛赫定理与扭转双层石墨烯中的再入平带》，2π 通量下，《物理评论B》106，085140（2022年）。[13] E. M. Spanton, A. A. Zibrov, H. Zhou, T. Taniguchi, K. Watanabe, M. P. Zaletel 和 A. F. Young，《范德华异质结构中分数陈绝缘体的观测》，《科学》360，62（2018年）。[14] Y. Xie, A. T. Pierce, J. M. Park, D. E. Parker, E. Khalaf, P. Ledwith, Y. Cao, S. H. Lee, S. Chen, P. R. Forrester, *et al.*，《魔角扭转双层石墨烯中的分数陈绝缘体》，《自然》600，439（2021年）。[15] J. Cai, E. Anderson, C. Wang, X. Zhang, X. Liu, W. Holtzmann, Y. Zhang, F. Fan, T. Taniguchi, K. Watanabe, *et al.*，《扭转 $MoTe_2$ 中分数量子反常霍尔态的迹象》，《自然》622，63（2023年）。[16] H. Park, J. Cai, E. Anderson, Y. Zhang, J. Zhu, X. Liu, C. Wang, W. Holtzmann, C. Hu, Z. Liu, *et al.*，《分数量子化反常霍尔效应的观测》，《自然》622，74（2023年）。[17] Y. Zeng, Z. Xia, K. Kang, J. Zhu, P. Kn¨uppel, C. Vaswani, K. Watanabe, T. Taniguchi, K. F. Mak 和 J. Shan，《莫尔 $MoTe_2$ 中分数陈绝缘体的热力学证据》，《自然》622，69（2023年）。[18] F. Xu, Z. Sun, T. Jia, C. Liu, C. Xu, C. Li, Y. Gu, K. Watanabe, T. Taniguchi, B. Tong, J. Jia, Z. Shi, S. Jiang, Y. Zhang, X. Liu 和 T. Li，《扭转双层 $MoTe_2$，中整数量子反常霍尔效应和分数量子反常霍尔效应的观测》，《物理评论X辑》13，031037（2023年）。

[19] Z. Lu, T. Han, Y. Yao, A. P. Reddy, J. Yang, J. Seo, K. Watanabe, T. Taniguchi, L. Fu 和 L. Ju，《多层石墨烯中的分数量子反常霍尔效应》，《自然》626，759（2024年）。[20] Y.-L. Wu, N. Regnault 和 B. A. Bernevig，《所有分数陈绝缘体的布洛赫模型波函数与赝势》，《物理评论快报》110，106802（2013年）。[21] T. Ozawa 和 B. Mera，《陈绝缘体中拓扑与量子度规的关系》，《物理评论B》104，045103（2021年）。[22] B. Mera 和 T. Ozawa，《K¨ahler 几何与陈绝缘体：拓扑与量子度规的关系》，《物理评论B》104，045104（2021年）。[23] B. Mera 和 T. Ozawa，《利用 Fubini-Study K¨ahler 结构构造几何平坦的陈能带》，《物理评论B》104，115160（2021年）。[24] 我们采用如下约定：实空间晶格 $\mathbb{Z}^2$ 的不可约表示（irrep）写作 $e^{2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$，其中 R $\in \mathbb{Z}^2$，因此 k 和 k +G（G $\in \mathbb{Z}^2$）确定同一个不可约表示，从而对应布里渊区（BZ）中相同的布洛赫准动量²。[25] 我们注意到，已有多位作者提出了与 K¨ahler 能带密切相关的概念，现于此澄清它们之间的关系。 *Ideal flatbands* [2, 5] 指具有恒定复结构的能量平坦 K¨ahler 能带 J。 *Vortexable bands* 指可以添加涡旋而不离开能带本征空间的能带；在具有晶格平移对称性的情况下，可涡旋能带等价于理想平带[43]。[26] D. Varjas, A. Abouelkomsan, K. Yang 和 E. J. Bergholtz，《具有恒定贝里曲率的拓扑晶格模型》，SciPost Phys. 12，118（2022年）。[27] 此处的布洛赫波函数是指具有给定准动量的本征态中，具有单位晶胞周期性（在磁场下相差适当相位）的部分。[28] D. Mumford, C. P. Ramanujam 和 J. I. Manin, *Abelian Varieties* 5 1974，第卷（牛津大学出版社，牛津，）。[29] A. Beauville，《θ 函数：新与旧》，《当代数学开放问题与综述》6，99（2013年）。[30] D. S. Freed，《论维格纳定理》，《几何与拓扑专著》18，83（2012年）。[31] K.-E. Huhtinen, J. Herzog-Arbeitman, A. Chew, B. A. Bernevig 和 P. T¨orm¨a，《重新审视平带超导性：对最小量子度规和能带接触的依赖》，《物理评论B》106，014518（2022年）。[32] K¨ahler 能带浸入复射影空间这一性质意味着量子度规在整个布里渊区内必须非退化，因此 $\sqrt{\det(g)} \neq 0$，从而 $|F_{12}| \neq 0$。[33] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta (I-III)*，第43卷（施普林格，2007年）。[34] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*，第5卷（美国数学会，1995年）。[35] D. Huybrechts, *Complex Geometry: An Introduction*，第78卷（施普林格，2005年）。[36] E. Calabi，《复流形的等距嵌入》，《数学年刊》，1（1953年）。[37] D. S. Freed, G. W. Moore 和 G. Segal，《海森堡群与非交换通量》，《物理年刊》322，236（2007年）。[38] D. S. Freed, G. W. Moore 和 G. Segal，《通量的不确定性》，《数学物理通讯》271

233 (2011-5).

, 247 (2007).

[39]F. D. M. Haldane，分数量子霍尔效应的几何描述，Phys. Rev.Lett. **107**，116801（2011年）。[40] Z. Liu、B. Mera、M. Fujimoto、T. Ozawa 和 J. Wang，广义朗道能级理论及其对非阿贝尔态的启示，arXiv:2405.14479 10.48550/arXiv.2405.14479 （2024年），arXiv:2405.14479 [cond-mat.mes-hall]。[41] M. Takeuchi，复射影空间中的齐性 Kähler子流形，《日本数学杂志》新系列 **4**, 171 (1978). [42] H. Nakagawa 和 R. Takagi，《复射影空间中的局部对称凯勒子流形》，《日本数学会杂志》**28**, 638 (1976). [43] P. J. Ledwith、A. Vishwanath 和 D. E. Parker，《涡旋性：理想分数陈绝缘体的统一判据》，《物理评论B》**108**, 205144 (2023).

附录 A：最低朗道能级布洛赫波函数

这里，为求完整起见，我们给出最低朗道能级布洛赫波函数的推导。量 $\mathbf{r} = (x, y)$ 表示平面中的坐标。均匀磁场中电子的哈密顿量为

$$H = -\frac{1}{2}\left[(\partial_x + 2\pi i y)^2 + \partial_y^2\right], \tag{A1}$$

其中，我们假设平面采用标准欧几里得度量，并使用（经过缩放的）坐标和一种（幺正）朗道规范，使得 $A = 2\pi i y dx$。注意，我们采用的约定是规范场为纯虚数（而非纯实数）。

哈密顿量 H 在平面的平移群的标准作用下并不保持不变。然而，我们可以引入平移群的射影作用，使得 H 在该作用下保持不变。取一个元素 $\mathbf{t} = (t_x, t_y) \in \mathbb{R}^2$，它在波函数上的作用由酉算子 $U(\mathbf{t})$ 给出，我们称之为磁平移，其定义为

$$U(\mathbf{t})\psi(\mathbf{r}) = e^{2\pi i t_y x}\psi(\mathbf{r} + \mathbf{t}). \tag{A2}$$

该作用是射影作用，因为

$$U(\mathbf{t}_1)U(\mathbf{t}_2) = U(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)e^{2\pi i t_{1,x} t_{2,y}} \tag{A3}$$

算符集合 $\{U(\mathbf{t})\lambda : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbf{U(1)}\}$ 构成一个海森堡群，它是由 $\mathbf{U(1)}$ 对平面的平移群$\mathbb{R}^2$ 作中心扩张所得。

协变导数 $\nabla = d + A$（其中 $d = dx\partial_x + dy\partial_y$ 是外微分）与 $U(\mathbf{t})$ 对易：

$$U(\mathbf{t})\left(\nabla\psi\right) = \nabla\left(U(\mathbf{t})\psi\right), \tag{A4}$$

因此，它也与哈密顿量对易。由此可知， H 具有磁平移不变性。现在考虑晶格 $\mathbb{Z}^2$，注意到对于 $\mathbf{R}_1$,$\mathbf{R}_2 \in \mathbb{Z}^2$，有

$$U(\mathbf{R}_1)U(\mathbf{R}_2) = U(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2). \tag{A5}$$

由此可知，算符 $\{U(\mathbf{R}) : \mathbf{R} \in \mathbb{Z}^2\}$ 构成晶格的酉表示，而 H 在该表示下保持不变。于是我们可以应用布洛赫定理，即寻找 H 的特征向量，使其同时也是晶格磁平移的特征向量。这些波函数为 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$，满足

$$U(\mathbf{R})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{2\pi i \mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{A6}$$

这等价于令 $\mathbf{R} = (m, n) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\psi_{\mathbf{k}}(x + m, y + n) = e^{-2\pi i n x}e^{2\pi i \mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\psi_{\mathbf{k}}(x, y). \tag{A7}$$

与往常一样，布洛赫波在整个 $\mathbb{R}^2$ 中不可归一化，只能在晶格的晶胞内归一化。由于上述周期性约束，从拓扑角度看，晶格的晶胞应理解为环面 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$，而动量 $\mathbf{k}$ 处的波函数则是该环面上适当线丛的截面。

接下来，我们希望寻找满足方程 Eq. (A7) 中准周期性条件的最低朗道能级波函数。现在，我们引入实空间中的复坐标 $w = x + iy$。需要指出的是，在本文中，符号 $z_\tau = k_x + \tau k_y$ 指动量空间中的复坐标，而 w 指实空间中的复坐标。沿复坐标方向及其复共轭方向的协变导数为

$$\nabla_w = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\pi}{2}(w - \bar{w}) \quad \text{and} \quad \nabla_{\bar{w}} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}} + \frac{\pi}{2}(w - \bar{w}), \tag{A8}$$

因此，哈密顿量的形式为

$$H = -\frac{1}{2}\left(\nabla_x \nabla_x + \nabla_y \nabla_y\right) = -\left(\nabla_w \nabla_{\bar{w}} + \nabla_{\bar{w}} \nabla_w\right) = -2\nabla_w \nabla_{\bar{w}} + \pi. \tag{A9}$$

注意到 $-\nabla_w$ 是 L^2–伴随算符 $\nabla_{\bar{w}}$，对于任意态 $|\psi\rangle$，第一项所对应的能量为 $\langle\psi|(-2\nabla_w \nabla_{\bar{w}})|\psi\rangle = 2||\nabla_{\bar{w}}|\psi\rangle||^2 \geq 0$，因此基态，即最低朗道能级，必须满足 $\nabla_{\bar{w}}\psi(\mathbf{r}) = 0$，相应的能量为 π。

若写作 $\psi(\mathbf{r}) = e^{-\pi y^2}\phi(\mathbf{r})$，条件 $\nabla_{\bar{w}}\psi(\mathbf{r}) = 0$ 可改写为

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \bar{w}} = 0, \tag{A10}$$

即 $\phi(\mathbf{r}) \equiv \phi(w)$ 是全纯的。最低朗道能级恰好是满足式（A10）所述全纯性条件且平方可积的波函数空间。

事实证明，正如我们将在下文证明的，对于固定动量 $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$，满足方程式（A7）中准周期性条件的线性无关解只有一个，其形式为

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-\pi y^2} e^{2\pi i k_x k_y} \vartheta \begin{bmatrix} k_x \\ -k_y \end{bmatrix} (w, i) = e^{-\pi y^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\pi (l + k_x)^2 + 2\pi i (l + k_x) w - 2\pi i l k_y} \tag{A11}$$

可以明确验证，利用下列适用于一般 $w_\tau = x + \tau y$和 $\gamma = m + \tau n$的 θ函数恒等式，条件方程（A7）成立，其中 $\tau \in \mathbb{H}$和 $\mathbf{R} = (m,\ n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (w_\tau + \gamma, \tau) = e^{-i\pi\tau n^2 - 2\pi i n w_\tau} e^{2\pi i (am - bn)} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (w_\tau, \tau). \tag{A12}$$

在固定动量 $\mathbf{k}$ 时，该解（A11）的唯一性可由以下方式看出。正如上文所示，若写作 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-\pi y^2}\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$，$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \equiv \phi_{\mathbf{k}}(w)$，则它是复变量 w 的全纯函数，并且由于条件（A7），它必须满足

$$\phi_{\mathbf{k}}(w + \gamma) = e_\gamma(w) e^{2\pi i (k_x m + k_y n)} \phi_{\mathbf{k}}(w), \tag{A13}$$

具有全纯乘子

$$e_\gamma(w) := e^{\pi n^2 - 2\pi i n w},\ \gamma = m + ni \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}, \tag{A14}$$

令 $\gamma = 1$，可得 $\phi_{\mathbf{k}}(w+1) = \phi_{\mathbf{k}}(\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l e^{2\pi i(l+k_x)w}$ 13 $w =)$ $e^{2\pi i k_x}$。因此可将其展开为傅里叶级数 $\phi_{\mathbf{k}}(\ )$，并根据方程（A）中系数之间的关系进行计算，得到递推关系

$$c_{l-n} = c_l e^{-\pi n^2 + 2\pi n(l + k_x) + 2\pi i k_y n} \tag{A15}$$

其通解为 $c_l = c e^{-\pi (l + k_x)^2 - 2\pi i l k_y}$，其中前因子 c 可以依赖于 $\mathbf{k}$。由此可得解，式（A11）。注意，全纯乘子 $e_\gamma(w)$ 满足余循环条件 $e_{\gamma_1+\gamma_2}(w) = e_{\gamma_2}(w + \gamma_1) e_{\gamma_1}(w)$。从以下事实也可以看出解（A11）的唯一性：这类全纯乘子定义了晶胞上的一个次数为 1（第一陈数为 1）的全纯线丛。根据黎曼-罗赫定理，该线丛有唯一的全纯截面。

最后，我们来求布洛赫波的元胞（准）周期部分的表达式，记为 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$，其定义为

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{2\pi i \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \tag{A16}$$

上述公式中的平面波部分使得由式(A7)给出的准周期性条件，即 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 必须满足的条件，其系数与$\mathbf{k}$无关：

$$u_{\mathbf{k}}(x+m,y+n)=e^{-2\pi inx}u_{\mathbf{k}}(x,y),\ m,n\in\mathbb{Z}, \tag{A17}$$

因此，它们都可以被解释为同一个线丛在晶胞环面上的（平方可积）截面，因而属于同一个希尔伯特空间——另请参见正文中关于布洛赫波函数定义的说明，其中使用$|u_{\mathbf{k}}\rangle\in\mathcal{H}$ 对于固定的 $\mathcal{H}$ ，独立于$\mathbf{k}$。从 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 在式（A11）中的显式表达式可知，

$$u_{\mathbf{k}}(x,y)=e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-\pi y^2}e^{2\pi ik_xk_y}\vartheta\begin{bmatrix}k_x\\-k_y\end{bmatrix}(w,i). \tag{A18}$$

最低朗道能级布洛赫波函数的这一表达式，应与第III 节式（46）中将 $\mathcal{C}=1$ 和 $\tau=i$替换后得到的一般表达式一致。乍看之下，两者并不相同：前者的θ函数特征是动量，后者的则是实空间坐标。实际上两者相同，下面我们将通过交换θ函数的特征与自变量来证明这一点。我们沿用上一节中的记号 $z=k_x+ik_y$ 来描述动量空间中的复坐标。

我们首先指出，以下关于 theta 函数的恒等式是已知的：

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(w_\tau,\tau)=e^{i\pi\tau a^2}e^{2\pi ia(w_\tau+b)}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(w_\tau+b+\tau a,\tau). \tag{A19}$$

利用这个恒等式以及基本 theta 函数在模变换下的雅可比恒等式，$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(w_\tau/\tau,\tau)=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi}{\tau}iw_\tau^2}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(w_\tau,\tau)$，我们可以交换特征和自变量，并将表达式改写如下：

$$\begin{aligned}
u_{\mathbf{k}}(x,y)&=e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-\pi y^2}e^{2\pi ik_xk_y}e^{-\pi k_x^2+2\pi ik_x(w-k_y)}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(w+iz,i)\\
&=e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-\pi y^2}e^{2\pi ik_xk_y}e^{-\pi k_x^2+2\pi ik_x(w-k_y)}e^{-\pi(w+iz)^2}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z-iw,i)\\
&=e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-\pi y^2}e^{2\pi ik_xk_y}e^{-\pi k_x^2+2\pi ik_x(w-k_y)}e^{-\pi(w+iz)^2}e^{\pi x^2}e^{2\pi ix(z+y)}\vartheta\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}(z,i)\\
&=e^{2\pi ik_xk_y-\pi k_y^2}\vartheta\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}(z,i).
\end{aligned} \tag{A20}$$

这只不过是第 46 式中得到的表达式，见第 III 节，针对 $\mathcal{C}=1$ 和 $\tau=i$。至此，我们证明了最低朗道能级波函数恰好是唯一的几何平坦 K¨ahler 能带，其 $\mathcal{C}=1$ 和 $\tau=i$。