arXiv:2304.00867v1 [math.FA] 3 Apr 2023

将 Grushin 圆柱面嵌入$\mathbf{R}^3$及薛定谔演化

Ivan Beschastnyi*、Ugo Boscain†、Daniele Cannarsa‡、Eugenio Pozzoli§

2023年4月4日

摘要

我们研究自由量子粒子在 Grushin 圆柱面上的演化，并考察不同类型的量子化。特别是，我们希望弄清粒子能否穿越奇异集，即结构不再是黎曼结构的点集。我们研究内在量子化和外在量子化；后者通过将 Grushin 结构等距嵌入$\mathbf{R}^3$（允许存在奇点）而得到。作为附带结果，我们给出将 Grushin 圆柱面嵌入$\mathbf{R}^3$的公式，这些公式也可用于其他目的。这些公式并非全局成立，但足以研究任意接近奇异集处的嵌入。

我们将这些结果推广到 α-Grushin 圆柱面的情形。

1 引言

Grushin平面是定义在$\mathbf{R}^2$ 上的近似黎曼结构，其坐标 (x, y) 下的全局正交标架为

$$X_1(x,y) = \partial_x, \quad X_2(x,y) = x\,\partial_y.$$

当 y 方向在圆 S^1 上紧化时，我们称之为*Grushin* 圆柱。下文中，提及 Grushin 平面和 Grushin 圆柱时，我们统称为格鲁申流形，并用 $\mathcal{G}$表示。

格鲁申流形已得到广泛研究，并具有许多有趣的性质。列 t us l举其中一些（例如参见 [ABS08、ABB20]）。

- 令 $\mathcal{Z} = \{(x,\ y) \in \mathcal{G} \mid x = 0\}$。在 $\mathcal{G} \setminus \mathcal{Z}$ 该结构是黎曼的，且黎曼度量（在坐标 $(x,\ y)$ 下）为

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

*CIDMA - 数学与应用研究中心，数学系，圣地亚哥大学校园，3810-193，阿威罗，葡萄牙。ivan.beschastnyi@sorbonne-universite.fr

†法国国家科学研究中心，雅克-路易·利翁实验室，索邦大学´，巴黎大学´，法国国家信息与自动化研究院，邮政信箱 187，75252 巴黎 Cedex 05，巴黎，法国。ugo.boscain@sorbonne-universite.fr

‡数学与统计系，于韦斯屈莱大学¨，40014 于韦斯屈莱¨，芬兰 daniele.d.cannarsa@jyu.fi §数学系，巴里大学¨，I-70125 巴里，意大利。电子邮件：eugenio.pozzoli@uniba.it

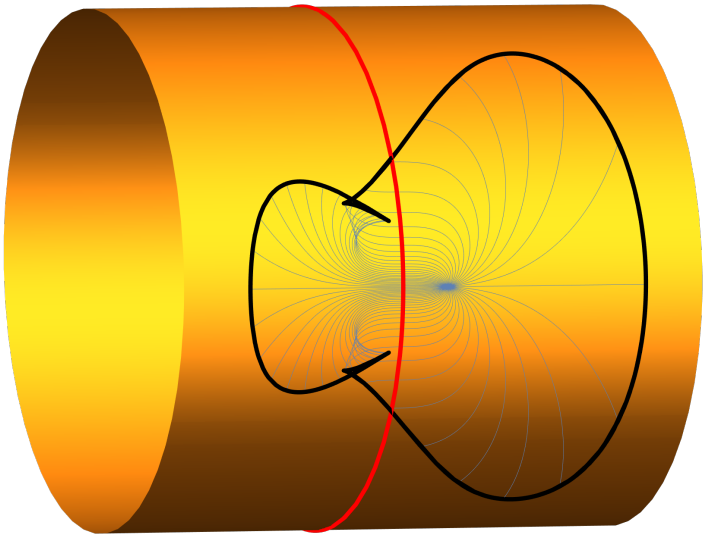


图1：从点 $(1/4,\ 0)$ 出发的 Grushin 圆柱上的测地线。也展示了 $T = 1.3$ 的测地线终点。请注意，测地线平滑地穿过奇异集（红色的圆）。此外，尽管高斯曲率始终为负（在其有定义的地方），仍存在共轭点，参见 [ABS08, ABB20]。

事实上，可以说，Grushin 流形是一种广义黎曼结构，其度量的逆矩阵定义良好，但在 $\mathcal{Z}$上不可逆，

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

面积元和高斯曲率分别为

$$dA = \frac{1}{|x|} dx\, dy, \qquad K = -\frac{2}{x^2}.$$

注意到，趋近奇异集时，它们会发散。

- 尽管当 $x \to 0$时，所有黎曼量都会发散，但测地线仍有良好定义，可以无奇点地穿过奇异集（见图1），且可通过庞特里亚金极大值原理轻松求得。值得注意的是，即使在曲率有定义的每一点上曲率始终为负，测地线仍可能存在共轭点。

这类结构上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子为

$$\Delta = \mathrm{div}_{dA}\mathrm{grad} = \partial_x^2 + x^2\partial_y - \frac{1}{x}\partial_x. \tag{2}$$

这里的梯度是相对于黎曼结构计算的，该结构并无奇异性，因为度量的逆矩阵是良定义的。散度是相对于面积元 dA计算的。dA 中的奇点产生了式 (2) 中发散的一阶项。

Grushin平面和 Grushin 圆柱最有趣且违反直觉的特征之一，由以下命题给出。

命题1 ([BL13])。 Δ 定义域为 $C_0^\infty(\mathcal{G}\setminus\mathcal{Z})$ 在 $L^2(\mathcal{G},dA)$中本质自伴。

一个等价的表述如下。定义

$$\mathcal{G}^+=\{(x,y)\in\mathcal{G}\mid x>0\},\quad \mathcal{G}^-=\{(x,y)\in\mathcal{G}\mid x<0\}.$$

Pro命题2 ([BL13])。 Δ 定义域为 $C_0^\infty(\mathcal{G}^+)$ 在 $L^2(\mathcal{G}^+,dA)$中本质自伴。相同的 *e resu*结论对 Δ 在 $\mathcal{G}^-$上也成立。

这类结果已得到广泛研究（例如参见 [PRS18、GMP19、FPR20]），并且它们在更一般的背景下也成立 [BL13、Bes23]。

作为命题1或命题2的推论，热方程和薛定谔方程的柯西问题

$$\begin{cases}\partial_t\phi(t,p)=\Delta\phi(t,p),\\ \phi(0,\cdot)=\phi_0(\cdot)\in L^2(\mathcal{G},dA)\end{cases}\qquad\begin{cases}i\hbar\partial_t\psi(t,p)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,p),\\ \psi(0,\cdot)=\psi_0(\cdot)\in L^2(\mathcal{G},dA)\end{cases}$$

不允许 $\mathcal{G}^+$ 与 $\mathcal{G}^-$ 之间发生任何交流，因为它们分别定义在 $\mathcal{G}^+$和 $\mathcal{G}^-$上。更准确地说，如果 ϕ_0 和 ψ_0 分别支撑在 $\mathcal{G}^+$ 和 $\mathcal{G}^-$ 上，那么对于任意 $t\geq 0$， $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别支撑在 $\mathcal{G}^+$ 和 $\mathcal{G}^-$ 上。

这一结果相当违反直觉，因为测地线会平滑地穿过奇异集，而对于热方程（以及薛定谔方程），认为快速运动的随机粒子（以及良好局限的波包）会“沿着”经典测地线运动的直觉并不成立。因此，若能以更具“动力学”的方式解释 $\mathcal{G}^+$ 与 $\mathcal{G}^-$之间为何不存在交流，将会很有帮助。

对于热方程，可以用极限随机游走来解释，这与将式（2）解释为贝塞尔过程 [BN$^+$20]有关。对于薛定谔方程，这类结果则更难以解释。

对于薛定谔方程结果的解释之所以困难，实际上还因为“描述自由量子粒子在黎曼流形上演化的薛定谔方程是什么”并没有明确无歧义的答案，即使不考虑格鲁申流形中存在的深层奇点所带来的困难也是如此。

事实上，有几种不同的方法可以使描述自由粒子在黎曼流形上量子化的算子中出现曲率。我们将这些方法分为两类：内在的和外在的。

内在方法

黎曼流形 M 上的大多数坐标不变量子化过程都会通过一个依赖于标量曲率 R的修正项来修正量子哈密顿算子 $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$, 其中 Δ 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子。在二维黎曼流形上，标量曲率是高斯曲率 K 的两倍，修正后的薛定谔方程形式如下

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi(t,p)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{in}\psi(t,p),\quad p\in M\text{ (of dimension 2)}$$

其中

$$\Delta_{in}=\Delta-cK(p)$$

且 $c\geq 0$ 是一个常数。文献中给出的取值包括：

- 路径积分量子化： $c = 1/3$ 和 $c = 2/3$ ，见 [DMENS80]； $c = 1/2$ ，见 [DeW92];
- 协变 Weyl 量子化： $c \in [0, 2/3]$ 包括 [Ful99] 中的传统 Weyl 量子化（$c = 0$）；

- 实极化的几何量子化： $c = 1/3$ 见 [Woo92];
- Wiener 测度的有限维近似： $c = 2/3$ 见 [AD99]。

关于这一主题的有趣讨论，参见 [AD99、Ful99] 。

在 [BBP21 中，Bes23] 已证明，只有当 c 取某个值时， $\mathcal{G}^+$ 与 $\mathcal{G}^-$ 之间才不存在通信。

命题 3。 设 $c \geq 0$。算子 $\Delta - cK(x, y) = (\partial_x^2 + x^2\partial_y - \frac{1}{x}\partial_x) + c\frac{2}{x^2}$，其定义域为$C_0^\infty(\mathcal{G} \setminus \mathcal{Z})$，当且仅当 $c = 0$ 时在 $L^2(\mathcal{G}, dA)$ 上本质自伴。

对于 $c \neq 0$，存在 $\Delta - cK$ 的一个自伴延拓，它允许
bet在 $\mathcal{G}^+$ 与 $\mathcal{G}^-$之间进行通信。

与命题1一样，命题 3 已在更一般的背景下得到证明，即二维、二阶的近似黎曼流形。

外在方法

在黎曼流形上，还有其他量子化过程方法会引入依赖于曲率的修正项。设 S_ε 是可定向曲面 S 在 $\mathbf{R}^3$中的一个 ε-管状邻域:

$$S_\varepsilon = \{p + \tau\, n(p) \,:\, p \in S, \tau \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}, \tag{3}$$

其中， $n(p)$是点 $p \in S$处 S 的法向量。考虑带狄利克雷边界条件的标准欧几里得拉普拉斯算子，那么对于 $\varepsilon \to 0$，经过适当的重整化后，可得到一个包含依赖于高斯曲率和平均曲率平方的修正项的算子，即量子哈密顿算子，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{ex},$$

其中

$$\Delta_{ex} = \Delta - K(p) + H^2(p).$$

更准确地说，以下结果为使用该量子哈密顿算子提供了依据。

定理 1. 设 S 是$\mathbf{R}^3$ 中的一个可定向曲面， K 和 H 分别是其高斯曲率和平均曲率，Δ 是其拉普拉斯-贝尔特拉米算子。考虑该曲面的 ε 管状邻域 S_ε 。设 Δ_{DD}^ε 是 S_ε 上的拉普拉斯算子，并在该邻域两侧满足狄利克雷边界条件。考虑定义域为

$$D(\Delta_{DD}^\varepsilon) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cos\left(\frac{\pi\tau}{2\varepsilon}\right) \frac{\psi}{\sqrt{1 - 2H\tau + K\tau^2}} \,:\, \psi \in C_c^\infty(S) \right\}. \tag{4}$$

那么，当 ε 趋于零时， Δ_{DD}^ε 具有如下渐近行为:

$$\Delta_{DD}^\varepsilon = -\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \underbrace{\Delta - K(p) + H^2(p)}_{=:\Delta_{ex}} + O(\varepsilon). \tag{5}$$

定理 1 是对 [KRT14] 中一项更一般结果的改编。另见 [Kre14, LTW11]。这些文献假设曲率有界。在我们的情形中，由于我们希望将该结果应用于格鲁申流形，因此将其局部化在紧集上。项 $-K(p)+H^2(p)$ 通常称为有效势。

下面说明公式 (5) 以及 $D(\Delta^{\varepsilon}_{DD})$ 的定义域的由来。ω 上的欧几里得体积 S_ε（参见 3）具有如下形式

$$\omega = h(p,\tau)d\tau \wedge dA.$$

那么不难看出（例如参见 [Gra04]），h 可以展开为（实际上这是精确的）

$$h(p,\tau) = 1 - 2H(p)\tau + K(p)\tau^2.$$

当 t 较小时，这个量为正。此外，S_ε 上的欧几里得拉普拉斯算子可写为

$$\Delta^{\varepsilon} = \partial_\tau^2 + \frac{\partial_\tau h}{h}\partial_\tau + \Delta_{S(\tau)},$$

其中 $S(\tau)$ 是由下式给出的、与 S 微分同胚的曲面，$\tau \in [-\varepsilon,\varepsilon]$

$$S(\tau) = \{p + \tau\, n(p) \,:\, p \in S\}, \tag{6}$$

而 $\Delta_{S(\tau)}$ 是 $S(\tau)$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。注意，$\Delta_{S(0)} = \Delta$ 是 S 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。

现在，为了在一个不依赖于 ε 的希尔伯特空间中进行运算，我们先作如下酉变换：

$$U : L^2(S_\varepsilon, d\tau \wedge dA) \to L^2(S_\varepsilon, h d\tau \wedge dA),$$

由.....给出

$$U : f \mapsto h^{-1/2} f.$$

这给出

$$U^{-1}\Delta^{\varepsilon}U = \partial_\tau^2 + U^{-1}\Delta_{S(\tau)}U + \frac{(\partial_\tau h)^2 - 2h\,\partial_\tau^2 h}{4h^2}.$$

下一步是通过取 $\tau = s\varepsilon$ 对 τ 变量进行缩放，将最后一个表达式按 ε 的幂展开，并以此恢复

$$U^{-1}\Delta^{\varepsilon}U = \varepsilon^{-2}\partial_s^2 + \Delta + H^2 - K + O(\varepsilon). \tag{7}$$

因此，若忽略高阶项，就得到一个可以分离变量的算子。于是我们将 $U^{-1}\Delta U$ 应用于

$$\phi(p,s) = \chi(s)\psi(p), \qquad (p,s) \in S \times [-1,1] \simeq S_\varepsilon.$$

如式（7）所示，第一项总是发散。因此，选择一个特定函数 χ 来补偿这一发散项是合理的。特别地，我们可以选择 χ 作为 $[-1,1]$ 上 ∂_s^2 的第一特征函数，并满足狄利克雷边界条件，其表达式为

$$\chi(s) = \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

恢复缩放和酉变换后，我们得到定义域 (4) 和渐近式 (5)，这意味着如果

$$\varphi(\tau,p) = \cos\left(\frac{\pi\tau}{2\varepsilon}\right)\psi(p)h^{-1/2}(\tau,p),$$

我们得到

$$\frac{\langle \varphi, \Delta_{DD}^{\varepsilon} \varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} = -\Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2 + \frac{\langle \psi, \Delta_{ex} \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} + O(\varepsilon).$$

这里 Δ^{ε} 称为 $\Delta_{DD}^{\varepsilon}$，因为狄利克雷边界条件已预先施加。在此公式中，左侧的标量积是在 $L^2(S_\varepsilon,\ h d\tau \wedge dA)$中计算的，右侧的标量积则是在 $L^2(S,\ dA)$中计算的。

在文章 [KRT14] 中，作者证明 $\Delta_{DD}^{\varepsilon} + (\pi/2\varepsilon)^2$ 在适当的范数预解式意义下收敛到 Δ_{ex}，并由此推导出关于谱局域化的结论，如 $\varepsilon \to 0$所示。

本文旨在将外蕴方法应用于 Grushin 圆柱，尝试将其等距嵌入为旋转曲面，使其尽可能接近 $\mathcal{Z}$，计算其平均曲率 H，进而 Δ_{ex}。正如高斯曲率 K在趋近 $\mathcal{Z}$ 时发散所预示的，我们将发现，Grushin 圆柱无法在奇点处实现全局嵌入，只能嵌入区间 $x \in [1, +\infty[$内。事实上，当 $x \to 1$时，嵌入的奇点表现为平均曲率 H 爆炸。我们将这一嵌入称为***Grushin* 喇叭钟形曲面**（见图 2）。随后，我们研究 Δ_{ex} 在 $x \in]1,\ +\infty[$上的自伴性，并证明 Δ_{ex} 相对于体积 dA在 L^2中不是本质自伴的。

为了更接近奇异集 $\mathcal{Z}$，我们还研究了另一类嵌入，其中曲面绕其旋转轴缠绕 n^2 圈，并且当 $x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$ 时可以实现这种嵌入（*Grushin* n^2绕行的钟形曲面，见图 3）。

最后，我们将这项研究推广到 α-Grushin 圆柱面，它是 $\mathbf{R} \times S^1$ 上的一种广义黎曼结构，其全局正交标架为

$$X_1(x,y) = \partial_x, \quad X_2(x,y) = |x|^{\alpha}\, \partial_y, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

α-Grushin 圆柱面已在多篇论文中从不同角度得到研究（例如参见 [BP16、BMM15、GMP22、LS23] 及其中的参考文献）。

1.1 历史回顾

Grushin 度量由 Baouendi [Bao67] 和 Grushin [Gru70] 于 60 年代末提出。当时人们对退化椭圆算子感兴趣，尤其是 $\mathbf{R}^2$ 上的以下算子

$$\partial_x^2 + x^2 \partial_y^2. \tag{8}$$

该算子包含度量 (1)，即它可以写成 $\sum_{j,\ k=1}^{2} g^{jk} \partial_j \partial_k$，其中 (g^{jk}) 是度量 (1) 的逆矩阵。值得注意的是，算子 (8) 并不是度量 (1) 的拉普拉斯-贝尔特拉米算子（即相对于黎曼体积的梯度的散度）。注意，算子 (8) 恰好关于平面的勒贝格测度是对称的。然而，一般而言，若 $\{X_1, X_2\}$ 是二维流形上的一个（广义）正交标架，则平方和算子 $(X_1)^2 + (X_2)^2$ 关于任何体积测度都不对称。

2 将 Grushin 半圆柱面嵌入 $\mathbf{R}^3$，使其成为旋转曲面

考虑带有黎曼度量的流形 $\mathbf{R}^+ \times S^1$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g(x)^2 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^+ \times S^1.$$

在条件 $g'(x) \leq 1$ 下，这个黎曼流形可以等距地实现为旋转曲面

$$\begin{cases} z_1 = g(x)\cos y \\ z_2 = g(x)\sin y \\ z_3 = h(x), \end{cases} \tag{9}$$

其中 $h(x) = z_{30} + \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 - g'(s)^2}\, ds$。在满足 $g(x) = 0$ 的点 x 处，坐标系 $(x,\ y)$ 是奇异的（类似于平面上的极坐标在 $(0,\ 0)$ 处的奇异性）。

这里 x_0 和 z_{30} 是两个常数（其中只有一个是独立的），它们确定曲面在 z 轴上的位置（$z_{30} = h(x_0)$）。对于这个嵌入，高斯曲率的公式为

$$K = -\frac{h'(x)}{g(x)}(h'(x)g''(x) - h''(x)g'(x)),$$

平均曲率的公式为

$$H = \frac{1}{2g(x)}\Big(h'(x) - g(x)(h'(x)g''(x) - h''(x)g'(x))\Big).$$

注意，H 的符号取决于单位法向量的选择。然而，下文中的结果都与这一选择无关，因为只涉及 H^2。对于 Grushin 半圆柱，我们有 $g(x) = 1/x$。因此，当 $x \geq 1$ 时，$g' \leq 1$，且嵌入的形式为（这里 x_0 和 z_{30} 固定为满足 $z_3(1) = 1$），

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{x}\cos y \\ z_2 = \frac{1}{x}\sin y \\ z_3 = 1 + \int_1^x \sqrt{1 - \frac{1}{s^4}}\, ds. \end{cases} \tag{10}$$

z_3 的表达式可以用特殊函数显式计算，但这与此处无关。这个嵌入对于 $x \geq 1$ 实际上是全局的（见图 2）。下文将这个嵌入称为*Grushin 喇叭钟形曲面*。

对于 Grushin 喇叭钟形曲面，我们有

$$H = \frac{x^4 - 3}{2x\sqrt{x^4 - 1}},$$

而高斯曲率（与嵌入无关）为

$$K = -\frac{2}{x^2}.$$

由此可得，外在拉普拉斯算子为

$$\begin{aligned} \Delta_{ex} = \Delta - K + H^2 &= \partial_x^2 + x^2\partial_y - \frac{1}{x}\partial_x - \big(-\frac{2}{x^2}\big) + \Big(\frac{x^4 - 3}{2x\sqrt{x^4 - 1}}\Big)^2 \\ &= \partial_x^2 + x^2\partial_y - \frac{1}{x}\partial_x + \frac{\left(x^4 + 1\right)^2}{4x^2\left(x^4 - 1\right)}. \end{aligned} \tag{11}$$



图 2：Grushin 喇叭钟形曲面，即 Grushin 圆柱在$\mathbf{R}^3$中的一种嵌入。图中旋转轴（z_3）呈水平，以便与图1进行更直观的比较。该喇叭钟形曲面在嵌入的奇点（$x = 1$）处达到最大的截面直径。

2.1 外在拉普拉斯算子自伴性的研究

下一个命题指出，Δ_{ex} 不是本质自伴的（1，∞），也就是说，问题出在嵌入的奇异性上。事实上，这是因为有效势

$$-K + H^2 = +\frac{\left(x^4+1\right)^2}{4x^2\left(x^4-1\right)} = \frac{1}{4(x-1)} + O(1), \quad \text{for } x \to 1$$

并且算子 $-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4(x-1)}$ 在 $x = 1$处属于极限圆型。

命题 4。 Δ_{ex} 的定义域为 $C_0^\infty((1,\infty) \times S^1)$，它在 $L^2((1,\infty) \times S^1, dA)$中不是本质自伴的。

证明。 令算子 Δ_{ex} 作用于形如 $\sqrt{x}\,\phi(x,y)$ 的函数，立即可得，定义在 $L^2((1,\infty) \times S^1, dA)$ 上的算子 Δ_{ex} 与下列算子酉等价

$$L_{ex} = \partial_x^2 + x^2\partial_y - \frac{3}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{\left(x^4+1\right)^2}{4x^2\left(x^4-1\right)},$$

在 $L^2((1,\infty) \times S^1, dx\,dy)$ 上。对 y 变量进行傅里叶变换后，L_{ex} 的自伴性等价于这些算子的自伴性

$$\hat{L}_{ex}^k = \partial_x^2 - k^2x^2 - \frac{3}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{\left(x^4+1\right)^2}{4x^2\left(x^4-1\right)},$$

对每个 $k \in \mathbf{N}$。现在

$$-k^2x^2 - \frac{3}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{\left(x^4+1\right)^2}{4x^2\left(x^4-1\right)} = \frac{1}{4(x-1)} + O(1), \quad \text{for } x \to 1.$$

因此， $-\hat{}L_{ex}^k$ 可视为一维薛定谔算子 $-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$，其势函数 V 随 $x\to 1^+$递减，这意味着它在 $x=1$ 处属于极限圆型（例如参见 [RS75，定理 X.7 和问题 7]）。因此，对每个 $k\in\mathbf{Z}$，$\hat{}\,L_{ex}^k$ 都不是本质自伴的。结论得证。

□

注记 1。由命题 *4* 的证明还可以推知，每个纤维算子 $\hat{}\,L_{ex}^k, k\in\mathbf{Z}$ 都不具备自伴性。换言之，Δ_{ex} 具有无限亏指数。

2.2 其他可能的嵌入

上文介绍的嵌入对于 $x\in[1,\infty)$ 是整体的。在 $x=1$ 处出现奇点，是因为当趋近 $x=0$ 处的奇异集时，面积增长过快，无法实现为旋转曲面。实际上，当 $x\to 1^+$时，Grushin 喇叭钟形曲面的切空间会变得平行于（z_1，z_2）平面。这体现为平均曲率H的散度。

实际上还存在其他局部嵌入。为了能够更接近奇异集$\{x=0\}$，需要使面积比之前的嵌入增长得更快，例如，只嵌入 Grushin 圆柱的一部分，或让其围绕 z_3轴缠绕数圈。

让我们利用这一思路。设 $n\in\mathbf{N}^*$。对于 $x\in[1/n,\infty)$ 和 $y\in(0,\ 2\pi/n^2)$，Grushin 圆柱局部等距于曲面（此处 x_0 和 z_{30} 固定，使得 $z_3(1/n)=1/n$），

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{1}{n^2x}\cos(n^2y)\\ z_2=\dfrac{1}{n^2x}\sin(n^2y)\\ z_3=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{nx}\sqrt{1-\frac{1}{s^4}}\,ds. \end{cases} \tag{12}$$

下文将此嵌入称为*Grushin* n^2圈绕钟形面，因为如果 $y\in S^1$，而非$y\in(0,\ 2\pi/n^2)$，那么该曲面将绕旋转轴圈绕 n^2 周。

对于 Grushin n^2圈绕钟形面，其平均曲率为

$$H_n=\frac{n^4x^4-3}{2x\sqrt{n^4x^4-1}}.$$

由此可得，外在拉普拉斯算子为

$$\begin{aligned}\Delta_{ex}^n&=\Delta-K+H_n^2=\partial_x^2+x^2\partial_y-\frac{1}{x}\partial_x-\big(-\frac{2}{x^2}\big)+\Big(\frac{n^4x^4-3}{2x\sqrt{n^4x^4-1}}\Big)^2\\&=\partial_x^2+x^2\partial_y-\frac{1}{x}\partial_x+\frac{\left(n^4x^4+1\right)^2}{4x^2\left(n^4x^4-1\right)}.\end{aligned} \tag{13}$$

由于有效势由下式给出

$$-K+H_n^2=\frac{\left(n^4x^4+1\right)^2}{4x^2\left(n^4x^4-1\right)}=\frac{n}{4(x-\frac{1}{n})}+O(1),\quad \text{for } x\to\frac{1}{n},$$

与情形 $n=1$类似，我们也有相应的结果。



图 3：Grushin n^2 圈的钟形曲面。这些是参数为（x，y）$\in[1/n,\infty)\times(0,2\pi/n^2)$ 的 Grushin 圆柱面的嵌入。与图 2 一样，旋转轴 z_3 是水平的。钟形曲面在嵌入的奇点（$x=1/n$）处达到最大直径。若取 $y\in S^1$，则每个钟形曲面绕行 n^2 次。

命题5。 Δ_{ex}^n 在定义域 $C_0^\infty((\frac{1}{n},\infty)\times S^1, dA)$ 上不是本质自伴的，在 $L^2((\frac{1}{n},\infty)\times S^1)$ 上不是本质自伴的。

遗憾的是，似乎很难对 Δ_{ex}^n 在$n\to\infty$极限下的自伴性作出任何判断。

3 α-Grushin 圆柱面

Grushin 圆柱面的一种自然推广是 α-Grushin 圆柱面$\mathbf{R}\times S^1$，其上赋有广义黎曼度量

$$\mathbf{g}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{|x|^{2\alpha}}\end{pmatrix},\quad \alpha\in\mathbf{R}. \tag{14}$$

注意，相应的黎曼面积为

$$dA^\alpha=\frac{1}{|x|^\alpha}dxdy.$$

此类流形包含以下特殊情形：Grushin 圆柱面（$\alpha=1$）、标准欧几里得圆柱（$\alpha=0$）、挖孔平面（$\alpha=-1$）和二次尖点（$\alpha=-2$）。对于 $\alpha\in\mathbf{N}$，α-Grushin 圆柱面是意义下的近似黎曼流形：[ABS08, ABB20]。

与上一节类似，我们可以找到嵌入到$\mathbf{R}^3$ 中的旋转曲面 .
For $\alpha\neq-1$，我们来定义

$$s_0(\alpha)=|\alpha|^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

作为 α 的函数，s_0 的图像如图4所示。

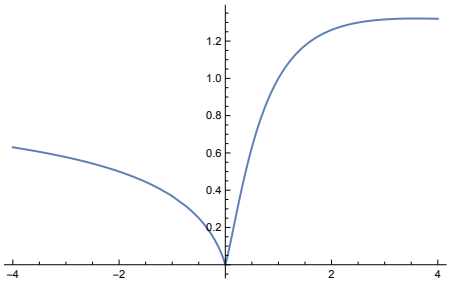


图4：函数 $s_0(\alpha)$ 表示嵌入失效时的 x 值。

对于 $\alpha > -1$ 和 $\alpha \neq 0$，当 $x \geq s_0(\alpha)$（即下一公式中平方根为实数的区间）时，可以进行嵌入，并且我们有：

$$\begin{cases} z_1 = x^{-\alpha}\cos(y) \\ z_2 = x^{-\alpha}\sin(y) \\ z_3 = s_0(\alpha) + \int_{s_0(\alpha)}^{x} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{s^{2(1+\alpha)}}}\, ds. \end{cases} \tag{15}$$

这里常数的选取使得 $z_3(s_0(\alpha)) = s_0(\alpha)$。

对于 $\alpha < -1$，当 $x \in (0,\ s_0(\alpha)]$ 时，嵌入是可能的，其形式为

$$\begin{cases} z_1 = x^{-\alpha}\cos(y) \\ z_2 = x^{-\alpha}\sin(y) \\ z_3 = \int_{0}^{x} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{s^{2(1+\alpha)}}}\, ds. \end{cases}$$

这里常数的选取使得 $z_3(0) = 0$。

对于 $\alpha = 0$，我们得到圆柱面的标准嵌入；对任意 $x \in \mathbf{R}$ 值，该嵌入都存在，

$$\begin{cases} z_1 = \cos(y) \\ z_2 = \sin(y) \\ z_3 = x. \end{cases}$$

对于 $\alpha = -1$，我们得到挖孔平面在极坐标下的嵌入（这里我们有 $x > 0$），

$$\begin{cases} z_1 = x\cos(y) \\ z_2 = x\sin(y) \\ z_3 = 0. \end{cases}$$

其中一些嵌入如图5、图6、图7、图8所示。

对于 α的每个取值，高斯曲率为

$$K = -\frac{\alpha(1+\alpha)}{x^2}.$$

对于 $\alpha \neq -1$，平均曲率为

$$H = \frac{x^{2(1+\alpha)} - \alpha(1+2\alpha)}{2x\sqrt{x^{2(1+\alpha)} - \alpha^2}},$$

而对于 $\alpha = -1$，它等于该表达式的极限，结果为零。

对于有效势，我们发现

$$-K + H^2 = \frac{(x^{2(1+\alpha)} + \alpha)^2}{4x^2(x^{2(1+\alpha)} - \alpha^2)} = \frac{1+\alpha}{8|\alpha|^{\frac{1}{1+\alpha}}(x - |\alpha|^{\frac{1}{1+\alpha}})} + O(1), \quad \text{for } x \to |\alpha|^{\frac{1}{1+\alpha}}. \tag{16}$$

因此，我们再次发现了同样的非自伴性。

命题 6. 考虑(14) 给出的$\mathbf{R} \times S^1$上的广义黎曼度量。令 Δ 为其拉普拉斯–贝尔特拉米算子，$\Delta_{ex}^{\alpha} = \Delta - K + H^2$ 为对应于上述嵌入的外在拉普拉斯算子。我们有如下结论：

- 对于 $\alpha \geq -1$, Δ_{ex}^{α}，其定义域为 $C_0^{\infty}((s_0(\alpha)\ \infty)\times S^1)$ 的算子在 $L^2((s_0(\alpha)\ \infty)\times S^1, dA^{\alpha})$中不是本质自伴的；
- 对于 $\alpha < -1$, Δ_{ex}^{α}，其定义域为 $C_0^{\infty}((0, s_0(\alpha))\times S^1)$ 的算子在 $L^2((0, s_0(\alpha))\times S^1, dA^{\alpha})$中不是本质自伴的。

注 2. 由于渐近关系(16)，要使柯西问题具有意义，在 $x = s_0(\alpha)$ 处始终需要施加边界条件。对于情形 $\alpha < -1$，嵌入定义在区间$(0, s_0(\alpha)]$上。实际上，非自伴性源于该区间的两个端点（也就是说，在 $x = 0$处同样需要施加边界条件）。

为说明这一点，我们进行酉变换 $Uf(x, y) = x^{-\alpha/2} f(x, y)$。由此得到算子

$$L_{ex} = U\Delta_{ex}U^{-1} = \partial_x^2 + x^{2\alpha}\partial_y^2 - \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{x^2} + \frac{(x^{2(1+\alpha)} + \alpha)^2}{4x^2(x^{2(1+\alpha)} - \alpha^2)}.$$

对 y 变量作傅里叶变换，可得到一族算子

$$\hat{L}_{ex}^k = \partial_x^2 - k^2 x^{2\alpha} - \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{x^2} + \frac{(x^{2(1+\alpha)} + \alpha)^2}{4x^2(x^{2(1+\alpha)} - \alpha^2)}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

对于 $\alpha < -1$，我们得到

$$\hat{L}_{ex}^k = \partial_x^2 + \left(\frac{1}{4} - k^2\right)x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}), \quad \textit{for } x \to 0^+$$

因此，$\hat{}\ L_{ex}^0$ 在 $x = 0$ 处也属于极限圆型。

致谢

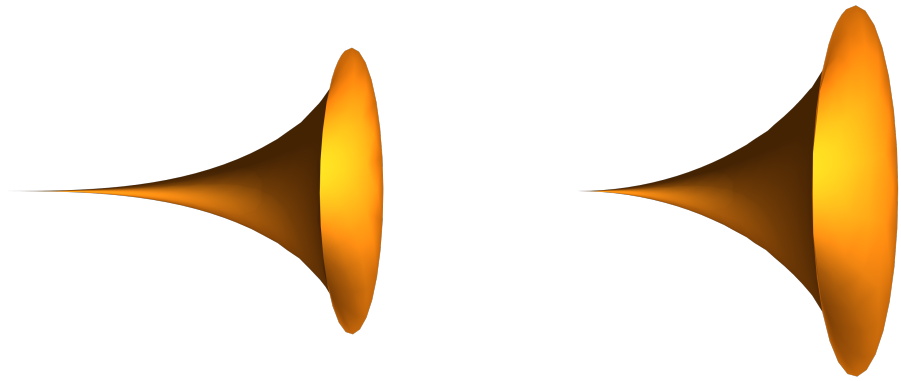
本研究部分得到 ANR-DFG 项目“CoRoMo” ANR-22-CE92-0077- 01 的资助。D. Cannarsa 得到芬兰科学院项目（编号 322898）的资助“通过度量几何与李群理论研究次黎曼几何”。E. Pozzoli 感谢帕多瓦大学 STARS Consolidator Grant 2021 项目“NewSRG”以及 PNRR MUR 项目 PE0000023-NQSTI 提供的经费支持。I. Beschastnyi 得到 CIDMA 数学与应用研究与发展中心以及葡萄牙科学技术基金会（“FCT - 科学与技术基金会”）的资助，资助项目为 UIDP/04106/2020 和 UIDB/04106/2020。

作者感谢 David Krejcirik 就其著作[Kre14, KRT14]进行了富有启发性的讨论。

参考文献

[ABB20] A. Agrachev、D. Barilari 和 U. Boscain，《次黎曼几何全面导论》，剑桥高等数学研究丛书，第181卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020年。从哈密顿观点出发，附 Igor Zelenko 撰写的附录。[ABS08] A. Agrachev、U. Boscain 和 M. Sigalotti，《二维近黎曼流形上的高斯-博内型公式》，《离散连续动力系统》20（2008），第4期，801–822页。[AD99] L. Andersson 和 B. K. Driver，《流形上维纳测度的有限维近似与路径积分公式》，《函数分析杂志》165（1999），第2期，430–498页。[Bao67] MohamedSalah Baouendi，《关于一类退化椭圆算子》，《法国数学会通报》95（1967），45–87页。MR 0228819[BBP21] I. Beschastnyĭ、U. Boscain 和 E. Pozzoli，《二维近黎曼流形上曲率拉普拉斯算子的量子禁闭》，《势分析》（2021）。[Bes23] Ivan Beschastnyi，《二维近黎曼流形上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的闭包及李流形上微分算子的半弗雷德霍姆性质》，《数学成果》78（2023），第2期，论文编号59。[BL13] U. Boscain 和 C. Laurent，《近黎曼几何中的拉普拉斯-贝尔特拉米算子》，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》63（2013），第5期，1739–1770页。[BMM15] Karine Beauchard、Luc Miller 和 Morgan Morancey，《二维 Grushin 型方程：最短时间与零可控数据》，《微分方程杂志》259（2015），第11期，5813–5845页。MR 3397310[BN^{+}20] U. Boscain、R. W. Neel 等，《布朗运动向一族 Grushin 型奇点的延拓》，《概率电子通信》25（2020）。[BP16] U. Boscain 和 D. Prandi，《锥形与反锥形曲面上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的自伴延拓与随机完备性》，《微分方程杂志》260（2016），第4期，3234–3269页。[DeW92] B. DeWitt，《超流形》，第2版，《剑桥数学物理专著》，剑桥大学出版社，剑桥，1992年。[DMENS80]C. DeWitt-Morette、K. D. Elworthy、B. L. Nelson 和 G. S. Sammelman，《一种构造薛定谔方程解的随机方案》，《亨利·庞加莱研究所年刊，A辑（新系列）》32（1980），第4期，327–341页。[FPR20] V. Franceschi、D. Prandi 和 L. Rizzi，《奇异次拉普拉斯算子的本质自伴性》，《势分析》53（2020），第1期，89–112页。[Ful99] S. A. Fulling，《伪微分算子、协变量子化、不可避免的范·弗莱克-莫雷特行列式及相关争议》，载《相对论、粒子物理与宇宙学》（德克萨斯州科利奇站，1998），World Sci. Publ.，里弗埃奇（新泽西州），1999年，第329–342页。 $R/6$ GMP19] M. Gallone、A. Michelangeli 和 E. Pozzoli，《Grushin 型流形上的几何量子禁闭》，《应用数学与物理学杂志》70（2019），第6期，文章编号158，共17页。

[GMP22] Matteo Gallone、Alessandro Michelangeli 和 E. Pozzoli，*Grushin* 圆柱中的量子几何禁闭与动力学传输，《数学物理评论》**34**（2022），第 07 期，2250018。[Gra04] Alfred Gray，管状邻域，第二版，《数学进展丛书》第 221 卷，Birkh¨auser Ver- lag，巴塞尔，2004，附 Vicente Miquel 作序。MR 2024928[Gru70] V. V. Gruˇsin，一类亚椭圆算子，《数学文集》（新系列）**83 (125)**（1970），456–473。MR MR0279436 (43 #5158)[Kre14] D. Krejcirik，具有混合狄利克雷和诺伊曼边界条件的超曲面窄管状邻域中的拉普拉斯算子谱，《波希米亚数学》**139**（2014），185–193。[KRT14] D. Krejˇciˇr´ık、N. Raymond 和 M. Tuˇsek，超曲面收缩管状邻域中的磁拉普拉斯算子，《几何分析杂志》**25**（2014）。[LS23] Cyril Letrouit 和 Chenmin Sun，通过预解算子估计研究 *Baouendi-Grushin* 型方程的可观测性，《朱西厄数学研究所杂志》**22**（2023），第 2 期，541—579。MR 4557902[LTW11] J. Lampart、S. Teufel 和 J. Wachsmuth，具有变化横截面的狄利克雷细管的有效哈密顿量，《量子物理学数学成果》，World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2011，第 183–189 页。[PRS18] D. Prandi、L. Rizzi 和 M. Seri，非完备黎曼流形上的量子禁闭，《谱理论杂志》**8**（2018），第 4 期，1221–1280。[RS75] M. Reed 和 B. Simon，现代数学物理方法。*II.* 傅里叶分析、自伴性，学术出版社 [Harcourt Brace Jovanovich，出版社]*,* 纽约-伦敦，1975。MR 0493420 (58 #12429b)[Woo92] N. M. J. Woodhouse，几何量子化，第二版，《牛津数学专著》，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1992，牛津科学出版物。MR 1183739



$\alpha = -3$ $\alpha = -2$

图5： α-Grushin 圆柱的嵌入，适用于 $\alpha < -1$。尖点对应于点$x = 0$。



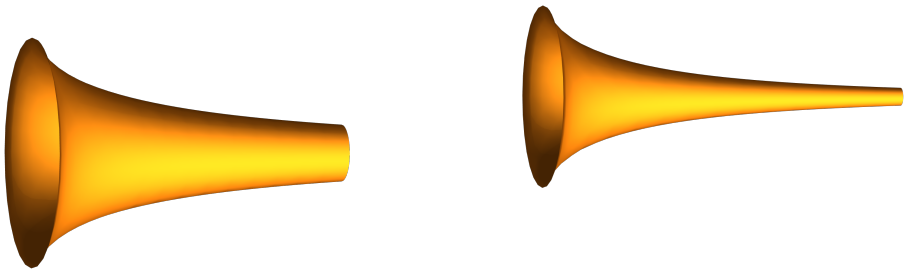
$\alpha = -1$ $\alpha = -1/2$

图6： α-Grushin 圆柱的嵌入，适用于 $\alpha \in [-1, 0)$ 。



$\alpha = 0$ $\alpha = 1/2$

图 7： α-Grushin 圆柱的嵌入，适用于 $\alpha \in [0, 1)$。



$\alpha = 1$ $\alpha = 2$

图 8： α-Grushin 圆柱的嵌入，适用于 $\alpha \geq 1$。