arXiv:2304.00872v1 [math.CA] 3 Apr 2023

具有单位速度的热力学 Cucker-Smale 集合及其用于碰撞避免的充分框架

HYUNJIN AHN、JUNHYEOK BYEON†和 SEUNG-YEAL HA

Abstract. 我们研究一种用于以恒定速度运动的多智能体系统的 Cucker-Smale 型群集模型。该模型将运动学观测量和内能（温度）纳入个体间的相互作用。传统上，在不限制速度的情况下，通常通过在通信规则中引入奇异性来实现碰撞避免。然而，在施加单位速度约束时，碰撞避免机制可能有所不同，奇异性也未必能够阻止碰撞。本文提出一个框架，在满足由初始条件、系统参数和奇异性程度所表达的充分条件时，该框架能够实现碰撞避免、渐近集群、热平衡以及个体间的严格间距。

1. Introduction

涌现集群动力学常见于自然界和人类社会中的相互作用多体系统，例如萤火虫和起搏细胞的同步[9, 27, 51], 细菌聚集 [47], 鸟群集 [25], 以及鱼群聚集 [26, 46]。相关文献对这些领域作了简要介绍 [1, 8, 19, 28, 41, 44, 45, 49, 50]。本文聚焦于集群行为，即粒子在有限环境中依据简单规则以共同速度运动。

人们提出了若干动力系统来研究集群系统中的涌现行为，包括 Kuramoto 模型、Cucker-Smale 模型和 Winfree 模型，这些研究承接了 Vicsek 等人关于 [48] 中集群模型的工作。自 [25], 以来，研究人员考察了 Cucker-Smale 模型的各个方面。该模型采用牛顿型二阶模型构建，用于描述位置-速度，并涉及平均场极限 [6,7,31,34,36], 动力学模型 [12,38], 流体力学描述 [29,30,39], 粒子分析 [11–15,17,17–21], 温度场 [32,37], 相对论框架 [5–7,10,33], 碰撞避免 [11,20,22–24,40,42,43], 等。

以往研究主要聚焦于恒定速率的 Cucker-Smale 模型，并探讨了基本的粒子分析、 [17], 双簇群集 [14],

Date: 2023年4月4日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 82C10 82C22 35B37。
Key words and phrases. 热力学、Cucker-Smale 模型、单位速度、碰撞避免、有限时间内碰撞、耗散结构、渐近集群、温度平衡。致谢。H. Ahn 的研究得到韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（2022R1C12007321）支持；J. Byeon 的研究得到韩国政府（教育科学技术部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（N0.2019R1A6A1A10073437）支持；S.-Y. Ha 的研究部分得到韩国国家研究基金会项目（NRF-2020R1A2C3A01003881）的支持。

†: 通讯作者。

多簇群集、单簇群集的必要条件 [35], 以及时滞效应 [16]。然而，这些研究最初均由 Cucker-Smale 模型所启发，作者 [2] 将其拓展至具有温度场的单位速率 Cucker-Smale 模型。为说明本研究的动机，我们简要介绍热力学 Cucker-Smale 模型的动力系统。该模型是一个关于位置-速度-温度 (x_i, v_i, T_i) 的二阶系统，如 [32] 所示：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i, \quad t > 0, \quad i = 1, \cdots, N, \\ \dfrac{dv_i}{dt} = \dfrac{\kappa_1}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \phi(\|x_i - x_j\|) \left(\frac{v_j}{T_j} - \frac{v_i}{T_i} \right), \\ \dfrac{d}{dt} \left(T_i + \dfrac{1}{2} \|v_i\|^2 \right) = \dfrac{\kappa_2}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \zeta(\|x_i - x_j\|) \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right), \\ (x_i(0), v_i(0), T_i(0)) = (x_i^0, v_i^0, T_i^0) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_{>0}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， N 为粒子数， κ_1 和 κ_2 为严格正的耦合强度。通信权重 ϕ 和 ζ 是从 $\mathbb{R}+$映射到 $\mathbb{R}_+$ 的非负、有界、局部 Lipschitz 连续且单调递减的函数。

为了修改式 (1.1) 中的速度耦合项2 并确保粒子的单位速度，文献 [2] 中的作者借鉴了文献 [17] 所研究的单位速率 Cucker-Smale 模型中的推导思路，如下所示：

$$\phi(\|x_i - x_j\|) \left(\frac{v_j}{T_j} - \frac{v_i}{T_i} \right) \to \phi(\|x_i - x_j\|) \left(\frac{v_j}{T_j} - \frac{\langle v_j, v_i \rangle v_i}{T_j \|v_i\|^2} \right).$$

由此，提出如下具有单位速度的热力学 Cucker-Smale 模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i, \quad t > 0, \quad i = 1, \cdots, N, \\ \dfrac{dv_i}{dt} = \dfrac{\kappa_1}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \phi(\|x_i - x_j\|) \left(\frac{v_j}{T_j} - \frac{\langle v_j, v_i \rangle v_i}{T_j \|v_i\|^2} \right), \\ \dfrac{dT_i}{dt} = \dfrac{\kappa_2}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \zeta(\|x_i - x_j\|) \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right), \\ (x_i(0), v_i(0), T_i(0)) = (x_i^0, v_i^0, T_i^0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_{>0}, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， N、 κ_1、 κ_2 以及通信权重 ϕ、 ζ 的定义与上述式 (1.1) 相同，而 $\mathbb{S}^d$是单位 d-球面。具体而言，有

$$\begin{aligned} &0 \le \phi(r) \le \phi(0) = 1, \ (\phi(r_1) - \phi(r_2))(r_1 - r_2) \le 0, \ \forall r, r_1, r_2 \ge 0, \ \phi(\cdot) \in \mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), \\ &0 \le \zeta(r) \le \zeta(0) = 1, \ (\zeta(r_1) - \zeta(r_2))(r_1 - r_2) \le 0, \ \forall r, r_1, r_2 \ge 0, \ \zeta(\cdot) \in \mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), \\ &\mathbb{S}^{d-1} := \left\{ x := (x^1, \cdots, x^d) \middle| \sum_{i=1}^{d} |x^i|^2 = 1, \right\} \text{ where } x^i \text{ is } i\text{-th component of vector } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{1.3}$$

在 pa 特别地，我们注意到，根据以下引理，(1.1)3 等价于 (1.2)3 。

引理 1.1. [2] 设 $\{(x_i, v_i, T_i)\}_{i=1}^N$ 是系统 (1.2) 的一个解。则有

$$\|v_i(t)\| = 1, \quad \forall t \in [0, \infty), \ \forall i = 1, \cdots, N.$$

因此，利用引理 1.1，模型 (1.2) 可简化如下。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i, \quad t > 0, \quad i = 1, \cdots, N, \\ \dfrac{dv_i}{dt} = \dfrac{\kappa_1}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^N \phi(\|x_i - x_j\|) \left(\frac{v_j - \langle v_j, v_i \rangle v_i}{T_j} \right), \\ \dfrac{dT_i}{dt} = \dfrac{\kappa_2}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^N \zeta(\|x_i - x_j\|) \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right), \\ (x_i(0), v_i(0), T_i(0)) = (x_i^0, v_i^0, T_i^0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_{>0}. \end{cases} \tag{1.4}$$

具有单位速度约束 (1.4) 的热力学系统及其变体已在数学界得到研究。值得注意的例子包括单簇和双簇集群 [2] 以及时滞效应 [3]。本文采用最简单的奇异通信权重（或奇异相互作用核），记为 ϕ，以避免所有粒子两两之间发生碰撞:

$$\phi(r) := \frac{1}{r^\alpha},$$

请注意，由于我们只关注 $r = 0$时的奇异性， ϕ 的具体结构并不重要。避免粒子（或个体）之间发生碰撞，是机械工程和运动控制工程领域的一个重要问题。因此，研究多体自主系统的碰撞避免是合理的。

注 1.1。我们假设通信权重函数 ζ满足 (1.3) 中的性质。然而，后续证明将表明， ζ 也可以具有 $\zeta(r) := \frac{1}{r^\beta}$ 形式的奇异性，如 *[4]* 中所示。

在继续分析模型 (1.4) 之前，我们首先需要回顾渐近集群和平衡热平衡的定义。

定义 .. 1 令 $Z = \{(x_i, v_i, T_i)\}_{i=1}^N$ 为系统 (1 的全局时间解 .4)

. (1) 构型 Z 呈现渐近集群，当且仅当满足以下条件:

(i) 群形成: $\sup_{0 \le t < \infty} \max_{1 \le i,j \le N} \|x_i(t) - x_j(t)\| < \infty$, (ii) 速度趋同: $\lim_{t \to \infty} \max_{1 \le i,j \le N} \|v_j(t) - v_i(t)\| = 0$,

(2) 若满足以下条件，则构型 Z 呈现热平衡:

$$(iii)\, \textit{Temperature equilibrium:} \quad \lim_{t \to \infty} \max_{1 \le i,j \le N} |T_j(t) - T_i(t)| = 0.$$

本文的主要目标是证明，在关于初始数据和系统参数的充分框架下，系统 (1.4) 的整体适定性（即碰撞避免）及其涌现动力学。

在存在单位速度约束的情况下，某些机制可能与不存在速度限制时所采用的机制不同。例如，动量不守恒，而且碰撞

即使相互作用具有强奇异性，也可能发生（见例 2.1）。因此，研究能够产生某些涌现动力学的框架是有意义的。本文的主要目标是证明，在关于初始数据和系统参数的充分框架下，系统 (1.4) 的整体适定性（即碰撞避免）及其涌现动力学。

本文结构如下。第 2 节简要回顾了关于 (1.4)$_3$ 中温度场的已有结果，以研究其整体适定性，并给出对第 3 节和第 4 节至关重要的基本估计。第 3 节研究了在强奇异相互作用核 ($\alpha \geq 1$) 下保证 (1.4) 整体适定性的充分框架，并展示了在适当的初始数据和系统参数下，渐近集群与温度平衡的涌现。第 4 节探讨了弱奇异通信下两粒子系统中碰撞的存在性。随后，我们验证了 (1.4) 的涌现动力学，包括碰撞避免、渐近集群、热平衡以及个体之间的严格间距，其中明确条件取决于奇异性的程度。最后，第 5 节简要总结主要结果，并讨论未来工作中有待探讨的问题。

在介绍主要结果之前，为简洁起见，我们先约定以下记号 y:

$\|\cdot\| = l_2$ 范数 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle =$ 标准内积 $y^i = y \in \mathbb{R}^d$的第 i 个分量，X:=$(x_1,\cdots,x_N)$ V:=$(v_1,\cdots,v_N)$ T:=$(T_1,\cdots,T_N)$，属于系统 (1.4)，$D_Z(t)$: =最大值$_{i,\ j}$ $\|z_i(t)-z_j(t)\|$ 对于 $Z=(z_1,\cdots,z_N) \in \{X,V,T\}$， $\mathcal{A}(v)$: =最小值$_{1\leq i,\ j\leq N}\langle v_i,\ v_j\rangle$.

注意，直径泛函 D_X、D_V 和 D_T 是 Lipschitz 连续的，因此几乎处处可微。因此，每当我们在子集 $t \in E \subset \mathbb{R}$ 上推导出关于直径的微分不等式时，该不等式几乎处处在 $t \in E$ 上成立。由于直径是 Lipschitz 连续函数的最大值，故其本身也是 Lipschitz 连续函数，因此可以通过 Gr¨onwall 引理估计直径。详细说明请参阅第 3 节和第 4 节。

2. Preliminaries

本节概述第 3 节和第 4 节所需的基本估计。此外，我们简要回顾与次动力学系统 (1.4)$_3$ 相关的已有结果，以确保系统 (1.4) 的整体适定性。

2.1. 先前结果。

本小节回顾关于次动力学温度系统 (1.4)$_3$, 的若干已有结论，这些结论将在全文中发挥关键作用。

2.1.1. 基本性质。

在 [37], 中，作者验证了温度和守恒律以及熵原理，具体如下所述。

定义 2.1。 [37] 设 $\tau \in (0,\infty]$，且 (X,V,T) 是奇异系统 (1.4) 在 $t \in (0,\tau)$ 上的局部时间解。则熵记为

$$\mathcal{S} := \sum_{i=1}^{N} \ln(T_i).$$

命题 2.1。[37] 设 $\tau \in (0,\infty]$。假设 (X,V,T) 是奇异系统 (1.4) 在 $t \in (0,\tau)$ 上的局部时间解。则下列断言成立。

(1)（守恒的温度总和）总和 $\sum_{i=1}^{N} T_i$ 守恒：

$$\sum_{i=1}^{N} T_i(t) = \sum_{i=1}^{N} T_i^0 := NT^\infty, \quad \forall t \in [0,\tau).$$

(2)（熵原理）熵 $\mathcal{S}$ 单调递增：

$$\frac{d\mathcal{S}(t)}{dt} = \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^{N} \zeta(\|x_j - x_i\|)\left|\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right|^2 \geq 0, \quad \forall t \in [0,\tau).$$

因此，利用熵原理可得系统 (1.4) 中每个粒子的温度在 $t \in [0,\tau)$ 上一致有界。

命题 2.2. [32]（温度最大值与最小值的单调性）设 $\tau \in (0,\infty]$. 假设 (X,V,T) 是奇异系统 (1.4) 在 $t \in (0,\tau)$ 上的局部时间解。那么，$\min_{1\leq i\leq N} T_i(t)$ 单调递增，而 $\max_{1\leq i\leq N} T_i(t)$ 在 $t \in [0,\tau)$ 上单调递减。因此，温度具有如下的一致有界性。

$$0 < \min_{1\leq i\leq N} T_i^0 := T_m^\infty \leq T_i(t) \leq \max_{1\leq i\leq N} T_i^0 := T_M^\infty, \quad i = 1,\cdots,N, \quad t \in [0,\tau).$$

注 2.1. 在初始温度 $T_1^0 = \cdots T_N^0 = T^0 > 0$相同的情况下，模型 (1.4) 可化简为具有奇异通信的标准单位速度 Cucker-Smale 模型。

我们介绍在满足 (1.3) 的正则核作用下，系统 (1.2) 涌现行为方面的已有结果。

命题 2.3. 设 (X,V,T) 是 (1.2) 的一个全局时间解，并假设存在一个满足 (1.3) 的正常数 D_X^∞，且

$$D_V^2(0) < \frac{T_m^\infty \phi(D_X^\infty)}{2T_M^\infty} \quad and \quad D_X(0) + \frac{2T_M^\infty D_V(0)}{\kappa_1 \phi(D_X^\infty)} < D_X^\infty.$$

那么，有 $\forall t \in [0,\infty)$,

$$D_V^2(t) < 2D_V^2(0) \quad and \quad D_X(t) < D_X^\infty.$$

由此直接得到以下涌现动力学：

$$D_V(t) \leq D_V(0)\exp\left(-\frac{\kappa_1\phi(D_X^\infty)}{2T_M^\infty}\right), \quad D_T(t) \leq D_T(0)\exp\left(-\frac{\kappa_2\zeta(D_X^\infty)}{(T_M^\infty)^2}t\right), \quad \forall t \in [0,\infty).$$

2.1.2. 通过奇异通信实现碰撞避免。我们简要回顾集群力强度与其对粒子间碰撞的影响之间的关系。两个粒子若要发生碰撞，必须先彼此靠近。如果集群力足够强，能在粒子彼此接近时导致爆破，那么我们可以预期集群会在碰撞发生前形成。此外，运动方向几乎相同的粒子不太可能发生碰撞，从而实现碰撞避免。事实上，下一个命题指出，强奇异性（即积分在原点附近发散）可推出碰撞避免。

命题 2.4（ [4]）。设 $\{x_i, v_i\}$ 是方程 (1.1) 在 $T_i \equiv 1$ 和 $\phi(r) = r^{-\alpha}$ 条件下的一个解。假设

$$\alpha \geq 1, \quad and \quad \min_{i\neq j} \|x_i^0 - x_j^0\| > 0.$$

那么我们得到全局时间碰撞-free状态：

$$x_i(t) \neq x_j(t), \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, N\},\ i \neq j, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

自然会产生这样一个问题：模型 (1.2) 是否具有碰撞避免性质？然而，答案是否定的。

例 2.1. 考虑实数轴上由 (1.2) 支配的双粒子模型 $\{(x_i, v_i, T_i)\}_{i=1,2}$ 。令

$$x_1^0 < x_2^0, \quad v_1 = 1, \quad v_2 = -1, \quad T_1 = T_2 = 1.$$

此时，动力学简化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i, \quad t > 0, \quad i = 1, \cdots, N, \\ \dfrac{dv_i}{dt} = \dfrac{\kappa_1}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \phi(\|x_i - x_j\|) \left(v_j - v_i^2 v_j\right), \\ (x_i(0), v_i(0)) = (x_i^0, v_i^0) \in \mathbb{R} \times \{-1, 1\}. \end{cases}$$

由于每个粒子的速度始终为单位速度，对于每个 i ，我们都有 $v_i^2 = 1$ ，由此得到 $\dot{v}_i \equiv 0$，进而

$$v_1 \equiv 1, \quad v_2 \equiv -1.$$

因此，无论通信 ϕ 是正则还是奇异，两个粒子都会在时刻 $(x_2^0 - x_1^0)/2$发生碰撞。

如例 2.1 所述，尽管模型 (1.1) 和 (1.2) 在现象上相似，都表现出集群和热平衡，但其具体运行机制却大不相同。或许正因如此，针对 (1.2) 这类单位速度模型的碰撞避免研究尚未开展；据作者所知，本文首次探讨了这类结果。

2.2. 基本估计。在本小节中，我们将证明在假设 $\mathcal{A}(v)(0) > 0$ 下， $\mathcal{A}(v)$ 单调递增。

引理 2.1. 设 $\tau \in (0, \infty]$ and (X, V, T) 是奇异系统 (1.4) 在 $t \in (0, \tau)$ 上的一个局部时间解。那么，我们可以得到

$$\|v_i(t)\| = 1, \quad \forall t \in [0, \infty), \ \forall i = 1, \cdots, N.$$

证明。对 $(1.4)_2$ 与 v_i 作内积，即可得到所需估计。 □

根据命题 2.2 和引理 2.1，只要能确保任意有限时间区间内每对粒子之间均避免碰撞，标准的柯西-利普希茨理论就能保证动力系统 (1.4) 的适定性。

命题 2.5. 设 $\tau \in (0, \infty]$ 和 (X, V, T) 是奇异系统 (1.4) 的一个局部时间解，其中 $\mathcal{A}(v(0)) > 0$ 在 $t \in (0, \tau)$ 上成立。那么，速度对角度泛函$\mathcal{A}(v)$ 单调递增。由此可直接得到

$$\mathcal{A}(v)(t) \geq \mathcal{A}(v)(0), \quad t \in [0, \tau).$$

证明. 对任意固定的 $t \in (0,\tau)$，定义两个指标 $1 \le i_t, j_t \le N$ 使其满足 g

$$\mathcal{A}(v(t)) := \min_{1\le i,j\le N} \langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \langle v_{i_t}, v_{j_t}\rangle.$$

由于 $\mathcal{A}(v(0)) > 0$，下列集合 $\mathcal{S}$ 非空:

$$\mathcal{S} := \{t \in \mathbb{R}_{>0} \mid \mathcal{A}(v(t)) > 0\}.$$

现在，令 sup $\mathcal{S}$:= T^*。我们将证明 $T^* = \tau.$。为进行反证，假设

$$T^* < \tau,$$

这意味着 $\lim_{t\to T^{*-}} \mathcal{A}(v(t)) = 0.$。对 $\mathcal{A}(v(t))$ 关于时间 t 求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{A}(v(t)) =& \langle \dot v_{i_t}, v_{j_t}\rangle + \langle \dot v_{j_t}, v_{i_t}\rangle \\ =& \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k=1}^N \phi(\|x_k - x_{i_t}\|)\frac{(\langle v_k, v_{j_t}\rangle - \langle v_k, v_{i_t}\rangle\langle v_{i_t}, v_{j_t}\rangle)}{T_k} \\ &+ \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k=1}^N \phi(\|x_k - x_{j_t}\|)\frac{(\langle v_k, v_{i_t}\rangle - \langle v_k, v_{j_t}\rangle\langle v_{i_t}, v_{j_t}\rangle)}{T_k}, \quad t \in (0, T_*),\end{aligned}$$

于是，根据 $\mathcal{A}(v(t))$ 的定义以及命题 2.2 中温度严格为正，可得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(v(t)) \ge 0, \quad t \in (0, T_*).$$

因此,

$$\mathcal{A}(v(t)) \ge \mathcal{A}(v(0)) > 0, \quad t \in [0, T_*).$$

这与 $\lim_{t\to T^{*-}} \mathcal{A}(v(t)) = 0$ 矛盾，因此迫使

$$T^* = \tau.$$

反证法至此完成。 □

注 2.2. [2] 总之，引理 2.1 和命题 2.3 意味着

$$0 < \mathcal{A}(v(0)) \le \mathcal{A}(v(t)) \le 1, \quad \forall t \in [0, \tau).$$

这一事实将在全文中发挥关键作用，用于构建系统 (1.4) 的碰撞避免及涌现行为的充分框架。

3. Strongly singular interaction kernel ($\alpha \ge 1$)

本节旨在为系统 (1.4) 建立整体适定性框架：引入适当的泛函，并根据涌现动力学的初始数据和系统参数构造容许集，具体如定义 1.1 所述。为此，我们需要针对位置-速度-温度的适当直径推导耗散微分不等式。这对于揭示系统 (1.2) 的耗散结构至关重要，因为在这种情况下动量守恒并不成立。值得注意的是，由于 (1.4) 中每个速度的模均为单位，利用关于位置-速度-温度的构型向量来导出耗散微分不等式颇具挑战性

因此，接下来我们回顾直径 D_X、 D_V 和 D_T 的记号。

$$D_X(t) := \max_{1\le i,j\le N} \|x_i(t) - x_j(t)\|, \quad D_V(t) := \max_{1\le i,j\le N} \|v_i(t) - v_j(t)\|.$$

特别是，由于温度项是标量，

$$D_T(t) := \max_{1\le i,j\le N} |T_i(t) - T_j(t)|.$$

3.1. 整体适定性。本小节将严格证明，在强奇异相互作用核作用下，方程 (1.4) 的整体适定性。正如第 2.2 节所述，只需证明在任意有限时间区间内都没有粒子对发生碰撞。因此，我们假设 t_0 是该系统的首次碰撞时间，并将 $[l]$ 记为在时刻 t_0与第 l 个粒子发生碰撞的所有粒子组成的集合：

$$[l] := \{i \in \{1, \cdots, N\} \mid \|x_l(t) - x_i(t)\| \to 0 \quad \text{as} \quad t \to t_0-\}.$$

令 δ 为一个正实数，使得

$$\|x_l(t) - x_i(t)\| \ge \delta > 0, \quad \forall\, t \in [0, t_0) \quad \text{and} \quad \forall i \notin [l].$$

对于以 $[l]$ 为指标的子系统，我们定义相对于 $[l]$ for$t \in [0, t_0)$ 的位置-速度直径和速度对夹角：

$$D_{X,[l]}(t) := \max_{i,j\in[l]} \|x_i(t) - x_j(t)\|, \quad D_{V,[l]}(t) := \max_{i,j\in[l]} \|v_i(t) - v_j(t)\|, \quad \mathcal{A}_{[l]}(v) = \min_{i,j\in[l]} \langle v_i, v_j\rangle.$$

为简洁起见，设

$$\phi_{ij} := \phi(\|x_i - x_j\|).$$

引理 3.1. 设 (X, V, T) 是动力系统 (1.4) 的一个解，且

$$\alpha \ge 1, \quad \mathcal{A}(v)(0) > 0 \quad \textit{and} \quad \min_{1\le i\ne j\le N} \|x_i(0) - x_j(0)\| > 0.$$

于是，可以得到 (1.4) 的无碰撞整体适定性，即

$$x_i(t) \ne x_j(t), \quad (i, j) \in \{1, \cdots, N\}^2, \quad i \ne j \quad \textit{and} \quad \forall t \in [0, \infty).$$

证明. 首先，我们观察到

$$\frac{d\|x_i - x_j\|^2}{dt} = 2\langle x_i - x_j, v_i - v_j\rangle$$

并应用柯西–施瓦茨不等式，得到，

$$\left|\frac{D_{X,[l]}(t)}{dt}\right| \le D_{V,[l]}(t), \quad t \in (0, t_0). \tag{3.1}$$

我们设定两个满足以下条件的时变指标 $M_t, m_t \in [l]$

$$D_{V,[l]}(t) := \|v_{M_t}(t) - v_{m_t}(t)\|, \quad m_t, M_t \in [l].$$

利用引理 2.1 和方程 (1.4)2，，我们得到以下估计。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{dD_{V,[l]}^2}{dt} &= -\frac{d}{dt}\langle v_{M_t}, v_{m_t}\rangle = -\langle \dot{v}_{M_t}, v_{m_t}\rangle - \langle \dot{v}_{m_t}, v_{M_t}\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi_{M_tk}\left(\frac{v_k - \langle v_{M_t}, v_k\rangle v_{M_t}}{T_k}\right), v_{m_t}\right\rangle \\ &\quad -\left\langle \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi_{m_tk}\left(\frac{v_k - \langle v_{m_t}, v_k\rangle v_{m_t}}{T_k}\right), v_{M_t}\right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k\in[l]}\phi_{M_tk}\left(\frac{v_k - \langle v_{M_t}, v_k\rangle v_{M_t}}{T_k}\right), v_{m_t}\right\rangle \\ &\quad -\left\langle \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k\in[l]}\phi_{m_tk}\left(\frac{v_k - \langle v_{m_t}, v_k\rangle v_{m_t}}{T_k}\right), v_{M_t}\right\rangle \\ &\quad -\left\langle \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k\notin[l]}\phi_{M_tk}\left(\frac{v_k - \langle v_{M_t}, v_k\rangle v_{M_t}}{T_k}\right), v_{m_t}\right\rangle \\ &\quad -\left\langle \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k\notin[l]}\phi_{m_tk}\left(\frac{v_k - \langle v_{m_t}, v_k\rangle v_{m_t}}{T_k}\right), v_{M_t}\right\rangle := \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4.\end{aligned}$$

- （$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ 的估计）由引理 2.1 和注 2.2 可得

$$\langle v_k, v_{m_t}\rangle \geq \langle v_k, v_{M_t}\rangle\langle v_{m_t}, v_{M_t}\rangle \quad \text{and} \quad \langle v_k, v_{M_t}\rangle \geq \langle v_k, v_{m_t}\rangle\langle v_{m_t}, v_{M_t}\rangle.$$

利用上述不等式和命题 2.2，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 &\leq -\left\langle \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k\in[l]}\phi_{M_tk}\left(\frac{v_k - \langle v_{M_t}, v_k\rangle v_{M_t}}{T_k}\right), v_{m_t}\right\rangle \\ &\quad -\left\langle \frac{\kappa_1}{N}\sum_{k\in[l]}\phi_{m_tk}\left(\frac{v_k - \langle v_{m_t}, v_k\rangle v_{m_t}}{T_k}\right), v_{M_t}\right\rangle \\ &\leq -\frac{\kappa_1\phi(D_{X,[l]})}{NT_M^\infty}\sum_{k\in[l]}\left(\langle v_k, v_{m_t}\rangle - \langle v_k, v_{M_t}\rangle\langle v_{m_t}, v_{M_t}\rangle\right) \\ &\quad -\frac{\kappa_1\phi(D_{X,[l]})}{NT_M^\infty}\sum_{k\in[l]}\left(\langle v_k, v_{M_t}\rangle - \langle v_k, v_{m_t}\rangle\langle v_{m_t}, v_{M_t}\rangle\right) \\ &= -\frac{\kappa_1\phi(D_{X,[l]})}{NT_M^\infty}\sum_{k\in[l]}\left(\langle v_k, v_{M_t}\rangle - \langle v_k, v_{M_t}\rangle\langle v_{m_t}, v_{M_t}\rangle\right) \\ &\quad -\frac{\kappa_1\phi(D_{X,[l]})}{NT_M^\infty}\sum_{k\in[l]}\left(\langle v_k, v_{m_t}\rangle - \langle v_k, v_{m_t}\rangle\langle v_{m_t}, v_{M_t}\rangle\right) \\ &= -\frac{\kappa_1\phi(D_{X,[l]})D_{V,[l]}^2}{2NT_M^\infty}\sum_{k\in[l]}\left(\langle v_k, v_{M_t}\rangle + \langle v_k, v_{m_t}\rangle\right) \leq -\frac{\kappa_1|[l]|\mathcal{A}_{[l]}(v)(0)}{NT_M^\infty}\phi(D_{X,[l]})D_{V,[l]}^2,\end{aligned}$$

其中， $|[l]|$ 是 $[l]$的基数。最后一个不等式用到了注 2.2。

- （ $\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4$的估计）我们利用三角不等式、柯西不等式、$\delta$ 的定义以及命题 2.2，得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4 &\le \frac{\kappa_1\phi(\delta)}{NT_m^\infty}\sum_{k\notin[l]}|\langle v_k,v_{m_t}\rangle-\langle v_k,v_{M_t}\rangle\langle v_{m_t},v_{M_t}\rangle| \\
&\quad+\frac{\kappa_1\phi(\delta)}{NT_m^\infty}\sum_{k\notin[l]}|\langle v_k,v_{M_t}\rangle-\langle v_k,v_{m_t}\rangle\langle v_{m_t},v_{M_t}\rangle| \\
&\le \frac{\kappa_1\phi(\delta)}{NT_m^\infty}\sum_{k\notin[l]}(|\langle v_k,v_{M_t}-v_{m_t}\rangle|+(1-\langle v_{M_t},v_{m_t}\rangle)|\langle v_k,v_{M_t}\rangle|) \\
&\quad+\frac{\kappa_1\phi(\delta)}{NT_m^\infty}\sum_{k\notin[l]}(|\langle v_k,v_{M_t}-v_{m_t}\rangle|+(1-\langle v_{M_t},v_{m_t}\rangle)|\langle v_k,v_{M_t}\rangle|) \\
&\le \frac{2\kappa_1\phi(\delta)}{NT_m^\infty}\sum_{k\notin[l]}\left(D_{V,[l]}+\frac{D_{V,[l]}^2}{2}\right)\le\frac{4\kappa_1\phi(\delta)}{NT_m^\infty}\sum_{k\notin[l]}D_{V,[l]}=\frac{4\kappa_1(N-|[l]|)\phi(\delta)}{NT_m^\infty}D_{V,[l]}.
\end{aligned}$$

因此，结合关于 $\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2$ 和 $\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4$ 的估计可得

$$\begin{aligned}
\frac{dD_{V,[l]}}{dt} &\le -\frac{\kappa_1|[l]|\mathcal{A}_{[l]}(v)(0)}{NT_M^\infty}\phi(D_{X,[l]})D_{V,[l]}+\frac{4\kappa_1(N-|[l]|)\phi(\delta)}{NT_m^\infty} \\
&=: -C_1\phi(D_{X,[l]})D_{V,[l]}+C_2,\quad \text{a.e. } t\in(0,t_0).
\end{aligned}\tag{3.2}$$

将（3.2）式两边从 s 到 t 关于 $0\le s\le t<t_0$积分，可得

$$\int_s^t\phi(D_{X,[l]})D_{V,[l]}ds\le\frac{D_{V,[l]}(s)+C_2(t-s)}{C_1}.\tag{3.3}$$

另一方面，设 Φ 是强奇异权函数 ϕ 的原函数，且 $\alpha\ge 1$。那么，对于固定的 $t_1>0$,

$$\Phi(t):=\Phi(t;t_1):=\int_{t_1}^t\phi(u)du=\begin{cases}\log\dfrac{t}{t_1}, & \text{if}\quad \alpha=1,\\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha}-{t_1}^{1-\alpha}\right), & \text{if}\quad \alpha>1.\end{cases}$$

因此，由（3.1）式可知，对于 $0\le s\le t<t_0$,

$$\begin{aligned}
\left|\Phi(D_{X,[l]}(t))\right| &\le \left|\int_s^t\frac{d}{du}\Phi(D_{X,[l]}(u))du\right|+\left|\Phi(D_{X,[l]}(s))\right| \\
&=\left|\int_s^t\phi(D_{X,[l]}(u))\left(\frac{d}{du}D_{X,[l]}(u)\right)du\right|+\left|\Phi(D_{X,[l]}(s))\right| \\
&\le\int_s^t\phi(D_{X,[l]}(u))\left|\frac{d}{du}D_{X,[l]}(u)\right|du+\left|\Phi(D_{X,[l]}(s))\right| \\
&\le\int_s^t\phi(D_{X,[l]}(u))D_{V,[l]}(u)du+\left|\Phi(D_{X,[l]}(s))\right|,
\end{aligned}$$

将此与 (3.3) 结合可得

$$\left|\Phi(D_{X,[l]}(t))\right| \le \left|\Phi(D_{X,[l]}(s))\right| + \frac{D_{V,[l]}(s) + C_2(t-s)}{C_1}, \quad 0 \le s \le t < t_0.$$

将 $s = 0$ 和 $t \to t_0-$ 代入上述不等式，得到

$$\lim_{t\to t_0-} \left|\Phi(D_{X,[l]}(t))\right| \le \left|\Phi(D_{X,[l]}(0))\right| + \frac{C_2}{C_1}\left(t_0 + D_{V,[l]}(0)\right) < \infty,$$

这与 t_0 和 $\alpha \ge 1$的定义矛盾，即，

$$\lim_{t\to t_0-} \left|\Phi(D_{X,[l]}(t))\right| = \infty.$$

这证明了系统 (1.4) 的碰撞避免性质，即

$$x_i(t) \ne x_j(t), \quad (i,j) \in \{1,\cdots,N\}^2 \quad \text{and} \quad \forall t \in [0,\infty).$$

特别地，这保证了 (1.4) 的整体适定性，这可由标准的柯西–利普希茨理论得到。□

备注 3.1. 在弱奇异性 $0 < \alpha < 1$ 下，极限 $\lim_{t\to t_0-} \left|\Phi(D_{X,[l]}(t))\right| = \infty$并不成立。从 ϕ 的角度来看，其在原点附近的可积性对碰撞避免至关重要。事实上，在 $\mathcal{A}(0) > 0$ 条件下，原点处的可积性是碰撞避免的一个特征性质。我们将在第 4.1 节进一步研究这一性质。

3.2. 通过自举论证得到的涌现动力学。本小节研究系统 (1.4) 在 $\alpha \ge 1$ 下涌现动力学的充分框架，并借助引理 3.1 得到的见解。为此，我们使用定义如下的泛函Ψ ：

$$\Psi_{ij}(t) := \frac{\zeta(\|x_i - x_j\|)}{N},\ i \ne j, \quad \Psi_{ii}(t) := \zeta\left(\min_{1\le i\ne j\le N} \|x_i - x_j\|\right) - \frac{\sum_{j=1, j\ne i}^N \zeta(\|x_i - x_j\|)}{N}.$$

那么，我们可以观察到 Ψ_{ij} 满足以下性质:

$$\Psi_{ij} \ge \frac{\zeta_{ij}}{N}, \quad \sum_{j=1}^N \Psi_{ij} = \zeta\left(\min_{1\le i,j\le N} \|x_i - x_j\|\right), \quad \sum_{j=1}^N \Psi_{ij}\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right) = \sum_{j=1}^N \frac{\zeta_{ij}}{N}\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right),$$

其中，简化记号 ζ_{ij} 表示

$$\zeta_{ij} := \zeta(\|x_i - x_j\|).$$

定理 3.1. 设 (X, V, T) 是动力系统 (1.4) 的一个解，且

$$\alpha \ge 1, \quad \mathcal{A}(v)(0) > 0 \quad \textit{and} \quad \min_{1\le i\ne j\le N} \|x_i(0) - x_j(0)\| > 0.$$

进一步假设存在一个正常数 D_X^∞，满足

$$D_X(0) + \frac{T_M^\infty}{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)} \cdot D_V(0) < D_X^\infty. \tag{3.4}$$

那么，可以得到以下渐近集群和温度平衡 :

(1)（群形成） $D_X(t) < D_X^\infty$,

(2) (Velocity alignment) $D_V(t) \le D_V(0)\exp\left(-\dfrac{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)}{T_M^\infty} t\right)$,

(3) (Temperature equilibrium) $D_T(t) \le D_T(0)\exp\left(-\dfrac{\kappa_2 \zeta(D_X^\infty)}{(T_M^\infty)^2} t\right), \quad \forall t \in [0,\infty).$

证明。由（3.4），以下集合

$$S := \{t > 0 \mid D_X(s) < D_X^\infty,\ \forall s \in (0,t)\}$$

非空，且 $t^* := \sup\ S > 0$ 定义良好。若 $t^* < \infty$，则 $D_X(t^*) = D_X^\infty$. 现在我们声称

$$t^* = +\infty.$$

反证法：假设 $t^* < +\infty$。然后，在引理 3.1 的证明中用 $\{1, \cdots, N\}$ 替换 $[l]$，由引理 3.1 可得

$$\left|\frac{dD_X}{dt}\right| \le D_V, \quad \frac{dD_V}{dt} \le -\frac{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\phi(D_X)D_V \le -\frac{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)}{T_M^\infty}D_V \quad \text{a.e. } t \in (0, t^*).$$

那么 Gronwall 引理意味着

$$D_V(t) \le D_V(0)\exp\left(-\frac{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)}{T_M^\infty}t\right), \quad \forall t \in [0, t^*].$$

由于

$$\begin{aligned} D_X(t) &= D_X(0) + \int_0^t \frac{dD_X(s)}{ds}ds \le D_X(0) + \int_0^t D_V(s)ds \\ &\le D_X(0) + \int_0^t D_V(0)\exp\left(-\frac{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)}{T_M^\infty}s\right)ds \\ &\le D_X(0) + \frac{T_M^\infty}{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)} \cdot D_V(0) < D_X^\infty, \quad \forall t \in [0, t^*], \end{aligned}$$

有 $D_X(t^*) < D_X^\infty$。因此，这就产生了矛盾，即 $t^* = \infty$。相应地，我们有

$$D_X(t) < D_X^\infty, \quad D_V(t) \le D_V(0)\exp\left(-\frac{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)}{T_M^\infty}t\right), \quad t \in [0, \infty).$$

现在，我们转而讨论温度平衡估计。首先，选择两个依赖于时间 t 的指标 M_t 和 m_t，使得

$$D_T(t) = T_{M_t}(t) - T_{m_t}(t), \quad 1 \le m_t, M_t \le N.$$

于是，由 Ψ_{ij} 和 (1.4)3 的性质可得

$$
\begin{aligned}
\frac{dD_T}{dt} &= \dot{T}_{M_t} - \dot{T}_{m_t} \\
&= \frac{\kappa_2}{N}\sum_{k=1}^{N}\zeta_{M_t k}\left(\frac{1}{T_{M_t}}-\frac{1}{T_k}\right) - \frac{\kappa_2}{N}\sum_{k=1}^{N}\zeta_{m_t k}\left(\frac{1}{T_{m_t}}-\frac{1}{T_k}\right) \\
&= \kappa_2\sum_{k=1}^{N}\Psi_{M_t k}\left(\frac{1}{T_{M_t}}-\frac{1}{T_k}\right) - \kappa_2\sum_{k=1}^{N}\Psi_{m_t k}\left(\frac{1}{T_{m_t}}-\frac{1}{T_k}\right) \\
&= \kappa_2\zeta\left(\min_{1\le i,j\le N}\|x_i-x_j\|\right)\left(\frac{1}{T_{M_t}}-\frac{1}{T_{m_t}}\right) - \kappa_2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{T_k}\left(\Psi_{M_t k}-\Psi_{m_t k}\right) \\
&= \kappa_2\zeta\left(\min_{1\le i,j\le N}\|x_i-x_j\|\right)\left(\frac{1}{T_{M_t}}-\frac{1}{T_{m_t}}\right) \\
&\quad - \kappa_2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{T_k}\left(\Psi_{M_t k}-\min(\Psi_{M_t k},\Psi_{m_t k})+\min(\Psi_{M_t k},\Psi_{m_t k})-\Psi_{m_t k}\right) \\
&\le \kappa_2\zeta\left(\min_{1\le i,j\le N}\|x_i-x_j\|\right)\left(\frac{1}{T_{M_t}}-\frac{1}{T_{m_t}}\right) + \frac{\kappa_2}{T_{m_t}}\sum_{k=1}^{N}\left(\Psi_{m_t k}-\min(\Psi_{M_t k},\Psi_{m_t k})\right) \\
&\quad - \frac{\kappa_2}{T_{M_t}}\sum_{k=1}^{N}\left(\Psi_{M_t k}-\min(\Psi_{M_t k},\Psi_{m_t k})\right) \\
&= -\kappa_2\left(\frac{1}{T_{m_t}}-\frac{1}{T_{M_t}}\right)\sum_{k=1}^{N}\left(\min(\Psi_{M_t k},\Psi_{m_t k})\right) \le -\frac{\kappa_2 D_T}{(T_M^\infty)^2}\sum_{k=1}^{N}\left(\min(\Psi_{M_t k},\Psi_{m_t k})\right) \\
&\le -\frac{\kappa_2\zeta(D_X)}{(T_M^\infty)^2}D_T \le -\frac{\kappa_2\zeta(D_X^\infty)}{(T_M^\infty)^2}D_T, \quad \text{a.e. } t\in(0,\infty).
\end{aligned}
$$

Grønwall 引理导出如下指数热平衡:

$$
D_T(t) \le D_T(0)\exp\left(-\frac{\kappa_2\zeta(D_X^\infty)}{(T_M^\infty)^2}t\right), \quad \forall t\in[0,\infty).
$$

□

3.3. 李雅普诺夫泛函方法下的涌现动力学。本小节介绍一种利用适当李雅普诺夫泛函来获得模型 (1.4) 涌现动力学的替代方法。具体内容见下述定理。

定理 3.2. 设 (X,V,T) 是动力系统 (1.4) 的一个解，且 th

$$
\alpha \ge 1, \quad \mathcal{A}(v)(0) > 0 \quad and \quad \min_{1\le i\ne j\le N}\|x_i(0)-x_j(0)\| > 0.
$$

进一步假设

$$
D_V(0) < \frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\int_{D_X(0)}^{\infty}\phi(s)ds. \tag{3.5}
$$

于是，可得以下渐近集群和温度平衡结论：存在一个严格为正的数 $D_X^\infty > 0$，满足以下断言。

(1) (群形成) $D_X(t) \le D_X^\infty$,

(2) (Velocity alignment) $D_V(t) \le D_V(0)\exp\left(-\dfrac{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)}{T_M^\infty}t\right)$,

(3) (Temperature equilibrium) $D_T(t) \le D_T(0)\exp\left(-\dfrac{\kappa_2\zeta(D_X^\infty)}{(T_M^\infty)^2}t\right), \quad \forall t \in [0,\infty)$.

证明。首先，利用引理 3.1 和定理 3.1 的证明可得

$$\left|\frac{dD_X}{dt}\right| \le D_V, \quad \frac{dD_V}{dt} \le -\frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\phi(D_X)D_V. \tag{3.6}$$

现在，采用如下李雅普诺夫泛函:

$$\mathcal{L}_\pm(D_X, D_V) := D_V \pm \frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\Phi(D_X),$$

其中 $\Phi(t) := \int_{D_X(0)}^t \phi(s)ds$ 对于固定的 $t_1 > 0$。然后，利用 (3.6) 可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}_\pm(D_X, D_V) &= \frac{dD_V}{dt} \pm \frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\frac{dD_X}{dt}\phi(D_X)\\ &\le -\frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\phi(D_X)D_V \pm \frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\frac{dD_X}{dt}\phi(D_X)\\ &= \frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\phi(D_X)\left(-D_V \pm \frac{dD_X}{dt}\right) \le 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

这里，利用 (3.7)，即 $\mathcal{L}_\pm(D_X(t)\ D_V(t)) \le \mathcal{L}_\pm(D_X(0)\ D_V(0))$，可得

$$D_V(t) + \frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\left|\int_{D_X(0)}^{D_X(t)}\phi(s)ds\right| \le D_V(0),$$

这意味着

$$\frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\left|\int_{D_X(0)}^{D_X(t)}\phi(s)ds\right| \le D_V(0). \tag{3.8}$$

另一方面，由先验假设 (3.5) 可得

$$D_V(0) < \frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\int_{D_X(0)}^{\infty}\phi(s)ds.$$

因此，存在满足以下条件的最小正实数 D_X^∞

$$D_V(0) = \frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)}{T_M^\infty}\int_{D_X(0)}^{D_X^\infty}\phi(s)ds.$$

因此，由 (3.8) 可得

$$D_X(t) \le D_X^\infty, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

由上述估计和式 (3.6) 可得

$$\frac{dD_V(t)}{dt} \le -\frac{\kappa_1\mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)}{T_M^\infty}D_V(t)$$

然后应用 Gro¨nwall 引理，可得

$$D_V(t) \le D_V(0) \exp\left(-\frac{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)}{T_M^\infty} t\right), \quad t \in [0,\infty).$$

最后，热平衡估计可以用与定理3.1$_3$相同的方法证明。因此，

$$D_T(t) \le D_T(0) \exp\left(-\frac{\kappa_2 \zeta(D_X^\infty)}{(T_M^\infty)^2} t\right), \quad \forall t \in [0,\infty).$$

我们完成了这个证明。

□

注 3.2. 若 $\alpha \ge 1$，则可得

$$\int_{D_X(0)}^{\infty} \phi(s) ds < \infty.$$

因此，在这种情况下，先验条件 (3.5) 无法去除。然而，当$0 < \alpha < 1$ 且没有碰撞时，由于我们有，条件 (3.5) 可以去除

$$\int_{D_X(0)}^{\infty} \phi(s) ds = \infty.$$

4. Weakly singular interaction kernel ($0 < \alpha < 1$)

本节将为 (1.4) 中具有 $0 < \alpha < 1$ 的弱奇异相互作用核情形建立一个充分框架。与第 3 节研究的强奇异权函数情形不同，即使我们假设满足引理 3.1 中的条件，要确保 (1.4) 在 $0 < \alpha < 1$ 下具有整体适定性，仍需施加更严格的条件：

$$\mathcal{A}(v)(0) > 0, \quad \min_{1 \le i,j \le N} |x_i(0) - x_j(0)| > 0.$$

更多细节请参见即将讨论的第 4.1 节。

4.1. 有限时间内发生碰撞的存在性。本小节将为二维中具有 $0 < \alpha < 1$ 和 $N = 2$ 的弱奇异系统 (1.4) 建立有限时间内发生碰撞的充分条件。为简单起见，假设

$$T_1(0) = T_2(0) := T^0 > 0.$$

接着，我们利用备注 2.1 将双粒子方程 (1.4) 明确写为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = v_1, \quad \dfrac{dx_2}{dt} = v_2, \quad t > 0, \\ \dfrac{dv_1}{dt} = \dfrac{\kappa_1 \left(v_2 - \langle v_2, v_1 \rangle v_1\right)}{2\|x_1 - x_2\|^\alpha}, \quad \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{\kappa_1 \left(v_1 - \langle v_2, v_1 \rangle v_2\right)}{2\|x_1 - x_2\|^\alpha}, \\ (x_1(0), v_1(0), x_2(0), v_2(0)) = (x_1^0, v_1^0, x_2^0, v_2^0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1. \end{cases} \tag{4.1}$$

注 4.1. 当我们在 $\mathbb{R}^1$ 上考虑系统 (4.1)，即 $d = 1$ 时，可得 $v_i \equiv$1 或 $v_i \equiv -1$，其中 $i = 1$、$\cdots$、N。于是，对于沿 N-粒子流 (1.4) 的每一对粒子，只要其在 $\mathbb{R}^1$ 上具有无碰撞初始位置数据，且 $\mathcal{A}(v)(0) > 0$，它们并不总是彼此发生碰撞，而这与奇异性的程度 α 无关。事实上，

$$v_i \equiv 1, \ \forall i \in \{1, \cdots, N\} \quad or \quad v_i \equiv -1, \ \forall i \in \{1, \cdots, N\}.$$

因此，在 $\mathcal{A}(v)(0) > 0$ 的情况下，具有弱奇异核的二粒子系统 (4.1) 中只有 $d \geq 2$ 才可能发生碰撞。

Prop命题 4.1. 设 (X, V, T) 是二粒子系统 (4.1) 的一个解，使得 t

$$0 < \alpha < 1, \quad d = 2, \quad x_1(0) \neq x_2(0), \quad \mathcal{A}(v)(0) > 0. \tag{4.2}$$

那么，存在仅由初始数据和系统参数决定的充分条件，可保证发生有限时间内碰撞。也就是说，存在严格为正的时间 $t_0 \in (0, \infty)$，使得

$$x_1(t_0) = x_2(t_0).$$

证明。采用反证法，假设唯一全局解 (X, V, T) 定义良好，这等价于 (4.3) 在任意有限时间区间内均不发生碰撞。在整个证明过程中，在典范识别 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 下，我们将

$$e^{i\theta} \cong (\cos\theta, \sin\theta),$$

并且，对于 $n = 1$， x_k（分别为 v_k）的第 2, n 个分量记为 x_k^n（分别为 v_k^n）。注意，x_k^0 表示初始状态 $x_k(0)$。

令 $v_1 = e^{i\theta_1} \in \mathbb{S}^1$ 和 $v_2 = e^{i\theta_2} \in \mathbb{S}^1$，其中

$$\theta_i : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \theta_i \in C_1([0, \infty)), \quad i = 1, 2.$$

因此，(4.1) 可改写为 (4.3)，如下所示。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = e^{i\theta_1}, \quad \dfrac{dx_2}{dt} = e^{i\theta_2}, \quad t > 0, \\ \dfrac{d\theta_1}{dt} = \dfrac{\kappa_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{2\|x_1 - x_2\|^\alpha}, \quad \dfrac{d\theta_2}{dt} = \dfrac{\kappa_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\|x_1 - x_2\|^\alpha}, \\ (x_k(0), v_k(0),) = (x_k^0, e^{i\theta_k^0}), \qquad v_k(t) = (\cos\theta_k, \sin\theta_k), \quad k = 1, 2. \end{cases} \tag{4.3}$$

. . 由于 $\theta_1(t) + \theta_2(t) = 0$, $t \geq 0$，不妨假设 ,

$$\theta_1(0) + \theta_2(0) = 0 \quad \text{and thus,} \quad \theta_1(t) + \theta_2(t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{4.4}$$

因此，有

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) &= x_1(0) - x_2(0) + \int_0^t (v_1(s) - v_2(s))ds \\ &= x_1(0) - x_2(0) + \int_0^t (e^{i\theta_1(s)} - e^{i\theta_2(s)})ds \\ &= x_1(0) - x_2(0) - 2\int_0^t (0, \sin(\theta_2))ds, \\ v_1(t) - v_2(t) &= -2(0, \sin(\theta_2(t))). \end{aligned}$$

现在，令

$$x_1^1(0) = x_2^1(0), \quad x_2^2(0) > x_1^2(0) \quad \text{and} \quad v_1^2(0) > v_2^2(0). \tag{4.5}$$

于是，由（4.3）的适定性可得

$$x_2^2(t) > x_1^2(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{4.6}$$

由于（4.5）意味着

$$x_2(t) - x_1(t) = \left(0,\ x_2^2(0) - x_1^2(0) + 2\int_0^t \sin(\theta_2)ds\right). \tag{4.7}$$

于是利用 (4.1)$_2$, (4.6) 和 (4.7)，可得

$$\frac{d}{dt}(v_2^2 - v_1^2) = \underbrace{-\frac{\kappa_1(1+\langle v_1, v_2\rangle)}{2(x_2^2 - x_1^2)^\alpha}}_{<0}(v_2^2 - v_1^2). \tag{4.8}$$

由 $\mathcal{A}(v)(0) > 0$ 和 (4.6) 可知，$v_2^2 - v_1^2$ 的系数在任意有限时间内都被一个负常数从上方界定。由于我们假设系统处于非碰撞状态，解的唯一性得以保证，并且 $v_2^2 - v_1^2$ 在任意有限时间内均不为零：

$$v_1^2(t) \neq v_2^2(t) \quad \text{that is,} \quad v_1^2(t) > v_2^2(t), \quad \forall t \in (0,\infty).$$

于是，由 (4.8) 可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v_2^2 - v_1^2) &= -\frac{\kappa_1(1+\langle v_1, v_2\rangle)}{2(x_2^2 - x_1^2)^\alpha}(v_2^2 - v_1^2) \leq -\frac{\kappa_1(1+\mathcal{A}(v)(0))}{2(x_2^2 - x_1^2)^\alpha}(v_2^2 - v_1^2)\\ &= -\frac{\kappa_1(1+\mathcal{A}(v)(0))}{2(x_2^2 - x_1^2)^\alpha}\frac{d(x_2^2 - x_1^2)}{dt} = -\frac{\kappa_1(1+\mathcal{A}(v)(0))}{2(1-\alpha)}\frac{d(x_2^2 - x_1^2)^{1-\alpha}}{dt}.\end{aligned}$$

因此，若令

$$v_1^2(0) - v_2^2(0) = \frac{\kappa_1(1+\mathcal{A}(v)(0))}{2(1-\alpha)}(x_2^2(0) - x_1^2(0))^{1-\alpha}, \tag{4.9}$$

则直接积分可得

$$\frac{d(x_2^2 - x_1^2)}{dt} \leq v_2^2 - v_1^2 \leq -\frac{\kappa_1(1+\mathcal{A}(v)(0))}{2(1-\alpha)}(x_2^2 - x_1^2)^{1-\alpha} =: -a(x_2^2 - x_1^2)^{1-\alpha}.$$

然后，我们利用比较原理来说明

$$x_2^2(t) - x_1^2(t) \leq (a\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{(x_2^2(0) - x_1^2(0))^\alpha}{a\alpha} - t\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

因此，$x_2^2 - x_1^2$ 会在有限时间内变为零，这与假设矛盾，从而完成证明。□

注 4.2。请注意，由先验假设 (4.2)、(4.4)、(4.5) 和 (4.9) 构成的充分框架表明，对于具有弱奇异核的 (1.4)，要避免碰撞，就必须给出更严格的条件。关于如何解决这一棘手问题，请参见第 4.2 节。

4.2. 整体适定性与涌现动力学。本小节中，我们给出弱奇异通信下解适定性的充分框架。事实上，我们证明了更强的结果：对于任意奇异性程度，粒子之间都能保持严格间距。我们将运用定理 3.1 和定理 3.2 中所述的涌现动力学及其证明，以确保系统具有不发生碰撞的现象和涌现行为。

定理 4.1. 设 (X,V,T) 是动力系统 (1.4) 的一个解，且满足

$$\alpha > 0, \quad \mathcal{A}(v)(0) > 0 \quad and \quad \min_{1\le i\neq j\le N} \|x_i(0) - x_j(0)\| > 0.$$

假设以下条件之一成立:

(1) 存在正常数 D_X^∞和自然数 $k \in \{1, \cdots, d\}$，使得

$$\frac{T_M^\infty D_V(0)}{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(\{v4\})} < \text{最小 最大}\left\{ D_X^\infty - D_X(0) \quad \phi \underline{\quad}^{1}(D_X^\infty) \int_{(0)}^{D^\infty} \phi(s)ds \right\}, \min_{1\le i\neq j\le N} |x_i^k(0) - x_j^k(\Big) \tag{4.10}$$

$$0)|,$$

(2) 或 $\alpha > 1$ 且存在正常数 D_X^∞ 满足

$$\frac{T_M^\infty D_V(0)}{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)} < \max\left\{ D_X^\infty - D_X(0), \frac{1}{\phi(D_X^\infty)} \int_{D_X(0)}^{D_X^\infty} \phi(s)ds \right\}. \tag{4.11}$$

那么解实现了碰撞避免、渐近集群和温度平衡。此外，保证粒子之间存在严格间距;

$$\inf_{t\ge 0} \min_{1\le i\neq j\le N} \|x_i(t) - x_j(t)\| > 0.$$

In 特别地，对于任意耦合强度 $\kappa_1 > 0$，存在 $\beta > 1$ 满足

$$\alpha \in (1, \beta) \quad \Rightarrow \quad \inf_{t\ge 0} \min_{1\le i\neq j\le N} \|x_i(t) - x_j(t)\| > 0. \tag{4.12}$$

证明。首先假设 (4.10) 成立。假设我们的系统在 $t \in (0, t_*)$ 上对 $t_* \in (0, \infty)$ 局部适定，则由

$$-\frac{d\|x_i - x_j\|}{dt} \le \|v_i - v_j\|,$$

定理 3.1、定理 3.2 和注 3.2

$$\begin{aligned}
\|x_i(t) - x_j(t)\| &\ge \|x_i(0) - x_j(0)\| - \int_0^t \|v_i(s) - v_j(s)\| ds \ge |x_i^k(0) - x_j^k(0)| - \int_0^t D_V(s)ds \\
&\ge |x_i^k(0) - x_j^k(0)| - \int_0^\infty D_V(s)ds \ge |x_i^k(0) - x_j^k(0)| - \frac{T_M^\infty D_V(0)}{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)} \\
&\ge \min_{1\le i\neq j\le N} |x_i^k(0) - x_j^k(0)| - \frac{T_M^\infty D_V(0)}{\kappa_1 \mathcal{A}(v)(0)\phi(D_X^\infty)} > 0.
\end{aligned}$$

因此，根据标准的柯西-利普希茨理论，可以证明存在一个正数ϵ，使得方程 (1.4) 在 $(0, t_* + \epsilon)$ 上解的唯一性和存在性得以保证。因此，可以得到整体适定性以及粒子间相对距离的严格正性，从而能够采用与定理 3.1 和定理 3.2 的证明相同的策略。因此，我们得到方程 (1.4) 的涌现动力学。

现在假设 $\alpha > 1$，且 (4.11) 成立。这意味着整体解定义良好，且 D_V 指数衰减；存在正常数 B、C，使得

$$D_V(t) \le Be^{-tC}.$$

因此，对任意 i、$j \in \{1, 2, \cdots, N\}$，极限 $\lim_{t\to\infty} \|x_i(t) - x_j(t)\|$ 总是存在。于是我们可以定义

$$[l] := \{i \in \{1, \cdots, N\} \mid \|x_l(t) - x_i(t)\| \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty\}.$$

根据引理 3.1，碰撞不会在有限时间内发生，因此引理 3.1 的证明可推广至全局，从而

$$\frac{dD_{V,[l]}}{dt} \le -D_1\phi(D_{X,[l]})D_{V,[l]} + D_2, \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{R}_{>0},$$

其中 D_1、$D_2 > 0$ 为正常数。现在定义

$$\tilde{\mathcal{L}}(t) := D_1 \int_{D_{X,[l]}(0)}^{D_{X,[l]}(t)} \phi(r)dr.$$

~那么，对于几乎所有的 $t > 0$，$|\mathcal{L}(t)| + D_{V,[l]}(t)$具有线性或次线性增长；

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\tilde{\mathcal{L}}(t)| + \frac{d}{dt}D_{V,[l]}(t) &\le \left|\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{L}}(t)\right| + \frac{d}{dt}D_{V,[l]}(t) \\ &\le \left|D_1\phi(D_{X,[l]}(t))\frac{d}{dt}D_{X,[l]}(t)\right| + \left(-D_1\phi(D_{X,[l]})D_{V,[l]} + D_2\right) \le D_2 < \infty, \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{R}_{>0}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

另一方面，对于充分大的 $t \gg 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\left|\tilde{\mathcal{L}}(t)\right|}{D_1} &= \left|\int_{D_{X,[l]}(0)}^{D_{X,[l]}(t)} \phi(s)ds\right| = \int_{D_{X,[l]}(t)}^{D_{X,[l]}(0)} \phi(s)ds \\ &\ge \int_{Be^{-tC}}^{D_{X,[l]}(0)} \phi(s)ds = \frac{B^{1-\alpha}e^{tC(\alpha-1)} - \left(D_{X,[l]}(0)\right)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

综合 (4.13) 和 (4.14)，存在满足以下条件的正常数 D_3 和 D_4

$$D_3e^{tC(\alpha-1)} - 1 \le \left|\tilde{\mathcal{L}}(t)\right| \le D_4(1 + t), \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{R}_{>0},$$

这便导出矛盾。因此我们得出 $[l]$ 是空集，从而证明

$$\inf_{t\ge0} \min_{1\le i\ne j\le N} \|x_i(t) - x_j(t)\| > 0.$$

为证明 (4.12)，假设给定了 $\kappa_1 > 0$。由于

$$\lim_{\alpha\searrow1} \int_{D_X(0)}^{\infty} x^{-\alpha} = +\infty,$$

当 $\alpha > 1$ 足够接近 1 时，条件 (4.12) 总是能够满足。这证明了 (4.12)。

□

5. Conclusion

本文为动力系统 (1.4) 在强奇异核和弱奇异核两种情形下的碰撞避免建立了充分框架。为此，我们利用以 L^∞-直径表示的耗散结构，并运用技术估计和自举论证，获得了整体适定性；此外，在初始数据和系统参数满足适当条件时，我们还证明了渐近集群行为和热平衡现象。值得注意的是，我们还表明，尽管通信具有奇异性，双粒子模型中仍可能发生碰撞；同时，我们对初始数据施加了适当条件，以确保避免碰撞并维持个体之间的严格间距。关于未来工作，以下问题仍有待解决。

- (Q1)：我们能否扩展并改进碰撞避免的充分框架?
- (Q2)：我们能否在黎曼流形上也验证不碰撞现象?
- (Q3)：我们能否为介观（动力学）层次严格建立局部或整体适定性?

References

1. Acebron, J. A., Bonilla, L. L., P ´ *The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena.* **77** 2005 137 185 erez Vicente, C. J. P., Ritort, F. 和 Spigler, R.: Rev. Mod. Phys. ( ). 2. Ahn, H.: *Introduction to the mean-field Cucker-Smale model with unit speed and sufficient frameworks for mono-cluster and bi-cluster flockings.* 预印本。3. Ahn, H.: *Emergent behaviors of thermodynamic Cucker–Smale ensemble with a unit-speed constraint.* 离散与连续动力系统 B. (2023 2023042 4 10 3934), doi: . /dcdsb. . 4. Ahn, H.: *Uniform stability of the Cucker–Smale and thermodynamic Cucker–Smale ensembles with singular kernels.* **17** 2022 753 782 Netw. Heterog. Media ( ), - . 5. Ahn, H., Ha, S.-Y., Kang, M. 和 Shim, W.: *Emergent behaviors of relativistic flocks on Riemannian manifolds.* **427** 2021 133011 物理学D辑 ( ), . 6. Ahn, H., Ha, S.-Y., Kim, D., Schl ¨ *A mean-field limit of the Cucker-Smale model* oder, F. 和 Shim, W.: . 应 *on Riemannian manifolds* **80** 2022 403 450 用数学季刊 ( ), - . 7. Ahn, H., Ha, S.-Y. 和 Kim, J.: *Uniform stability of the Euclidean Relativistic Cucker-Smale model and its application to a mean-field limit.* 2021 10 3934 2021156 Commun. Pure Appl. Anal. ( ), doi: . / cpaa. . 8. Albi, G., Bellomo, N., Fermo, L., Ha, S.-Y., Pareschi, L., Poyato, D. 和 Soler, J.: *Vehicular traffic, crowds and swarms. On the kinetic theory approach towards research perspective.* Math. Models Methods Appl. Sci. 29 (2019), 1901-2005. 9. Buck, J. 和 Buck, E.: *Biology of synchronous flashing of fireflies.* Nature 211 (1966), 562-564. 10. Byeon, J., Ha, S.-Y. 和 Kim, J.: *Asymptotic flocking dynamics of a relativistic Cucker–Smale flock* . 数学物理杂志 ( ), . 11. Carrillo, J. A., *under singular communications* **63** 2022 012702 Choi, Y.-P., Muncha, P. B. 和 Peszek, J.: *Sharp conditions to avoid collisions in singular Cucker-Smale interactions.* **37** 2017 317 328 Nonlinear Anal. Real World Appl. ( ), - . 12. Carrillo, J. A., Fornasier, M., Rosado, J. 和 Toscani, G.: *Asymptotic flocking dynamics for the kinetic Cucker-Smale model.* **42** 2010 218 236 SIAM. 数学分析杂志 ( ), - . 13. Cattiaux, P., Delebecque, F. 和 Pedeches, L.: *Stochastic Cucker-Smale models: old and new.* Ann. Appl. Probab. 28 (2018), 3239–3286. 14. Cho, J., Ha, S.-Y., Huang, F., Jin, C. 和 Ko, D.: *Emergence of bi-cluster flocking for agent-based models with unit speed constraint.* **14**, 39 73 2016 Anal. Appl. (Singap.) - ( ). 15. Cho, J., Ha, S.-Y., Huang, F., Jin, C. 和 Ko, D.: *Emergence of bi-cluster flocking for the Cucker-Smale model.* **26** 2016 1191 1218 Math. Models Methods Appl. Sci. ( ), - .

16. Choi, S.-H. 和 Ha, S.-Y.: *Interplay of the unit-speed constraint and time-delay in Cucker-Smale flocking.* **59** 2018 082701 数学物理杂志 ( ),

. 17. Choi, S.-H. 和 Ha, S.-Y.: *Emergence of flocking for a multi-agent system moving with constant speed.* Commun. Math. Sci. 14 (2016), 953-972. 18. Choi, Y.-P. 和 Haskovec, J.: *Cucker-Smale model with normalized communication weights and time delay.* **10** 2017 1011 1033 动力学与相关模

型 ( ), – . 19. Choi, Y.-P., Kalsie, D., Peszek, J. 和 Peters, A.: *Emergent dynamics of the Cucker-Smale flocking model and its variants.* 载于 N.

Bellomo、P. Degond 和 E. Tadmor（编），活性粒子：理论、模型与应用（第一卷）（暂定书名），丛书：科学与技术中的建模与仿真，Birkhauser，Springer。2017. 20. Choi, Y.-P., Kalsie, D., Peszek, J. 和 Peters, A.: *A collisionless singular Cucker-Smale model with decentralized formation control.* **18** 2019 1954 1981 SIAM 应用动力

系统杂志 ( ), - . 21. Choi, Y.-P. 和 Li, Z.: *Emergent behavior of Cucker-Smale flocking particles with heterogeneous time delays.* **86** 2018 49 56 应用数学快报 ( ),

– . 22. Cucker, F. 和 Dong, J.-G.: *A conditional, collision-avoiding, model for swarming.* 离散与连续动力系统 34 (2014), 1009-1020. 23. Cucker, F. 和 Dong, J.-G.: *A general collision-avoiding flocking framework.* IEEE 自动控制汇刊 56 (2011), 1124-1129. 24. Cucker, F. 和 Dong, J.-G.: *Avoiding collisions in flocks.* IEEE 自动控制汇刊 55 (2010), 1238-1243. 25. Cucker, F. 和 Smale, S.: *Emergent behavior in flocks.* IEEE 自动控制汇刊 52 (2007), 852-862. 26. Degond, P. 和 Motsch, S.: *Large-scale dynamics of the persistent turning walker model of fish behavior.* 统计物理学杂志 131 (2008), 989-1022. 27. Ermentrout, G. B.: *An adaptive model for synchrony in the firefly Pteroptyx malaccae.* 数学生物学杂志 29 (1991), 571-585. 28. Ferrante, E., Turgut, A. E., Stranieri, A., Pinciroli, C. 和 Dorigo, M.: *Self-organized flocking with a mobile robot swarm: a novel motion control method.* **20** 2012 460 477 适应性行为 ( ), - .

29. Figalli, A. 和 Kang, M.: *A rigorous derivation from the kinetic Cucker-Smale model to the pressureless Euler system with nonlocal alignment.* **12** 2019 843 866 偏微分方程分析

( ), - . 30. Ha, S.-Y., Kang, M.-J and Kwon, B.: *A hydrodynamic model for the interaction of Cucker-Smale particles and incompressible fluid.* **11** 2014 2311 2359 Math.

Models. Methods Appl. Sci., ( ), - . 31. Ha, S.-Y., Kim, J., Min, C., Ruggeri, T. 和 Zhang, X.: *Uniform stability and mean-field limit of a thermodynamic Cucker-Smale model* **77** 2019 131 176 . 应用数学季刊 ( ),

– . 32. Ha, S.-Y., Kim, J., Ruggeri,T.: *Emergent behaviors of thermodynamic Cucker–Smale particles.* SIAM 数学分析杂志 50 (2019), 3092–3121. 33. Ha, S.-Y., Kim, J. 和 Ruggeri, T.: *From the Relativistic Mixture of Gases to the Relativistic Cucker–Smale Flocking* 2019 10 1007 00205 019 . 理性力学与分析

档案 ( ) doi: https://doi.org/ . /s - - 01452-y. 34. Ha, S.-Y., Kim, J. 和 Zhang, X.: *Uniform stability of the Cucker-Smale model and its application to the mean-field limit.* **11** 2018 1157 1181 动力学与相关模

型 ( ), - . 35. Ha, S.-Y., Ko, D. 和 Zhang, Y.: *Remarks on the coupling strength for the Cucker-Smale with unit speed.* **38** 2018 2763 2793 离散与连续动力

系统 ( ), - . 36. Ha, S.-Y. 和 Liu, J.-G.: *A simple proof of Cucker-Smale flocking dynamics and mean-field limit.* Commun. Math. Sci. 7 (2009), 297-325. 37. Ha, S.-Y. 和 Ruggeri, T.: *Emergent dynamics of a thermodynamically consistent particle model.* Arch. Ration. Mech. Anal. 223 (2017), 1397-1425. 38. Ha, S.-Y. 和 Tadmor, E.: *From particle to kinetic and hydrodynamic description of flocking.* 动力学与相关模型 1 (2008), 415-435. 39. Karper, T. K., Mellet, A. 和 Trivisa, K.: *Hydrodynamic limit of the kinetic Cucker-Smale flocking model.* **25** 2015 131 163 Math. Models

Methods Appl. Sci. ( ), - . 40. Mucha, P.B. 和 Peszek, J.: *The Cucker-Smale equation: singular communication weight, measure-valued solutions and weak-atomic uniqueness.* **227** 2018 273 308 理性力学与分析

档案 ( ), - . 41. Olfati-Saber, R.: *Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory.* IEEE Trans. Automat. Contr. 51 (2006), 401-420.

42. Park, J., Kim, H. J. 和 Ha, S.-Y.: *Cucker-Smale flocking with inter-particle bonding forces.* IEEE 自动控制汇刊 55 (2010), 2617–2623. 43. Peszek, J.: *Discrete Cucker-Smale flocking model with a weakly singular kernel.* SIAM 数学分析杂志 47 (2015), 3671–3686. 44. Pikovsky, A., Rosenblum, M. 和 Kurths, J.: *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences.* 剑桥大学出版社，剑桥，2001. 45. Strogatz, S. H.: *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators.* **143** 2000 1 20 物

理学D辑 ( ), - . 46. Toner, J. 和 Tu, Y.: *Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking.* 物理评论E辑 58 (1998), 4828-4858. 47. Topaz, C. M. 和 Bertozzi, A. L.: *Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups.* **65** 2004 152 174

SIAM 应用数学杂志 ( ), - . 48. Vicsek, T., Czir

´

Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. **75** 1995 1226 1229

ok, A., Ben-Jacob, E., Cohen, I. 和 Schochet, O.: 物理评论快报 ( ), - . 49. Vicsek, T. 和 Zefeiris, A.: *Collective motion.* 物理报告 517 (2012), 71-140. 50. Winfree, A. T.: *The geometry of biological time.* Springer，纽约，1980. 51. Winfree, A. T.: *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators.* 理论生物学杂志 16 (1967), 15-42. (Hyunjin Ahn)Department of Mathematics, Myongji University, Gyeonggi-do 17058, Republic of Korea*Email address*: yagamelaito@snu.ac.kr (Junhyeok Byeon)
Research Institute of Basic Sciences, Seoul National University, Seoul 08826, Republic of Korea*Email address*: giugi2486@snu.ac.kr (Seung-Yeal Ha)
Department of Mathematical Sciences and Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul 08826, Republic of Korea*Email address*: syha@snu.ac.kr