arXiv:2304.00882v2 [math.AP] 8 Feb 2024

¨关于周期情形下多体薛定谔方程的 Strichartz 估计

XIAOQI HUANG、XUEYING YU、ZEHUA ZHAO 和 JIQIANG ZHENG

Abstract. 本文证明了周期情形下多体薛定谔方程的 Strichartz 估计，具体而言是在环面 $\mathbb{T}^d$ 上，其中 $d \geq 3$。这些结果适用于有理环面和无理环面，以及在某种意义下较小的相互作用势。我们的工作基于 Bourgain-Demeter [2] 建立的周期区域上薛定谔算子的标准 Strichartz 估计。作为比较，这一结果可视为 Hong [20] 的周期类比，不过我们没有使用相同的微扰方法。我们还指出，由于周期 Strichartz 估计存在导数损失，微扰方法会失效。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 4 3. 为什么微扰方法在周期情形下会失效? 6 4. 定理 1.1 的证明 9 5. 非线性应用的讨论 11 6. 进一步说明 12 参考文献

1. Introduction

1.1. 背景与研究动机。我们考虑周期情形下， d 维空间中 N 个粒子的以下多体薛定谔方程，其中 $d \geq 3$ 和 $N \geq 1$。

$$\begin{cases} (i\partial_t + H_N)u(t, x_1, \ldots, x_N) = 0, \\ u(0, x_1, \ldots, x_N) = u_0(x_1, \ldots, x_N) \in L^2_{x_1,\ldots,x_N}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中

$$H_N = \Delta_x - V_N = \sum_{\alpha=1}^{N} \Delta_{x_\alpha} - \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} V(x_\alpha - x_\beta).$$

每个粒子记为 $x_\alpha \in \mathbb{T}^d$，其中 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，对任意 $\alpha \in \{1, \ldots, N\}$均成立。势 V表示任意两个粒子之间的相互作用。

薛定谔方程中的整数参数 $N \geq 1$ 表示量子系统中的粒子数，该数目往往非常大。形如 $V(x_\alpha - x_\beta)$ 的相互作用势表示任意两个粒子之间的相互作用，其大小取决于它们之间的相对距离。此外， $\mathbb{T}^d$ 表示 d 维环面，可以是有理的，也可以是无理的。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35Q55；次要分类：35R01、37K06、37L50。
Key words and phrases. Strichartz 估计，多体薛定谔方程，周期非线性薛定谔方程。

当 $N = 1$ 时，初值问题 (1.1) 化为带势的非线性薛定谔方程（NLS），该方程在欧几里得情形（即以 $\mathbb{R}^d$ 替换 $\mathbb{T}^d$ 时）已得到广泛研究。这种情形也称为“单体情形”，关于衰减性质的研究历史悠久（参见 [20], 综述 [31], 的引言及其中的参考文献）。本文关注一般情形，即 $N \geq 1$，与单体情形相比，这种情形可能涉及新的困难，例如相互作用势问题。关于“单体情形”下的 Strichartz 估计，请参见 [3, 4] 及其中的参考文献。

本文旨在探讨周期情形下 N 体薛定谔方程 (1.1) 的斯特里卡兹型估计。此前，已有研究考察了方程 (1.1) 的欧几里得情形 [20], ，并在 [24] 中提出的方案基础上，对二体情形进行了进一步研究 [10] 。本文的主要目标是将 [20] 中的斯特里卡兹型估计推广到周期情形。此外，作者还希望结合“周期空间”和“多体薛定谔方程”，探讨“环面上的非线性薛定谔方程动力学”这一主题的近期进展，即研究周期空间中多体薛定谔方程的估计。下一段将简要介绍“环面上的非线性薛定谔方程”的背景。

非线性薛定谔方程在非线性光学以及玻色–爱因斯坦凝聚研究中都具有重要意义。近几十年来，人们已在多种情形下对其进行了广泛研究，包括欧几里得空间、环面情形和波导流形[1]。欧几里得情形下的适定性理论和长时间行为（至少在散焦情形下）已得到充分理解（例如参见 [12, 13, 25]）。周期模型也是研究非线性薛定谔方程的重要且具有挑战性的情形。近年来，相关研究不断开展，并取得了显著进展。关于环面和波导情形，请参见
[8, 7, 17, 18, 19, 22, 23, 27, 36, 39, 37, 40, 41, 43]；关于波导上的其他色散方程，请参见
[29, 33, 38] 。最后，关于非线性薛定谔方程研究的经典教材，请参见 [5, 14, 35] 。

由于本文关注的是方程 (1.1) 的估计及偏微分方程层面的问题，而非数学物理层面，因此我们不会从物理角度深入探讨多体问题/方程的背景。有兴趣的读者可参阅 [6, 9, 10, 11, 15, 32] 的引言及其中的参考文献，以了解更多信息。

据作者所知，本文是首篇旨在理解周期空间（环面）背景下多体 Schr¨odinger 方程长时间动力学的研究成果。

1.2. 主要结果的陈述。现在我们准备陈述本文的主要结果，即方程 (1.1) 的 Strichartz 估计。我们还将讨论该模型的一些非线性结果（见第 5 节）。

我们注意到，与 [20, 42], 中一样，我们需要对势 V 作出一定的小量性假设，且该小量性与初始数据无关（仅取决于粒子数 N 和普适常数）。具体条件如下：

$$|V(x)| + \big|\big((1-\Delta)^{\frac{\varepsilon}{2}} V\big)(x)\big| \leq \frac{C}{N^2}, \tag{1.2}$$

对于某个可以任意小的 $\varepsilon > 0$ 。主定理如下：

定理 1.1。假设 $d \geq 3$，考虑 (1.1) 并固定有限时间区间 I。存在一个小量 $\epsilon > 0$ ，使得若相互作用势 V 满足条件 (1.2)，则对于 $q = \frac{2(d+2)}{d}$ 以及任意 $\alpha \in \{1, \ldots, N\}$，有

$$\|e^{itH_N} u_0\|_{L^q_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)L^2_{\hat{x}_\alpha}(\mathbb{T}^{d(N-1)})} \lesssim_\varepsilon \|u_0\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})},$$

[1]波导流形表示半周期空间 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$ $(m, n \geq 1)$。近年来，波导流形上的非线性薛定谔方程动力学一直是一个热门但研究不足的课题。

其中， x_α 表示第 α 个变量，$\hat{x}_\alpha$ 表示除第 α 个变量 x_α 之外的其余 $N-1$ 个空间变量，即，

$$\hat{x}_\alpha = (x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{T}^{d(N-1)},$$

and

$$\|u\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})} = \|(1-\Delta_x)^{\frac{\varepsilon}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})} \quad where \quad x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{T}^{Nd}.$$

注 1.2. 由于 $q = {}^{2}_{(d+2)}$ ~~d 是~~ d 维 Strichartz 估计的端点指数（见[2]），定理 1.1 可以这样理解：选定一个粒子，并在 L^2 范数下固定其他粒子，由此可以恢复 (1.1) 在周期情形下的 Strichartz 估计。正如右端所示，还存在 ϵ 导数损失。当 $q > {}^{2}_{(d+2)\ d}$ 时的估计可以通过与质量守恒进行插值而得到。

注 1.3. 定理 1.1 还包含特殊情形（$N=1$，单体情形）：周期情形下带势的非线性薛定谔方程的 Strichartz 估计。当势满足某些条件（例如 (1.2)）时，可以恢复 [2] 中的标准 Strichartz 估计；这也被认为是新的。

注 1.4. 可以将 $(1-\Delta_x)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ 视为 $\mathbb{T}^{Nd}$ 上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱乘子，或等价地，视为作用于 $\mathbb{R}^{Nd}$ 中的周期函数 u 的傅里叶乘子，关于这两种索博列夫范数等价性的证明，可参见例如 [21, 命题 4] 。

注 1.5. 定理 1.1 涉及如下类型的 Strichartz 范数：$L^q_t\ ,\ {}_{x_\alpha} L^2_{\hat{x}_\alpha}$ （即考虑某个粒子 x_α ，并将其他粒子固定在 L^2-范数中）。Strichartz 估计[2] 的另一种表述是考虑 $L^q_{t\ ,\ x}$ 型范数，其中 $x = (x_1, ..., x_N)$ 针对所有粒子（即平等地对待所有粒子，而不将任何粒子固定在 L^2-范数中）。可以证明，对于 $q = {}^{2}_{(Nd+2)\ Nd}$ ，存在 $\epsilon > 0$ 使得，

$$\|e^{itH_N} u_0\|_{L^q_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^{Nd})} \lesssim_\varepsilon \|u_0\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})},$$

证明与定理 1.1 类似，只需稍作修改，因此略去。更多细节请参见第 4 节中定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明思路简述如下。首先，与欧几里得情形（[20]）不同，由于周期情形下 Strichartz 估计存在导数损失（解释见第 3 节），采用对 [20] 的一种修改并不能得到所需的估计。证明基于环面上的 Strichartz 估计 [2] ，以及另外两个要素：索博列夫型范数的等价性和时间区间有限这一观察。更多细节见第 4 节。定理 1.1 的非线性应用将在第 5 节讨论，我们还将在第 6 节作几点说明。

最后，我们指出，相互作用势也可以在周期情形下定义（例如，参见 [30] 中的附录）。为方便起见，我们仍使用记号 $V(x-y)$ ，而不使用 $V(d(x,\ y))$ ，其中 d 是相应的度量。

1.3. 本文结构。本文其余部分安排如下：第 2 节讨论该模型的函数空间和一些估计；第 3 节说明，由于周期 Strichartz 估计具有导数损失性质，微扰方法（如 [20] 中所用）会失效；第 4 节给出定理 1.1（Strichartz 估计）的证明；第 5 节讨论 Strichartz 估计的非线性应用（适定性）；第 6 节就这一研究方向补充一些评论。

[2]See [20] 中的定理 1.1 给出了欧几里得情形下这两种不同类型的 Strichartz 估计。

1.4. 符号约定。我们写作 $A \lesssim B$，表示存在常数 C，使得 $A \leq CB$。当 $A \lesssim B \lesssim A$ 时，我们使用 $A \simeq B$。特别地，我们写作 $A \lesssim_u B$，表示对于某个依赖于 u 的常数 $C(u)$，有 $A \leq C(u)B$。我们用 C 表示普适常数，用 N 表示粒子数。

若一对 (p,q) 满足……，则称其为 d-(Strichartz) 可容许对。

$$\frac{2}{p}+\frac{d}{q}=\frac{d}{2}, \quad 2 \leq p,q \leq \infty \quad (p,q,d) \neq (2,\infty,2).$$

本文中，我们经常提及以下时空范数

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q(I_t \times \mathbb{T}^d)} = \left(\int_{I_t} \left(\int_{\mathbb{T}^d} |u(t,z)|^q dz \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

对于环面情形，通常会为 t 和 x 选取相同的指数。正如上述定理中所述，为方便起见，我们采用以下记号：

- x 表示整个空间变量；
- x_α 表示第 α 个空间变量；
- $\hat{}x_\alpha$ 表示除第 α个变量 x_α之外的其余 $N-1$ 个空间变量。

与欧几里得情形类似，诸如 V_Δ^p 这样的函数空间也密切相关。我们将在第 2 节讨论它们。（另见 [20]。）

同样，与欧几里得情形类似，为了处理相互作用势，我们定义关于第 α个变量 x_α 和第 β个变量 x_β 的旋转算子 $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$，如下：

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta}(f(x_1,\dots,x_{\alpha-1},\frac{x_\alpha-x_\beta}{\sqrt{2}},x_{\alpha+1},\dots,x_{\beta-1},\frac{x_\alpha+x_\beta}{\sqrt{2}},x_{\beta+1},\dots,x_N)) = f(x_1,\dots,x_N).$$

也就是说，应用算子 $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$后，函数 f 将其第 α个变量 x_α 与第 β个变量 x_β旋转，从而消除它们之间的相互作用。

致谢。X. Huang 获得了 AMS-Simons 旅行资助的部分支持。X. Yu 获得了 NSF DMS-2306429 的部分支持。Z. Zhao 获得了中国国家自然科学基金（编号：12101046、12271032）和北京理工大学青年学者研究基金项目的资助。J. Zheng 获得了中国国家自然科学基金（编号：12271051）和北京市自然科学基金 1222019 的资助。第一作者和第三作者在马里兰大学从事博士后研究期间，学习了多体薛定谔模型及相关背景知识。因此，他们非常感谢 M. Grillakis 教授、M. Machedon 教授和 J. Chong 博士就相关问题进行的讨论，尤其感谢 Hong 的论文 [20]。

2. Preliminaries

本节讨论模型 (1.1) 的 Littlewood-Paley 算子和一些函数空间。关于欧几里得情形的对应结果，请参见 [20] 中的第 2 节至第 4 节。

我们将 $\mathbb{T}^d$ 上的傅里叶变换定义如下：

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{T}^d} f(z) e^{-iz\cdot\xi}\, dz,$$

其中 $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_d) \in \mathbb{Z}^d$。我们还注意到傅里叶反演公式

$$f(z) = c \sum_{(\xi_1,\dots,\xi_d)\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}f)(\xi) e^{iz\cdot\xi}.$$

此外，我们将薛定谔传播子 $e^{it\Delta}$ 定义为

$$\left(\mathcal{F}e^{it\Delta}f\right)(\xi) = e^{-it|\xi|^2}(\mathcal{F}f)(\xi).$$

现在我们准备好定义 Littlewood-Paley 投影了。首先，固定 $\eta_1 : \mathbb{R} \to [0,1]$，这是一个光滑的偶函数，满足

$$\eta_1(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \le 1, \\ 0, & |\xi| \ge 2, \end{cases}$$

以及 $M = 2^j$ 为二进整数。令 $\eta^d : \mathbb{R}^d \to [0,1]$,

$$\eta^d(\xi) = \eta_1(\xi_1)\eta_1(\xi_2)\eta_1(\xi_3)\cdots\eta_1(\xi_d).$$

我们定义 Littlewood-Paley 投影算子 $P_{\le M}$ 和 P_M 为

$$\mathcal{F}(P_{\le M}f)(\xi) := \eta^d\left(\frac{\xi}{M}\right)\mathcal{F}(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}^d,$$

and

$$P_M f = P_{\le M}f - P_{\le \frac{M}{2}}f.$$

对于任意二进 $M \in (0,\infty)$，我们定义

$$P_{\le M} := \sum_{L \le M, L \text{ dyadic}} P_L, \quad P_{>M} := \sum_{M > L, L \text{ dyadic}} P_L.$$

接下来，我们陈述环面情形下标准的 Strichartz 估计。参见 [2, 27]。（此外，关于欧几里得情形的对应结果，参见 [24]; 关于波导流形情形的对应结果，参见 [1] 。）

引理 2.1（环面上的 Strichartz 估计）。固定 $d \ge 1$ 和有限时间区间 I。对于 $p \ge 2(d+2)/d$，有

$$\|P_{\le M}e^{it\Delta_x}u_0\|_{L^p_{t,x}(I\times\mathbb{T}^d)} \lesssim_{|I|} M^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{p}+\epsilon}\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^d)}.$$

当 p 不靠近端点 $2(d+2)/d$ 时，可以去掉这里的 ϵ 。

注 2.2。可以看出，与欧几里得情形相比，环面情形下的标准 Strichartz 估计有三个主要区别：1. 出现了频率截断算子；2. 这是一个局部估计（即在有限时间区间 I上）；3. 存在导数损失 ϵ。与欧几里得情形相比，这些区别会给我们的问题带来一些新的困难。

自然地，可以将上述估计推广到多体情形，如下所示:

命题 2.3（多体情形的 Strichartz 估计）。固定 $d \ge 1$、 $N \ge 1$ 和有限时间区间 I。对于 $p \ge 2(d+2)/d$和 $\alpha \in \{1,\dots,N\}$，有

$$\|P_{\le M}e^{it\Delta_{x_1,\dots,x_N}}u_0\|_{L^p_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)L^2_{\hat{x}_\alpha}(\mathbb{T}^{d(N-1)})} \lesssim M^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{p}+\epsilon}\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^{Nd})},$$

其中， x_α 表示第 α个变量，$\hat{}x\alpha$ 表示除第 α个变量 x_α以外的其余 $N-1$ 个空间变量，即:

$$\hat{x}_\alpha = (x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\dots,x_N) \in \mathbb{T}^{d(N-1)}.$$

这里的 Littlewood-Paley 算子 $P_{\le M}$表示对所有 x_1、.....、 x_N进行频率截断（仅限制在 x_α方向，即 $P_{x_\alpha \le M}$，结论也成立）。同样，当 p 不同于端点 $2(d+2)/d$ 时，可以去掉 ϵ 。

命题 2.3 的证明。注意，Littlewood-Paley 算子 $P_{\leq M}$ 与线性薛定谔算子 $e^{it\Delta_x} = e^{it\Delta_{x_1,\ldots,x_N}}$可交换。此外，$e^{it\Delta_{x_1,\ldots,x_N}}$ 是酉算子。应用闵可夫斯基不等式（$p>2$）和标准的环面 Strichartz 估计（引理 2.1），得到

$$\begin{aligned}\|P_{\leq M}e^{it\Delta_{x_1,\ldots,x_N}}u_0\|_{L^p_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)L^2_{\hat{x}_\alpha}(\mathbb{T}^{d(N-1)})} &= \|P_{x_\alpha,\leq M}e^{it\Delta_{x_\alpha}}u_0\|_{L^p_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)L^2_{\hat{x}_\alpha}(\mathbb{T}^{d(N-1)})}\\ &\lesssim \|P_{x_\alpha,\leq M}e^{it\Delta_{x_\alpha}}u_0\|_{L^2_{\hat{x}_\alpha}L^p_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)}\\ &\lesssim M^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{p}+\epsilon}\|u_0\|_{L^2_{\hat{x}_\alpha}L^2_{x_\alpha}}\\ &= M^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{p}+\epsilon}\|u_0\|_{L^2_x}.\end{aligned}$$

同样，这里 I 表示一个有限时间区间，因为环面情形下的 Strichartz 估计（引理 2.1）涉及局部估计。□

正如 [20] 第 3.3 节末尾所述，对于空间变量被冻结的 Strichartz 估计（如上面的命题（2.3）），由于相互作用势的存在，不足以证明（1.1）的 Strichartz 估计。因此，我们需要一种发挥旋转时空范数作用的时空范数。这部分内容与 [20], 中的第 4.1 节几乎相同，只做了一些自然的修改。更多细节也可参见 [18, 19, 28]。

我们注意到， [20] 第 4.1 节中的定义和性质足够一般，可以自然地应用于我们在环面情形下的模型。作者针对可分希尔伯特空间 H 和自伴算子 S构造了具有良好性质的函数空间。在本文中，在环面情形下，我们可以令 H为 L^2_x，并令 S为 Δ_x，其中 $x=(x_1,\ldots,x_N)$，且对于 $\alpha\in\{1,\ldots,N\}$有 $x_\alpha\in\mathbb{T}^d$，如（1.1）所示。因此，我们的情形下的定义及相关性质也同样成立。故函数空间及相应的估计和性质可参见 [20] 第 4.1 节。例如，我们将使用 V^p_Δ -空间的以下性质，该性质可由定义推出（见 [20]中的命题 2）。

$$\|\mathbf{1}_{[0,\infty)]}e^{it\Delta_x}u_0\|_{V^p_{\Delta_x}} = \|u_0\|_{L^2_x}.$$

此外， V^p_Δ -空间的对偶性、嵌入性质和转移原理也经常用到。参见 [20]的第 4.1 节。转移原理如下:

引理 2.4（转移原理）。设 $d\geq 1$、 $1<p<2$、 $q\geq 2$ 和 X 为一个巴拿赫空间。若函数 u: $\mathbb{R}\to X$ 满足以下界

$$\|e^{it\Delta_x}u_0\|_{L^q_tX}\lesssim\|u_0\|_{L^2_x},$$

then

$$\|u\|_{L^q_tX}\lesssim\|u\|_{V^p_{\Delta_x}}.$$

注 2.5。我们注意到，布尔甘空间 $X^{s,\,b}$ （也称为傅里叶限制空间）具有类似的转移原理（更多信息参见 [35] ）。正如 [20], 所总结的，$V^p_{\Delta_x}$ 中的 Strichartz 估计通过 $0+$ 改进了 $X^{s,\,b}$ 中的界： $X^{s,\,b}$空间中的 Strichartz 估计不涵盖端点 Strichartz 估计，而 $V^p_{\Delta_x}$ -空间中的估计则涵盖。

3. Why does the perturbation method fail for the periodic case?

本节将说明为什么微扰方法（如 [20] 所述，并作适当修改）在周期情形下会失效。鉴于此处考虑的是小势，尝试采用这种方法是很自然的。我们将先解释其主要思路，并尝试用这种方法证明 (1.1) 的 Strichartz 估计（欧几里得情形见 [20] ）。随后即可看出这种方法为何会失效。

在 [20] 中证明多体斯特里克茨估计，依赖于函数空间 $V^p_{\Delta_x}$ 的性质以及一种微扰方法。其主要思路是首先建立一个非线性估计

针对每个任意的相互作用势，将其视为微扰，然后对所有势求和。证明中的关键估计是命题 3.1（ [20] 中命题 4 在环面上的对应版本）；该命题通过将单个任意相互作用势视为强迫项来处理它。这一估计使我们能够将所有相互作用势统一作为微扰来处理。最后，利用小性假设，我们可以应用微扰方法得到所需的 Strichartz 估计。更多细节请参见 [20] 。

与只有单个势 ($N = 1$) 的情形相比，本问题中的相互作用势由于具有旋转不变性而带来了困难。因此，需要使用在旋转下具有灵活性的函数空间 $V^p_{\Delta_x}$。我们考虑定理 1.1 中的 Strichartz 估计。事实上，也可以将 (1.1) 中的拉普拉斯算子替换为 H_N 算子，考虑命题 2.3 形式的 Strichartz 估计。（不过，这种情形会更加困难。[3]）

所需的主要估计如下：

命题 3.1. 设 $d \geq 3$, $1 < p < 2$ 和 $q > {}^{2}_{(d+2)\ d}$。设 I 为一个有限区间。考虑满足 (1.1) 的 u。则有

$$\big\| \mathbf{1}_I \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_x} (V(x_\alpha - x_\beta) u(s))\, ds \big\|_{V^p_\Delta} \leq C \|V\|_{L_x^{\frac{q}{q-2}}(\mathbb{T}^d)} \|u\|_{V^p_\Delta},$$

其中 C 表示一个普适常数。

注 3.2. 命题 3.1 表明，可以将势项视为扰动。只需考虑一个任意的相互作用势 $V(x_\alpha - x_\beta)$，因为 V^p_Δ- 范数在旋转下具有灵活性。

注 3.3. 欧几里得情形的对应结果见 [20] 中的命题 4。由于这里讨论的是环面情形，只需考虑局部时间版本（在有限时间区间 I 上）。

我们现在说明为什么这种做法行不通。（我们将尝试像欧几里得情形那样，在作出自然修改后证明它。）问题在于环面上的 Strichartz 估计存在导数损失。

一个行不通的初步证明。为方便记号，我们记

$$w = \mathbf{1}_I \int_0^t e^{i(-s)\Delta_x} (F(s))\, ds,$$

其中 $F = V(x_\alpha - x_\beta)u(s)$ 被视为强迫项（或者说是一个扰动项） m).

我们将通过对偶论证估计 w。由于我们只能期待 $w \in V^p_-$，而非 $w \in V^p$，因此考虑 $\tilde{w}(t) = w(-t)$。

仿照 [20]，中利用对偶性证明命题 4 的方法，只需证明

$$\sum_{j=1}^{J} \langle a(t_{j-1}), \tilde{w}(j) - \tilde{w}(t_{j-1}) \rangle_{L^2_x} \lesssim \|V\|_{L_x^{\frac{q}{q-2}}} \|u\|_{V^p_\Delta}$$

对于任意精细单位分解 $t = \{t_j\}_{j=0}^J$和任意 $U^{p'}$-原子 $a(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{1}_{(s_{k-1}, s_k)} \phi_{k-1}$。注意， (We $U^{p'}$-空间是 V^p_Δ-空间的对偶空间。)

[3]与欧几里得情形（[20]）相比，在此证明中引入频率截断算子会带来新的困难。该算子对于处理低频模态是必要的，因为相互作用势对低频模态和高频模态的影响不同。

按照 [20] 中命题4的做法进行一些标准化简（将原子 a 展开为ϕ_k），可以得到一个更简单的和

$$\sum_{k=1}^{K}\langle\phi_{k-1},\tilde{w}(s_k)-\tilde{w}(s_{k-1})\rangle_{L_x^2}.$$

我们进一步将其写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{K}\langle\phi_{k-1},\tilde{w}(s_k)-\tilde{w}(s_{k-1})\rangle_{L_x^2}\\
=&-\sum_{k=1}^{K}\int_{-s_k}^{-s_{k-1}}\langle\phi_{k-1},e^{-is\Delta_x}(F(s))\rangle_{L_x^2}\,ds\\
=&-\sum_{k=1}^{K}\int_{-s_k}^{-s_{k-1}}\langle e^{is\Delta_x}\mathcal{R}\phi_{k-1},\mathcal{R}(F(s))\rangle_{L_x^2}\,ds\\
=&-\sum_{k=1}^{K}\int_{\mathbb{R}}\langle e^{is\Delta_x}\mathcal{R}\phi_{k-1},\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1}]}\mathcal{R}(F(s))\rangle_{L_x^2}\,ds,
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{R}$ 表示任意旋转算子。（对于相互作用势 $V(x_\alpha-x_\beta)$，它就是 $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$。）我们希望通过 $\|V\|_{L_x^{\frac{q}{q-2}}}\|u\|_{V_\Delta^p}$对其进行控制。

然后，应用 H¨older 不等式、Strichartz 估计（命题 2.3）以及 $V_{\Delta_x}^p$-空间的传递性质（引理 2.4），我们将其估计为

$$\sum_{k=1}^{K}\langle\phi_{k-1},\tilde{w}(s_k)-\tilde{w}(s_{k-1})\rangle_{L_x^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{K}\langle\phi_{k-1},\tilde{w}(s_k)-\tilde{w}(s_{k-1})\rangle_{L_x^2}$$

$$\lesssim\sum_{k=1}^{K}\|e^{it\Delta}\mathcal{R}\phi_{k-1}\|_{L_t^{q'}L_{x_\alpha}^qL_{\hat{x}_\alpha}^2}\|\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1}]}\mathcal{R}(F(s))\|_{L_t^qL_{x_\alpha}^{q'}L_{\hat{x}_\alpha}^2}\ \text{(using the Hölder)}$$

$$\lesssim\sum_{k=1}^{K}\|e^{it\Delta}\mathcal{R}\phi_{k-1}\|_{L_t^qL_{x_\alpha}^qL_{\hat{x}_\alpha}^2}\|\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1}]}\mathcal{R}(F(s))\|_{L_t^qL_{x_\alpha}^{q'}L_{\hat{x}_\alpha}^2}\ \text{(since it is a finine time interval)}$$

$$\lesssim M^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{q}}\sum_{k=1}^{K}\|\phi_{k-1}\|_{L_x^2}\|V\|_{L_x^{\frac{q}{q-2}}}\|\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1}]}\mathcal{R}(u)\|_{L_t^qL_{x_\alpha}^qL_{\hat{x}_\alpha}^2}\ \text{(using the Strichartz estimate. } M^{\text{power}}\text{ appears!)}$$

$$\lesssim\sum_{k=1}^{K}\|\phi_{k-1}\|_{L_x^2}\|V\|_{L_x^{\frac{q}{q-2}}}\|\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1}]}(u)\|_{V_{\Delta_x}^p}\ \text{(using the transference principle. It fails!)}$$

$$\lesssim\|V\|_{L_x^{\frac{q}{q-2}}}\big\|\|\phi_{k-1}\|_{L_x^2}\big\|_{l^{p'}}\cdot\big\|\|\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1}]}(u)\|_{V_{\Delta_x}^p}\big\|_{l^p}\ \text{(using the Hölder)}$$

$\lesssim \|V\|_{L_x^{\frac{q}{q-2}}} \big\| \|\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1}]}(u)\|_{V^p_{\Delta_x}} \big\|_{l^p}$.

第一个等式（第一行等于第二行）由两个支集的傅里叶变换相加得到，其中 C 是某个正常数。 q' 在以下意义下是 q 的对偶:

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1.$$

此外， q 和 $\frac{q}{q-2}$ 在以下意义下是 q' 的 H¨older 对偶:

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{\frac{q}{q-2}}=\frac{1}{q'}.$$

我们注意到，在最后一行中用到了离散 L^p 空间（即 l^p-空间）的包含性质。（$1<p<2$ 蕴含 $p'>2$。）

为了完成论证，现在还需证明:

$$\big\| \|\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1}]}(u)\|_{V^p_{\Delta_x}} \big\|_{l^p} = \Big\{ \sum_{k=1}^{K} \|\mathbf{1}_{[-s_k,-s_{k-1})}u\|^p_{V^p_{\Delta_x}} \Big\}^{\frac{1}{p}} \le \|u\|_{V^p_{\Delta_x}}.$$

这个估计的推导与欧几里得情形完全相同（使用 $V^p_{\Delta_x}$ 的定义）。在周期情形下并无不同。暂定证明到此结束。

评论。正如我们所提到的，问题出现在使用转移原理时。该原理在欧几里得情形下确实适用。然而，在周期情形下，由于存在本质性的导数损失，它便不再成立。（见引理 2.4。）这一论证也会失败，因为 M 次幂不会消失，导致右端无法得到控制，进而使微扰方法失效。

我们还指出，即使在单体情形（$N=1$ 在 (1.1) 中），这种方法仍然行不通。根本原因仍是 Strichartz 估计存在导数损失。□

4. 定理 1.1 的证明

如上一节所述，由于周期 Strichartz 估计存在导数损失，这种微扰方法会失效。因此，我们需要进一步考察 H 算子（将拉普拉斯算子与相互作用势视为一个整体）的性质。本节将介绍一种新的方法，而非微扰方法，以获得 Strichartz 估计（即我们的主要定理——定理 1.1）。

在陈述定理 1.1 的证明之前，我们先提及以下三个关键要点。正如我们很快将看到的，它们起着至关重要的作用。

关键要点 1：我们将频繁使用范数等价： $\|(1+H)^\epsilon u\|_{L^2_x} \sim \|(1-\Delta)^\epsilon u\|_{L^2_x}$。（$H=-\Delta+V$）。

关键要点 2：我们将利用这样一个事实：所考虑的 Strichartz 估计是在有限时间区间上成立的。这一点很重要。对于欧几里得情形，这一方案行不通，因为该情形涉及无限时间区间。

关键要点 3：我们将把环面上的 Strichartz 估计（即引理 2.1，参见 Bourgain-Demeter 关于通过解耦方法得到 Strichartz 估计的开创性工作 [2] ）视为黑箱。这个估计至关重要。

定理 1.1 的证明。回顾一下，我们对势 V 有如下假设,

$$|V(x)| + \big|\big((1-\Delta)^{\frac{\varepsilon}{2}}V\big)(x)\big| \le \frac{C}{N^2}, \tag{4.1}$$

其中 $C>0$ 为某个常数。

若 V 满足 (4.1)，则不难验证 $H_N=\Delta_x-V_N=\sum_{\alpha=1}^N\Delta_{x_\alpha}-\sum_{1\le\alpha<\beta\le N}V(x_\alpha-x_\beta)$ 是自伴的，且 $C-H_N$ 是正算子，并且我们还有

$$C_0^{-1}\|(1-\Delta_x)u\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})}\le\|(C-H_N)u\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})}\le C_0\|(1-\Delta_x)u\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})},$$

f对某个常数 C_0成立。根据 Stein解析插值定理（见 [34]），这意味着，

$$\|(C-H_N)^\varepsilon u\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})}\approx\|(1-\Delta_x)^\varepsilon u\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})},\ \forall\ 0<\varepsilon\le1. \tag{4.2}$$

回顾命题 2.3，我们知道对于 $q=\frac{2(d+2)}{d}$，

$$\left\|e^{it\Delta_x}u_0\right\|_{L^q_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)L^2_{\hat{x}_\alpha}}\lesssim\|u_0\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}, \tag{4.3}$$

允许任意小的 ϵ 阶导数损失。

我们注意到，我们的目标是证明对于相同的 q，以下估计可对 H_V算子恢复。

$$\left\|e^{itH_V}u_0\right\|_{L^q_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)L^2_{\hat{x}_\alpha}}\lesssim\|u_0\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}.$$

根据 Duhamel原理，

$$e^{itH_N}u_0=e^{it\Delta_x}u_0-i\sum_{1\le\alpha<\beta\le N}\int_0^t e^{i(t-s)\Delta_x}V(x_\alpha-x_\beta)e^{isH_N}u_0ds.$$

第一项可利用 (4.3) 处理。对于第二项，注意到对于求和中的每一项，由 (4.3) 可得

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta_x}V(x_\alpha-x_\beta)e^{isH_N}u_0ds\right\|_{L^q_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)L^2_{\hat{x}_\alpha}}\\&\le\int_0^1\left\|e^{-is\Delta_x}V(x_\alpha-x_\beta)e^{isH_N}u_0\right\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}ds\\&=\int_0^1\left\|V(x_\alpha-x_\beta)e^{isH_N}u_0\right\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}ds.\end{aligned} \tag{4.4}$$

利用 Kenig、Ponce 和 Vega 的分数阶Leibniz法则 [26], ，对于每个固定的 s，我们有

$$\begin{aligned}&\left\|V(x_\alpha-x_\beta)e^{isH_N}u_0\right\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}\\&\le\|V\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\left\|e^{isH_N}u_0\right\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}\\&\quad+\left\|\left((1-\Delta)^{\frac{\varepsilon}{2}}V\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\left\|e^{isH_N}u_0\right\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})}+\|V\|_{L^p_{\varepsilon_1}(\mathbb{T}^d)}\left\|e^{isH_N}u_0\right\|_{L^q_{\varepsilon_2}(\mathbb{T}^{Nd})}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, $1<p,q<\infty$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$ 满足 $0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1$，并且对于 $1<p,q<\infty$, $\|f\|_{L^p_\varepsilon(\mathbb{T}^d)}=\left\|(1-\Delta)^{\frac{\varepsilon}{2}}f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}$ 以及 $\|f\|_{L^q_\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}=\left\|(1-\Delta_x)^{\frac{\varepsilon}{2}}f\right\|_{L^q(\mathbb{T}^{Nd})}$。

由 Sobolev不等式可知，若我们选择 q 足够接近 2，不难证明

$$\left\|e^{isH_N}u_0\right\|_{L^q_{\varepsilon_2}(\mathbb{T}^{Nd})}\le\left\|e^{isH_N}u_0\right\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}.$$

由（4.2），我们还得到

$$\begin{aligned}\left\|e^{isH_N}u_0\right\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})}&\approx\left\|(C+H_N)^\varepsilon e^{isH_N}u_0\right\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})}\\&=\|(C+H_N)^\varepsilon u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})}\approx\|(1-\Delta_x)^\varepsilon u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^{Nd})}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

由（4.1）、（4.4）、（4.5）和（4.6），我们得到

$$\left\| \sum_{1\le\alpha<\beta\le N} \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_x} V(x_\alpha - x_\beta) e^{isH_N} u_0 ds \right\|_{L^q_{t,x_\alpha}(I\times\mathbb{T}^d)L^2_{\hat{x}_\alpha}} \le C\|u_0\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^{Nd})},$$

由此完成定理 1.1 的证明。 □

5. 非线性应用

本节基于已建立的 Strichartz 估计，讨论一些相关的非线性应用（适定性理论）。我们将考虑两种典型的非线性薛定谔方程模型：四维三次模型和三维五次模型。

关于四维三次周期性非线性薛定谔方程。

首先，我们回顾如下四维三次非线性薛定谔方程模型[4]，

$$(i\partial_t + \Delta_{x,y} + V(x-y))u = |u|^2 u, \quad u(0,x,y) = u_0(x,y) \in H^1_{x,y},$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^2$。

我们记 $H = \Delta_{x,y} + V(x-y)$。

在得到定理 1.1 中关于算子 H 的 Strichartz 估计后，通常可以通过以下几个标准步骤建立适定性理论：1. 函数空间（例如布尔甘空间 $X^{s,b}$ 以及 V^p-U^p 型空间）；2. 双线性估计；3. 非线性估计；4. 适定性理论的证明。

首先，我们说明在考虑高正则性数据[5]时，证明适定性的一种简便方法。我们考虑一般情形 (1.1)。计算如下。对于 $s > \frac{dN}{2}$，

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s} &\le \|e^{itH}u_0\|_{H^s} + \| \int_0^t e^{i(t-s)H}|u|^2 u(s)\, ds\|_{H^s} \\
&\le \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \|e^{i(t-s)H}|u|^2 u(s)\|_{H^s}\, ds \\
&\le \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \||u|^2 u(s)\|_{H^s}\, ds \\
&\le \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \|u\|^3_{H^s}\, ds \\
&\le \|u_0\|_{H^s} + T\|u\|^3_{H^s}.
\end{aligned}$$

取 $T > 0$ 足够小，即可得到

$$\|u\|_{H^s} \le 2\|u_0\|_{H^s}.$$

由于对正则性的要求过高，如果能够在能量空间（即 H^1 空间）中建立适定性理论，将会更理想，因为四维三次非线性薛定谔方程和三维五次非线性薛定谔方程都是能量临界的。我们考虑四维三次模型。若进一步假设线性算子 e^{itH} 与 Littlewood-Paley 算子 P_N[6]可交换，则下一个引理可由 [27]推出。

[4]也可以考虑周期情形下带势的四维三次非线性薛定谔方程，即 $(i\partial_t + \Delta_x + V($ x u $=$ $|u|^2 u$ $u\ 0\ x\ = u_0\ x\ \in H^1_x$ $x \in \mathbb{T}^4$ $))$, (,) ( ) 其中 。[5] 注意，我们用到了线性算子 e^{itH} 是酉算子这一事实。[6] 这一假设稍显过强，也不太自然。

引理 5.1（双线性估计）。固定整体维数 $d \geq 3$ 和 $0 < T < 1$。那么对于 $1 \leq N_2 \leq N_1$，有

$$\|u_{N_1} v_{N_2}\|_{L^2_{t,x}([0,T)\times\mathbb{T}^d)} \lesssim N_2^{\frac{d-2}{2}} \|u_{N_1}\|_{Y^0([0,T))} \|v_{N_2}\|_{Y^0([0,T))}.$$

我们注意到，Y^0 空间基于 H-算子。证明可由 [27]中的引理 3.1 得出，只要我们有 e^{itH} 与 Littlewood-Paley 算子对易。

因此，以下非线性估计可按标准方法得到，从而得出两个模型——四维三次非线性薛定谔方程和三维五次非线性薛定谔方程——的适定性结果。更多细节请参见 [27] 。

引理 5.2。固定整体维数 $d = 3$，4，对于任意 $0 < T < 1$，我们有

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(u(s)) ds \right\|_{X^1([0,T))} \lesssim \|u\|^{\frac{d+2}{d-2}}_{X^1([0,T))},$$

and

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \left(F(u+w)(s) - F(u)(s) \right) ds \right\|_{X^1([0,T))} \\ &\lesssim \|w\|_{X^1([0,T))} \left(\|u\|_{X^1([0,T))} + \|w\|_{X^1([0,T))} \right)^{\frac{4}{d-2}}. \end{aligned}$$

关于三维五次周期性非线性薛定谔方程。经过适当修改以适应五次非线性，适定性理论与四维情形类似，因此留给感兴趣的读者。

6. 进一步说明

最后，我们想对多体 Schr¨odinger 模型 (1.1) 补充几点说明。

1. 一个有趣的研究方向是考虑非线性为 $F(t, x_1, \ldots, x_N)$ 的多体方程，并研究其长时间行为。关于这一主题的一般性理论和结果并不多，即使在欧几里得情形下也是如此，例如整体适定性理论和长时间行为方面的结果。考虑一般情形也可能颇具挑战，而二体情形仍可作为有用的起点。例如，Hartree-Fock-Bogoliubov 方程中的 Λ 方程就是二体情形的一个例子，尽管它属于一个耦合系统，因此更为复杂。（更多详情见 [9, 10] 。）关于这一问题的一些讨论见第 5 节。

2. 本文的结果仅聚焦于多体 Schr¨odinger 方程的估计和偏微分方程层面的分析。从数学物理的角度研究环面情形（或如 [42] 中所述的波导情形下）的多体 Schr¨odinger 方程，将会很有意义。这类研究视角的例子包括 [11, 15, 16]。一个自然的问题是，将关于多体问题的经典结果推广到周期情形。

References

[1] A. Barron. 关于半周期薛定谔方程的全时间 Strichartz 估计。 *Anal. PDE*, 14 4 1125( ): –1152, 2021年。[2] J. Bourgain and C. Demeter. l^2 解耦猜想的证明。 *Ann. of Math. (2)*, 182 389, 2015 1 351( ): – .[3] N. Burq, F. Planchon, J. Stalker, and A. Tahvildar-Zadeh. 关于具有逆平方势的波动方程和薛定谔方程的 Strichartz 估计。 *Journal of functional analysis*, 203(2):519–549, 2003年。

[4] N. Burq、F. Planchon、J. G. Stalker 和 A. S. Tahvildar-Zadeh。临界衰减势下波动方程和薛定谔方程的 Strichartz 估计。 *Indiana University mathematics journal*，第 1665–1680 页，2004年。[5] T. Cazenave。 *Semilinear Schrödinger equations*，第 *Courant Lecture Notes in Mathematics* 卷第 10 卷。纽约大学柯朗数学科学研究所，纽约；美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003年。[6] T. Chen、Y. Hong 和 N. Pavlovi´c。无限多个费米子的非线性薛定谔方程组的整体适定性。*Archive for rational mechanics and analysis*，224：91–123，2017年。[7] X. Cheng、Z. Guo 和 Z. Zhao。二维圆柱面上散焦五次非线性薛定谔方程的散射。 *SIAM J. Math. Anal.*，52(5)：4185–4237，2020年。[8] X. Cheng、Z. Zhao 和 J. Zheng。波导流形上能量临界非线性薛定谔方程的适定性。 *J. Math. Anal. Appl.*，494(2)：论文编号 124654，14 页，2021年。[9] J. Chong、X. Dong、M. Grillakis、M. Machedon 和 Z. Zhao。在 $\beta < 1$ 情形下，哈特里–福克–博戈留波夫型方程组解的整体一致估计。 *arXiv preprint arXiv:2203.05447*，2022年。[10] J. Chong、M. Grillakis、M. Machedon 和 Z. Zhao。哈特里–福克–博戈留波夫方程的整体估计。*Communications in Partial Differential Equations*，46(10)：2015–2055，2021年。[11] J. Chong 和 Z. Zhao。相互作用玻色子的动力学哈特里–福克–博戈留波夫近似。载于 *Annales Henri Poincaré* 1 59 2019 ，第 – 页。施普林格，。[12] J. Colliander 、 M. Keel 、 G. Staffilani 、 H. Takaoka 和 T. Tao。 $\mathbb{R}^3$ 中能量临界非线性薛定谔方程的整体适定性与散射。 *Ann. of Math. (2)*，167(3)：767–865，2008年。[13] B. Dodson。当 $d \geq 3$ 时，散焦 L^2 临界非线性薛定谔方程的整体适定性与散射。 *J. Amer. Math. Soc.*，25(2)：429–463，2012年。[14] B. Dodson。 *Defocusing nonlinear Schrödinger equations*，第 217 卷。剑桥大学出版社，2019年。[15] M. Grillakis 和 M. Machedon。成对激发与相互作用玻色子的平均场近似，I。*Communications in Mathematical Physics*，324：601–636，2013年。[16] M. Grillakis 和 M. Machedon。成对激发与相互作用玻色子的平均场近似，II。 *Communications in Partial Differential Equations*，42(1)：24–67，2017年。[17] Z. Hani 和 B. Pausader。 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ 上五次散焦非线性薛定谔方程的散射。*Comm. Pure Appl. Math.*，67(9)：1466–1542，2014年。[18] S. Herr、D. Tataru 和 N. Tzvetkov。 $H^1(\mathbb{T}^3)$ 中小初值下能量临界非线性薛定谔方程的整体适定性。 *Duke Math. J.*，159(2)：329–349，2011年。[19] S. Herr、D. Tataru 和 N. Tzvetkov。 $4d$ 中薛定谔方程部分周期解的 Strichartz 估计及其应用。 *J. Reine Angew. Math.*，690：65–78，2014年。[20] Y. Hong。小势相互作用下 n ¨ *Discrete and* 体薛 *Continuous Dynamical Systems* 37 10 5355, 2017 定谔算子的 Strichartz 估计。，( )：。[21] X. Huang、Y. Sire、X. Wang 和 C. Zhang。广义 Steklov 特征函数的尖锐 l^p 估计与节点集大小。 *arXiv preprint arXiv:2301.00095*，2022 年。[22] A. D. Ionescu 和 B. Pausader。 $\mathbb{T}^3$ 上能量临界散焦非线性薛定谔方程。 *Duke Math. J.*，161 1612，2012 8 1581( )：–。[23] A. D. Ionescu 和 B. Pausader。 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ *Comm.* 上能 *Math. Phys.* 312 3 781 831, 2012 量临界散焦非线性薛定谔方程的整体适定性。，( )：–。[24] M. Keel 和 T. Tao。端点 Strichartz 估计。 *American Journal of Mathematics*，120(5)：955–980，1998年。[25] C. E. Kenig 和 F. Merle。径向情形下能量临界聚焦非线性薛定谔方程的整体适定性、散射与爆破。 *Invent. Math.*，166(3)：645–675，2006年。[26] C. E. Kenig、G. Ponce 和 L. Vega。通过压缩映射原理建立广义 Korteweg–de Vries 方程的适定性与散射结果。 *Communications on Pure and Applied Mathematics* 46 4 527 620, , ( )：–。 1993 [27] R. Killip 和 M. Vi˘san。环面上的尺度不变 Strichartz 估计及其应用。 *Math. Res. Lett.*，23 2 445( )：–472，2016年。[28] H. Koch 和 D. Tataru。负阶索博列夫空间中 1 *International* d 三 *Mathematics Research Notices* 2007 9 053 053, 2007 次非线性薛定谔方程的先验界。，( )：rnm–rnm。[29] Y. Luo、X. Yu、H. Yue 和 Z. Zhao。关于 $\mathbb{T}^3$ 上三次-五次非线性薛定谔方程的适定性结果。*arXiv:2301.13433*，2023年。[30] P. T. Nam 和 R. Salzmann。三维能量临界非线性薛定谔方程的推导及玻色气体的博戈留波夫激发。 *Communications in Mathematical Physics*，375(1)：495–571，2020年。[31] W. Schlag。薛定谔算子的色散估计：综述。，：–。[32] I. Sigal 和 A. Soffer。n粒子散射问题：短程系统的渐近完备性。*Annals of mathematics*，第 35–108 页，1987年。

[33] Y. Sire、X. Yu、H. Yue 和 Z. Zhao。奇异 Lévy 过程与广义薛定谔方程的色散效应。
arXiv preprint arXiv:2207.00485，2022年。[34] E. M. Stein。线性算子的插值。
Transactions of the American Mathematical Society，83(2)：482– 492，1956年。[35] T. Tao。
Nonlinear dispersive equations，第 106 卷， *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*。由数学科学会议委员会出版，华盛顿哥伦比亚特区；美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯，2006年。局部与整体分析。[36] K. Yang 和 Z. Zhao。关于

2 *Journal of Differential* D 维

Equations 345 447 484, 2023
三次共振系统的散射渐近行为。，：–。[37] X. Yu 和 H. Yue。关于周期性五次非线性薛定谔方程的整体适定性。
arXiv:2011.12925，2020年。[38] X. Yu、H. Yue 和 Z. Zhao。波导流形上四阶薛定谔方程的整体适定性与散射。
arXiv preprint arXiv:2111.09651，2021年。[39] X. Yu、H. Yue 和 Z. Zhao。乘积空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$上聚焦型三次非线性薛定谔方程的整体适定性。*SIAM J. Math. Anal.*，53(2)：2243–2274，2021年。[40] Z. Zhao。波导$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$上散焦型三次薛定谔方程的整体适定性与散射。 *J. Hyperbolic Differ. Equ.*，16(1)：73–129，2019年。[41] Z. Zhao。关于波导 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}$ 上散焦型非线性薛定谔方程的散射（当 $m = 2$为 3 时）。*J. Differential Equations*，275：598–637，2021年。[42] Z. Zhao。波导情形下多体薛定谔方程的 Strichartz 估计。，。[43] Z. Zhao 和 J. Zheng。三维乘积空间上散焦型三次非线性薛定谔方程的长时间动力学。 *SIAM J. Math. Anal.*，53(3)：3644–3660，2021年。

Xiaoqi Huang
Department of Mathematics, University of Maryland
Kirwan Hall 4306, College Park, MD.

Email address: xhuang49@umd.edu

Xueying Yu
Department of Mathematics, Oregon State University
Kidder Hall 368, Corvallis, OR 97331

Email address: xueying.yu@oregonstate.edu

Zehua Zhao
Department of Mathematics and Statistics Beijing Institute of Technology Beijing China. , , , „ China.
Key Laboratory of Algebraic Lie Theory and Analysis of Ministry of Education Beijing

Email address: zzh@bit.edu.cn

Jiqiang Zheng
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics
Beijing, 100088, P.R.China.

Email address: zhengjiqiang@gmail.com