arXiv:2304.00883v1 [math.DS] 3 Apr 2023

# 实解析一维映射的共轭类是解析连通流形

Trevor Clark 和 Sebastian van Strien

Abstract. 描述动力系统的拓扑共轭类是一个重要问题。本文证明，在具有指定阶数临界点的实解析一维映射空间中，一个映射的共轭类是一个实解析流形。这一结果推广了 Avila-Lyubich-de Melo [ALM] 关于拟二次单峰情形的结果，以及 Clark [C] 关于更一般单峰情形的结果。他们的方法在存在多个临界点时失效，因此我们引入实解析映射的修剪朱利亚集 这一新概念，并为实解析映射关联一个圆的外部映射，该映射具有不连续点，以及该实解析映射的修剪多项式型 复扩张。借助这些概念，我们还证明了拓扑共轭类是连通的（即使在一般单峰情形下，这一点此前也无人知晓）。更进一步，这个空间是可缩的。

在一篇姊妹论文中，我们将进一步给出本文的应用。我们将证明，在任意实解析一维映射的实解析族中，双曲参数构成一个开且稠密的子集。

## Contents

1. 引言与结果陈述 2 2. 本文的组织结构及所用思路概述 5 2

**A 部分：修剪多项式型映射及其外部映射** 7

3. 剪枝多项式型映射 7 4. 与 $f$ 相关的修剪朱利亚集：$\Omega_a \to \mathbb{C}$ 10 5. 相关外部映射：带不连续点的圆映射 15 6. 外部映射的扩张马尔可夫结构 20 7. 修剪数据 $Q$ 24 8. 双曲吸引盆附近的吸引结构 25 9. 与区间映射相关的全局修剪多项式类结构 26 10. 剪枝多项式型映射的全纯运动与线场 28 11. 存在简单抛物周期点时的全局修剪结构 30 12. 线场的不存在性 32 13. 具有相同修剪数据的两个外部映射准共形共轭 32 14. 混合共轭 34 15. 拓扑共轭映射具有准共形共轭的修剪延拓 34

日期：2023年4月4日。作者获得 ERC AdG RGDD No 339523 资助。我们感谢 K. Drach 提供的许多有益意见，以及 D. Preiss 和 M. Lyubich 进行的多次有益讨论。本文部分内容是在 MSRI 于 2022年春季举办的全纯动力学项目期间完成的。

16. 抛物情形下的混合共轭 36

**B 部分：应用** 38

17. 实解析函数空间与剪枝多项式型映射上的拓扑与解析结构 38 18. 空间 $\mathcal{A}_a^\nu$ 是巴拿赫流形 39 19. 半双曲映射的共轭类构成巴拿赫流形 40 20. 剪枝多项式型映射的配对 47 21. 混合类构成浸入解析流形 49 22. 拓扑共轭类构成浸入解析流形 50 23. 无穷小理论：水平、垂直与横截向量场 51 24. 垂直向量场的估计 54 25. 水平向量场的估计 56 26. 共轭类的余维 57 27. 混合共轭构成嵌入子流形 58 28. 混合类是巴拿赫流形 58 29. 实解析映射的共轭类道路连通 59 30. 混合共轭构成部分层状结构 61 31. 实解析映射的共轭类可缩 61

**C 部分：开放问题** 65

**附录与参考文献** 65

附录 A. 修剪朱利亚集的局部连通性，以及包含与实轴不相交的域的复盒映射 65 附录 B. 修剪朱利亚集的连续性 70 附录 C. 实解析函数空间上的拓扑与解析结构 71 附录 D. 记号与定义概要 74 参考文献 75

## 1. Introduction and statement of results

Sullivan 对动力系统领域的主要贡献之一，是将拟共形映射，尤其是可测黎曼映射定理，引入这一领域。例如，在证明有理映射不存在游荡域时，他证明了：如果一个有理映射存在游荡域，就可以构造出该映射的一个无限维空间，其中包含彼此不同的变形；这与有理映射空间是有限维的事实相矛盾，参见 [Su1]。类似地，他提出了一种策略，通过确立拟对称刚性来证明实多项式映射的双曲性稠密。在实二次情形下， [Ly2, GS2] 成功实施了这一策略；在一般情形下，相关工作见 [KSvS1, KSvS2]。关于后续论文中所发展的技术综述,

参见 [CDKvS]。拟对称刚性的局限之一是，在实数情形下没有可测黎曼映射定理的对应版本。

本文将通过展示若干情形，说明如何克服这一问题：若两个区间映射拓扑共轭，则可以用一条由同一拓扑共轭类中的映射组成的实解析路径将它们连接起来。此外，我们将证明拓扑共轭类构成实解析流形，从而推广 Avila-Lyubich-de Melo [ALM] 和 Clark [C] 在单峰情形下的一个结果。事实证明，这些结果意味着满族中的双曲性稠密。

在本文的后续工作中，我们将利用这里得到的结果证明：在具有小吸引域的实解析映射空间中，拓扑共轭类层状覆盖整个空间。这里，如果一个实解析映射的周期吸引子的实吸引域的复扩张紧包含于该映射的解析域中，我们就称该映射具有小吸引域；形式化定义见定义 4.1。这是一个相当令人惊讶的结果，因为拓扑共轭类并不 在所有单峰实解析映射构成的空间中形成层状结构。这种层状结构的一个应用是：靠近二次映射族的单峰映射实解析族，其拓扑熵随参数单调变化。

在本文的另一篇后续论文中，我们将运用本文的结果证明：双曲映射在实解析一维映射的实解析族中构成一个稠密子集。

下面更精确地陈述我们的结果。设 $I$ 为一个紧区间；为明确起见，取 $I = [-1, 1]$。设 $\nu \in \mathbb{N}$，并固定一个向量 $\nu = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_\nu) \in \mathbb{N}^\nu$，其中每个 $\ell_i \geq 2$，令 $\mathcal{A}^\nu$ 表示实解析映射 $f\colon I \to I$ 的空间，这些映射满足 $f(\partial I) \subset \partial I$，恰有 $\nu$ 个临界点 $-1 < c_1 < c_2 < \cdots < c_\nu < 1$，且 $Df(c_i) = \cdots = Df^{\ell_i - 1}(c_i) = 0$，以及 $Df^{\ell_i}(c_i) \neq 0$。为方便起见，我们还假设 $\partial I$ 是双曲排斥的，并且 $f$ 属于映射类 $\mathcal{A}^\nu_a$，其中的映射属于 $\mathcal{A}^\nu$，可全纯延拓至 $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, I) < a\}$，在 $\Omega_a$ 中恰有 $\nu$ 个阶为 $\ell_1$、……、$\ell_\nu$ 的临界点，并连续延拓至 $\Omega_a$。空间 $\mathcal{A}^\nu_a$ 配备上确界度量 $d(f, g) = \sup_{z \in \Omega_a} |f(z) - g(z)|$。按照 [Ly1], 的附录 2，我们还将在第 17 节为空间 $\mathcal{A}^\nu$ 引入一种拓扑，并介绍以巴拿赫空间为模型的实解析流形这一概念。

若 $f \in \mathcal{A}^\nu$ 只有双曲周期点（即乘子不为 0，$\pm 1$），则拓扑共轭类 $\mathcal{T}^\nu_f$ 表示集合：所有映射 $g \in \mathcal{A}^\nu$ 只有双曲周期点，且存在一个保序拓扑共轭，将 $f$ 上的 $I$ 映射到 $f$ 上的 $g$，并将 $f$ 的临界点映射到 $g$ 的临界点。由于 $f$，$g \in \mathcal{A}^\nu$，这个共轭必然保持临界点的阶 $\ell_i$。设 $\zeta(f)$ 为 $f$ 的周期吸引子的吸引域中，具有两两不相交的无限轨道的临界点的最大数量。

**定理 A** (流形结构)。 假设 $f \in \mathcal{A}^\nu$ 的所有周期轨道都是双曲的。那么

*(1)* $\mathcal{T}^\nu_f$ 是 $\mathcal{A}^\nu$ 中的嵌入实解析子流形，以一族巴拿赫空间为模型，余维为 $\nu - \zeta(f)$；
*(2)* 对每个 $a > 0$，$\mathcal{T}^\nu_f \cap \mathcal{A}^\nu_a$ 都是 $\mathcal{A}^\nu_a$ 中的嵌入实巴拿赫子流形，余维为 $\nu - \zeta(f)$。

在第 17 节中，我们将正式定义以巴拿赫空间族为模型的嵌入实解析子流形。

**定理 B**（拓扑共轭类是可缩的）。 假设 $f \in \mathcal{A}^\nu$ 的所有周期轨道都是双曲的。那么

*(1)* 对每个 $g \in \mathcal{T}_f^\nu$，都存在一个实解析映射的单参数族 $f_t\colon\ I \to I$，取值于 $\mathcal{A}_a^\nu$，且满足 $f_0 = f$、 $f_1 = g$，使得 $f_t$ 关于 $t$ 解析依赖，并且对每个 $t \in [0,1]$， $f_t$ 在 $I$ 上与 $f$ 拓扑共轭。*(2)* 此外，若 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，则流形 $\mathcal{T}_f^\nu \cap \mathcal{A}_a^\nu$ 是可缩的。

在第 19–31 节中，我们将陈述相应的定理，其中涉及 $f$的实混合类 $\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$；这里（在 $f\colon\ I \to I$ 的所有周期轨道均为双曲的情形下） $\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$ 定义为 $\mathcal{T}_f$ 的子集，在该子集中，拓扑共轭可延拓为周期吸引子某个小复邻域内的全纯共轭；等价地，也可延拓为周期吸引子实吸引域的某个复邻域内的全纯共轭。特别地，对于每个映射 $g \in \mathcal{H}_f$，其周期吸引子的乘子与 $f$对应周期吸引子的乘子相同。在定理 A 和定理 B 的“混合”类比定理中，并不要求所有周期吸引子均为双曲的；但若存在抛物周期点，则需要附加假设（即抛物周期点为“简单的”）并在证明中给出相应论证。

**定理 C** (部分层状结构)。 假设 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$ 的所有周期轨道都是双曲的。那么，$f$ 在 $\mathcal{V}_2$ 的每个邻域中都有一个由混合共轭类构成的层状邻域。更准确地说，对于 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中 $f$ 的每个邻域 $\mathcal{V}_2$，都存在 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中 $f$ 的一个邻域 $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$，使得对于每个 $g \in \mathcal{V}_1$ 和每个 $g_0$，$g_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{H}_g^{\mathbb{R}}$ 都存在一条路径 $g_t \in \mathcal{A}_a^\nu$、 $t \in [0,1]$，位于 $\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{H}_g^{\mathbb{R}}$ 内并连接 $g_0$ 与 $g_1$。

如前所述，定理 A 和定理 C 关于混合类的结论，是在单峰映射具有二次临界点的背景下于 [ALM] 中得到的。在 [GSm], 中，研究者采用完全不同的方法，在分段扩张映射的情形下证明了一个与定理 A 类似的结果。

定理 A 和定理 B 证明中的主要步骤之一是

**定理 D**（外部映射与剪枝多项式型结构）。 对于每个仅有双曲周期点的映射$f \in \mathcal{A}^\nu$，都存在

（*1*）一个带有不连续点的圆映射（称为外部映射），与 $f$相关联；（*2*）一个修剪多项式型映射 $F\colon\ U \to U'$，它是实解析映射 $f$ 的延拓，且其定义域 $U$ 是 $I$的一个邻域。（*3*）对于每个 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，都存在一个邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}_a^\nu$，使得其中每个映射 $g \in \mathcal{U}$ 都有一个修剪多项式型延拓 $G\colon\ U_g \to U_g'$，该延拓由 $F\colon\ U \to U'$通过全纯运动得到。更精确的陈述见定理 *3.1*。（注意，不要求 $g$ 与 $f$共轭。）

修剪多项式型映射的概念将在第 3 节中定义。关键在于，它们基本上具有多项式型映射的所有有用性质；图1给出了一个例子。更正式的表述见定理 3.1。这些结果的证明主要依赖于 [CvS]证明的拟对称刚性，以及 [CvST]中的复界。这些结果建立在 [KSvS1], 的增强嵌套构造之上，另见 [KvS, CDKvS]。

上述定理针对的是 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$ 没有抛物周期点的映射。大多数定理在 $f$ 有抛物周期点时也仍然成立，例如见第 11 节。定理 C 中的层叠结构在具有抛物周期点的映射附近并不成立，这正是目前正在撰写的一篇姊妹论文的主题。

1.1. **进一步的应用**。 在一篇姊妹论文中将证明，本文的结果意味着，在实解析一维映射的实解析族中，双曲性是稠密的。

1.2. **记号与术语**。 我们用 $\mathbb{C}$ 表示复平面；如果 $z \in A$ 当且仅当 $\bar{z} \in A$，则称子集 $A \subset \mathbb{C}$ 为实对称的。若函数 $g\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ 满足 $g(\bar{z}) = g(z)$，则称其为实对称函数。若 $U \subset \mathbb{C}$ 是一个开集，我们用 $\mathcal{B}_U$ 表示定义在 $U$ 上且在 $U$上连续的全纯映射的集合。对于 $F \in \mathcal{B}_U$，我们定义

$$B_U(F, \epsilon) = \{G \in \mathcal{B}_U; |G(z) - F(z)| < \epsilon \text{ for all } z \in \overline{U}\}.$$

如前所述，对于 $a > 0$，我们令 $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, I) < a\}$，其中 dist 表示 $\mathbb{C}$上的欧几里得距离。

按引言中的定义， $\mathcal{A}^\nu, \mathcal{A}_a^\nu$。我们用 $\mathrm{Cr}(f)$（或简称 Cr）表示可微映射 $f$ 的临界点集合。需要强调的是， $f \in \mathcal{A}^\nu$ 至多只有有限个吸引周期点，见 [MMvS, dMvS]，；但吸引周期点的吸引域中不一定包含临界点。我们用 $B_0(f) \subset I$ 表示 $f$ 的周期吸引子的直接吸引域之并： $I \to I$。注意，有些周期吸引子的直接吸引域中可能不含临界点。

给定集合 $K \subset \mathbb{C}$，我们用 $\mathrm{cc}_x(K)$（或 $\mathrm{cc}_x K$）表示包含 $x$ 的 $K$ 的连通分支；若 $A \subset \mathbb{C}$，则 $\mathrm{cc}_A(K)$ 表示包含 $A$ 中各点的 $K$ 的连通分支之并。

## 2. 思路的组织与概述

本文 A 部分引入修剪多项式型映射的概念。正如我们将要说明的那样，拥有修剪多项式型映射几乎与拥有多项式型映射同样有利。事实上，这使我们能够将 [ALM] 中关于不可重整化单峰映射的结果推广到一般情形。特别是，我们无需像该文那样假设“大界”。在第 3 节中，我们阐述修剪多项式型映射的概念，并陈述定理 3.1，该定理断言，每个 实解析区间映射都有一个复解析延拓，且该延拓是修剪多项式型映射。因此，我们在整个动力区间 $I$ 的复邻域中得到良好的马尔可夫结构。实解析映射存在此类修剪多项式型延拓的证明分为几个步骤：

(1) 首先，我们为一个实解析映射关联一个修剪朱利亚集。如果这个实解析映射实际上是一个多项式，那么这个修剪朱利亚集 $K_X$ 只是通常朱利亚集的一个子集，但经过修剪后位于区间 $I$的一个小邻域内。朱利亚集的修剪位置取决于一个集合 $X$，其中 $X$ 由围绕 $f$的临界值的区间边界点组成。(2) 利用 $\mathbb{C} \setminus K_X$的一致化以及 $f$在 $K_X$附近的映射，我们得到一个保序的实解析圆映射（其“次数”取决于 $f$的临界点的阶），且带有不连续点（ $f$ 的每个临界点都对应于 $f_X$的一个不连续点 ˆ ˆ）。这个圆映射称为与 $f$ 相关联的外部映射 $f_X$： $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ 和

修剪数据 $X$。之后，我们将用一种组合性更强的方式，通过一个子集 $Q \subset \partial\mathbb{D}$ 来编码修剪数据；该子集在映射 $z \mapsto z^{|\nu|}$ 下正向不变，其中$|\nu| = \sum_{i=1,\ \ldots\ldots,\ \nu} \ell_i$。

（3）映射的拓扑性质 $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}}$ 可用于在区间 $I$附近获得一种修剪多项式型结构。

第 4 至 9 节给出了这一构造；随后在第 13 节中证明，两个拓扑共轭的区间映射的修剪多项式型延拓彼此拟共形共轭，并且这种共轭保留了这些修剪多项式型映射的结构。

在本文的 B 部分，我们将进一步证明，修剪多项式型映射在一定程度上可以像多项式型映射那样处理。这意味着，有了这种结构，我们便不再需要像 [ALM], 中那样在 $I$ 周围使用项链邻域，而可以在 $I$的一个全复邻域上，构造两个共轭区间映射之间的拟共形共轭。这使我们能够证明一个类似于 [Ly2]中的配对结果：对于具有相同（组合）修剪数据的两个修剪多项式型映射，存在一个新的修剪多项式型映射，它与第一个映射拟共形共轭，并且具有与第二个映射相同的外部映射，见第 20 节。由此可知，一个共轭类继承了另一个共轭类的流形结构。为确定这些流形的余维，我们将 [ALM]中的无穷小回拉论证和关键引理推广到我们的情形。一旦具备这些技术，定理便可直接得出。

与 [ALM] 的主要区别如下：

(1) 我们不可有界时，采用类多项式论证 $\mathcal{H}_{\mathcal{H}}$。在 [Ly1] 中，当几何无界时，采用与 [ALM] 类似的论证。这里无需作此区分。我们通过引入修剪多项式型映射的概念，并证明每个实解析区间映射都有一个具有这种结构的复扩张，来克服缺乏大界的问题。（2）在 [ALM] 中，先为双曲单峰映射构造流形结构（利用隐函数定理），再利用双曲映射的稠密性以及 λ 引理论证（对这些映射作复扰动），将这一流形结构延拓到非双曲映射，从而为每个单峰映射$f \in \mathcal{A}_a^\nu$ 得到流形结构 $\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$。这里不能使用这一 λ 引理，因为我们的流形余维更高（我们的映射具有 $\nu$ 临界点）。因此，我们利用修剪多项式型结构得到一个配对结果：给定两个映射，可以找到第三个映射，它与第一个映射混合共轭，并且具有与第二个映射相同的外部映射。然后，我们基本上按照 [Ly1] 的方法，从一个给定的邻近双曲映射的流形结构出发，为非双曲映射的混合类继承流形结构。（3）在 [ALM] 中，垂直向量的构造与 [Koz], 中一样，先构造光滑垂直向量场，再进行多项式逼近。这是 [ALM], 中最微妙的论证之一；为此引入了拼图映射的概念。这类映射的定义域构成区间的项链邻域 $I$（而非真正的邻域）。这里我们可以避免这番讨论，大体上按照类多项式情形的论证方式，并遵循 [Ly1]的思路进行。

与 [Ly1] 中讨论的类多项式情形不同的是

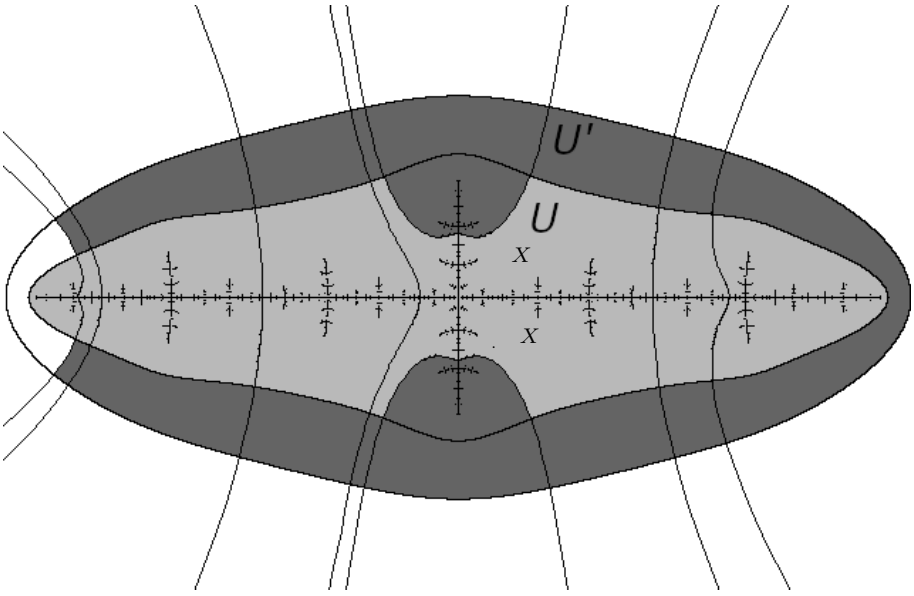



FIGURE 1. 一个修剪多项式型映射 $f\colon\ U \to U'$ 与一个二次区间映射$f$相关联：$I \to I$ 该映射只有排斥周期点，且其修剪朱利亚集 $K_X(f)$ 由 $J$ 的原像的闭包构成，也就是说，在点 $X = \partial J$ 的原像处进行修剪。集合 $\Gamma$ 由绘制的曲线（与$U$ 相交）构成，这些曲线是落在某个周期点上的一条射线的原像。注意，$U \setminus U'$ 等于 $U$ 位于 $\gamma$ 左侧的部分。在这幅图中，绘制的曲线是与该二次映射相关的 B¨ottcher 坐标所得到的射线和指数曲线；但一般来说，我们需要用局部方法构造这些曲线。

（4）在我们的情形（修剪多项式类映射）中，由于不连续点的存在，这些外部映射的空间比多项式型映射的情形更复杂。因此，我们既不尝试证明，也不使用（在我们的设定下）外部映射的空间具有流形结构这一结论。这意味着，例如，我们关于共轭类可缩性的证明与[AL]中的证明截然不同。请注意，[ALM]中并未声称有这样的结果。

我们证明定理 B2（即混合类是可缩的）时，一个重要步骤是利用拟共形运动（通过单位分解论证得到）为实混合类中的每个映射指定一个修剪多项式型映射。这里我们使用 ST] 在 [ 中引入的拟共形运动概念（它是全纯运动的连续类比）。

## A 部分：修剪多项式型映射及其外部映射

### 3. PRUNED POLYNOMIAL-LIKE MAPPINGS

本文的一项主要技术创新是引入了修剪多项式型映射这一概念，并证明了每个实解析映射都可以与这样一个修剪多项式型映射相联系。

**定义 3.1**（修剪多项式型映射）。如果一个全纯映射 $F\colon\ U \to U'$ 在两个开集 $U, U'$之间定义，这两个开集由有限个连通分支组成，并且连同有限个弧或闭曲线的并集 $\Gamma, \Gamma_a^*, \Gamma_a$ 满足以下条件，则称其为 修剪多项式型映射：

- $F$ 全纯地延拓到$U$的一个邻域。

- $U' = F(U)$ 和 $F(\partial U) \subset \partial U' \cup \Gamma$;
- $U \cap U' \neq \emptyset$、 $\partial U \cap \partial U' \subset \Gamma$和 $\partial U' \cap U \subset \Gamma \cup \Gamma_a^* \cup \Gamma_a$;
- $\Gamma$ 的每个连通分支要么是 $U'$ 中的一条分段光滑弧，连接 $U'$的边界点；要么包含于 $\partial U' \cup \partial U$中;
- $F$（$\Gamma \cap \overline{U}$）$\supset \Gamma$;
- $\Gamma_a^*$ 和 $\Gamma_a$ 的每个连通分支都包含于周期吸引子 $F$的吸引域中;
- $U' \setminus \Gamma'$、 $U' \setminus$（$U \cup \Gamma'$）、 $U \setminus \Gamma'$和 $U \setminus$（$U' \setminus \Gamma'$）的每个连通分支都是拟圆盘。这里 $\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma_a^* \cup \Gamma_a$。

我们称修剪多项式型映射为实的，若 $U, U'$是实对称的，且 $F$与复共轭可交换。

注3.1。 当 $U \subset U'$和 $\Gamma = \emptyset$时， $U$紧包含于 $U'$，且此定义就化为多项式型映射的定义。此外，如果 $F$ 没有周期吸引子，那么$\Gamma_a = \Gamma_a^* = \emptyset$。

注3.2。 图1展示了这样一个修剪多项式型映射的例子。此例表明，一般而言， $U \setminus U' \neq \emptyset$ 和 $U' \setminus U \neq \emptyset$。本文中， $\Gamma$ 的曲线将由落在 $F$的实周期点或前周期点上的“射线”构成。注意，图1中的修剪多项式型映射不是真映射。

注记 3.3。 如果 $f$ 在其吸引域内有一个临界点的周期吸引子，那么 $\partial U'$ 中存在一小段会被映射到一条曲线上，而该曲线经过迭代后会到达吸引不动点，见图10。

如果 $F$： $U \to U'$ 是一个修剪多项式型映射，我们称

$$K_F := \{z \in \mathbb{C}; F^n(z) \in \overline{U} \text{ for all } n \geq 0\}$$

其为： 的修剪充满朱利亚集，而 $J_F$： $= \partial K_F$ 是其修剪朱利亚集。注意，虽然 $K_F \subset U$， $K_F$ 不一定包含在 $U$ 中，也不一定是后向不变的，例如见图1。我们将看到，对于下文定理中构造的修剪多项式型映射，有 $K_F \cap \partial U = K_F \cap \partial U'$。

现在我们来证明，可以将一个修剪多项式型映射与实解析映射$f \in \mathcal{A}_a^\nu$关联起来。由于$\Omega_a$ 可能是$\overline{I}$的一个很小的邻域，因此不能指望$f^{-1}(\mathbb{R})$（甚至 $f^{-1}(I)$）包含在$\Omega_a$的内部，也就不应指望$f$： $I \to I$ 具有真正的多项式型延拓。本节将构造一个几乎同样好的对象，即下面定理给出的延拓（其中包含定理 D 的一部分）。

**定理 3.1**（与 $f$相关的修剪多项式型映射）。假设 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$ 只有双曲周期点。与 $f$：$-I \to I$相关的复平面中存在开集 $U$、$U'$以及有限条曲线的并 $\Gamma$、$\Gamma_a^*$、$\Gamma_a$，使得

*(1)* $f$延拓为映射 $F$： $U \to U'$，它与 $\Gamma$、$\Gamma_a^*$、$\Gamma_a$共同构成修剪多项式型映射。*(2)* $U$是 $I$的一个邻域，并且对每个 $\delta > 0$，可以选取集合 $U$、$U'$，使它们包含在 $I$的一个 $\delta$-邻域内。*(3)* 存在 $f$ 的一个邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}_a^\nu$，使得每个映射 $g \in \mathcal{U}$ 都有一个修剪多项式型延拓 $G$，它由 $F$： $U \_\to U'$ 经全纯运动得到。更确切地说，存在一个关于 $U$、$U'$的全纯运动 $H_\lambda$、 $\lambda \in \mathcal{U}$，其中

$H_f = id$使得每个 $g \in \mathcal{U}$都有一个复扩张 $G$： $H_g(U) \to H_g(U')$，它是修剪多项式型映射。此外， $G(z) = H_g^{-1} \circ F \circ H_g(z)$ 适用于 $z \in \partial U$。

为了得到实解析映射$f$： $I \to I$ 的修剪多项式型延拓 $F$： $U \to U'$，我们将为 $f$关联：

- 一个与 $f$关联的“修剪朱利亚集” $K_X \subset \mathbb{C}$ 。ˆ - 一个“外部”映射 $f_X$： $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$，它是实解析的，但在有限个不连续点处除外。ˆ - 利用 $f_X$ 的扩张结构，以及 $f_X$的周期吸引子的立即吸引域附近的吸引结构。- 修剪多项式型结构的持久性在命题 10.3 中得到证明。

备注 3.4。 如果 $f$ 没有周期吸引子，那么 $\Gamma_a^* = \Gamma_a = \emptyset$ 和 $\Gamma$ 由落在最终会映射到排斥周期点的点上的“射线”组成。如果 $f$ 周期吸引子按照定义 4.1 的意义是小 的（粗略地说，这意味着吸引域包含在 $f$的解析域中），那么我们也可以确保$\Gamma_a^* = \Gamma_a = \emptyset$，见定理 4.1。

注记 3.5。 如果 $f$ 有周期吸引子，那么 $\Gamma$ 也可能由落在周期吸引子上的曲线段组成，参见第8节。不过，如果 $f$ 的周期吸引子的吸引域紧包含于 $f$的解析域中，那么可以确保这些吸引域紧包含于 $F$ 的解析域中： $U \to U'$，并且可以再次取 $\Gamma_a^* = \Gamma_a = \emptyset$，参见第 4.1 小节。

注记 3.6。 即使允许 $f$ 具有简单抛物周期点（见定义 11.1），前述定理仍然成立，参见第 11 小节；但定理 3.1 第 (4) 部分的陈述需要修改，参见第 11.1 小节。

ALM 附录 B 中针对单峰映射给出了一个与定理 3.1 有些相似的结果。该结果适用于临界点非退化且至多可重整化有限次的映射。他们的证明要求主巢在某一层具有较大的缩放因子；该证明不适用于多峰映射或高次单临界映射。因此，我们的构造必然截然不同且更为抽象，因为我们需要处理多峰映射和无限可重整化映射。

为了构造相应的修剪多项式型映射，我们将首先定义修剪朱利亚集的概念，说明它靠近实轴，然后将这个对象（以及映射 $f$）与某个带有不连续点的圆映射关联起来。

**3.1. 区间映射及其延拓所用的记号。**区间映射记为 $f$： $I \to I$，其复扩张记为 $f$： $U \to \mathbb{C}$。具有修剪多项式型映射结构的延拓记为 $F$： $U \to U'$。映射 $f$： $U \to \mathbb{C}$ 将通过某个黎曼映射 $\phi_X$ 诱导出一个外部映射 $f_X$： $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$。该映射的复扩张仍记为 $f_X$ ；但对于此扩张到 $\partial\mathbb{D}$ 的某个邻域、且具有扩张马尔可夫结构的部分，我们记为 $F_X$： $E \to E'$。集合 $E$， $E'$ 将用于构造 $f$ 的修剪多项式型延拓中“扩张”部分，记为 $F$： $E \to E'$。此外，在 $f$ 的吸引域附近，我们也有合适的结构，由此可得到 $f$ 在吸引域附近的延拓 $F$： $B \to B'$。结合 $U := E \cup B$ 和 $U' = E' \cup B'$，即可得到所需的修剪多项式型映射 $F$： $U \to U'$。

## 4. A pruned Julia set associated to $f\colon \Omega_a \to \mathbb{C}$

如前所述，为证明定理 3.1，我们将先定义修剪朱利亚集的概念。令 $1 \le \nu' \le \nu$ 表示 $f\colon I \to I$ 的不同临界值的个数。取临界值 $f(c_1)\dots, f(c_\nu)$ 的（实）两两不交区间邻域 $J_1, \dots, J_{\nu'} \subset I$，使得包含 $c_i$ 的 $f^{-1}(J_i)$ 的连通分支的闭包包含于 $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, I) < a\}$。接着令 $J = \cup J_i$ 并定义

$$J^{-1} = \overline{f^{-1}(J) \setminus \mathbb{R}} \text{ and } X = \partial J^{-1}.$$

为便于后文使用，也将 $\mathrm{Cr}'(f)$ 定义为 $f$ 的周期临界点子集。我们称 $J_i$ 修剪区间，并将点 $X$ 修剪点。通过选择足够小的区间$J_i$，我们可以确保

(1) 每个 $J_i$ 恰好包含 $f$ 的一个临界值；(2) $f^{-1}(J)$ 由弧组成，其闭包包含于 $\Omega_a$ 中；(3) 如果 $J_i$ 中的临界值 $f(c_i)$ 位于某个周期吸引子的吸引域内，那么我们假设 $J_i$ 紧含于该吸引域中，而且不包含非周期临界点逆向轨道上的任何点。

区间 $J$（以及有限集 $X$）将用于定义与 $f$ 相关的修剪朱利亚集：$\Omega_a \to \mathbb{C}$。

定义 为精确定义修剪朱利亚集 $K_X(f)$，归纳地定义 $K_n$，方法是取 $K_0 = I$，

$$K_1 = K_0 \cup \mathrm{cc}_{K_0} J^{-1} \tag{4.1}$$

并且对于 $n \ge 1$,

$$K_{n+1} := K_n \cup \mathrm{cc}_{K_n'} f^{-n}(J^{-1}). \tag{4.2}$$

其中 $\mathrm{cc}^{K_n'}$ 表示与 $K_n'$ 相交的连通分支：$= K_n \setminus \mathrm{Cr}'(f)$。因此，在 $K_{n+1}$ 的定义中，我们排除了那些再次与临界点相交的 $J^{-1}$ 的任何原像。定义（4.2）隐含着，$J$可以选取得使得对于每个 $n \ge 0$，$\mathrm{cc}_{K_n'} f^{-n}(J^{-1})$再次包含于 $\Omega_a$ 中。在定理 4.2 中，我们将证明可以选取 $J$，使这一性质确实成立。

例如，集合 $K_1$ 由 $I$ 以及位于 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 中的 $2(\ell_i - 1)$ 条弧组成；对于每个 $i$，这些弧都附着于 $c_i$。注意，$K_{n+1} \setminus K_n \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，且包含于 $f^{-n}(K_1 \setminus I)$ 中。从定义立即可知，对于所有 $n \ge 0$,

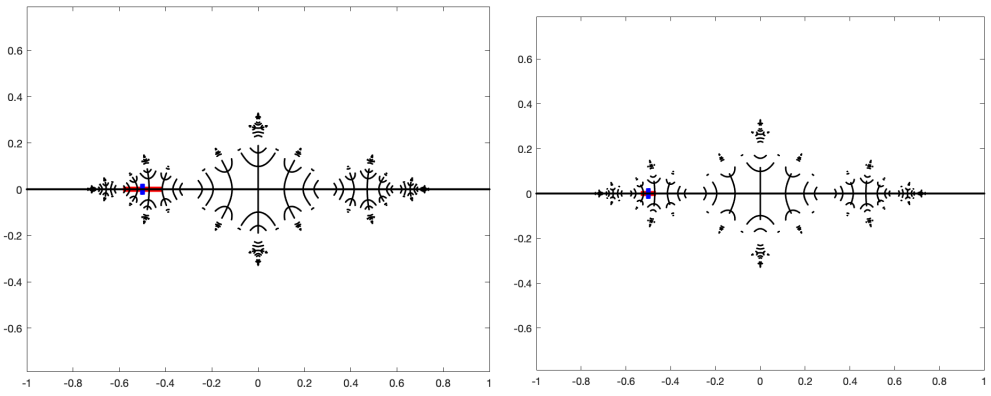
$$f^{-1}(K_n) \supset K_n \text{ and } K_{n+1} \supset K_n.$$

接下来定义

$$K_X(f) = \text{ closure of } \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n. \tag{4.3}$$

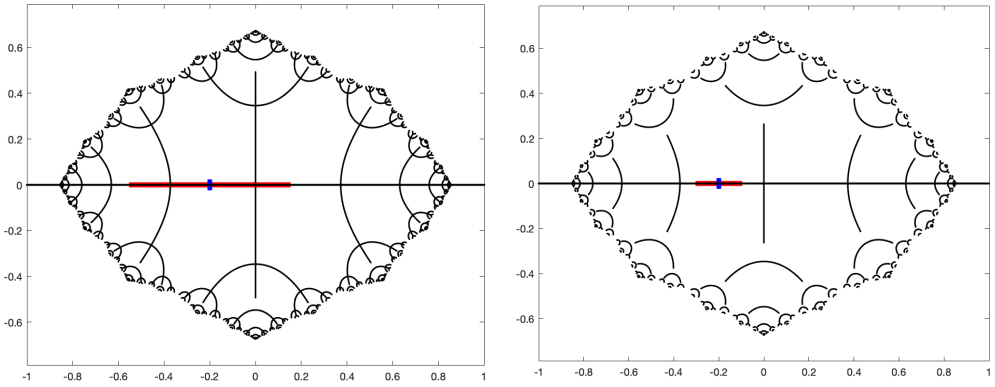
注意，$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ 是次数有限的有限树，其“复端点”或“修剪点”是 $X$的原像。我们将称 $K_X(f)$ 为与 $f$相关的修剪朱利亚集：与集合 $X$相关的 $\Omega_a \to \mathbb{C}$。注意，对于我们将构造的修剪多项式型延拓$F\colon U \to U'$，我们未必有 $K_X(f) \subset K_F$。然而，如果 $f$只有排斥周期轨道，那么我们将得到 $K_F = K_X(f)$，见引理 9.2。

我们使用记号 $K_X(f)$ 而非 $K_{J_i}(f)$ 的原因是，对于没有周期临界点的实多项式，$K_X(f)$ 是通过在 $f$ 的填充朱利亚集上修剪所有 $X$ 的原像得到的，参见例 4.1(ii)。如果 $f$ 有周期临界点，



(a) (b)

FIGURE 2. 实二次映射 $f$的临界值附近两个略有不同的小“修剪”区间$J$（用红色绘出）所对应的$\cup_{i=1,\dots,8} f^{-i}(J^{-1})$。注意树结构 *pruned*的位置各不相同。若将$\setminus\mathbb{R}$记为 $X = f^{-1}(\partial J)$，那么修剪朱利亚集 $K_X$ 对应于与 $I$相连的 $J$的复原像。通过将区间 $J$取得足够小，可以确保 $K_X$ 靠近 $I$ （因此位于 $f$ 向复平面的延拓的定义域内）。



(a) (b)

$F_c(z)$这个二次映射 $=(-c+1)z^2+c$，经过归一化，使得 $F_c(\pm 1) = 1$，其中 $c = -0.2$。这里，我们取临界值 $c$ 附近的区间 $J$，使其位于吸引不动点的吸引域内，并考虑 $J$的两种取值：当 $J$ 变小时，集合 $K_X(F)$会缩小；尤其是当 $J$ 不包含临界点的反向迭代时。这里和其他所有地方一样，$X = \partial J^{-1}$。

那么我们就要进行更多修剪，否则无法确保 $K_X(f)$ 接近实轴。

例 4.1（集合 $K_X$）。让我们通过几个情形来说明修剪朱利亚集的概念：（i）如果 $I = [-1, 1]$，$J = (-\epsilon,\ \epsilon)$，其中 $\epsilon < 1$ 且 $f(x) = x^\ell$，那么 $K_0 = I$，并且对于 $n \geq 1$，

$$K_n = \bigcup_{k=1,\dots,\ell-1} e^{\pi i k/\ell} \cdot J' \bigcup I \text{ where } J' = [-\epsilon^{1/\ell}, \epsilon^{1/\ell}].$$

注意，对于 $n \geq 1$，$K_n = K_1$，这是因为临界点 $c_1 = 0$ 的唯一原像就是它本身，也因为 $K_1' = K_1 \setminus \{0\}$ 的定义。因此在这种情况下，$K_X(f)$ 由经过 0 的 $\ell$ 条曲线组成。如果我们在定义 (4.2) 中用 $\mathrm{cc}_{K_n} f^{-n}(J)$ 替换 $\mathrm{cc}_{K_n'} f^{-n}(J)$，那么我们

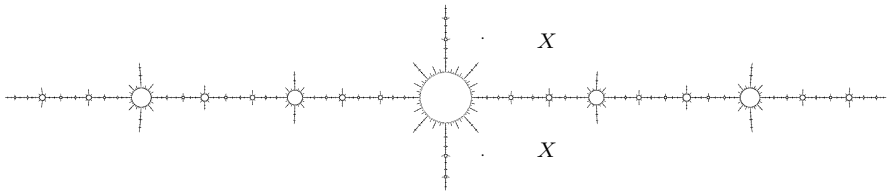



FIGURE 4. 如果吸引域靠近区间 $I$，那么可以沿着图中所示有限集合 $X = \partial J^{-1}$ 的所有原像进行修剪。如果 $f$ 是实解析的，那么 $K_X(f)$ 就是区间 $I$ 附近的朱利亚集的类似物。

就会得到 $K_X(f)$ 等于闭单位圆盘，这不符合我们的目的。请注意， $K_{n+1}$ 的归纳定义中 $K'_n$ 的相关性仅在 $f$ 有周期临界点时才会出现。

(ii) 设 $I = [-1, 1]$, $f(z) = (-c + 1)z^2 + c$，并将其归一化，使得 $f(\pm 1) = 1$。如果 $c < 0$，那么$f$有一个吸引的反向不动点 $a \in (c, 0)$。令 $x \in (-1, a)$ 满足$f(x) = 0$。如果修剪区间 $J \ni c$ 选得足够大，使其包含 $[x, c]$，那么 $\mathbb{C} \setminus K_X$ 就有有界连通分支，例如位于 0 西北方的区域 $A$ ，见图3(a)。注意， $A$ 经 $f$ 映射后成为其复共轭 $A$，并且 $A$ 和 $A$ 的边界各自包含一个周期为二的周期点。此外， $f$ 将 $B := \text{int}(A \cup A)$ 映入$B \setminus [x, c]$ ，因此相对于双曲度量是压缩的。注意，我们要求 $J$ 不包含非周期临界点的反向迭代，因此实际上 $\mathbb{C} \setminus K_X$ 不会有有界连通分支，见图3(b)。

(iii) 假设 $I = [-1, 1]$ 和 $f\colon I \to I$ 是一个多项式，其所有临界点均为实数且非周期，那么对每个 $n \geq 0$，我们都有 $K_n = \{z \in \mathbb{C}$；当$J = (-1, 1)$ 时， $f^n(z) \in I\}$，因此 $K_X$ 是 $f$的通常朱利亚集。另一方面，若 $J \Subset (-1, 1)$，则 $K_n$是 $f$的朱利亚集的一个子集，该朱利亚集在 $X = \partial f^{-1}(J) \setminus \mathbb{R}$的原像处被修剪。同样， $K_n$由有限条光滑曲线组成，而 $K_X$ 是通常的朱利亚集，但在 $X$的无穷多个原像处被修剪。集合 $K_n$ 如图 2、3 和 4 所示。

(iv) 如果次数为 $\ell_1$ 的一个临界点 $c_1$ 经过 $k$ 步后映射到另一个次数为 $\ell_2$的临界点$c_2$ ，那么 $K_1$ 有 $\ell_i$ 条曲线从 $c_i$发出， $i = 1,2$；但此时 $K_{k+1}$ 有 $\ell_1 \cdot \ell_2$条曲线从 $c_1$发出。

(v) 如果 $f$ 没有周期吸引子，那么临界点的逆向轨道在 $I$中稠密（这是由不存在游荡区间推出的）。如果 $z \in I$ 是这样一个点，且 $f^n$（$z$）是一个临界点，那么 $f^{-(n+1)}$（$J$）将包含一条经过 $z$且横截于 $I$的曲线。另一方面，如果 $f$ 有一个包含临界点 $c$ 的周期吸引子，并且 $J \subset I$ 是 $f$（$c$）的一个非常小的邻域，那么 $J$中可能没有任何临界点的逆向轨道上的点。在这种情况下， $K_n$ 具有特别简单的树结构。

**4.1. 周期吸引子具有小吸引域的映射**。一般而言，吸引域中包含临界点 $c$ 的周期吸引子的吸引域可能会与 $f$ 的解析域边界相交。在这种情况下，我们将选择修剪区间 $J \ni f(c)$，使其包含在某个周期吸引子的吸引域内。然而，如果 $f$ 的周期吸引子的吸引域足够小，能够紧致地包含在 $f$ 的解析域内，那么我们可以按如下方式定义更大的 $K_X(f)$。更确切地说，

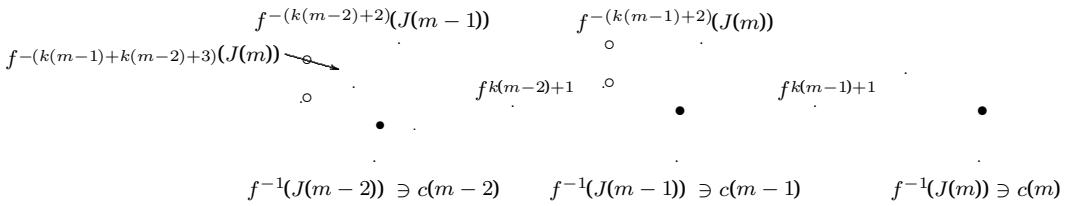



FIGURE 5. 集合 $K_n$ 的树结构。图中用符号 • 标出了临界点。符号 ○ 表示 $f^{-1}(z(m-1))$ 中包含 $c(m-1)$ 的连通分支内的点，以及 $f^{-1}(z(m-2))$ 中包含 $c(m-2)$ 的连通分支内的点。

**定义 4.1**（小吸引域）。我们称 $f$ 具有小吸引域，或者称 $f$ 的吸引域包含在解析域内，如果对于每个吸引域中包含实临界点的周期吸引子，都有以下性质：

对于每个周期吸引子 $a$，设 $B_0(a)$ 为周期吸引点 $a$ （可能为抛物型）的立即（复）吸引盆，并设 $B_{\mathbb{R}}(a)$ 为与实轴相交的 $B_0(a)$ 的所有原像的并集。那么

$$\overline{B_{\mathbb{R}}(a)} \subset \Omega,$$

其中 Ω 是 $f$ 的一个解析域，在该域上 $f|\Omega$ 只有实轴上的临界点。

在此定义中，允许 $f$ 有抛物周期点。若 $f$ 有小吸引域，我们取修剪区间 $J_i$，使得对 $f$ 的每个临界点 $c_i$，都有 $\mathrm{Comp}_{f(c_i)} B_0(a) \cap \mathbb{R}$ 紧包含于 $J_i \ni f(c_i)$，并且集合 $K_{X,O}(f)$ 紧包含于 $f$的一个解析域中，其中

$$K_{X,O}(f) := K_X \cup \bigcup_i \mathrm{cc}_{K_X} \overline{B_{i,O}}$$

且其中 $B_{i,O}$ 是 $B_O$的连通分支。该定义隐含着，可以选择 $J_i$，使得 $\mathrm{cc}_{K_X} B_{i,O}$ 仍属于 Ω。在定理 4.2 的证明中，我们将证明，如果 $f$ 有小吸引域，那么确实可以选择 $J_i$ 使上述条件成立。

I若 f $f$ 有小吸引域，则有以下定理 3.1 的类似结果 :

**定理 4.1**。若 $f \in \mathcal{A}^\nu$ 有小吸引域，则定理 *3.1* 的性质对$\Gamma^* = \Gamma_a = \emptyset$成立。

注记 4.1。上述扩张 $K_{X,O}(f)$ 确保吸引周期轨道在我们将在下一节定义的外部映射 $f_X$ 中不可见。事实上，如果 $f$ 的吸引域较小，那么我们将在下文构造的圆映射 $f_X$ 将没有周期吸引子，见下文引理 5.1。

注记 4.2。假设 $f$ 只有排斥周期点。那么，我们不仅会得到 $f$的一个修剪多项式型延拓 $F$，还会通过全纯˜ ˜ ˜运动，得到所有靠近 $f$的映射 $f$ 的修剪多项式型延拓 $F$。当然， $f$ 可能有吸引周期轨道（它们必然具有小吸引域），而这些吸引子的吸引域将紧包含于修剪多项式型延拓的定义域˜ ˜ ˜$F$中： $U \to U'$，正如我们将在第 6 节中证明的那样。

**4.2. 如何构造 $K_n$ 的树结构。** 虽然这与我们的讨论无关，但我们还是来讨论 $K_n$的树结构。取 $z \in K_n \setminus \mathbb{R}$。那么，包含 $z$ 的 $K_n \setminus \mathbb{R}$ 的连通分支 $L_n(z)$ 包含一条连接 $z$ 和 $\mathbb{R}$ 的路径，该路径由有限条彼此横截的光滑弧组成，这些弧按如下方式生成：存在 $0 \le m \le n$和 $k \ge 0$，并且对于每个 $1 \le i \le m$，存在 $f$的一个临界点 $c(i)$、集合 $\{J_1, \dots, J_{\nu'}\}$中包含临界值 $f(c(i))$的一个区间 $J(i)$、一个点 $z(i) \in J(i) \setminus \{c(i)\}$，以及一个整数 $k(i) \ge 1$，并满足以下性质。

取一条经过 $c(m)$ 的光滑曲线 $f^{-1}(J(m))$，考虑 $z(m-1) \in J(m-1)$ 和$k(m-1) \ge 0$，使得 $f^{k(m-1)}(z(m-1)) = c(m)$。于是，$f^{-(k(m-1)+1)}(J(m))$ 包含一条经过 $z(m-1) \in J(m-1)$ 且与 $\mathbb{R}$ 横截的光滑弧，而 $f^{-(k(m-1)+2)}(J(m))$ 包含一条与经过 $c(m-1)$ 的曲线 $f^{-1}(J(m-1))$ 横截相交的光滑弧。

接下来考虑 $z(m-2) \in J(m-2)$ 和 $k(m-2) \ge 0$，使得 $f^{k(m-2)}(z(m-2)) = c(m-1)$。于是，$f^{-(k(m-1)+k(m-2)+2)}(J(m))$ 包含一条光滑弧，它与光滑弧 $f^{-(k(m-1)+1)}(J(m-1))$ 横截相交，而后者又与 $J(m-2)$ 横截相交。因此，$f^{-(k(m-1)+k(m-2)+3)}(J(m))$ 与 $f^{-(k(m-2)+2)}(J(m-1))$ 的一个连通分支横截相交，而该连通分支又与 $f^{-1}(J(m-2)) \ni c(m-2)$ 横截相交，见图 5。

以此方式继续，$f^{-(k(m-1)+\cdots+k(1)+m)}(J(m))$包含一条光滑弧，它与 $f^{-(k(m-2)+\cdots+k(1)+(m-1))}(J(m-1))$中的一条光滑弧横截相交，而后者又与$f^{-(k(m-3)+\cdots+k(1)+(m-2))}(J(m-2))$横截相交，如此继续，直到 $f^{-(k(1)+2)}(J(2))$与 $f^{-1}(J(1)) \ni c(i)$横截相交。如果连通分支 $L_n(z)$包含一个临界点，那么，在 $L_n(z)$中连接 $z$ 和 $\mathbb{R}$ 的最短路径就具有这种形式。如果 $L_n(z)$不包含临界点，那么任意一条连接 $z$ 和 $\mathbb{R}$ 的路径都会在某个映射 $f^k$的作用下映射为这样一条路径。

**4.3. 集合 $K_X(f)$ 可以任意选取得足够靠近实轴，并且是局部连通的。**为了控制 $K_X$ 的几何性质，我们必须构造一种方法，将某些复拉回纳入 [CvST]中的复盒构造。这将在附录 A 中完成，届时也将给出以下定理的证明。

**定理 4.2.** 对每个 $a > 0$ 和每个 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，都存在 $\delta > 0$，使得如果修剪区间 $J_i$ 两两不相交且长度为 $< \delta$，那么

*(1)* $K_X(f)$ 定义良好：在归纳定义 *(4.2)* 中，我们有 $cc_{K_n'} f^{-n}(J^{-1}) \subset \Omega_a$。此外，$K_X(f) \in \Omega_a$，且 $K_X(f)$ 是实对称的。*(2)* $f^{-1}(K_X(f)) \supset K_X(f)$，且 $K_X(f)$ 是连通的；*(3)* $K_X(f)$ 没有内部，是全的（即 $\mathbb{C} \setminus K_X(f)$ 是连通的），且局部连通；*(4)* $K_X(f)$ 的每个点都有有限多个接入；*(5)* $f\colon K_X(f) \to K_X(f)$ 的每个周期点要么是排斥的，要么位于实轴上（其中 $f$ 也表示实解析区间映射的复扩张）。

此外，设 $O$ 是周期吸引子的并集，并假设 $O$ 按定义 *4.1* 的意义具有小吸引域，则

*(6)* 性质 *(1)-(5)* 对 $K_{X,\,O}(f)$ 均成立，但在此情况下，$K_{X,\,O}(f)$ 将具有内部；*(7)* $f_X$ 在 $\partial K_{X,\,O}(f)$ 中的所有周期点都是排斥的。

As m如前所述，本定理的证明将在附录 A 末尾给出 .

注记 4.3。 注意，周期点通常不在 $K_X(f)$ 中稠密。例如，考虑一个在 $c$ 处取得极大值的单峰映射。于是，$J \ni f(c)$ 右侧的点在 $K_X(f)$ 中没有原像，因此 $K_X(f) \setminus I$中任何位于“右侧”的连通分支

都不包含周期点。在下一小节中，我们将为 $f$ 和 $K_X(f)$ 关联一个圆映射 $f_X$。这个圆映射将具有不连续点，而该圆映射的周期点再次不会在圆中稠密。

注记 4.4. 我们应强调，$f \in \mathcal{A}^\nu$ 至多只有有限个吸引周期点或抛物周期点，参见 [MMvS, dMvS]。

## 5. The associated external map: a circle mapping with discontinuities

与类多项式映射 $f$ 相关联的外部映射是圆 $f$ 上的解析扩张 $\hat{}$ 映射：$\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$，它可延拓为全纯映射 $f : A \to A'$，其中 $A$ 和 $A'$ 是环域，使得 $\partial\mathbb{D} \Subset A \Subset A'$。本节中，我们将构造一个与实解析映射 $f : I \to I$ 相关联的外部映射，以及它的修剪朱利亚集 $K_X$，并用它证明定理 3.1。随后，我们将一般性地讨论这一类外部映射。

为此，我们从现在起作如下假设：

$$\begin{cases} \text{修剪区间 } J \text{ 及相应的修剪朱利亚集 } K_X \text{ 满足定理 4.2 的结论。} \end{cases}$$

令 $\psi_X : \overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{C} \setminus K_X}$ 为一致化映射，它固定 $\infty$，且在 $\infty$ 处的导数为实数，并记 $\phi_X = \psi_X^{-1} : \mathbb{C} \setminus K_X \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$。设

$$\hat{f}_X = \phi_X \circ f \circ \psi_X, \tag{5.1}$$

定义在 $\psi_X^{-1}(\Omega_a \setminus K_X) \subset \overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}}$ 上；这是一个以内边界 $\partial\mathbb{D}$ 为边界的开环带。由于 $K_X$ 局部连通，且 $K_X(f)$ 的每个点都有有限个接入，根据 Carath´eodory 定理，$\psi_X$ 可连续延拓至 $\mathbb{D}$ 的边界，而 $\phi_X$ 可作为多值函数延拓至 $K_X$. 的边界。因此我们可以写成

$$\psi_X : \partial\mathbb{D} \to K_X \text{ and } \phi_X : K_X \to \partial\mathbb{D}$$

其中后一个映射是多值的。注意，$\psi_X$ 的规范化、$I = [-1, 1]$ 这一假设以及 $K_X$ 为实对称的假设，意味着 $\phi_X(-1) = -1$ 且 $\phi_X(1) = 1$。由于 $K_X$ 中每个点都有有限个接入，

$$\hat{X} = \phi_X(X) \tag{5.2}$$

是 $\partial\mathbb{D}$ 的有限子集。注意，$\pm 1 \notin X$，因此

$$\pm 1 \notin \hat{X}.$$

例 5.1. 下面描述与上述例子对应的外部映射：(i) $f$ 有一个超吸引子。令 $I = [-1, 1]$，$J = (-\epsilon, \epsilon)$，其中 $\epsilon < 1$ 且 $f(x) = x^3$，那么正如我们在例 4.1 中所见

$$K_X = \bigcup_{k=1,\dots,\ell-1} e^{\pi i k/\ell} \cdot J' \bigcup I \text{ where } J' = [-\epsilon^{1/\ell}, \epsilon^{1/\ell}].$$

$\hat{}$ 由于修剪后的填充朱利亚集不是后向不变的，相应的外部映射 $f_X$ 无法连续延拓到 $\partial\mathbb{D}$。在下一个引理中，我们将证明，尽管如此，$\hat{f}_X$ 仍可延拓为 $\partial\mathbb{D}$ 上的一个分段实解析映射映射，其不连续点位于 $\psi_X$ 下 $X = f^{-1}(\partial J) \setminus \mathbb{R}$ 的原像处以及临界点处。

(ii) 假设 $I = [-1, 1]$, $J_n = (-1, 1)$ 和 $f : I \to I$ 是一个多项式，其所有临界 1

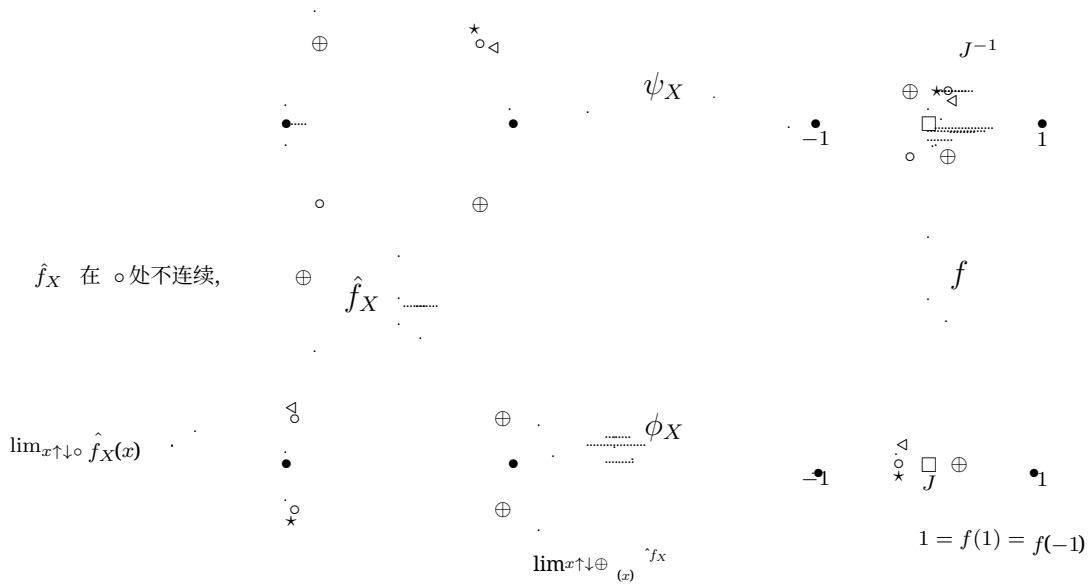



FIGURE 6. 与映射 $f$ 相关的修剪朱利亚集 $K_X$ 由 $z \mapsto z^3$ 定义，其中 $J = (-\epsilon,\ \epsilon)$。$\hat{}$ 该交换图展示了外部映射 $f_X = \phi_X \circ f \circ \psi_X$: $A \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ 的构造方式，其中 $A \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ 是一个以内边界 $\partial\mathbb{D}$为界的环带。集合 $X = f^{-1}(\partial J) \setminus \mathbb{R}$ 中的点在右上图中以符号 ∘ 标出。相应的点 $\hat{} X = \phi_X(X) \subset \partial\mathbb{D}$ 也在左侧各图中以 ∘ 和粗体 ∘ 标出。 $X$ 中的某一点附近的两个点经映射 $f$ 后落在 $I$的不同侧，因此映射 $\hat{} f_X$ 在 $\hat{}X$处不连续。出于同样的原因，$\hat{} f_X$ 在全部六个点 $\phi_X(0) \subset \partial\mathbb{D}$处也不连续。

点都是实数且非周期的。于是 $K_n = \{z \in \mathbb{C};\ f^n(z) \in I\}, \forall n \geq 0$ 因此 $K_X$等于 $f$的填充朱利亚集。另一方面，如果 $J \Subset (-1,\ 1)$，那么 $K_n$是 $f$ 的朱利亚集的真子集，该集合在 $X = \partial J^{-1}$的原像处经过修剪。

### 5.1. 与扩张圆映射的半共轭。

**定义 5.1.** 定义 $f$: $I \to I$的符号 $\epsilon(f) \in \{-1, 1\}$ 如下:

$$\epsilon(f) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(1) = 1 \\ -1 & \text{if } f(1) = -1. \end{cases}$$

在本节中，我们将证明，与 $\hat{} f_X$ 相关联的是一个属于下文所定义的映射类 $\mathcal{E}_\epsilon^d$的映射。

**定义 5.2 ($\mathcal{E}_\epsilon^d$).** 假设 $\epsilon \in \{-1, 1\}$。如果满足以下条件，我们称 $g \in \mathcal{E}_\epsilon^d$:

$\hat{}$ (1) 存在一个有限基数的子集 $X \subset \partial\mathbb{D}$，使得 $g$ 是一个实对称解析映射 $g$: $\partial\mathbb{D} \setminus X \to \partial\mathbb{D}$，且 $g$ 在 $X$ 的每个点处都有不连续点，并且 $\pm 1 \notin X$; $\hat{}$ (2) 对所有 $z \in \partial\mathbb{D} \setminus X$, $g(\bar{z}) = g(z)$; (3) $g(1) = \epsilon$。 (4) 存在一个映射 $g^*$: $\mathbb{R}\setminus\pi^{-1}(\hat{}X) \to \mathbb{R}$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}\setminus\pi^{-1}(\hat{}X)$, $\pi\circ g^*(x) = g\circ\pi(x)$，其中 $\pi$: $\mathbb{R} \to \partial\mathbb{D}$ 是覆盖映射 $t \mapsto e^{2\pi i t}$，满足 $g^*$: $\mathbb{R} \setminus \pi^{-1}(\hat{}X) \to \mathbb{R}$ 在 $\pi^{-1}(\hat{}X)$ 的每个连通分支上严格单调递增，且 $g^*$ 在不连续点处的跳跃幅度为 $< 1$;

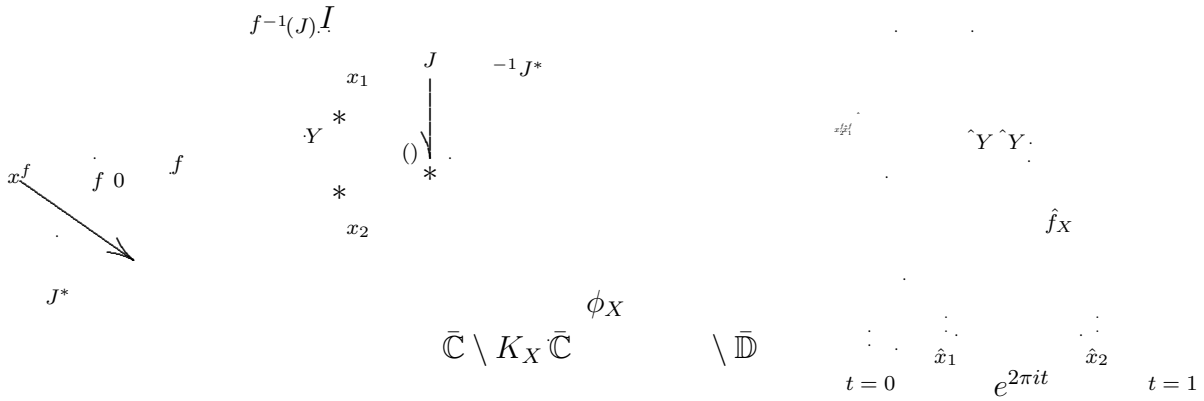



FIGURE 7. 左图绘出了二次映射 $f(x) = (1-a)x^2 + a$ 在 $f(c) = a \in (-1, 0)$ 下没有周期吸引子时的集合 $K_1$。在这种情况下，$J$ 是一个包含 $f(c)$,$X = \{x_1, x_2\} = f^{-1}(\partial J) \setminus \mathbb{R}$ 和 $x^f = f(x_1) = f(x_2) \in \partial J$ 的区间。右图绘出了映射 $\hat{f}_X$：$\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ ——它在 $\hat{X} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$ 处不连续。注意，$x^f$ 对应于 $\mathbb{D}$ 中两个不同的点$\hat{x}_1^f$,$\hat{x}_2^f$，并且当 $x$ 从左侧或右侧趋近$\hat{x}_1$ 或$\hat{x}_2$时，它们是 $\hat{f}_X(x)$ 的极限。我们还绘出了曲线 $f^{-1}(J^*) \subset f^{-1}(J)$（$J^* \subset J$ 的非实原像），其中 $J^*$ 是 $I$ 中的一条曲线，且紧包含 $J$。集合 $X^*$ 由 $f^{-1}(J^*) \setminus \mathbb{R}$ 的两个边界点组成，并以符号 $*$ 标记。集合 $Y = K_X \setminus X^*$ 包含图中绘出的两个区间。两个区间 $\hat{Y} = \phi_X(Y)$ 也已标出。

(5) $g^*(x+1) - g^*(x) = d$ for all $x \in \mathbb{R} \setminus \pi^{-1}(\hat{X})$;

**引理 5.1**。假设 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$ 只有双曲周期点，并且假设$\hat{}$区间 $J_i \ni f(c_i)$ $c_i \in \mathrm{Cr}(f)$ 两两不相交，且紧包含于 $I$ 中。那么 $f_X$ 可扩展为定义在 $\partial\mathbb{D}$（去掉有限个点）上的映射：

$\hat{}$ $\hat{}$*(1)* $f_X$：$\partial\mathbb{D} \setminus X \to \partial\mathbb{D}$ 是实解析、保序且没有临界点；*(2)* $\hat{}$ $f_X$在每个 点 $\hat{}X$ 处都有跳跃间断，且 $\phi_X(\mathrm{Cr}(f)) \cap \hat{}X = \emptyset$；$\hat{}$ $\hat{}$*(3)* $f_X$：$\partial\mathbb{D} \setminus X \to \partial\mathbb{D}$ 的每个周期点要么是双曲排斥的，要么对应于 $f$：$I \to I$的一个（实）周期吸引子或抛物点。

此外，$\hat{}$ $f_X$属于上述定义中定义的类 $\mathcal{E}_\epsilon^d$，其中 $d = \ell_1 + \cdots + \ell_\nu$，其中$\ell_i$ 是 $f$的第 $i$个临界点，并且其中 $\epsilon = \epsilon(f)$（如上所定义）。

如果 $f_X$:$f$ 没有周期吸引子，那么它的每个周期轨道 $f$ 的所有（实）周期吸引子的集合，并假设 $O$ 与定理 *4.2*$\hat{}$ $\hat{}$第二部分中的条件相同，则 $f_{X,O}$: $\partial\mathbb{D} \setminus X \to \partial\mathbb{D}$ 的每个周期点都是排斥的。这里$\hat{}f_{X,O}$ 是对应于 $K_{X,O}$的外部映射。

**引理 5.1 的证明**。为简便起见，在下文的证明中（证明结尾除外），假设 $f$ 没有临界点最终被映射到自身或另一个临界点。

为证明引理的第一个结论，为简便起见，记作 $K = K_X$，并证明$\hat{}$ $\hat{}$ $f_X$ 可延拓为定义在 $X = \psi_X(X)$ 外部的实解析映射，且在 $X$中的每个$\hat{}$点处都有不连续点。事实上，对于每个 $x \in K \setminus X$，都存在 $x$ 的一个邻域 $W \subset \mathbb{C}$，使得 $f$将 $W \setminus K$的每个连通分支 $W'$同胚地映到 $f(W) \setminus K$的某个连通分支 $W''$。由此可知，$\hat{}$ $f_X$将 $\hat{}W' = \psi_X^{-1}(W')$ 同胚地映到 $\hat{}W'' = \psi_X^{-1}(W'')$。

ˆ ˆ 将集合 $W'$ 和 $W''$ 关于 $\partial\mathbb{D}$作反射，并利用施瓦茨反射原理，ˆ可知 $f_X$ 在 $\partial\mathbb{D}\setminus X$ 的每个点的某个邻域内都是良定义的解析映射，ˆ且 $f_X$ 将 $\partial\mathbb{D}\setminus X$ 映入 $\partial\mathbb{D}$。理解上一句话的另一种方式是考察 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ 中落在 $\mathbb{D}$某一点上的曲线。例如，考虑一个最终不会映入临界点的临界点 $c_i\in K$。那么，在局部， $\mathbb{C}\setminus K_X$ 的 $c_i$ 附近的每个 $2\ell_i$ 扇形区域都会被 $f$ 映到 $f(c_i)$ 附近的一个半扇形区域。因此，上述论证表明，ˆ $f_X$ 可连续延拓至 $\phi_X(c_i)$，从而在 $\phi_X(c_i)$附近成为实解析映射。如果 $c_i$ 被 $f$ 映到另一个非周期临界点，那么按构造，$c_i$ 处 $\mathbb{C}\setminus K_X$ 的扇形区域数将是 $f(c_i)=c_j$ 处 $\mathbb{C}\setminus K_X$ 的扇形区域数的 $\ell_i$ 倍，因此前述论证仍然成立。特别是，即使在这种情况下，ˆ$f_X$ 在 $\phi_X(c_i)$处仍为实解析映射。

为了证明引理的第二个结论，我们需要分析点ˆ ˆ$X$ 处发生的情况，并证明它们是 $f_X$的不连续点。以下**断言：** 描述了这一点：对于ˆ 每个点 $x\in X$，都存在唯一的点ˆ$x$ （它位于 $X$中），使得 $\phi_X(\hat{x})=x$；但存在（恰好）两个点ˆ$x_1^f$，ˆ$x_2^f$，使得 $\phi_X(\hat{x}_1^f)=\phi_X(\hat{x}_2^f)=x^f=f(x)$。

为了证明这一断言，注意对于 $x$的每个小邻域 $W$， $W\setminus K$由一个连通分支组成，而集合 $f(W)\setminus K$ 由两个连通分支组成，一个位于上半平面，另一个位于下半平面，见图 7。这就证明了该断言。

由此可得左右极限值分别对应于在每个点 $x_1^f$ 和 $x_2^f$ 处都有一个不连续点，ˆ 可知 ˆ$x_1^f$ 和 ˆ$x_2^f$ 互为复共轭。同样，考虑 $\mathbb{C}\setminus K_X$ 中的两条曲线 $\gamma_1$， $\gamma_2$，它们如图 7 所示，分别从曲线 $f^{-1}J'$ 的右侧和左侧趋向 $x_1$，便也可看出ˆ $f_X$ 在这样的点处有一个不连续点。于是， $f(\gamma_1)$ 从上方趋向 $f(x_1)$，而 $f(\gamma_2)$ 从下方趋向 $f(x_2)$。同样的论证还表明，当 $c_i$ 是 $f$ 的周期临界点时，在 $\phi_X(c_i)$ 处存在不连续点。

为证明引理的第三、第四个结论，注意到，对于 $f_X$，周期为 $s$ 的每个周期点ˆ ˆ$p$ 都对应于 $f$ 中周期为 $s$ 的周期点 $p:\Omega_a\to\mathbb{C}$。根据定理 4.2 的第 (4) 部分， $p$ 除非位于实轴上，否则是排斥的。首先假设 $f:\Omega_a\to\mathbb{C}$ 的 $p$ 是一个排斥周期点。于是我们可以选取 $p$ 的一个邻域 $W$，使得 $f^s(W)=W'\Supset W.$。我们有，$\psi_X^{-1}(W)$ 是若干互不相交的拓扑圆盘之并，且每个圆盘的边界都可分解为两个连通分支，其中一个位于 $\phi_X(\partial W)$ 中，另一个位于 $\partial\mathbb{D}.$ 中。关于 $\partial\mathbb{D}$ 对这些圆盘逐一反射，得到拓扑圆盘ˆ 的并 $W_\phi$。其中一个连通分支包含ˆ$p$；将其标记为 $W.$。对ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ$W'$ 重复这一过程，得到一个拓扑圆盘 $W'\Supset W\ni\hat{p}$，使得 $f_X^s(W)=W'.$。因此，ˆ ˆ$p$ 是 $f_X$ 的一个排斥周期点。如果 $p$ 是 $f$ 的一个吸引周期点，那么我们可以找到 $p$ 的一个邻域 $W$，使得 $f^s(W)=W'\Subset W$，并重复类似的论证。抛物情形也同样处理。如果 $O$ 如定理 4.2 的 (6) 中所述，那么 $\partial K_X$、$o$ 中 $f$ 的所有周期点ˆ 都是排斥的，因此 $f_X$、$o$ 只有排斥周期点。

现在很容易看出，定义（5.2）中的性质成立。例如，取一点 $p\in f^{-1}(J_i)\setminus\mathbb{R}$。有两条曲线落在 $p$上，并从相反两侧趋近 $f^{-1}(J_i)\setminus\mathbb{R}$。其中一条曲线在复扩张 $f$ 下的像位于上半平面，另一条则位于下半平面，但它们落在同一点。曲线的数量 $f^{-1}(J)\setminus\mathbb{R}$由 $\ell_1+\cdots+\ell_\nu$决定。由此可知， $g$的次数为 $d=\ell_1+\cdots+\ell_\nu$，正如定义（5.2）中的性质（5）所述。□

之后，将以组合上定义良好的方式进行进一步修剪会很有用。为此，我们将使用以下

**引理 5.2**（与 $\partial\mathbb{D}$）**的扩张覆盖映射半共轭**。设 $g \in \mathcal{E}_\epsilon^d$ 满足 $\epsilon \in \hat{}\{-1,1\}$，并设 $Q_g$ 是一个有限正向不变集，且与 $X$ 的不连续点集不相交，其中 $g$。则

*(1)* 存在一个保向的次数为 $d$ 的连续覆盖映射 $g_*\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$，它在 $U$ 之外与 $g$ 一致，其中 $U$ 是 $X\hat{}$的一个邻域，$X$ 满足 $U \cap Q_f = \emptyset$；并且 $U$ 的每个连通分支的像 $g_*$ 的长度均为 $< 1$;

*(2)* 存在唯一的半共轭 $h_g$，使 $g_*$ 与映射 $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ 半共轭，其中该映射定义如下：

$$\begin{cases} z \mapsto z^d & if\ \epsilon = +1 \\ z \mapsto -z^d & if\ \epsilon = -1. \end{cases}$$

此外，$h_g(1) = 1$，且 $h_g$ 是实对称的，即 $h_g(z) = \overline{h_g(z)}$;

*(3)* $Q = h_g(Q_g)$ 只取决于 $g$ 和 $Q_g$，而不取决于 $g$ 的延拓 $g_*$（因此也不取决于 $h_g$）。

证明。 $g_*$ 的存在性可由 $\mathcal{E}^d$的性质立即得出。第 (2) 部分和第 (3) 部分可由 [Sh]立即得出。□

利用这个引理，我们可以给出如下定义。

**定义 5.3**。$\mathcal{E}^d_{\pm,\,Q}$。取 $\epsilon \in \{-1,1\}$，并假设当 $\epsilon = 1$ 时，$Q \subset \partial\mathbb{D}$ 是 $z \mapsto z^d$ 下的有限正向不变集；当 $\epsilon = -1$时，$Q \subset \partial\mathbb{D}$ 在 $z \mapsto -z^d$ 下不变。那么，$\mathcal{E}^d_{\pm,\,Q}$ 定义为映射 $g \in \mathcal{E}^d$ 的类，其中 $g$ 有一个不变子集 $Q_g$，该子集与 $g$的不连续点集不相交，并且 $h_g(Q_g) = Q$。

有时我们会默认用 $\mathcal{E}^d$ 表示那些确实由区间映射产生的圆映射空间。

5.2. **进一步修剪与正向不变集** $\Lambda_N$。由于映射 $f_X$ 在其不连续点附近的解析行为难以描述，我们将针对每个临界值 $f(c_i)$，取一个包含 $f(c_i)$ 的闭优良区间 $J_i^* \Subset J_i$，使其边界点是周期的、前周期的，或位于某个周期吸引子的吸引域中。这里，$J_i$ 是构造修剪朱利亚集时使用的修剪区间。根据实界，这样的区间 $J_i^*$确实存在，见 [vSV，定理 A′]。令 $J^* = \cup_i J_i^*$并

$$X^* = f^{-1}(\partial J^*) \setminus \mathbb{R}$$

并令 $Y$为 $K_X \setminus X^*$ 中与 $I$不相交的连通分支之并。每个临界点 $c_i$ 对应 $2(\ell_i - 1)$ 个这样的连通分支。注意

$$\hat{Y} = \phi_X(Y),$$

$\hat{}$ 由 $f_X$ 的间断点周围的开区间组成，即围绕有限集合 $\hat{}X = \phi_X(X) \subset \partial\mathbb{D}$。

设 $B_{0,\,i} \subset \mathbb{C}$ 为 $f$ 的（实）周期吸引子的直接吸引域：$\Omega_a \to \mathbb{C}$，令$B_0 = \cup B_{0,\,i}$，并令 $B^*_{0,\,i}$ 为 $K_X \setminus \partial B_0$ 中包含$B_{0,\,i}$中各点的连通分支。于是定义

$$\hat{B}_{0,i} = \phi_X(B^*_{0,i})$$

ˆ 并令 $B$， $B^*$， $B_0$ 为这些集合的并集。注意， $f$ 至多有有限多个实周期吸引子，参见 [MMvS]。

ˆ 接下来我们定义 $f_X$-正向不变集

$$\Lambda_N := \{z \in \partial\mathbb{D}; \hat{f}_X^n(z) \notin \hat{Y} \text{ for all } 0 \le n \le N\} \text{ and } \Lambda_\infty = \cap_{N\ge 0}\Lambda_N.$$

ˆ ˆ**引理 5.3.** 映射 $\phi_X$、 $f_X$ 和 $Y$ 具有以下性质。

*(1)* $\phi_X(I) \subset \Lambda_\infty$，因此 $\Lambda_\infty$ 对应于实点；ˆ ˆˆ*(2)* $\partial Y = \phi_X(X^*)$、$\partial Y \subset \Lambda_\infty$ 和 $\partial Y$ 包含在一个有限正向不变集中，该集合ˆ避开 $f_X$ 的不连续点；ˆ *(3)* $\partial Y \subset \partial\mathbb{D}$ 由周期点、最终周期点组成，或位于 $f_X$ 的一个ˆ周期吸引子的吸引域中；ˆ*(4)* $B_0 \subset \partial\mathbb{D}$ 由有限个区间组成，每个区间都包含ˆ某个吸引周期点 $a$，使得该点属于 $\phi_X(a)$ $f$。此外， $\partial B_0$ 是一个有限正向不变集。

注记 5.1。如果 $f$: $\Omega_a \to \mathbb{C}$ 中（实）周期吸引子的吸引域的每个连通分支直径都很小，如定理 4.2 的 (6) 所示，那么根据引理 5.1， $f$ 在 ˆ$\partial K_{X,O}$ 中的所有周期点都是双曲排斥的，因此 $f_{X,O}$ 只有排斥周期点。在这种情况下，下一节中就不必使用我们刚刚定义的集合 $B_0$ （前提是我们用 $f_{X,O}$ 代替 $f_X$）。

证明。根据构造， $Y$ 的闭包与 $I$ 不相交。特别地， $f$ 对 $x \in I$ 的正向迭代永远不会与 $Y$ 的闭包相交。因此， $f_X$ 对 ˆ ˆ$z \in \phi_X(I)$ 中点的正向迭代不会与 $Y$ 相交，从而证明了断言 (1)。$\partial Y = \phi_X(X^*)$ 显然成立。由于 ˆ ˆ$f(X^*) \subset I$，可得 $\partial Y \subset \Lambda_\infty$。对每个周期点 $p$， $K_X \setminus \{p\}$ 至多由有限个连通分支组成。因此，每个周期点 $f$: $K_X \to K_X$ 至多有有限条接入（或“射线”着陆）。于是， $f$: $K_X \to K_X$ 中的周期点（预周期点）对应于 $f_X$: $\partial\mathbb{D} \setminus X \to \partial\mathbb{D}$ 中的周期点（分别为预周期点），特别地， $\partial Y$ 由 $f_X$ 的周期点或预周期点组成。这就推出了 (2) 的最后一部分。根据假设， $\partial J^*$ 由周期点或最终周期点（或周期吸引子的吸引域）组成，因此 $\partial Y$ 由周期轨道或最终周期轨道组成，从而证明了 (3)。下面证明 (4)。设 $K_1$ 是 $K_X \setminus \partial B_0$ 的一个连通分支，且与 $B_0$. 相交。那么 $\phi_X(K_1)$ 或者由

（1）一个连通分支，且 $\partial K_1 \cap \mathbb{R}$ 包含 $I$的一个端点；，或者（2）两个不相交的连通集，一个对应于穿过上半平面并在 $K_1$处着陆的曲线，另一个对应于穿过下半平面的曲线。

ˆ在这两种情况下， $\psi_X$（$\partial B_0$） $\subset \partial K_1 \cap I \subset \partial B_0 \cap I$，它是一个有限正向不变集，因此ˆ $\partial B_0$ 也是一个有限正向不变集。□

## 6. 外映射的扩张马尔可夫结构

假设 $f$ 只有双曲周期点（或者抛物点的吸引域足够小，因而可以包含在集合 $K_{X,O}$ 中，如定理 4.2 所示）。于是定义

$$\Lambda'_N = \{z \in \partial D; \hat{f}_X^n(z) \notin \hat{Y} \cup \hat{B}_0 \text{ for all } 0 \le n \le N\} \text{ and } \Lambda'_\infty = \cap_{N\ge 0}\Lambda_N$$

ˆ ˆ 其中应注意， $Y$ 包含 $f_X$的不连续点的一个邻域。根据 ˆ ˆ 引理 5.3(3)， $\partial($ $Y \cup B_0$)中的每个点都是周期的或最终周期的。因此我们定义

$$Q_{\hat{f}_X} = \partial(\hat{Y} \cup \hat{B}_0)$$

并设

$$Q_f := h_{\hat{f}_X}(Q_{\hat{f}_X})$$

其中， $h_{\hat{f}_X}$ 是引理 5.2 中的半共轭。

注 6.1. 事实上，如果 $B$ 的吸引子直径足够小，如定理 4.2 第二部分所述，那么我们可以用$f_{X,O}$替换 $f_X$ 。在这种情况下，正如注 5.1 中指出的，$f_{X,O}$ 的所有周期点都是排斥的，因此我们无需在上述 $\Lambda'_N$的定义中包含 $B_0$ 。此时，在下一个引理中可以用 $\Lambda_\infty$替换 $\Lambda'_\infty$ 。由此可知，在这种情况下，我们将构造的修剪多项式型映射 $F$: $E \to E'$ 的定义域 $f$: Ω $_a \to \mathbb{C}$ 中的周期吸引子的吸引域将完全位于其内部。

**引理 6.1** ($\Lambda'_\infty$ 是扩张的)。 $\Lambda'_\infty$ 是一个正向不变的双曲排斥集ˆ，并且存在一个黎曼度量 $|\cdot|_x$，定义在 $\Lambda'_\infty$和 $\lambda > 1$上，使得 $|Df_X(x)v|_{\hat{f}_X(x)} \geq \lambda|v|_x$，其中 $v \in T_x\partial\mathbb{D}$、 $x \in \Lambda'_\infty$。此外，

ˆ*(1)* 存在 $N < \infty$和 $\lambda > 1$，使得 $|Df_X(x)v|_{\hat{f}_X(x)} \geq \lambda|v|_x$，对每个 $v \in T_x\partial\mathbb{D}$、$x \in \Lambda'_N$均成立。*(2)* 设 $I'_1$、……、$I'_l \subset \partial\mathbb{D}$ 为 $\Lambda'_N$ 的连通分支，并设 $I_1$、……、$I_k \subset \partial\mathbb{D}$ 满足：对ˆ每个 $i$，存在 $j_i$，使得 $f_X(I_i) = I'_{j_i}$，且满足 $\Lambda'_{N+1} = \cup I_i \subset \cup I'_i$。*(3)* $I_i$ 和 $I'_j$ 的每个边界点都是周期的或最终周期的。

证明。 由 Ma˜n´e 可知 $\Lambda'$ 是双曲的，参见 [dMvS，定理 III.5.1]。例如，可以在 ˆ$X$ 附近修改 ˆ $f_X$ ，从而得到一个新的圆 $\partial\mathbb{D}$ 覆盖映射 $C^2$ 。由于 ˆ 的陈述只涉及在 $X$ 的某个邻域之外始终远离该邻域的点，因此确实可以应用 Ma˜n´e 的上述定理。由此，取一个适配度量即可得到本引理的第 (1) 部分，参见 [dMvS，引理 III.1.3]。第 (2) 和第 (3) 部分由以下事实推出： $\partial(Y \cup B_0)$ 中的每个点最终都是周期的。□

6.1. **外部映射的复扩张及其马尔可夫结构**。 由于 ˆ ˆ$f_X$: $\partial\mathbb{D} \setminus X \to \partial\mathbb{D}$ 是实解析的，它定义在其定义域的一个复邻域上。

**引理 6.2**。 对于每个 $p \in Q_{\hat{f}_X}$，都存在一条经过 $p$ 的光滑曲线 $\gamma_p$，它与 $\partial\mathbb{D}$ 横截ˆ，使得 $f_X(\gamma_p) \supset \gamma_{\hat{f}(p)}$，并且曲线 $\gamma_p$、 $p \in Q_{\hat{f}_X}$ 两两不相交。

证明。 为了构造一条穿过 $\gamma_p p \in Q_{\hat{f}_X}$的射线，注意到 $p$是映射 $f_X$下一个周期为 $s$ 的排斥周期点 $q \in \partial\mathbb{D}$ 经过有限次正向或反向迭代ˆ得到的。利用 $q$ 处的局部线性化ˆ坐标可知，在 $q$ 的某个邻域内，$f_X^s$ 与 0 的某个邻域内的 $z \mapsto \lambda z$ 共轭，其中 $\lambda > 1$。映射 $z \mapsto \lambda z$ 保持一条落在 0 处的直线，该直线在逆映射的线性化下对应于一条与圆ˆ ˆ在 $q$处横截的射线 $\gamma_q$ 。我们通过 $f_X$的适当迭代，将这条射线传递到 $p$ 。此外，由于 $f_X$是共形的，每个ˆ $f_X^i(\gamma_p)$都与 $\partial\mathbb{D}$横截，因此，只要 $\gamma_q$取得足够短，ˆ $f_X^i(\gamma_p)$就两两不相交。□

现在定义

$$\Gamma_{\hat{f}_X} = \cup_{p\in Q_{\hat{f}_X}} \gamma_p.$$

**定义 6.1.** 如果满足以下条件，我们就称 $F_X\colon E \to E'$ 具有扩张马尔可夫结构：

- $F_X\colon E \to E'$ 是局部单叶覆盖映射；
- $E \cap \partial\mathbb{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_k$, $E' \cap \partial\mathbb{D} = I'_1 \cup \cdots \cup I'_l$ 其中 $I_i$, $I'_j$ 是区间；
- $F_X$ 将 $I_i$ 映到某个 $I'_j$ 上，且 $I_i$ 和 $I'_j$ 的每个边界点都是周期的或最终周期的。若这样的点 $p$ 是周期的，则 $\psi_X(x) \in I$。
- $\partial E \cap \partial E' \subset \Gamma_{fX}$；
- $F_X(\partial E \setminus \Gamma_{fX}) \subset \partial E' \setminus \Gamma_{fX}$；
- 集合 $\Gamma_{fX}$ 是正向不变的，其含义是 $F_X(\Gamma_{fX} \cap E) = \Gamma_{fX} \cap E'$；
- $\partial E \cap \partial E' \subset \Gamma_{fX}$；
- 拼图块的直径，即 $F_X^n(E')$的连通分支的直径，当 $n \to \infty$时趋于零；
- $E \setminus \partial\mathbb{D}$ 中的每个点最终都会逃离 $E$；

- $E$ 包含 $\partial\mathbb{D} \setminus B_0$ 的一个管状邻域，其中 $B_0 \subset \partial\mathbb{D}$ 是对应于 $f$的周期吸引子的直接吸引域的集合。

**命题 6.3**（扩张马尔可夫结构的存在性）。设 $f_X$ 和 $\Gamma_{\hat{f}_X}$ 如上所述。存在靠近 $\partial\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 的开集 $E$、$E'$，使得 $f_X$ 可扩展为映射 $F\colon E \to E'$，该映射具有上文所定义意义下的扩张马尔可夫结构。

证明。对每个 $i$，取一个由来自 $\Gamma_{\hat{f}_X}$ 的两条弧和来自 $\{z \in \mathbb{C}$的两条曲线围成的“矩形”集合 $E'_i \supset I'_i$；$d(z, \partial\mathbb{D}) = \tau\}$，并令 $E' = \cup E'_i$。这里，$d$是由引理 6.1 中的范数诱导的度量。令$E = f_X^{-1}(E')$。根据前一个引理，只要 $\tau > 0$取得足够小，$f_X$ 就会将 $E$ 映射到 $E'$ 上（局部单值）。□

**定义 6.2。** $\partial E, \partial E'$ 中与 $\partial\mathbb{D}$ 横截的曲线部分称为射线，其他曲线则称为 $E$的屋顶 或等势线。每条射线最终都会映射到一条经过某个周期点的射线上。我们也将相应的术语用于 $E$ 的边界曲线：$= \psi_X(E)$ 和 $E' := \psi_X(E')$。

注 6.2。注意，我们使用记号 $F_X$，以强调 $f_X$的这一复扩张 具有额外的结构，见注 3.1。还要注意，$E$ 包含$\Lambda'_\infty$。

## 6.2. 将修剪多项式型映射与实解析映射联系起来：当仅有排斥周期点时，定理 3.1 的证明

（续）令 $E' = \psi_X(E')$、$E = \psi_X(E)$ 和 $\Gamma_F = \psi_X(\Gamma_{fX})$。我们来证明

$$F\colon E \to E'$$

如果 $f$ 没有周期吸引子，则它是一个修剪多项式型映射。根据命题 6.3，$(K_X(f)\backslash X) \subset E$。此外，我们有，如果 $z \in \partial E \cap \partial E'$，那么 $z \in \Gamma_F$。根据引理5.3(1)，且由于 $E$

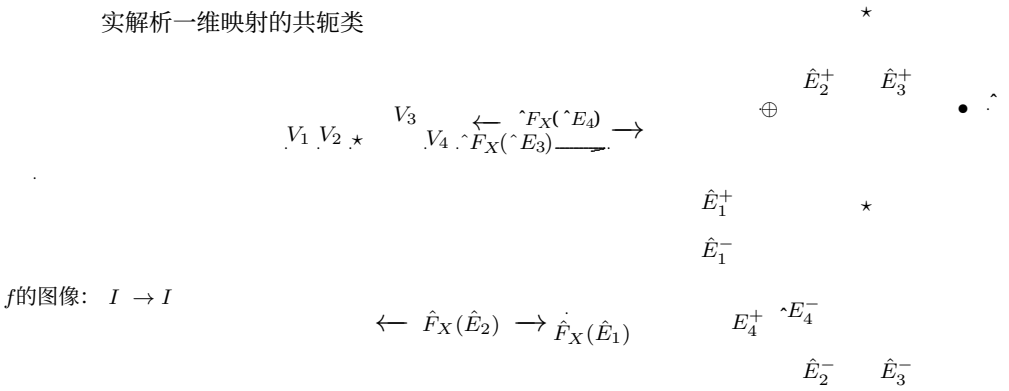



FIGURE 8. 单峰映射 $f\colon\ I \to I$ 的一种扩张结构$\hat{}$ $F_X\colon\ \hat{}E \to \hat{}E'$，它具有一个周期三吸引子。$\hat{}E_1^+$、$\hat{}E_2^+$ 的上部经$\hat{}$ $F_X$映射到下半平面，而$\hat{}E_3^+$、$\hat{}E_4^+$ 则映射到上半平面。中间图示意性地画出了相应区域$\hat{}$ $E_i$的作用，其中将 $z$ 与 $\bar{z}$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 附近识别（并在中间图中将$\hat{}$ $E_4$ 的右上边与底边识别，同时将$\hat{}$ $E_1$ 的左上边与底边识别）。如果我们可以将吸引周期轨道 $O$的外部映射$F_X$、$o$ 视为$\hat{}$ $\hat{}$，那么圆映射 $F_X$、$o$ 便是扩张的$\hat{}$ $\hat{}$（除跳跃点的一个邻域外）；此时区域$E_3$ 与 $E_4$ 将共有一条射线，$V_1$ 与 $V_2$也同样如此。在这种情况下，$\hat{}E$、$\hat{}E'$ 以及 $U\colon\ = E$、$U'\colon\ = E'$ 将如图9所示，其中$\hat{}$ $E_3 \cup \hat{}E_4$ 将构成$\hat{}E$ 的右半部分，而$\hat{}$ $E_1 \cup \hat{}E_2$ 则构成$\hat{}E$的左半部分。

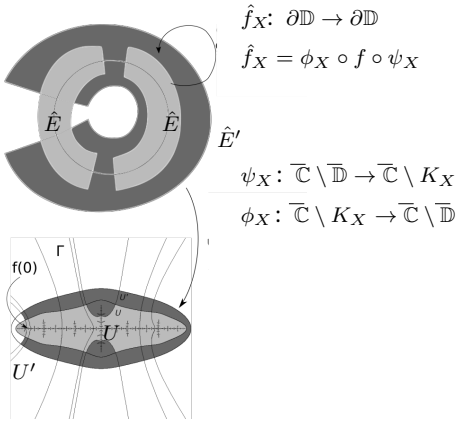



FIGURE 9. 修剪多项式型映射 $F\colon\ U \to U'$ 由外部映射$\hat{}$ $F_X\colon \hat{}E \to \hat{}E'$ 的扩张结构构造而成。两个连通分支的 $\phi_X$-像的闭包构成一个连通集，因为$\hat{}$ $E \cap \partial\mathbb{D}$ 的边界点在此映射下被识别。曲线 $\Gamma$ 是 $\psi_X$ 下某些曲线的像；这些曲线与 $\partial\mathbb{D}$ 横截，并经过 $\hat{}Y \subset \partial\mathbb{D}$ 中的周期点和最终周期点。本图对应于图 8 的简化版本，其中区域 $V_3$ 和 $V_4$ 合并在一起。

包含 $\Lambda_\infty$，且由于我们假设不存在周期吸引子（或抛物周期点），因此 $E$ 包含 $I$ 的一个邻域。所以在这种情况下，我们定义 $U = E$ 和 $U' = E'$，并得到一个修剪多项式型延拓 $F\colon\ U \to U'$ of $f\colon\ I \to I$。□

注记 6.3。如果 $f$ 确实有周期吸引子，那么 $E$ 不一定包含 $I$。为了解决这个问题，我们将定义集合 $B$, $B'$，它们对应于周期吸引子的吸引域，使得 $F\colon\ E \cup B \to E' \cup B'$ 是一个修剪多项式型映射。

## 7. The pruning data $Q$

ˆˆ 由于 $Y \cup B_0$ 的边界点（最终）是周期的，因此存在一个最小的有限 ˆˆˆˆ$f_X$-正向不变集 $Q(f_X,\ Y,\ B_0) \subset \partial\mathbb{D}$，使得

$$\partial I_i, \partial I'_j, \partial \hat{B}_0 \subset Q(\hat{f}_X, \hat{Y}, \hat{B}_0) \quad \forall i,$$

其中 $I_i$ 是上一节中的区间。

ˆˆ 我们称 $Q(f_X, Y, B_0)$为外部映射 $f_X$的修剪数据。集合 $Q(f_X,\ Y,\ B_0)$给出了关于 $f$ 的一些有限组合数据，以及对 $J$ 和 $J^*$所作的选择。

**定义 7.1**。集合 $Q \subset \partial\mathbb{D}$ 是 $f \in \mathcal{A}^\nu$ 的可容许剪枝集，如果它具有上述形式。

我们已经证明，如果 $f$ 只有排斥周期轨道，那么它就有一个相对于可容许剪枝集 $Q$ 的修剪多项式型延拓 $F\colon U \to U'$。

注 7.1。 如果 $f$ 的所有实周期吸引子的吸引域直径都很小（如前文所述），那么我们可以用 $f_{X,\ O}$ 替换 $f_X$。由于 $f_{X,\ O}$ 将没有周期吸引子，因此在这种情况下有 ˆ $B_0 = \emptyset$。另一方面，如果 $f$ 有一个直径不小的周期吸引子，那么可能需要选择修剪区间 $J_i$，并使 $J_i^*$ 包含在该吸引子的吸引域内。在这种情况下， $Y$ 的边界点将位于 $B_0$ 的吸引域内。尽管如此，上文定义的集合 $Q$ 仍是有限的。

由引理 5.2 可知，该映射通过映射 $h_{\hat{f}_X}$ 半共轭于 $z \mapsto z^d$ 或 $z \mapsto -z^d$，这取决于 $f$ 的符号 $\epsilon(f)$。这意味着 $h_{\hat{f}_X}(Q(f_X,\ Y,\ B_0))$ 是一个有限的前向集合，在 $z \mapsto z^d$ 或 $z \mapsto -z^d$ 作用下不变，因此该集合是通过“组合方式”定义的。

ˆ**定义 7.2.** 我们称与两个区间映射 ˆ 相关联的外部映射 $f_X$ 和 ˆ$g_X$ 为修剪等价，如果 $f_X$ 和 ˆ$g_X$ 的次数相同， $f, g$ 的符号相同，并且还有

$$h_{\hat{f}_X}(Q(\hat{f}_X, \hat{Y}, \hat{B}_0)) = h_{\hat{g}_X}(Q(\hat{g}_X, \hat{Y}_g, \hat{B}_{0,g})).$$

ˆˆˆ 如果可以为 $Y$和 $Y_g$ 作出选择，使上述等式成立，我们就记作 $Q(f_X) \sim Q(\hat{}g_X)$。

ˆ注 7.2. $Q(f_X) \sim Q(\hat{}g_X)$ 并未提供关于 $f_X$和 ˆ$g_X$的间断点（或其轨道）的任何信息，尤其不意味着 $f_X, \hat{}g_X$拓扑共轭，也不意味着 $f, g$ 拓扑共轭。

**定义 7.3** （与修剪多项式型映射相关的集合 $Q(F)$）。 给定一个具有射线 $\Gamma$ 的修剪多项式型映射 $F\colon U \to U'$，我们还有一个集合 $K_F$、一个共形映射 ˆ$\phi_X\colon \mathbb{C}\setminus K_F \to \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$，以及一个带有不连续点的外部映射 $F$。集合 $\Gamma \cap K_X$ 是前向 ˆ$F$-不变且最终周期的。因此，集合 $\phi_X(\Gamma \cap K_X)$ 对应于 $\mathbb{D}$ 中的一个不变子集 $F$，该子集最终周期。然后， $Q(F)$ 定义为有限子集 $\partial\mathbb{D}$ ，即 $\phi_X(\Gamma \cap K_X)$ 在半共轭下的像；该半共轭对应于 $\mathbb{D}$ 上的线性映射，如引理 5.2 所述。

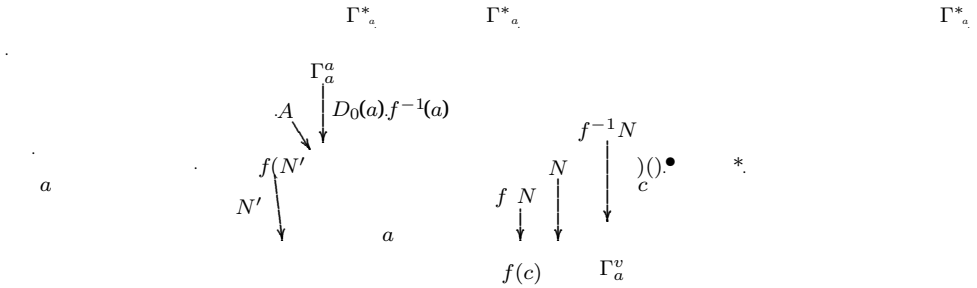



FIGURE 10. 吸引结构 $f\colon\ B \to B'$ 在吸引不动点 $a$ 附近，该点与映射 $f$ 相关联，其图像如左侧所示；矩形基本域 $N$ 及其像 $f(N)$，以及一条穿过临界点 $c$ 的曲线均已标出，后者用符号 $*$ 表示，而其像 $f(c)$用符号 $\bullet$表示。集合 $B_0^*$ 是由曲线 $\Gamma_a^*$围成的集合。在 $a$ 周围添加一个圆盘 $D_0(a)$及其在 $f$ 下的原像，即可得到一个吸引结构。

## 8. An attracting structure near hyperbolic attracting basins

在本小节中，我们将为修剪多项式型映射添加一些额外结构，以处理区间映射 $f\colon I \to I$ 的“大型”吸引域（也就是说，那些无法通过考察集合 $K_{X,\ O}$ 来处理的吸引域）。

**定义 8.1**。 我们称 $f\colon\ B \to B'$ 在吸引域附近具有一个吸引结构，如果存在曲线的有限并集 $\Gamma_a$，使得

- $B \cap \partial\mathbb{R}$ 与 $f$ 的周期吸引子的直接吸引域一致，并且 $B$ 的每个连通分支都包含于 $f$的某个周期吸引子的吸引域中；- $B$ 具有有限多个连通分支，且 $B \subset \Omega_a$；- $\partial B \cup \partial B' \subset \Gamma_a$、$B' = f(B) \subset B$以及 $f(\partial B) \subset \partial B' \cup \Gamma_a$；- $\Gamma_a = \Gamma_a^* \cup \Gamma_a^v \cup \Gamma_a^a$，其中 - $\Gamma_a^*$ 满足 $f(\Gamma_a^* \cap B) = \Gamma_a^*$，并且 $\Gamma_a^*$ 的每个连通分支都是一条光滑曲线，将一个吸引周期点 $a$ 与 $a$的吸引域边界上的排斥周期点或这些点的原像连接起来；- $\Gamma_a^v$ 的每个连通分支 $\gamma$ 都是 $B$ 中的分段光滑弧，连接 $B$的边界点，并且 $\gamma$ 的迭代与 $\Gamma_a^v$不相交；- $\Gamma_a^a$ 的每个连通分支 $\gamma$ 都围成一个圆盘 $D_0(a) \ni a$，其中 $a$ 是 $F_X$ 的一个吸引周期点^，使得 $D_0(a)$ 位于 $f$ 的吸引域中，并且使得 $\mathbb{C} \setminus (f^n(\gamma) \cup \gamma)$ 围成一个环带，其中 $n$ 是 $a$的周期；- $B' \setminus (\Gamma_a \cup \mathbb{R})$的每个连通分支以及 $B' \setminus \Gamma_a$ 的每个连通分支都是拟圆盘。

在 $f$ 附近周期吸引子处，这种结构的一个示例如 $I \to I$ 所示，见 10。

**命题 8.1**。 在 $f\colon\ I \to I$ 的每个双曲周期吸引子附近，复扩张$f\colon\ \Omega_a \to \mathbb{C}$ 具有一种吸引结构 $f\colon B \to B'$，其含义如前述定义所述。^^ ^ ^ 在 $\partial\mathbb{D} \cap B$ 附近也存在相应的吸引结构 $F_X\colon B \to B'$。

注记 8.1。 注意，根据 [MMvS，dMvS] $f$的周期吸引子的周期有界。由于 $f$ 是实解析的，因此 $f$ 至多有有限多个周期吸引子。

证明. 假设 $f$ 只有双曲周期点，并且至少有一个周期吸引子。令 $a$ 为其中一个周期吸引子，假设其周期为$n$。令 $B_0$（$a$）为包含 $a$的吸引域的连通分支。在 $B_0$（$p$）$\subset I$中选取基本域 $N$、$N'$，使得所有位于 $p$吸引域内的临界点的正向迭代都落在 $N \cup N'$中，并且 $c \in \partial N$。这里，如果 $Df^n$（$a$）$< 0$，或者如果 $Df^n$（$a$）$= 0$且 $x \mapsto f^n$（$x$）在 $x = a$处有局部极值，则取 $N = N'$；而如果 $Df^n$（$a$）$> 0$，或者 $Df^n$（$a$）$= 0$且$x \mapsto f^n$（$x$）在 $x = a$处有拐点，则 $N$和 $N'$位于 $a$的两侧，见图10。滥用记号，我们也用 $N$、$N'$表示 $\mathbb{C}$中的矩形区域，它们的实迹与 $\mathbb{R}$中的基本域相同，边界由光滑曲线段组成，并且在保向（分别为反向）情形下，$N$、$f^n$（分别为 $N$、$f^{2n}$）与$N$（分别为$N$）具有光滑的公共边界。选取 $N$、$N'$，使其“垂直”边界为光滑曲线，并与 $\partial\mathbb{D}$ 正交；再在 $N$、$N'$中添加一条额外的光滑垂直曲线 $\gamma \in \Gamma^v$，使其经过 $N$、$N'$中每个临界点的迭代，与 $\partial\mathbb{D}$ 正交，并连接 $N$、$N'$的上、下边界。

将 $N$（与 $\mathbb{R}$ 相交）的正向和反向迭代加入其中，我们得到集合 $B_0^* \subset \mathbb{C}$，其边界由若干条光滑曲线组成，这些曲线终止于 $\partial B_0 \cap I$ 的边界点以及 $a$ 上（也可能终止于 $a$ 的直接吸引域中的某些原像，见图10）。注意，经过临界值的曲线 $\gamma \in \Gamma^v$ 的原像将不再正交，因此我们得到基本域 $N$ 的某些原像将是“复的”，见图10。

现在，在 $a$ 周围添加一个拓扑圆盘 $D_0$（$a$），使得 $f^n$（$D_0$（$a$））$\subset D_0$（$a$），并使 $B_0^* \cap \partial D_0$（$a$）与 $\partial N$ 中“垂直曲线”的某次迭代重合。接下来，在 $a$ 的直接吸引域中以 $a$ 的原像为中心，添加 $D_0$（$a$）的原像 $D_0'$。于是我们得到一个集合

$$B = B_0^* \cup D_0(a) \cup D_0'$$

使得 $f^n(B) \subset B$并且使得 $f^n(\partial B) \subset \partial B \cup \Gamma$其中

$$\Gamma = f^n(\partial D_0(a)) \cup \partial B_0^*.$$

对 $f$ 进行正向迭代，我们已经证明，在周期吸引子 $\{a, \ldots, f^{n-1}(a)\}$ 的整个直接吸引域周围，都有一个吸引结构，从而完成了构造。利用映射 $\phi_X$，吸引结构 $f\colon\ B \to B'$ 诱导出一个关于 $f_X\colon\ B \to B'$的吸引结构^^^。□

## 9. A global pruned polynomial-like structure associated to interval maps

现在将周期吸引子的吸引域附近的扩张马尔可夫结构和吸引结构结合起来，得到动力区间邻域上的全局结构：

^^^^^**定义 9.1**。我们称 $F_X\colon\ E \cup B \to E' \cup B'$ 为一个全局修剪多项式型^^^^^结构，如果 $F_X\colon\ E \to E'$ 是扩张马尔可夫结构，且 $F_X\colon\ B \to B'$ 是吸引结构，并且二者在以下意义下相容：

^^(1) $B \cup E$ 包含 $\phi_X(I) \subset \partial\mathbb{D}$的一个管状邻域；^^ (2) $B$ 的每个连通分支要么严格包含于 $E' \setminus \Gamma$ 的某个连通分支中，要么与 $E'$ 不相交^^，而在前一种情况下，$E' \setminus B$ 构成一个拟圆盘。

类似地，若区间映射 $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$的延拓 $F\colon E \cup B \to E' \cup B'$满足 $E \cup B \supset [-1,1]$，且 $F\colon E \to E'$（来自扩张映射 $F\colon E \cup B \to E' \cup B'$）

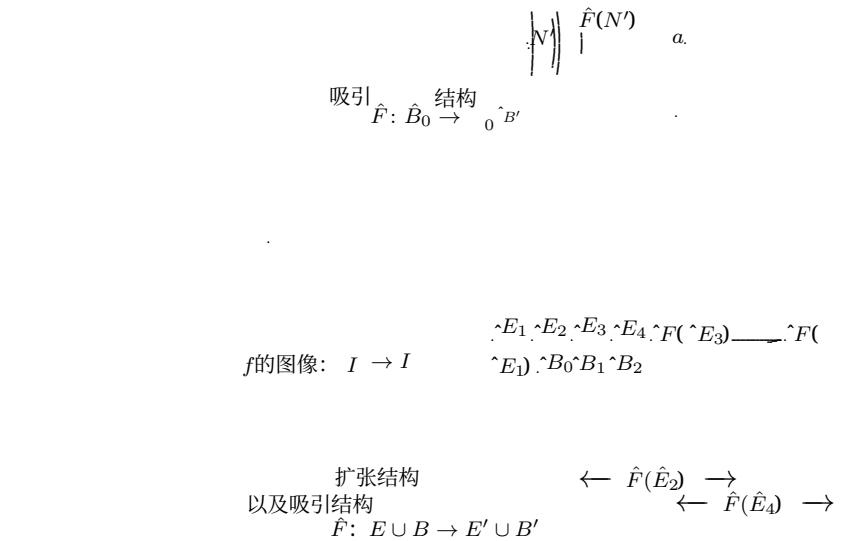



FIGURE 11. 一种全局结构 $\hat{F}\colon \hat{E} \cup \hat{B} \to \hat{E}' \cup \hat{B}'$，它与周期三吸引子情形下的扩张结构和吸引结构相容。该区间映射具有相应的全局多项式型扩张 $F\colon E \cup B \to E' \cup B'$。

$\hat{}$ 与我们在上一节中按上述意义在吸引域附近构造的「吸引结构」 $F\colon B \to B'$ 相匹配，则称其具有全局修剪多项式类结构 。

**定理 9.1.** 存在一种全局修剪多项式类结构 $F\colon E \cup B \to E' \cup B'$。

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$证明。为此，将 $F_X$ 延拓为一个映射 $F_X\colon E_1 \to E_1'$，使其在 $\partial B_0$ 的边界附近与 $E \to E'$ 一致；$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 并使 $E_1 \setminus E$、 $E_1' \setminus E'$ 成为“矩形”区域，从而 $(E_1' \setminus E_1) \cap B$ 与集合 $\hat{F}_X^{-i}(N)$ 中的一个一致，其中 $N$ 来自上一小节的构造。这一点如图11所示。我们将这些集合加入 $E$ 和 $E'$，并将所得映射仍记为 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{F}_X\colon E \to E'$。取相应的集合 $E$, $E'$, $B$, $B'$，由此得到 $f$ 的一个全局修剪多项式型扩张 $F\colon E \cup B \to E' \cup B'$。□

9.1. **将修剪多项式型映射与实解析映射相关联：仅有双曲周期点时定理 3.1 的证明。** 与第 6.2 小节一样，即使存在双曲周期吸引子，我们也能得到一个全局修剪类多项式映射。

9.2. **用交换图概述定理 3.1(1-3) 的证明。** 在上一小节中，我们说明了如何为实解析映射 $f$ 及其临界值 $f(c_i)$ 周围的区间 $J_i$ 指定一个修剪多项式型映射。为此，我们考察了修剪朱利亚集 $K_X$，其中 $X = \partial J^{-1}$。利用相应的 $\mathbb{C} \setminus K_X \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ 的黎曼映射，我们得到了一个圆映射；若 $f$ 没有周期吸引子，则在 $\partial\mathbb{D}$ 附近（远离 $f_X$ 的不连续点：$\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$）存在扩张结构。因此，我们得到一个修剪多项式型映射 $F\colon E \to E'$，它是 $f$ 的复扩张。在这种情况下，我们记作 $U = E$ 和 $U' = E'$。

如果 $f$ 具有周期吸引子，且其吸引域足够小（按定理 4.2 的含义），那么我们可以用更大的集合 $K_X$ 替换 $K_X$，随后再次在 $\partial\mathbb{D}$ 附近得到扩张结构，并得到一个修剪多项式型映射 $F\colon E \to E'$。在这种情况下，$F$ 的周期吸引子的吸引域紧包含于 $E$内部，并且我们再次得到一个修剪

多项式型映射 $F\colon U \to U'$，其中 $U = E$，$U' = E'$。在这种情况下，$U$包含 $I$。

如果 $f$ 有吸引域更大的吸引子，那么我们需要按照第8节和图10中的方法处理这些吸引域附近的吸引结构，并确保它与图11中的扩张结构相容。由此我们得到一个全局修剪类多项式映射$F\colon E \cup B \to E' \cup B'$。在这种情况下，我们令 $U = E \cup B$ 和 $U' = E' \cup B'$。

我们还应指出，如果 $f \in \mathcal{A}^\nu$，并且给定足够小的区间邻域$J_i$，则下列交换图是可交换的，

$$\begin{array}{ccc} \hat{f}_X\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D} \in \mathcal{E}^d & \xrightarrow{\text{extension}} & \hat{F}_X\colon \hat{E} \to \hat{E}' \\ \Phi_X \uparrow & & \downarrow \Psi_X \\ f\colon I \to I \in \mathcal{A}^\nu & \xleftarrow{\text{restriction}} & F_X\colon E \to E'. \end{array}$$

^^^此处，$f_X := \Phi_X(f) = \phi_X \circ f \circ \psi_X$，$F_X := \Psi_X(F_X) = \psi_X \circ F_X \circ \phi_X|_{\psi_X(\hat{}E)}$。这里，^^的限制是指对 $I \subset \mathbb{C}$ 或 $\partial\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 的限制，而延拓指复扩张。注意，$E$，$E'$，因此 $E$，$E'$ 取决于集合 $Y$ 以及 $\partial D$中的区间 $I_i \supset \Lambda'$ 的选取。

^^注记 9.1. 我们来说明这些术语的由来：集合 $E, E'$ 来自扩张集合^^^^^$F_X\colon E \to E'$，而 $B, B'$ 与吸引子的吸引域 相关。集合 $E, E', B, B'$是 $F$对应的集合，而 $U = E \cup B$ 是 $I$的一个邻域。

补充如下内容或许会有所帮助：

**引理 9.2.** 设 $f$ 是一个只有排斥周期点的实解析映射。给定临界值 $f(c_i)$ 所属的足够小的区间邻域 $J_i$，并令$X = \partial J^{-1}$，可得

$$K(F_X) = K_X(f)$$

其中，我们令 $F_X\colon U \to U'$ 为上文构造的修剪多项式型映射。

证明。 这由命题 6.3 的第 3 部分得出。 □

## 10. Holomorphic motions of pruned polynomial-like mappings and linefields

**定义10.1.** 在复巴拿赫流形 $T \ni 0$上，关于 $X \subset \mathbb{C}$ 的全纯运动是映射族

$$h_\lambda\colon X \to \mathbb{C}$$

满足

(1) $\lambda \mapsto h_\lambda(x)$关于 $\lambda \in T$全纯地变化；(2)
$x \mapsto h_\lambda(x)$是单射；(3) $h_0 = id$。

全纯运动具有非常有用的性质：

**定理 10.1.** [BR, ST] 一个定义在巴拿赫球 $T = B_r$上的 $X \subset \mathbb{C}$ 的全纯运动 $h_\lambda$ 可延拓为一个全纯运动 $h_\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 定义在 $T' = B_{r/3}$上。

**定理 10.2.** [BR, MMS] 一个定义在 $T = \mathbb{D}$ 上的 $X \subset \mathbb{C}$ 的全纯运动 $h_\lambda$ 可延拓为一个定义在 $T = \mathbb{D}$上的 $\mathbb{C}$ 的全纯运动。此外，当 $\lambda \in \mathbb{D}$时， $h_\lambda$ 的拟共形畸变 $\varkappa(h_\lambda)$至多为 $\frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}$。

证明。 参见 [AIM] 第 209 页。 □

在本文末尾，我们还需要考虑定义在某个无限维流形上的变形，因此我们也将在第 31 节讨论拟共形运动；在这种情形下，我们将不再使用上述定理。

**定义 10.2**。 令 $\mathcal{B}_a^\nu$ 表示在 $\Omega_a$ 上全纯、在 $\Omega_a$ 中恰有 $\nu$ 个阶为 $\ell_1$、.....、$\ell_\nu$ 的临界点，且可连续延拓至 $\Omega_a$ 的映射集合。

显然 $\mathcal{A}_a^\nu \in \mathcal{B}_a^\nu$。容易看出，存在 $\mathcal{B}_a^\nu$ 中的一个开集 $\mathcal{U} \ni f$，它是复解析流形，见下文引理 18.1。我们构造的盒映射在 $\mathcal{B}_a^\nu$ 的开子集上全纯地变化。

**命题 10.3.** *[*通过全纯运动保持修剪多项式型映射*]*设 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，并假设 $f$ 的所有周期点都是双曲的。则存在 $\mathcal{B}_a^\nu$ 中包含 $f$ 的开复邻域 $\mathcal{U}$，使得存在 $F\colon\ U \to U'$的修剪多项式型延拓 $f$，其射线为 $\Gamma$；并且每个映射 $g \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A}_a^\nu$ 都有一个修剪多项式型延拓 $G\colon\ U_G \to U'_G$，它由 $F\colon\ U \to U'$ 经由在 $\mathcal{U}$ 上的全纯运动得到。更确切地说，

- 存在一个全纯运动 $h_G$，使 $\partial U \cup \partial U' \cup \Gamma$ 在 $G \in \mathcal{U}$ 上运动，其中
$$h_F = id,$$
因此，若取 $U_G$、$U'_G$ 为由 $\partial U$ 的 $h_G$ 像所界定的区域，则 $G\colon\ U_G \to U'_G$ 是一个修剪多项式型映射；
- 我们有
$$h_G \circ G(z) = F \circ h_G(z) \text{ for all } z \in \partial U;$$
- 如果 $f$具有周期吸引子，那么在前面的陈述中，我们可以取 $U_G = E_G \cup B_G$和 $U'_G = E'_G \cup B'_G$。
- 我们可以选择 $\mathcal{U}$，使得 $h_G$ 延拓为 $\mathbb{C}$ 在 $G \in \mathcal{U}$上的全纯运动。

证明。 我们首先考虑 $f$ 的所有周期点都是排斥的情形。选择一个修剪多项式型延拓 $F\colon\ U \to U'$，使得 $U$，$U'$，$\Gamma \Subset \Omega_a$。注意到，$U$ 和 $U'$ 的边界由射线和等势线组成（采用定义 6.2 中的术语）。有限条射线（它们属于集合 $\Gamma$）最终会被映射到一条经过双曲排斥周期点的不变曲线。因此，选择 $\mathcal{U}$ 作为 $f$ 在 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中的邻域，使得这些（有限个）周期点中的每一个仍然保持排斥性。

如前所述，$\Gamma$ 中的每条曲线最终都会被映射到一条经过某个排斥周期点 $p \in I$的射线 $\gamma$。对于每个这样的 $\gamma$，选取一条弧 $\alpha_t \subset \gamma, t \in [0,1]$，使其为基本域（因此每条轨道至多与这条弧相交一次），并满足 $\alpha_0 \in \partial U'$且 $F^n(\alpha_1) = \alpha(0)$ 或 $F^{2n}(\alpha_1) = \alpha_0$，其中 $n$是该周期轨道 $p$的周期。这里，$F^{2n}$的情形对应于 $p$ 的乘子为负的情况。现在选取一个弧族 $\alpha_{g,\,t} \in \mathbb{C}$,$t \in [0,1]$，使其随 $g$解析变化，并使该弧没有自交点，且满足$\alpha_{g,\,0} = \alpha_0$ 以及 $G^n(\alpha_{g,\,1}) = \alpha_{g,\,0}$。因此，这定义了 $\alpha$ 在小邻域 $\mathcal{U}$上的全纯运动。

现在，考虑任意 $n$，通过考察 $F^{-n}(\alpha)$，将这一全纯运动延拓到每个 $\gamma \subset \Gamma$ 上，从而延拓到整个 $\Gamma$上。再定义 $h_G|\partial U' = id$，并定义将 $h_G$ 限制在 $U$中的等势弧上的映射，使得在那里 $h_G \circ G(z) = F \circ h_G(z)$。由于 $\partial U$，$\partial U'$中的等势弧彼此相距为正，因此可以选择 $f$ 在 $\mathcal{B}_a^\nu$ 中的一个邻域 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$，使得这定义了 $\partial U$，$\partial U'$，$\Gamma$在 $\mathcal{U}'$上的全纯运动。若将 $\overline{U_G}$，$U_G'$ 定义为由 $h_G$像 $\partial U$，$\partial U'$围成的区域，那么立刻可得，$g \in \mathcal{U}' \cap \mathcal{A}_a^\nu$的复扩张构成一个修剪多项式型映射 $\overline{G}\colon U_G \to U_G'$，其射线为 $\Gamma_G = h_G(\Gamma)$，并具有上述性质。

如果 $f$ 也有双曲周期吸引子，那么可以类似地考虑 $\Gamma_a$ 中属于这些周期吸引子的吸引域的弧。

定理 10.1 意味着存在 $f$在 $\mathcal{B}_a^\nu$中的一个邻域 $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}'$，使得 $\partial U, \partial U', \Gamma$上的全纯运动 $h_G$ 可扩展为 $\mathcal{U}^*$ 上的 $\mathbb{C}$ 的全纯运动。将 $\mathcal{U}^*$ 重新标记为 $\mathcal{U}$ 即可得到最后一项结论。□

综合前几节的结果，即可证明定理 3.1。

注 10.1。当然，$f$ 可能只有排斥周期点，而附近的映射$g$ 则可能有周期吸引子或抛物周期点。在这种情况下，这些 $G$的周期吸引子的直接吸引域：$U_G \to U_G'$将紧包含于 $U_G$中，与上述讨论无关。

事实上，之后我们还需要修剪多项式型结构在 $f_0$ 的整个拓扑共轭类（或混合类）上都保持成立。为此，我们不能使用全纯运动，而将使用拟共形运动，见第 31 节。

## 11. A global pruning structure in the presence of simple parabolic periodic points

存在抛物周期点时，引理 6.1 不再成立。不过，只要所有抛物点都是简单的，我们仍然可以以大致相似的方式处理，具体定义如下：

**定义 11.1**。如果周期点 $a$ 属于 $f\colon I \to I$，其（最小）周期为 $n$，满足简单 抛物周期点的条件，且属于鞍结型、倍周期型或叉形型，则称其为简单 抛物周期点。这里，我们称 $a$ 属于

- *saddle-node* type if one can write
  $$Df^n(a) = 1 \text{ and } f^n(x) = a + (x-a) + \tau(x-a)^2 + O((x-a)^3) \text{ for } x \approx a$$
  with $\tau \neq 0$.
- *period-doubling* type if
  $$Df^n(a) = -1 \text{ and } f^{2n}(x) = a + (x-a) - \tau(x-a)^3 + O((x-a)^4) \text{ for } x \approx a,$$
  with $\tau \neq 0$.
- *pitchfork type* if
  $$Df^n(a) = 1 \text{ and } f^n(x) = a + (x-a) + \tau_-(x-a)^3 + O((x-a)^4) \text{ for } x \approx a$$
  with $\tau_- < 0$.

**引理 11.1.** 如果 $f$ 的施瓦茨导数为负，那么 $f$ 的每个抛物周期点都是单的。此外，每个抛物周期点至少从一侧是吸引的。

证明. 这可由简单的计算得出。（可以证明，如果 $f$ 只有一个临界点，那么当 $Df^n(a) = 1$ 时，只可能出现第一种情况。）□

注记 11.1。若 $Df^n(a) = -1$，则必有 $D^2 f^{2n} = 0$。更确切地说，若 $f^n(x) = -x + ax^2 + bx^3 + O(x^4)$，则 $f^{2n}(x) = x - 2(b + a^2)x^3 + O(x^4)$。

因此，假设 $f$ 的所有抛物周期点都是简单的。设 $B_{0,hyp}$ 为双曲周期点的直接吸引域，$B_{0,par}$ 为 $f$ 的抛物^^^周期点的直接吸引域。设 $B_{0,hyp}$ 和 $B_{0,par}$ 为 $f_X$ 的相应直接吸引域。^^取集合 $Z_{0,par}$，它由若干区间组成，其并集构成 $B_{0,par}$ 的一个邻域，^使得 $B_{0,par}$ 的每个边界点最终都是周期的。接下来，对每个 $N \in \mathbb{N}$，定义

$$\Lambda'_{N,\delta} = \{z \in \partial D; \hat{f}_X^n(z) \notin \hat{Y} \cup \hat{B}_{0,hyp} \cup \hat{Z}_{0,par} \text{ for all } 0 \le n \le N\}$$

and

$$\Lambda'_{\infty,\delta} = \cap_{N \ge 0} \Lambda_{N,\delta}.$$

**引理 11.2** ($\Lambda'_\infty$ (半扩张)。集合 $\Lambda'_\infty$ 是正向不变的半扩张排斥集：存在 $|\cdot|_x$ 上的黎曼度量 $\Lambda'_\infty$ 和 $\lambda > 1$，使得

$$|D\hat{f}_X(x)v|_{\hat{f}_X(x)} \ge \lambda'_\delta(x)|v|_x \text{ for all } v \in T_x\partial\mathbb{D}, x \in \Lambda'_\infty$$

其中

$$\lambda'_\delta(x) = \begin{cases} \lambda & \text{if } x \text{ has distance} \ge \delta \text{ from any parabolic periodic point} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，

^*(1)* 存在 $N < \infty$ 和 $\lambda > 1$，使得 $|Df_X(x)v|$ ^$f_X(x) \ge \lambda'(x)|v|_x$ 对每个 $v \in T_x\partial\mathbb{D}$、$x \in \Lambda'_N$、$\delta$ 均成立。*(2)* 令 $I'_1$、...、$I'_l \subset \partial\mathbb{D}$ 为 $\Lambda'_N$ 的连通分支，$\delta$，并令 $I_1$、...、$I_k \subset \partial\mathbb{D}$ 满足：对每个 $i$，存在 $j_i$ 使得 $f_X(I_i) = I'_{j_i}$，且 $\Lambda'_{N+1}$、$\delta = \cup I_i \subset \cup I'_i$。*(3)* $I_i$ 和 $I'_j$ 的每个边界点都是周期的或最终周期的。

证明。这个引理是对 Ma˜n´e 引理和引理6.1的证明稍作修改后得到的。□

利用这个引理，我们便可在允许存在简单抛物周期点的情形下，得到引理 6.2 和命题 6.3 的类似结果。唯一的区别是，现在我们不再在 $\partial\mathbb{D}$ 之外得到扩张结构，而是在 $B_{0,}$ $_{hyp} \cup Z_{0,\ par}$之外得到。这里，^$Z_{0,\ par} \subset \partial\mathbb{D}$ 定义为 $\phi_X(Z_{0,\ par})$。

为了在抛物周期点的吸引域中构造吸引结构，我们从一条经过 $\gamma$ 的射线开始，该射线位于抛物点的排斥侧$\partial Z_{0,\ par}$。然后，我们将射线 $\gamma$ 延伸为一条连接到抛物周期点 $a$的曲线，如图 12 所示。关于如何构造 $\gamma$ 的更多细节见定理 16.1 的证明。接下来，考虑圆盘 $D$ 内 $\gamma$ 的迭代，该圆盘在 $a$处与 $\mathbb{R}$ 相切。$\gamma$ 与 $f$之间的区域$S_{+,\ f}$（$\gamma$）构成一个基本新月形区域：$a$ 附近的每条轨道都恰好经过$S_{+,\ f}$一次。利用 Fatou 坐标，可以精确描述这些区域的形状。接下来，按照命题 8.1 的证明完成构造。令 $\gamma'$ 为图 12 所示的不变曲线（类似于图 10 中的曲线 $\Gamma_a^*$）。此时，由$\gamma$ 和 $\bar{\gamma}'$ 围成的区域 $B$ 不再是拟圆盘。这是因为曲线 $\gamma$ 和 $\gamma'$ 会在$a$处相切。不过，如果我们加入上文讨论的圆盘（其中包含新月形区域），我们

便可在简单抛物周期点附近得到吸引结构。因此，对于所有抛物周期点均为简单抛物周期点的映射 $\mathcal{A}^\nu$，我们得到一个全局修剪结构，这与定理 9.1 类似。

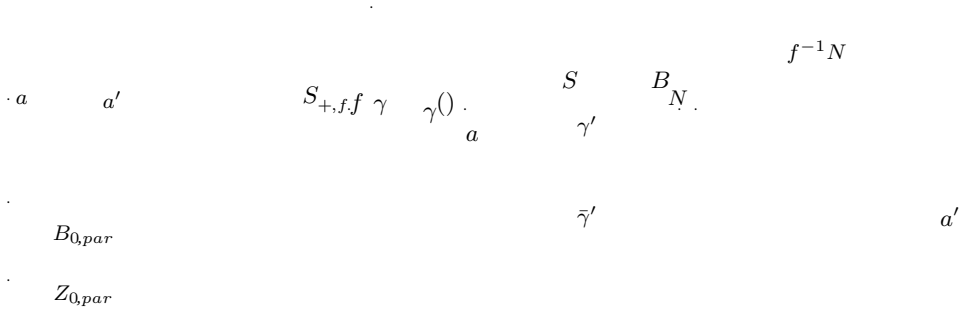



FIGURE 12. 具有二阶接触的抛物单侧吸引子附近的吸引结构。由虚线曲线围成的区域来自扩张结构。集合 $B$（它位于曲线 $\gamma'$ 与 $\bar{\gamma}'$ 之间）不是拟圆盘。

**11.1.存在抛物周期点时的全纯运动（在受限意义下）**。如果 $f$ 具有抛物周期点，那么我们构造的修剪多项式型结构不会在全纯变形下保持不变。然而，某种形式的结论仍然成立。假设 $f$ 具有一个周期为 $n$ 的简单抛物周期点。令 $\mathcal{B}_a^\nu$ 按照定义 10.2 定义。令 $\mathcal{PAR}_f$ 表示满足以下条件的映射 $g \in \mathcal{B}_a^\nu$ 的集合：$g$ 具有一个周期为 $n$ 的简单抛物周期点。不难证明，存在 $f$ 在 $\mathcal{B}_a$ 中的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得 $\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_a^\nu$ 是一个复解析流形，见第 19.3 小节。

因此，命题 10.3 的类似结论成立：存在 $\mathcal{B}_a$ 中 $f$ 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得存在一个定义在 $g \ni \mathcal{U} \cap \mathcal{PAR}_f$ 上的全纯运动 $h_G$，其对象为 $\partial E$，$\partial E'$，$\partial B$，$\partial B'$，并且命题 10.3 的结论成立。特别地，每个靠近 $f$ 的 $g \in \mathcal{A}_a^\nu \cap \mathcal{PAR}_f$ 都有一个修剪多项式型延拓

$$G\colon U_G := E_G \cup B_G \to E'_G \cup B'_G =: U'_G$$

其中 $B_G$，$B'_G$ 具有上一小节所述的抛物结构。

## 12. Absence of line fields

值得注意的是，运用 [McM、She1]，（另见 [CDKS]，）中的复平面界估计 [CvST、CvS]，可推出：

**命题 12.1.** 设 $F$： $U \to U'$ 是一个修剪多项式型映射，其充满的修剪朱利亚集为 $K_F$。那么，$K_F$ 的边界不支持可测不变线场。

## 13. Two external maps with the same pruning data are qc-conjugate

**命题13.1.** 设 $f_X$, $g_X$ 是两个具有全局修剪多项式型延拓的外部映射，分别为 $F_X\colon E'_F \cup B'_F \to E'_{\hat{F}} \cup B'_{\hat{F}}$ 和 $G_X\colon E'_G \cup B'_G \to E'_{\hat{G}} \cup B'_{\hat{G}}$，使得 $Q(f_X) = Q(g_X)$。

那么存在一个 $\partial\mathbb{D}$-对称的拟共形映射 $H\colon E'_F \cup E'_{\hat{F}} \cup B_{\hat{F}} \to E'_G \cup E'_{\hat{G}} \cup B_{\hat{G}}$，它将 $(E'_{\hat{F}}, E'_F, B'_F, B'_{\hat{F}})$ 映到对应的集合 $(E'_{\hat{G}}, E'_G, B'_G, B'_{\hat{G}})$，并且共轭 $F_X$ 和 $G_X$。

ˆ证明。 由于 $Q(f_X) = Q(\hat{g}_X)$，且所有相关集合都是拟圆盘，因此存在一个$\partial\mathbb{D}$-对称映射，它是拟共形的，并将以下集合映到对应的集合

$$H : (\hat{E}_{\hat{F}}, \hat{E}'_{\hat{F}}, B_{\hat{F}}, B'_{\hat{F}}, \Gamma_{\hat{F}}) \to (\hat{E}_{\hat{G}}, \hat{E}'_{\hat{G}}, B_{\hat{G}}, B'_{\hat{G}}, \Gamma_{\hat{G}})$$

ˆˆˆˆ，因此 $H$是 $F_X$与 $G_X$在（$\partial E\hat{}_F$， $\partial E'_{\hat{F}}$， $B\hat{}_F$， $B'_{\hat{F}}$， $\Gamma\hat{}_F$）上的共轭。现在ˆˆˆˆ令 $H_0 = H$，并定义 $H_{n+1}$ 为 $F_X \circ H_{n+1} = H_n \circ G_X$。由于 $F_X$ 和 $G_X$ 没有临界点，我们得到外部映射 $F$： $E\hat{}_{F_X} \cup B_{\hat{F}_X} \to E'_{\hat{F}_X} \cup B'_{\hat{F}_X}$ˆˆˆ与 $G$： $E\hat{}_{G_X} \cup B\hat{}_{G_X} \to E'_{\hat{G}_X} \cup B'_{\hat{G}_X}$之间的拟共形共轭。 □

前面的结果表明，具有相同修剪数据的两个映射 $f$， $g \in \mathcal{A}_a^\nu$ 在“外部”共轭：

**命题13.2** （修剪多项式型映射的“外部”拟共形共轭）。假设 $f$ 和 $g \in \mathcal{A}_a^\nu$ 的所有周期点都是双曲的，且 $Q(f_X) = Q(\hat{g}_X)$。则有以下结论。

（*1*）若 $f$、$g$ 或没有周期吸引子，或所有周期吸引子的小吸引域都很小，则这些映射具有修剪多项式型复扩张 $F$： $U_F \to U'_F$ 和 $G$： $U_G \to U'_G$，且存在一个拟共形映射 $h$： $U_F \cup U'_F \to U_G \cup U'_G$，使得

$$U_G = h(U_F)\ ,\ U'_G = h(U'_F)\ ,\ \Gamma_g = h(\Gamma_F)$$

*and*

$$h \circ F(z) = G \circ h(z)\ for\ z \in \partial U_F \cup \Gamma_F.$$

任意这样的拟共形映射都延拓为共轭 $H$： $(U_F \cup U'_F) \setminus K_F \to (U_G \cup U'_G) \setminus K_G$，其间

$$F\colon U_F \setminus K_F \to U'_F\ \ and\ G\colon U_G \setminus K_G \to U'_G$$

与 $h$ 具有相同的膨胀率。

*(2)* 若 $f$、$g$ 确有周期吸引子，则它们具有全局修剪多项式型复扩张 $F$： $E_F \cup B_F \to E'_G \cup B'_G$ 和 $G$： $E_G \cup B_G \to E'_G \cup B'_G$，使得若令 $U_F$： $= E_F \cup B_F$ 和 $U_G$： $= E_G \cup B_G$，则

$$F\colon U_F \setminus K_F \to U'_F\ \ and\ G\colon U_G \setminus K_G \to U'_G$$

二者准共形共轭，并且该拟共形共轭将 $\Gamma_F$ 映射到 $\Gamma_G$。

ˆˆ 证明。设 $E_F$、$E'_F$、$B_F$、$B'_F$、$\Gamma_F$ 和 $E_G$、$E'_G$、$B_G$、$B'_G$、$\Gamma_G$ 分别为与 $E\hat{}_F$、$E'_{\hat{F}}$、ˆˆˆˆˆˆ$B\hat{}_F$、$B'_{\hat{F}}$、$\Gamma\hat{}_F$ 以及 $E\hat{}_G$、$E'_{\hat{G}}$、$B\hat{}_G$、$B'_{\hat{G}}$、$\Gamma\hat{}_G$ 相对应的集合，则该命题由命题 13.1 立即得出。□

备注 13.1。 请注意， $H$不一定将 $\phi_{X_F}(c_i)$ 映射到 $\phi_{X_{\tilde{F}}}(c_i)$（其中 $\phi_{X_F}$： $K_F \to \partial\mathbb{D}$ 和 $\phi_{X_{\tilde{F}}}$： $K_{\tilde{F}} \to \partial\mathbb{D}$ 是上述黎曼映射所关联的边界映射），因此上述命题绝不意味着 $F$： $U_F \to U'_F$和$G$： $U \to U'_G$共轭。

## 14. Hybrid conjugacy

**定义 14.1**。 假设 $f, g \in \mathcal{A}^\nu$ 的所有周期点均为双曲的或简单抛物的。若 $f, g\colon\ I \to I$ 在 $I$ 的某个邻域上拟共形共轭，并且存在这一拟共形共轭的一种选择以及 $f$ 的吸引周期点的一个邻域 $W$，使得 $h$ 限制在 $W$ 与 $f$ 的吸引周期点的吸引域的交集上时为全纯，则称它们实混合共轭。我们将 $f$ 的实混合类记为 $\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$。

上述定义没有对拟共形共轭所定义的定义域作出任何限制。相比之下，下面的定义要求拟共形共轭定义在修剪多项式型映射的定义域上。

**定义 14.2.** 如果存在一个拟共形拓扑共轭 $H$，使得$\partial H = 0$在 $K_F$ 上几乎处处成立，我们就称修剪多项式型映射 $F\colon\ U_F \to U_F'$和 $G\colon\ U_G \to U_G'$是混合共轭的。我们用 $\mathcal{H}_F$表示 $F$ 的混合类，即与 $F$ 混合共轭的修剪多项式型映射所组成的集合。如果 $F$ 是实的，那么 $\mathcal{H}_F^{\mathbb{R}}$表示与 $F$拟共形共轭的实修剪多项式型映射所组成的集合。

备注 14.1. 如果 $f, g$ 的所有周期点都是排斥的，那么 [CvS], [CvST] 以及不存在任何线场这一事实表明，这些映射具有修剪多项式型延拓 $F$ 和 $G$，且二者混合共轭，参见定理 15.1。

注记 14.2。 如果两个映射 $F, G$ 互为混合共轭，且它们有周期吸引子，那么该共轭在这些吸引子的吸引域上是共形的。

实解析映射的修剪多项式型延拓的定义域和值域 $U_F, U_F'$并非唯一确定。因此：

**定义 14.3**。 若修剪多项式型映射 $F\colon\ U_F \to U_F'$和 $G\colon\ U_G \to U_G'$满足 $F = G$ 在 $U_F \cap U_G$ 上且 $Q(F) = Q(G)$，则称它们等价 。

注记 14.3。 请注意，此定义并未 考虑芽等价类。事实上，从 $F\colon\ U_F \to U_F'$ 得到一个等价的修剪多项式型映射的一种方法是 ˆ ˆ 保留射线 $\Gamma_F$，但缩短它们，并降低 $\partial E, \partial E'$中的屋顶（即等势线）；见图 8，该图对应于定义域边界 $\partial U_F, \partial U_F'$中未包含在 $\Gamma_F$内的部分。由于两个等价修剪多项式型映射的修剪数据相同，它们的 Julia 集也相同。

**引理 14.1.** 如果 $F{:}U_F \to U_F'$和 $G{:}U_G \to U_G'$等价，那么存在域$U$、$U'$，使得 $U$、$U' \subset U_F \cap U_G$，并且使得 $F = G\colon\ U \to U'$是一个修剪多项式型映射。

证明。 令 $U'$为与 $I$相交的$U_F' \cap U_G'$的连通分支。然后令 $U$为包含 $I$的 $F^{-1}(U')$的连通分支。□

## 15. Topologically conjugate maps have qc-conjugate pruned extensions

具有修剪多项式型结构的一个主要结果是，在$\mathcal{A}^\nu$ 中（没有抛物周期点）的拓扑共轭映射在区间 $I$的某个邻域上拟共形共轭。下一个定理基于通常的回拉论证。

下一个定理中最重要的是第3点，其中证明了 $F$ 与 $G$ 之间拟共形共轭的膨胀率仅取决于拟共形

$U'_F \setminus (U_F \cup \Gamma'_F)$、 $U_F \setminus \Gamma'_F$与 $U_F \setminus (U'_F \setminus \Gamma'_F)$ 以及 $U'_G \setminus (U_G \cup \Gamma'_G)$、 $U_G \setminus \Gamma'_G$与 $U_G \setminus (U'_G \setminus \Gamma'_G)$之间的共轭。由此可知，彼此接近的混合共轭映射是 $\kappa$-拟共形共轭的，且 $\kappa > 1$ 接近于1，参见推论15.2。

**定理 15.1**（回拉论证）。 假设 $f$ 与 $g \in \mathcal{A}_a^\nu$ 在 $I$ 上拓扑共轭，且没有抛物周期点。则有以下结论。

（*1*）如果 $f$、$g$ 没有周期吸引子，或者所有周期吸引子都有小吸引域，那么这些映射具有修剪多项式型复扩张 $F\colon U_F \to U'_F$ 和 $G\colon U_G \to U'_G$，且它们也拟共形共轭。

（*2*）如果 $f$、$g$ 确实具有周期吸引子，那么它们具有全局修剪多项式型复扩张 $F\colon U_F \to U'_F$ 和 $G\colon U_G \to U'_G$，且二者拟共形共轭。在此情形下，$U_F\colon = E_F \cup B_F$、$U'_F\colon = E'_F \cup B'_F$、$U_G\colon = E_G \cup B_G$ 以及 $U'_G\colon = E'_G \cup B'_G$。（*3*）此外，如果 $f$、$g$ 实混合共轭，并且命题*13.2*中的它们的修剪多项式型扩张 $F$、$G$ 之间的外部拟共形共轭在 $K_F$ 外部的膨胀率至多为 $\varkappa$，或者等价地，在 $U'_F \setminus (U_F \cup \Gamma'_F)$ 上以及 $U_F \setminus (U'_F \setminus \Gamma'_F)$ 上为此值，那么 $F$、$G$ 混合共轭，并且在其整个定义域上 $\varkappa$-拟共形共轭。

证明。由于 $f$ 与 $g$ 拓扑共轭，可以选择修剪区间 $J_i$、$_f$、$J_i^*$、$_f \ni \hat{f}(c_i)$ 以及 $J_i$、$_g$、$J_i^*$、$_g \ni g(c_i)$，使得 $Q(f_X) = Q(\hat{g}_X)$。只要我们将这些修剪区间取得足够小，就存在修剪多项式型延拓 $F$、$G$，它们分别是 $f$、$g$ 的复扩张，并且 $U_F$、$U'_F$、$U_G$、$U'_G$ 紧包含于 $\Omega_a$ 中。根据定理 13.2，我们还可得存在一个拟共形共轭 $h_0$，使其在 $K_F$ 外共轭 $F$ 与 $G$，以及 $K_G$。

根据 [CvS] 中的主定理，映射 $f$、$g$ 拟对称共轭。将区间 $I$ 上的这个拟对称共轭延拓到 $U \cup U'$，使其在 $U' \setminus U$、$U \setminus U'$、$\Gamma \cap (U' \setminus U)$ $B$ 上与 $h_0$ 一致。在此我们不对该延拓的拟共形界作任何保证。将这个新的拟共形映射记为 $h_0$、$_g$，并令 $K$ 为其拟共形畸变。由于 $h_0$、$_g$ 是 $f$、$g$ 的后临界集之间的共轭，可以定义一个拟共形映射序列 $h_n$、$_g$，使得 $F \circ H_{n+1}$、$_g = H_n$、$_g \circ G$，并且 $h_{n+1}$、$_g$ 的拟共形畸变与 $H_n$、$_g$ 的相同。由于 $\kappa$-拟共形映射空间是紧的，$H_n$、$_g$ 存在一个收敛子列。此外，对于每个 $z \in U \setminus K_F$，存在 $n$，使得 $F^n(z) \notin U$，因此对所有 $i \geq 0$，都有 $H_{n+i}$、$_g(z) = H_n$、$_g(z)$。由于 $h_0\colon B_F \to B_G$ 已经是一个全纯共轭，并且 $K_F \setminus B_F$ 没有内部，事实上 $h_n$ 收敛到一个 $\kappa$- 拟共形映射 $H_\infty$。因此，$h_\infty$ 共轭 $F$、$G$。最后一个断言立即成立，因为 $F$ 在 $\partial K_F$ 上没有不变线场，因此 $h_\infty$ 的拟共形畸变等于 $\varkappa(h_g)$。

如果 $f$，$g$ 没有周期吸引子，那么第二个断言成立：因为此时 $F$ 的填充朱利亚集：$U \to U'$ 没有内部，而且填充朱利亚集边界上不存在不变线场。因此，假设 $f$，$g$ 确有周期吸引子，并且$f$，$g$ 实混合共轭。根据定义，存在一个拟共形共轭 $\varphi$，它在包含周期吸引子集合的某个邻域 $W$ 上全纯。现在选取修剪多项式型映射 $F\colon E \cup B \to E' \cup B'$ 的集合$B$，$B'$，使得 $W$包含围绕周期吸引子的闭曲线 $\Gamma_a^a$，见图10。接着将共轭$\varphi$ 延拓到周期吸引子集合的吸引域 $B_0$。利用 $\varphi$ 的这一延拓来构造$B_G$，$B'_G$（即定义 $B_G := \varphi(B)$，$B'_G := \varphi(B')$）。于是得到一个修剪多项式型映射$G\colon E_G \cup B_G \to E'_G \cup B'_G$。现在在周期吸引子 $O$附近修改拟共形共轭 $H_0$，使其在 $W$上与 $\varphi$ 一致。然后，利用上文的回拉论证，我们得到一个

$\kappa$-拟共形共轭 $H_\infty$，它在 $O$的吸引域上全纯。这就完成了第二个和第三个断言的证明。□

注记 15.1。利用修剪多项式型结构，还可以立即扩展 [KSvS1] 中的证明，从而得到 $F$，$G$之间的拟共形共轭。

由前面的定理可得：

**推论15.2**（拟共形界）。对于每个 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，只要其所有周期点都是双曲的，就存在 $\delta > 0$ 和 $L > 0$，使得以下结论成立。设 $g_0$与 $g_1 \in \mathcal{A}_a^\nu$ 彼此实解析混合共轭，且 $||g_i - f||_\infty < \delta$。那么存在 $G_i\colon U_{G_i} \to U'_{G_i}$，分别是 $g_i$、$i = 0$的修剪多项式型延拓，1 以及它们之间的拟共形共轭 $h_{G_0,\ G_1}$，其拟共形畸变

$$\varkappa(h_{G_0,G_1}) \le 1 + L||g_0 - g_1||_\infty.$$

这里，$||\cdot||_\infty$ 是 $\Omega_a$上的上确界范数。

证明。令 $G_i\colon U_{G_i} \to U'_{G_i}$为通过全纯运动从 $F\colon U_F \to U'_F$在 $\mathcal{B}_a^\nu$中 $f$的某个邻域 $\mathcal{U}$上得到的 $g_i$的修剪多项式延拓，见命题 10.3。前一定理——定理 15.1——表明，$h_{G_1,G_2}$ 的膨胀率不超过集合 $U'_{G_i} \setminus U_{G_i}, U_{G_i} \setminus U'_{G_i}, \Gamma \cap (U'_{G_i} \setminus U_{G_i})$ 之间拟共形共轭的膨胀率。现在，我们来为（某个）这样的共轭求一个拟共形膨胀率的上界。

假设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{B}_a^\nu$ 中的一个 $\delta_0$ 球，并假设 $||g_i - f||_\infty < \delta_0/2$。由此可知，包含在 $\mathcal{U}$中的 $\delta_0/2$以 $g_0$ 为中心的球。令 $A = (\delta_0/2)/||g_0 - g_1||_\infty$，并考虑复一维切片 $T = \{g^t\colon g^t = g_0 + At(g_1 - g_0)$，其中 $t \in \mathbb{D}\}$ 由 $t \in \mathbb{D}$参数化。由此可得 $T \subset \mathcal{U}$。将通过全纯运动得到的 $g_t$ 的修剪多项式型延拓记为 $G_t$。根据定理 10.2，存在一个以 $\mathbb{D}$ 为参数、作用于 $\mathbb{C}$ 的全纯运动 $h^t$，使其拟共形畸变至多为

$$\varkappa(h^t) \le \frac{1 + |t|}{1 - |t|} \quad \forall t \in \mathbb{D}.$$

注意，对于 $t_1 = 1/A$，$g_1 = g^{t_1}$。因此

$$\varkappa(h_{G_0,G_1}) \le \varkappa(h^{t_1}) \le \frac{1 + t_1}{1 - t_1} \le \frac{1 + 2||g_0 - g_1||_\infty/\delta_0}{1 - 2||g_0 - g_1||_\infty/\delta_0} \le 1 + L||g_0 - g_1||_\infty \tag{15.1}$$

对于某个依赖于 $\delta_0$ 的 $L$。□

注15.2。在前述结论中，允许 $g_i \in \mathcal{A}_a^\nu$ 具有 $f$所没有的吸引或抛物周期点，因为它们的吸引域足够小，紧包含于 $U_{g_i}$ 中，并且包含在 $K(G_i)$ 中。

## 16. Hybrid-conjugacy in the parabolic case

对于具有抛物周期轨道的映射，我们有推论15.2的如下类似结论。

**定理 16.1**（具有简单抛物周期点的映射的拟共形刚性）。设映射 $f$具有简单抛物周期轨道 $O_1$、…、$O_p$。则存在 $\delta > 0$和 $L > 0$，使得对于任意两个拓扑共轭映射 $g_1$、$g_2$，它们分别在 $\delta$-邻域 $O_i$ 的每个 $i = 1$、…、$p$ 中恰有一个简单抛物轨道，并且满足 $||g_1 - g_2||_\infty < \delta$，以下结论成立。设 $G_1$、$G_2$ 是 $g_1$、$g_2$的修剪多项式型延拓。则存在一个 $\varkappa$-拟共形 $h$，将 $G_1$与 $G_2$ 对应起来，使得

$$\varkappa(h) \le \varkappa \le 1 + L||g_1 - g_2||_\infty. \tag{16.1}$$

¯如果 $g_1$、$g_2$ 是混合共轭的，那么该 $\partial h = 0$ 在 $G_1$、$G_2$的周期吸引子和抛物吸引子的吸引域上成立。

证明。注意，$g_1$，$g$，$g_2$都包含在一个无限维流形 $\mathcal{P}_f$中，该流形由在 $O_i$, $i = 1, \dots, p$附近具有抛物周期点的映射组成。

考虑 $f$的一个简单抛物周期点。为简便起见，假设它一侧为吸引的，另一侧为排斥的，并且该抛物点是$x = a$处的不动点。这意味着，当 $x$ 在 $a$附近时，$f(x) = (x-a) - (x-a)^2 + h.o.t.$。按照惯例，可在 $x \in \mathbb{C}$ 附近取坐标变换 $w = 1/(x-a)$，并且在 $x = a$ 附近；在这些坐标下，$f$的形式为 $T(w) = w + 1 + O(1/w)$，其中 $w \approx \infty$。取一条经过预周期点 $\partial Z_{0,par}$（位于抛物点的排斥侧）的曲线 $\gamma$，它构成扩张集 $E$边界的一部分。注意，$\gamma$ 是经过一个周期点的不变曲线的原像，并且可以假设 $\gamma$（及其所有正向迭代）曲线都与 $I$正交。令ˆ$\gamma$ 为相应的 $w$ 坐标曲线。将 $\gamma$ 延伸为一条包含不动点 $a$ 的曲线 $\tau$，使得相应的 $\tau \supset$ ˆ$\gamma$ 在 $w$ 坐标下的曲线与 $T$(ˆ$\tau$)不相交。这意味着ˆ$\tau$与 $T$(ˆ$\tau$)之间的区域 $S_-$构成一个基本域。$z$平面中的对应区域 $S_-$ 呈新月形。现在固定一个足够大的ˆ ˆ $R > 0$，并考虑区域 $S' = S \cap \{w$的正向迭代；$\mathrm{Im}(w) \geq R\}$。该区域包含于 $H = \{w;\ \mathrm{Re}(w) \geq R - C\}$，其中 $C > 0$ 是一个与 $R$无关的常数。$z$ 平面中的对应区域包含在一个圆盘 $D$ 内，其边界经过 $a$。选取足够大的 $R > 0$，使得 $D$ 与 $\gamma$ 和 $E' \supset E$不相交。注意，$a$ 的吸引域包含于 $D$ 以及新月形区域$S_+$的正向迭代中。

我们来证明，存在满足所需性质的 $\kappa$-拟共形共轭 $h$，使得 $g_1$，$g_2$。用 $E_i'$，$E_i$，$S_{i,0}$表示与这些映射对应的区域。为构造 $h$，先定义$h$：$E_1' \setminus E_1 \to E_2' \setminus E_2$，并在抛物型不动点 $a$的直接吸引域上选取一个混合共轭 $h$。接着，将其扩展为同胚$S_{1,-} \to S_{2,-}$，使之在$S_{1,-}$的边界上成为共轭；具体做法是将该共轭扩展到$S_{1,-} \cap D$ 与$S_{1,-} \cap E'$之间的区域。然后，通过拉回$h|S_{i,-}$，将 $h$ 扩展到 $a$ 的一个邻域。注意，这可以利用（受限的）全纯运动来完成，因此与之前一样，我们得到所需的不等式（16.1）。□

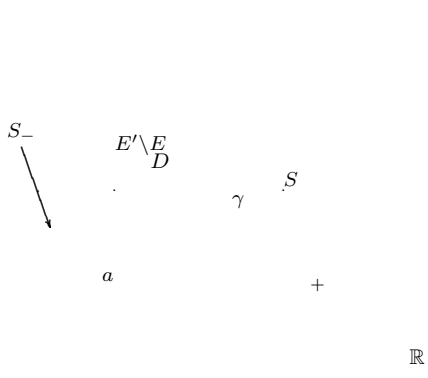



FIGURE 13. 在 $a$的一个“大”邻域上构造 $g_1$ 与 $g_2$ 之间的拟共形共轭。

**B部分：应用**

17. Topological and analytic structure on the space of real analytic functions and pruned polynomial-like mappings

如前所述，我们通过上确界度量在空间 $\mathcal{A}_a$ 上定义一个度量

$$d(f,g) := ||f-g||_{\overline{\Omega}_a} := \sup_{z\in\overline{\Omega}_a} |f(z)-g(z)|.$$

这使得 $\mathcal{A}_a^\nu$ 成为实线性巴拿赫空间 $\mathcal{A}_a$ 的一个实解析巴拿赫子流形，其中 $\mathcal{A}_a$ 是$\Omega_a$ 上不对临界点施加任何条件的实解析映射空间，参见第18节。利用隐函数定理，我们将在第19节证明，所谓半双曲映射的实混合类是$\mathcal{A}_a^\nu$的实解析巴拿赫子流形。证明实混合类同样是 $\mathcal{A}_a^\nu$ 的实解析巴拿赫子流形，是本文其余部分的主要目标之一。

$\mathcal{A}_a^\nu$在 $f$处的切空间，记为 $T_f\mathcal{A}_a^\nu$，由定义在$\Omega_a$ 上的全纯向量场 $v$组成，这些向量场在 $\partial I$ 处消失（因为对于任意 $f\in\mathcal{A}_a$，我们都有 $f(\partial I)\subset\partial I$），并且对于 $f$的每个临界点 $c_i$，都有 $1\le i\le\nu$，$v^{(j)}(c_i)=0$，其中 $1\le j<\ell_i-2$。关于导数 $v^{(j)}(c_i)$的条件确保临界点的阶不发生变化。注意，临界点可以在空间$\mathcal{A}_a^\nu$内变化，同时 $\mathcal{A}_a^\nu$ 不是线性空间。事实上，如果 $f\in\mathcal{A}_a^\nu$ 和 $v\in T_f\mathcal{A}_a^\nu$，那么通常对于 $t\neq 0$有 $f+tv\notin\mathcal{A}_a^\nu$。

17.1. **实解析拓扑**。根据定义，空间 $\mathcal{A}^\nu$ 是所有 $a>0$上 $\mathcal{A}_a^\nu$ 的并集。当然，它也等于对所有开集 $U\supset I$取 $\mathcal{A}_U^\nu$ 的并集，其中$\mathcal{A}_U^\nu$ 表示 $\mathcal{A}^\nu$ 中可解析延拓至 $U$ 并连续延拓至 $U$的实解析映射集合。$\mathcal{A}^\nu$ 上的实解析$C^\omega$ 拓扑（也称为逆极限拓扑）定义如下：若对所有 $a>0$，$\mathcal{O}\cap\mathcal{A}_a^\nu$ 都是开集，则集合 $\mathcal{O}$ 是开集（这里采用 $\mathcal{A}_a^\nu$上由上确界范数诱导的拓扑）。这在 $\mathcal{A}^\nu$ 上定义了一个豪斯多夫拓扑。在附录 C 中，我们将介绍这一拓扑的更多性质，尤其是：

- 对 $f_n,\ f\in\mathcal{A}^\nu$，当且仅当存在 $a>0$ 使得 $f_n,\ f\in\mathcal{A}_a^\nu$，且 $f_n\to f$ 在 $\Omega$ 上一致收敛（相对于实解析拓扑）时，我们有$f_n\to f$。
- 对于任意 $f\in\mathcal{A}_a^\nu$，任意 $a'>0$ 以及实解析拓扑中的任意开集 $\mathcal{O}\ni f$，都存在 $g\in\mathcal{O}\setminus\mathcal{A}_{a'}^\nu$；特别是，$\mathcal{A}_a^\nu$ 不是 $\mathcal{A}^\nu$的开子集。
- $f\in\mathcal{A}_a^\nu$ 可以在 $[-1,1]$上的 $C^k$ 拓扑下由实解析映射$f_i\in\mathcal{A}_{a_i}^\nu$ 逼近，而这些映射不属于 $f_i\in\mathcal{A}_{a'}^\nu$，其中 $0<a_i<a_i'$ 满足 $a_i'\to 0$。

空间 $\mathcal{A}^\nu$ 可以按照通常意义视为实解析区间映射的芽，且 $\mathcal{A}^\nu=\lim\mathcal{A}_a^\nu$。在附录 C 中，我们将详细阐述这些内容，并讨论 $\mathcal{A}$上的实解析拓扑的一些其他性质。$\mathcal{A}^\nu$ 上的这一拓扑很有用，因为空间$\mathcal{T}_f$ 和 $\mathcal{H}_f$ 并未指定这些映射的定义域。

17.2. **实解析流形**。$\mathcal{M}\subset\mathcal{A}^\nu$ 称为以一族巴拿赫空间为模型的实解析流形（或简称实解析流形），如果 $\mathcal{M}$ 是形如 $j_U(\mathcal{O}_U)$的集合之并，其中 $j_U\colon\mathcal{O}_U\to\mathcal{M}$ 是一族（典范）单射，$U\in\mathcal{U}$且 $\mathcal{O}_U$是巴拿赫空间 $\mathcal{A}_U$的一个开子集。集合 $j_U(\mathcal{O}_U)$称为 $\mathcal{M}$的一个巴拿赫切片。若存在解析流形 $\mathcal{M}$ 和解析映射 $i\colon\mathcal{M}\to\mathcal{A}^\nu$，使得 $Di(m)$是到其值域上的线性同胚，且 $\mathcal{X}=i(\mathcal{M})$，则称集合 $\mathcal{X}\subset\mathcal{A}^\nu$ 为浸入子流形。若 $i\colon\mathcal{M}\to\mathcal{X}$ 是同胚，且 $\mathcal{X}$ 上的拓扑来自 $\mathcal{A}^\nu$上的拓扑，则称 $\mathcal{X}$ 为嵌入流形。

**17.3. 修剪多项式型映射芽空间的拓扑与解析结构。** 按照 [McM，第4]节，我们也将在修剪多项式型映射的芽空间上赋予一个拓扑：

**定义 17.1。** $F_n\colon\ U_n \to U_n'$ 收敛到 $F\colon\ U \to U'$，如果

(1) $(U_n,\ u_n) \to (U,\ u)$ 按照*Carath´eodory*意义收敛，即 (i) $u_n \to u$，(ii) 对每个紧$K \subset U$，$K \subset U_n$ 对充分大的 $n$ 成立；(iii) 对任何包含$u$的开连通集 $K'$，若 $K' \subset U_n$ 对无穷多个 $n$ 成立，则 $K' \subset U$。这里我们取 $u_n = u = 0$。(2) $F_n \to F$ 在 $U$的紧子集上一致收敛。

设修剪多项式型映射 $F\colon\ U \to U'$ 的所有周期点都是˜双曲的，并设 $U$ 的一个邻域 $U$，在该邻域上 $F$ 全纯且连续延拓至其闭包˜。则存在一个邻域 $B_{\tilde{U}}(F,\ \epsilon)$，由所有满足 $||G - F||_{\tilde{U}} < \epsilon$的全纯 $G\colon\ U \to \mathbb{C}$组成，使得每个 $G \in B_{\tilde{U}}(F,\ \epsilon)$ 都有一个修剪多项式型映射 $G\colon\ U_G \to U_G'$。这是通过全纯运动得到的，见命题 10.3。令

$$j\colon B_{\tilde{U}}(F,\epsilon) \to \mathcal{PPL} := \{\text{space of pruned polynomial-like mappings}\}/\sim \tag{17.1}$$

是相应的嵌入。这里，$\sim$ 是定义 14.3 中的芽等价关系。根据全纯运动的性质，$j$ 是连续的。由引理 14.1 可知，如果 $j(B_{\tilde{U}}(F,\ \epsilon)) \cap j(B_{\tilde{U}'}(F',\ \epsilon')) \neq \emptyset$，则复合映射 $(j|B_{\tilde{U}'}(F',\ \epsilon'))^{-1} \circ (j|B_{\tilde{U}}(F,\ \epsilon))$ 是恒等映射。因此，(17.1) 中的映射 $j$ 在修剪多项式型映射的空间上定义了一个解析结构。

事实上，如果我们将由 $\mathcal{PPL}_U$ 表示的定义域包含 $U$ 的修剪多项式型映射空间记为 $\mathcal{PPL}_U$，那么对于每个 $F \in \mathcal{PPL}_U$，存在 $a > 0$，使得 $F \in \mathcal{A}_a^\nu$。因此我们得到映射

$$\mathcal{PPL}_U \to \mathcal{A}_a^\nu \to \mathcal{A}^\nu.$$

$B_U(F,\ \epsilon)$ 在此映射下的像

$$B_U(F,\epsilon) \to \mathcal{PPL} \to \mathcal{A}_a^\nu \to \mathcal{A}^\nu.$$

称为 $\mathcal{A}^\nu$中的切片 。–

**17.4. 本文本部分的组织结构。** 在第 18–19 节中，我们将证明，任意特殊（双曲）映射 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$ 的实混合类在 $\mathcal{A}_a^\nu$中构成一个实解析巴拿赫流形。– 利用这一结果以及所谓的粘合定理，我们将在第 20–22 节中，为任意函数$f \in \mathcal{A}^\nu$的混合类建立浸入流形结构。在第 23–26 节中，我们将确定该流形的余维。在第 27 节中，我们将证明该流形甚至是一个嵌入流形。在第 28 节中，我们将证明 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_a^\nu$ 是一个实巴拿赫空间，这意味着无需在实解析拓扑或芽的情形下进行研究。在第 29–31 节中，我们将证明它是可缩的，并且这些流形构成一个部分层状结构。

## 18. The space $\mathcal{A}_a^\nu$ is a Banach manifold

**引理 18.1.** $\mathcal{A}_a^\nu$ 是线性空间 $\mathcal{A}_{\bar{a}}$（即 $\Omega$ 上不对临界点施加任何条件的实解析映射空间）的一个实解析子流形。

证明. 如果对所有 $i=1,\dots,\nu$， $\ell_i=2$ 都成立，那么 $\mathcal{A}_a^\nu$ 是 $\mathcal{A}_a$ 的一个开子集，因此无需证明。否则，可像 [LSvS3] 中定理 2.1 的证明那样证明此引理。事实上，由于 $f\in\mathcal{A}_a^\nu$，存在 $\nu,\ell_1,\dots,\ell_\nu$，使得对于每个 $i=1,2,\dots,\nu$,

$$f'(c_i)=f''(c_i)=\cdots=f^{(\ell_i-1)}(c_i)=0, f^{(\ell_i)}(c_i)\neq 0.$$

将隐函数定理应用于映射 $\mathcal{A}_a\times\mathbb{C}\ni(g,\zeta_i)\mapsto g^{(\ell_i-1)}(\zeta_i)$，当 $(g,\zeta_i)$ 接近 $(f,c_i)$ 时，可得存在 $W$ 的邻域 $f$，位于 $\mathcal{A}_a$ 中，并且存在唯一确定的函数 $\zeta_i\colon W\to\mathbb{C}$，它们是全纯的，满足 $\zeta_i(f)=c_i$，且 $g^{(\ell_i-1)}(\zeta_i(g))=0$，$g^{(\ell_i)}(\zeta_i(g))\neq 0$，对每个 $g\in W$ 都成立。将 $W$ 替换为更小的邻域后，对每个 $g\in W$，方程 $g'(\zeta)=0$ 有 $\ell_i-1$ 个解 $\zeta$（按重数计），且这些解位于 $c_i$ 附近。因此，对任意 $g\in W\cap\mathcal{A}_a^\nu$，$g'(\zeta)=0$ 在 $c_i$ 附近有唯一解（重数为 $\ell_i$）；因此，$\zeta_i(g)$ 是 $g\in W\cap\mathcal{A}_a^\nu$ 在 $c_i$ 附近唯一的临界点，且其重数为 $\ell_i-1$。

对于 $g\in W$，记

$$\zeta_i^0(g)=g(\zeta_i(g)),\zeta_i^1(g)=g'(\zeta_i(g)),\zeta_i^2(g)=g''(\zeta_i(g)),\dots.$$

因此，当且仅当对所有 $1\le j\le\ell_i-2$，$\zeta_i^j(g)=0$ 时，$g$ 的 $g(g)$ 是一个重数为 $\ell_i-1$ 的临界点（注意，对于所有 $g\in W$，$g^{(\ell_i-1)}(\zeta_i(g))=0, g^{(\ell_i)}(\zeta_i(g))\neq 0$ 自动成立）。定义 $G\colon W\to\mathbb{C}^{(\ell_1-2)+\cdots+(\ell_\nu-2)}$ 为

$$g\to(\zeta_1^1(g),\dots,\zeta_1^{(\ell_1-2)}(g),\dots,\zeta_\nu^1(g),\dots,\zeta_\nu^{(\ell_\nu-2)}(g)).$$

映射 $(DG)f\colon T_fW\to\mathbb{C}^{(\ell_1-2)+\cdots+(\ell_\nu-2)}$ 具有最大秩。事实上，若取 $1\le i_0\le\nu$, $1\le j\le\ell_{i_0}-2$ 以及满足 $v(z)=\prod_{i\neq i_0}(z-c_i)^{\ell_i}(z-c_{i_0})^j$ 的族 $g_t=f+tv$，则 $(DG)f(v)=se_i\neq 0$，其中 $i=(\ell_1-2)+\cdots+(\ell_{i_0-1}-2)+j$，$e_i$ 是第 $i$ 个坐标方向上的标准单位向量，并且 $s=j!\prod_{i\neq i_0}(c_{i_0}-c_i)^{\ell_i}\neq 0$。因此，由隐函数定理可得该引理。□

## 19. Conjugacy classes of semi-hyperbolic maps form Banach manifolds

**定义 19.1.** 如果 $f\in\mathcal{A}_a^\nu$ 的所有周期点都是双曲的，且所有临界点都位于周期吸引子的吸引域中，我们就称 $f\in\mathcal{A}_a^\nu$ 是双曲的。本文中，如果 $f$ 的所有周期点都是双曲的，并且 $f$ 的每个临界点都满足以下条件之一，我们就称 $f$ 是半双曲的：

- 最终被映射到一个双曲排斥周期点上；或 - 是周期的；或 - 位于一个双曲周期吸引子的吸引域中。

在本节中，我们将证明，这类及类似映射的混合类构成巴拿赫流形。

19.1. **映射与半双曲映射拓扑共轭或混合共轭的充要条件**。下面的定理还将说明，在什么条件下映射 $g\in\mathcal{A}_a^\nu$ 与半双曲映射 $f$实混合共轭。

**定理 19.1.** 设 $f\in\mathcal{A}_a^\nu$ 是一个半双曲的实解析区间映射。那么

*(1)* 存在 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中 $f$ 的一个邻域 $\mathcal{O}$，以及一个光滑函数 $\Psi_H\colon\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{\nu'}$，使得

$$\Psi_H(g)=\Psi_H(f)\iff g\ \textit{is real-hybrid conjugate to}\ f.$$

这里，$\nu'=\nu+\nu_{noness-att}$ $\nu$ 是 $f$ 的临界点数目，而 $\nu_{noness-att}$是 $f$ 的吸引域中不含临界点的周期吸引子的数目。

*(2)* 存在 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中 $f$ 的一个邻域 $\mathcal{O}$ 以及一个光滑函数 $\Psi_T$: $\mathcal{O} \to \mathbb{R}^{\nu_T}$，使得

$$\Psi_T(g) = \Psi_T(f) \iff g \text{ is topologically conjugate to } f.$$

这里 $\nu_T = \nu - \zeta(f)$，其中 $\nu$是 $f$的临界点个数，而 $\zeta(f)$ 是具有两两不相交的无限轨道的周期吸引子的吸引域中，临界点个数的最大值。

证明。首先，按照断言 (1) 的定义来定义 $\Psi_H$。取一组 $Atr$ 周期吸引点，使得每个周期吸引轨道恰好与 $Atr$ 相交于一点。对于每个 $p \in Atr$，若其吸引域中含有临界点，则选取其中一个临界点 $c(p)$，并令 $\mathrm{Cr}'_{at}(p)$ 表示 $p$的吸引域中的其余临界点。注意，由于 $f$, $g$ 是实解析的，因此 $p$的吸引域中可能没有临界点。还要注意，任意实解析映射 $f$ 至多有有限个周期吸引子，参见 [MMvS]。

根据假设，对于每个 $c \in \mathrm{Cr}(f)$，以下情况恰有一种成立

(i) 存在 $q_c > 0$，使得 $c'(c) := f^{q_c}(c) \in \mathrm{Cr}(f)$，并且对于$1 \le k < q_c$, $f^k(c) \notin \mathrm{Cr}(f)$; (ii) 存在 $1 \le l_c < q_c$，使得 $f^{q_c}(c) = f^{l_c}(c)$，且对于 $1 \le k \le q_c$, $f^k(c) \notin \mathrm{Cr}(f)$; (iii) $c$ 具有无限轨道，且位于双曲周期吸引子 $p \in Atr$的吸引域中，使得对于所有 $k > 0$, $f^k(c) \notin \mathrm{Cr}(f)$。

对于情形 (ii) 中的每个 $c$，根据假设，我们有 $Df^{q_c - l_c}(f^{l_c}(c)) \neq 1$，其中 $f^{l_c}(c)$ 是周期为 $q_c - l_c$的周期点。我们将满足 (i)、(ii) 和 (iii) 的 $f$ 的临界点集合分别记为 $\mathrm{Cr}_{ec}$、$\mathrm{Cr}_{ep}$ 和 $\mathrm{Cr}_{at}$。注意，$\mathrm{Cr}_{at} = \cup_{p \in Atr}[\mathrm{Cr}'_{at}(p) \cup \{c(p)\}]$。

令 $\mathcal{O}$ 为 $f$ 在 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中的一个邻域，使得$-g$ 的临界点 $c_g$ 关于 $g \in \mathcal{O}$ 光滑地变化。特别地，对于每个 $c \in \mathrm{Cr}_{ec}$，在 $f^{q_c}(c)$ 附近存在一个 $g$ 的临界点 $c'_g(c)$。

对于 $p \in Atr$，令 $r$ 为 $p$ 的周期，并令 $\varphi_p\colon (\mathbb{R}, p) \to (\mathbb{R}, 0)$ 为满足在 $p$ 附近 $\varphi_p \circ f^r(z) = \lambda \varphi_p(z)$ 的全纯映射，参见 [Mil]。（映射 $\varphi_p$ 在乘法常数意义下是唯一的。）对于吸引域 $p$ 中的每个临界点 $c$，令 $n_c$ 使得 $f^{n_c}(c)$ 位于 $p$ 的直接吸引域中。将 $\varphi_p$ 规范化，使得 $\varphi_p(f^{n_c}(c(p))) = \pm 1$，其中 $c(p)$ 是吸引域 $p$ 中的一个“首选”临界点，并且符号取决于 $f^{n_c}(c(p))$ 位于 $p$ 的左侧还是右侧。注意， $\varphi_p$ 定义为

$$\varphi_p(z) = \lim_{n \to \infty} (f^{nr}(z) - p_c)/\lambda^n$$

其中 $\lambda = Df^r(p)$，且 $\varphi_p \circ f^r = \lambda \varphi_p$。如上所述，通过 $\varphi_{p,g}(g^{n_c}(c(p))) = \pm 1$ 对 $\varphi_{g,p}$ 进行归一化。现在定义

$$\Psi_H\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}^{\nu'}$$

by

$$\Psi_H(g) = \big((g^{q_c}(c_g) - c'_g(c))_{c \in \mathrm{Cr}_{ec}}, (g^{q_c}(c_g) - g^{l_c}(c_g))_{c \in \mathrm{Cr}_{ep}},$$
$$(Dg^{r_c}(p_c), (\varphi_{p,g}(g^{n(c(p))}(c(p))) - \varphi_{p,g}(g^{n(c')}(c')))_{c' \in \mathrm{Cr}_{at}(p) \setminus \{c(p)\}})_{p \in Atr}\big) \in \mathbb{R}^{\nu'}. \tag{19.1}$$

这里，如果 $p \in Atr$ 的吸引域中至多只有一个临界点，则该项

$$(\varphi_{p,g}(g^{n(c(p))}(c(p))) - \varphi_{p,g}(g^{n(c')}(c')))_{c' \in \mathrm{Cr}_{at}(p) \setminus \{c(p)\}}$$

应当忽略。由 $\Psi_H(f) \in \mathbb{R}^{\nu'}$可知，这可由 $\mathrm{Cr} = \mathrm{Cr}_{ec} \cup \mathrm{Cr}_{ep} \cup \mathrm{Cr}_{at}$推出；又因为 $\mathrm{Cr}_{at} = \cup_{p \in Atr}[\mathrm{Cr}'_{at}(p) \cup \{c(p)\}]$。

现在证明存在 $\mathcal{O}$ 的一个邻域 $f$，使得对于任意 $g \in \mathcal{O}$，都有 $\Psi_H(f) = \Psi_H(g)$ 当且仅当 $f, g$ 混合等价。为说明 $\Psi_H$ 在混合类上为常数，首先注意，根据定义，$\Psi_H(f)$ 中对应于 $\mathrm{Cr}_{ec}$ 和 $\mathrm{Cr}_{ep}$ 的坐标为零。若 $f$ 有一个（双曲的）周期吸引子 $p$，则用 $p_g$ 表示 $g$ 的相应周期吸引子。于是，$f$ 与 $g$ 混合共轭的必要条件是，共轭 $h$ 是一个全纯映射，它将 $f$ 在 $p$ 处的直接吸引域映至 $g$ 在 $p_g$ 处的直接吸引域。这意味着 $f$ 在 $p$ 处的乘子等于 $g$ 在 $p_g$ 处的乘子。令 $H$ 表示以 $\varphi_{p,f}$ 和 $\varphi_{p,g}$ 线性化坐标表示的映射 $h$。由此可得，$H : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ 也是单叶的；由于从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的唯一单叶映射是线性的，因此这个（实）线性映射完全由条件 $h(f^{n(c(p))}(c(p))) = g^{n(c(p))}(c(p))$ 确定，这意味着对于提升 $H(\varphi_{g,c}(g^{n(c(p))}(c(p)))) = \varphi_{g,c}(g^{n(c(p))}(c(p)))$。这里，$c(p)$ 是 $p$ 的吸引域中的优选临界点。由于 $\varphi$ 在相差一个乘法常数的意义下唯一，但其归一化满足 $\varphi_{p,g}(g^{n_c}(c(p))) = \pm 1$，故可得 $H = id$。因此

$$\mathcal{O} \ni g \mapsto \left(\varphi_{p,g}(g^{n(c(p))}(c(p))) - \varphi_{p,g}(g^{n(c')}(c'))_{c' \in \mathrm{Cr}_{at}(p) \setminus \{c(p)\}}\right)_{p \in Atr} \in \mathbb{C}^{\nu'}$$

对于所有与 $f$ 混合共轭的映射，其值均为常数。

同样，若 $\Psi_H(f) = \Psi_H(g)$ 且 $g \in \mathcal{O}$，则所有临界关系均得以保留。此外，存在一个拟共形共轭 $h$，它将 $F\colon\ U \to U'$ 与 $G\colon\ U_g \to U'_g$（分别是 $f$ 和 $g$ 的修剪多项式型延拓）联系起来；其膨胀率在周期的$^-$吸引子吸引域上为零，并且满足 $\partial h = 0$ 在 $K_F$ 上。请注意，我们可能需要调整 $G\colon\ U_g := E_g \cup B_g \to E'_g \cup B'_g =: U'_g$ 的吸引域边界的选取，以便在吸引域上得到共形共轭。因此，$F\colon\ U \to U'$ 与 $G\colon\ U_g \to U'_g$ 混合共轭。

现在我们来构造一个类似的映射 $\Psi_T$，用于拓扑共轭类。在这种情况下，周期吸引子吸引域内部的共轭更为灵活。不过，$\Psi_T$ 现在需要考虑周期吸引子吸引域内的临界关系。为此，选取 $\mathrm{Cr}^*_{at}$ 中 $\mathrm{Cr}_{at}$ 的一个极大子集，使得$\hat{}\mathrm{Cr}_{at}$ 中临界轨道的正向轨道两两不相交。此外，对每个 $c \in \mathrm{Cr}^*_{at}$，选取 $\mathrm{Cr}_{at}(c)$ 中 $\mathrm{Cr}_{at}$ 的临界点子集 $c' \neq c$，使得存在 $l_c, l_{c'} \geq 1$，满足 $f^{l_c}(c) = f^{l_{c'}}(c')$。

现在定义

$$\Psi_T\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}^{\nu - \zeta(t)}$$

by

$$\begin{aligned}\Psi_T(g) = \big((g^{q_c}(c_g) - c'_g(c))_{c \in \mathrm{Cr}_{ec}}, (g^{q_c}(c_g) - g^{l_c}(c_g))_{c \in \mathrm{Cr}_{ep}},\\ (g^{l_c}(c_g) - g^{l_{c'}}(c'_g))_{c \in \mathrm{Cr}^*_{at}, c \in \mathrm{Cr}_{at}(c)}\big) \in \mathbb{R}^{\nu - \zeta(f)}.\end{aligned} \tag{19.2}$$

这里，如果对于某个 $c \in \mathrm{Cr}^*_{at}$，集合 $\mathrm{Cr}_{at}(c)$ 为空，则应忽略该项。 □

19.2.**半双曲映射的共轭类是实解析巴拿赫流形**。令 $\nu$，$\nu'$，$\zeta(f)$ 如定理 **19.1** 中所述。

**定理 19.2.** 设 $f \in \mathcal{A}^\nu_a$ 为半双曲的。则

*(1)* $f$ 的实混合共轭类是 $\mathcal{A}^\nu_a$ 中的实解析巴拿赫流形，其实余维为 $\nu'$。*(2)* $f$ 的拓扑共轭类是 $\mathcal{A}^\nu_a$ 中的实解析巴拿赫流形，其实余维为 $\nu - \zeta(f)$。

证明。 要证明 (1)，只需证明映射 $\Psi_H$: $\mathcal{O} \to \mathbb{R}^{\nu'}$ （在前一个定理的证明中由方程 (19.1) 定义）具有满秩。因此，取一个单位向量 $e_j \in \mathbb{C}^{\nu'}$，并说明如何选取经过 $f$ 的一族 $f_t$，使得 $\frac{d}{dt}\Psi_H(f_t) = e_j$。为方便起见，我们选取 $f_t(x) = f(x) + tv(x)$，其中 $v$ 是一个多项式函数，在 $c \in \mathrm{Cr}(f)$ 处有 $\ell_c$ 阶零点，并且为了确保 $f_t \in \mathcal{A}_a$，它在 $\pm 1$ 处也为零。这意味着映射 $f_t$ 的临界点 $c_t$ 不依赖于 $t$，且其阶保持不变，因此 $v \in T_f\mathcal{A}_a^{\nu}$。注意，$\frac{d}{dt}f_t(x) = v(x)$。我们依次考察 $\Psi_H$ 的每个坐标，并证明可以选择 $v$，使得 $D\Psi_H(v)$ 的一个坐标非零，而其他坐标均为零。按照定理 19.1 的证明，定义 $\mathrm{Cr}_{ec}$，$\mathrm{Cr}_{ep}$，$\mathrm{Cr}_{att}$。

**情形 1：** $c \in \mathrm{Cr}_{ec}$。这对应于 $\Psi_H$ 的第一个连通分支，见方程（19.1），也就是说，对应于最终被映射到其他临界点上的临界点。根据 $f_t$ 的选取，我们有 $\frac{d}{dt}c_t|_{t=0} = 0$，简单计算可得

$$\frac{f_t^{q_c}(c)}{dt}|_{t=0} = v(f^{q_c-1}(c)) + Df(f^{q_c-1}(c))v(f^{q_c-2}(c)) + \cdots + Df^{q_c-1}(f(c))v(c).$$

由此可知，若选择函数 $v$，使得 $v(c) \neq 0$ 且 $v(f^i(c)) = 0$ 对于 $0 < i \leq q_c - 1$ 成立，则

$$\frac{d}{dt}(f_t^{q_c}(c_t) - c_t)\Big|_{t=0} \neq 0. \tag{19.3}$$

因此，采用这样的 $v$ 选取时，$D\Psi_H(v)$ 中对应于 $c \in \mathrm{Cr}_{ec}$ 的坐标将非零；而正如我们将看到的，若对所有属于 $\mathrm{Cr}_{ec}$ 的 $\tilde{c} \neq c$ 以及有限多个 $i \geq 0$，均有 $v(f^i(\tilde{c})) = 0$，则 $D\Psi_H(v)$ 的其他坐标将为零。不等式（19.3）表明，$v$ 与混合类横截。

**情况 2：** $c \in \mathrm{Cr}_{ep}$。接下来我们将考虑 $\Psi_H$ 的第二个连通分支，它对应于最终被映射到双曲周期点的临界点：

$$\frac{d}{dt}(f_t^{q_c}(c) - f_t^{l_c}(c_t))\Big|_{t=0} = \left(v(f^{q_c-1}(c)) + \cdots + Df^{q_l-l_c-1}(f^{l_c+1}(c))v(f^{l_c}(c_t))\right) +$$

$$+ \left(Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c)) - 1\right)\frac{f_t^{l_c}(c_t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

其中

$$\frac{f_t^{l_c}(c_t)}{dt}|_{t=0} = v(f^{l_c-1}(c)) + Df(f^{l_c-1}(c))v(f^{l_c-2}(c)) + \cdots + Df^{l_c-1}(f(c))v(c).$$

由此可知，当 $Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c)) \neq 1$ 时，如果我们取 $v(c) \neq 0$，对于所有 $i > 0$ 以及所有临界点 $\tilde{c} \neq c$ 和所有 $i \geq 0$，都有 $v(f^i(c)) = 0$，且 $v(f^i(\tilde{c})) = 0$，那么在 $\frac{d}{dt}\Psi_H(f_t)$ 中对应于 $c \in \mathrm{Cr}_{ep}$ 的坐标将非零，而其他坐标将为零（我们稍后会看到这一点）。注意，如果 $c \in \mathrm{Cr}_{ep}$，那么根据假设，$Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c)) \neq 1$。因此，存在依赖于 $t$ 且光滑的 $p_{c,t}$，使得 $p_{c,0} = f^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c))$，并且当 $t$ 接近 0 时，$f_t^{q_l-l_c}(p_{c,t}) = p_{c,t}$。因此，情况 2 可由下式推出

**断言：** 设 $c \in \mathrm{Cr}_{ep}$。那么在假设 $Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c)) \neq 1$ 成立的情况下，我们有 $\frac{d}{dt}(f_t^{l_c}(c) - p_{c,t})|_{t=0} \neq 0$ 等价于 $\frac{d}{dt}(f_t^{q_c}(c) - f_t^{l_c}(c))|_{t=0} \not\equiv 0$。

**断言的证明:**

$$\frac{d}{dt}(f_t^{q_c}(c)-f_t^{l_c}(c))|_{t=0}=\frac{d}{dt}(f_t^{q_c-l_c}(c))|_{t=0}+\left(Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c))-1\right)\frac{d}{dt}f_t^{l_c}(c_f)|_{t=0}$$

对等式 $f_t^{q_l-l_c}(p_{c,\ t})=p_{c,\ t}$ 求导，得到

$$\frac{d}{dt}f_t^{q_c-l_c}(p_{c,0})|_{t=0}+Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c))\frac{dp_{c,t}}{dt}|_{t=0}=\frac{dp_{c,t}}{dt}|_{t=0}$$

因此

$$\begin{aligned}(1-Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c)))\frac{dp_{c,t}}{dt}=\tfrac{d}{dt}f_t^{q_c-l_c}(p_{c,0})|_{t=0}=\\ \frac{d}{dt}(f_t^{q_c}(c)-f_t^{l_c}(c))|_{t=0}-\left(Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c))-1\right)\frac{d}{dt}f_t^{l_c}(c_f)|_{t=0}.\end{aligned}$$

由此

$$\left(Df^{q_c-l_c}(f^{l_c}(c))-1\right)\left(\frac{d}{dt}\left(f_t^{l_c}(c)-p_{c,t}\right)\big|_{t=0}\right)=\frac{d}{dt}(f_t^{q_c}(c)-f_t^{l_c}(c))|_{t=0}$$

这就证明了该断言。 ✓

**情形 3:** $p\in Atr$. 现在考虑 $p\in Atr$，并假设 $Df^r(p)\neq 1$。注意

$$\frac{d}{dt}f_t^r(p_t)=v(f^{r-1}(p))+Df(f^{r-2}(p))v(f^{r-2}(p))+\cdots+Df^{r-1}(f(p))v(f(p))+Df^r(p)\frac{d}{dt}p_t$$

等于 $\frac{d}{dt}p_t$。由此可知，$v(p)=v(f(p))=\cdots=v(f^{r-1}(p))=0$ 意味着 $\frac{d}{dt}p_t=0$，同理，$\frac{d}{dt}f^i(p_t)=0$ 适用于 $i\geq 0$。因此

$$\frac{d}{dt}Df_t^r(p_t)=Df^r(p)\left(\frac{v'(f^{r-1}(p))}{Df(f^{r-1}(p))}+\frac{v'(f^{r-2}(p))}{Df(f^{r-2}(p))}+\cdots+\frac{v'(p)}{Df(p)}\right).$$

取 $v'(p)\neq 0$ 和 $v'(f^i(p))=0$，令 $0<i<r$，得到 $\frac{d}{dt}Df_t^r(p_t)\neq 0$。因此，这等于 $D\Psi_H(v)$ 的第三个连通分支。

**情形 4:** $p\in Atr$, $c'\in \mathrm{Cr}_{at}(p)\setminus\{c(p)\}$. 最后考虑这一项

$$A:=\frac{d}{dt}[\varphi_{p_t,f_t}(f_t^{n(c(p))}(c(p)))-\varphi_{p_t,f_t}(f_t^{n(c'(p))}(c'(p)))]\Big|_{t=0} \tag{19.4}$$

它是 $D\Phi_H(v)$ 的最后一个连通分支，见定义 (19.1)。这一项与周期吸引子 $p$ 的吸引域中临界点轨道的位置有关（该吸引域包含 $c$），这里 $\varphi_{p_t,\ f_t}$ 是在 $p_t$ 处的线性化，因此 $\varphi_{p_t,\ f_t}(z)=\lim_{k\to\infty}f_t^{rk}(z)/a_t^k$ 其中 $a_t=Df_t^r(p_t)$，且 $|a|<1$。我们选取一个实解析函数 $v$，使得对于 $p$ 的正向轨道中的每个 $x$，都有 $v(x)=v'(x)=0$。由此可得 $\frac{d}{dt}p_t|_{t=0}=p$ 和 $\frac{d}{dt}a_t|_{t=0}=a$。注意

$$\frac{d}{dt}f_t^k(z)=v(f^{k-1}(z))+Df(f^{k-1}(z))v(f^{k-2}(z))+\cdots+Df^k(z)v(z). \tag{19.5}$$

沿着 $f_t^{n(c(p))}(c(p))$ 的正向迭代以及 $f_t^{n(c'(p))}(c'(p))$ 继续进行。这是可能的，因为对于 $p$ 的正向轨道上的每个 $x$，只需在有限次迭代中令 $v(x)=v'(x)=0$ 为零

次 $f_t^{n(c(p))}(c(p))$ 的正向迭代以及 $f_t^{n(c'(p))}(c'(p))$。由于 $\varphi(z) = \lim_{k\to\infty} f^{rk}(z)/a^k$，并利用方程（19.5），可得

$$-\delta < \frac{d}{dt}[\varphi_{p_t,f_t}(f^{n(c(p))}(c(p))) - \varphi_{p_t,f_t}(f^{n(c')}(c'))]\Big|_{t=0} < \delta \tag{19.6}$$

其中 $\delta > 0$ 由 $\epsilon$ 和周期点 $p$处的乘子决定；事实上，$\delta \approx \epsilon/(1-|a|)$。因此，(19.4) 根据链式法则等于某个 $s \in [-\delta, \delta]$ 加上

$$B := \left[ D\varphi_{p,f}(f^{n(c(p))}(c(p)))\, \frac{d}{dt} f_t^{n(c(p))}(c(p))\Big|_{t=0} - D\varphi_{p,f}(f^{n(c')}(c'))\, \frac{d}{dt} f_t^{n(c')}(c')\Big|_{t=0} \right]$$

由于 $D\varphi_{p,f} \neq 0$，可以通过适当选择 $v(f(c)) = \cdots = v(f^{n(c(p))}(c(p))) = 0$和 $v(f(c')) = \cdots = v(f^{n(c'(p))}(c'(p))) = 0$以及 $v(c)\ v(c') \neq 0$来选取 $A \neq 0$和 $|B| > C\delta$。事实上，此时

$$B = D\varphi_{p,f}(f^{n(c(p))}(c(p)))Df^{n(c(p))}v(c) - D\varphi_{p,f}(f^{n(c')}(c'(p)))Df^{n(c')}v(c').$$

由于因 $v(c)$和 $v(c')$前面的因子均非零，因此可以选择 $v(c)\ v(c')$使得

$$|A| = |B| - \delta > 0.$$

特别地，由此可知，如果 $v$，使得如上所述，沿着 $c$ 和 $c'$ 的正向轨道，$v$ 的值.....，那么 $\Psi_H(v)$ 的第四个分量非零。

结合前面的情形可知，对于 $\Psi_H$ 的每个坐标，都可以选择 $v$，使得 $D\Psi_H(v)$ 的相应坐标非零，而其余坐标均为零。因此，$D\Psi$ 具有最大秩，从而由隐函数定理可得断言 (1)。

断言 (2) 的证明完全类似。 □

注 19.1。当然，也可以记作

$$\frac{f_t^n(c)}{dt}|_{t=0} = v(f^{n-1}(c)) + Df(f^{n-1}(c))v(f^{n-2}(c)) + \cdots + Df^{n-1}(f(c))v(c)$$

$v^n(c)$，从而得到更简洁的表达式。完整的表达式展示了如何选择 $v$，使所需的假设得到满足。

## 19.3. 简单抛物型情形。

**定理 19.3.** 设 $a > 0$ 和 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$。假设 $f$ 有一个周期为 $n$ 的简单抛物周期点 $a_0$。那么存在一个实解析巴拿赫流形 $\mathcal{P}_{f,a}^\nu$，它包含于 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中，由 $\mathcal{A}^\nu$ 中的映射构成，使得每个映射 $g \in \mathcal{P}_{f,a}^\nu$ 在 $a$ 附近都有一个周期为 $n$、且与 $a_0$ 类型相同的唯一抛物周期点；并且，任何具有此性质的 $g \in \mathcal{A}_a^\nu$ 都属于 $\mathcal{P}_{f,a}^\nu$。

如果 $a_0$ 属于鞍结型或倍周期型，那么 $\mathcal{P}_{f,a}^\nu$ 的余维为一；如果属于叉形型，则其余维为二。

如果 $f$ 有 $k_0$ 个鞍结型或倍周期型的抛物周期点，以及 $k_1$ 个叉形型的周期点，那么类似的结论仍然成立，并且 $\mathcal{P}_{f,a}^\nu$ 的余维等于 $k_0 + 2k_1$。

证明。对于任意向量场 $v$，定义 $v^n = \frac{d}{dt}(f+tv)^n|_{t=0}$。假设 $a_0$ 是一个周期为 $n$的简单抛物周期点。

如果 $Df^n(a_0) = 1$和 $a_0$是鞍结型，那么 $f^n(x) = a_0 + (x-a_0) + \alpha(x-a_0)^2 + O(x-a_0)^3$，其中 $\alpha \neq 0$。在这种情况下，选取一个向量场 $v$，使得 $v^n(a_0) \neq 0$（这很容易

看出是可行的）。令 $B_\epsilon(a_0)$ 为 $a_0$ 的一个小邻域，并在 $(f,0,a_0)$ 的邻域 $\mathcal{O}\times(-\epsilon,\epsilon)$ 上定义 $\Psi$ $(\times B_\epsilon(a_0))$：

$$\Psi(g,t,x)=((g+tv)^n(x)-x,D(g+tv)^n(x)-1).$$

这里，$\mathcal{O}$ 是实解析巴拿赫流形 $\mathcal{A}_a^\nu$的一个开子集。我们来证明，对于 $g$附近的每个 $f$，都存在唯一的 $t$和 $x$，使得 $\Psi(g,\ t,\ x)=(0,\ 0)$。注意，这意味着，当 $g$接近 $f$时，$x$是 $g+tv$的一个乘子为 1 的周期点，且属于鞍结型。$\Psi$关于 $t$和 $x$的偏导数矩阵在$(g,\ t,\ x)$处为$=(f,\ 0,\ a_0)$，其值等于

$$\begin{pmatrix} v^n(a) & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

由于 $v^n(a_0)\neq 0$ 且 $\alpha\neq 0$，隐函数定理保证，对每个 $g\in\mathcal{O}$，方程 $\Psi(g,t(g)\ x(g))=(0,0)$都存在唯一解 $t(g)\ x(g)$。这里，$t(g)$和 $x(g)$关于 $g$光滑变化。因此我们得到一个具有所需性质的余维一流形，即由 $g+t(g)v$这一形式的映射构成的空间。事实上，若令$T\mathcal{P}_{f,a}$ 为向量场 $\tilde{v}$ 构成的线性空间，使得$\tilde{v}^n(a_0)=0$，那么$\mathcal{P}_{f,a}$ 在局部可写成 $\{f+\tilde{v}+\tilde{t}(\tilde{v})v;\ \tilde{v}\in T\mathcal{P}_{f,a}\}$，其中 $\tilde{t}$是解析函数。容易看出 $D\tilde{t}(0)=0$，因此$\mathcal{P}_{f,a}$ 的切空间等于$T\mathcal{P}_{f,a}$。

若 $Df^n(a_0)=-1$且 $a_0$为倍周期型，则 $f^n(x)=a_0-(x-a_0)+\alpha(x-a_0)^2+O(x-a_0)^3$。在这种情况下，我们选择一个向量场 $v$，使得

$$2Dv^n(a_0)+v^n(a_0)D^2f^n(a_0)\neq 0$$

并按照鞍结情形进行论证。这里，关于 $v$ 的上述条件可由注 11.1 中的计算得出。

若 $Df^n(a_0)=1$且 $f$为双侧吸引，则 $f^n(x)=a_0+(x-a_0)+\alpha(x-a_0)^3+O(x-a_0)^4$，其中 $\alpha<0$。在这种情况下，令 $v$ 和 $w$ 为相互独立的向量场，使得 $v^n(a_0)\neq 0$、$Dv^n(a_0)=0$、$w^n(a_0)=0$ 以及 $Dw^n(a_0)\neq 0$。（容易看出这是可能的。）接下来定义

$$\Psi(g,t,s,x)=((g+sv+tw)^n(x)-x,D(g+sv+tw)^n(x)-1,D^2(g+sv+tw)).$$

关于 $\Psi$ 对 $s$的偏导数矩阵，$t$，$x$在$(g,\ s,\ t,\ x)$处的 $=(f,\ 0,\ 0,\ a_0)$ 等于

$$\begin{pmatrix} v^n(a_0) & 0 & 0 \\ 0 & Dw^n(a_0) & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha \end{pmatrix}.$$

根据构造，该矩阵可逆，因此存在唯一的 $s(g)\ t(g)\ x(g)$，使得$\Psi(g,\ s(g)\ t(g)\ x(g))=(0,\ 0,\ a_0)$。由此可知，每个形如 $g+s(g)v+t(g)w$的映射都在 $x(g)$处有一个叉形抛物点。因此，利用隐函数定理，我们得到一个余维二映射流形，其中的映射具有一个叉形型抛物周期点。该流形的切空间是满足 $\tilde{v}^n(a_0)=D\tilde{v}^n(a_0)=0$的向量场空间 $\tilde{v}$。□

注19.2。类似的分析可见 510 [ALM]第 510 [ 页。在这一情形下，关于任意（非退化）抛物周期点的更一般结果，见 [LSvS2]中的主定理。请注意，如果 $a_0$ 是叉形型，则按照 [LSvS2]的意义，它是退化的。

注 19.3。在多项式、有理映射、有限型映射或更一般的映射族的空间中，也有类似的结果，参见 [Eps、LSvS1、LSvS2、LSvS3]。不过，这里的情况更简单，因为更容易证明上面的映射 $\Psi$

在当前情况下是浸没。这是因为在这里，我们可以手动构造出适合于该流形的横截向量场，因为空间 $\mathcal{A}_a^\nu$ 远大于有理映射的空间。

**推论 19.4**。 如果将全文中的双曲周期点 替换为双曲或简单抛物周期点，定理 *19.2* 的结论同样成立。

证明。这可由结合前一定理的证明与定理 19.2 的证明得出。□

## 20. Mating pruned polynomial-like mappings

下述定理是在修剪多项式型映射这一背景下，对配对定理 [DH] 和 [Ly1] 的类比。

**定理 20.1**。 设 $F : U_F \to U'_F$ 和 $G : U_G \to U'_G$ 为修剪多项式型映射，满足 $Q(F) = Q(G)$。那么存在唯一的修剪多项式型映射 $\tilde{F}: U_{\tilde{F}} \to U'_{\tilde{F}}$，使得

*(1)* $\tilde{F}$ 与 $F$ 混合共轭。*(2)* $\tilde{F}$ 和 $G$ 具有相同的外部映射。

我们称 $\tilde{F}$ 为 $F$ 和 $G$ 的配对。

证明。由于 $Q(F) = Q(G)$，由命题13.2可得一个 $\mathbb{R}$-对称的拟共形映射 $H: (U_F \cup U'_F) \setminus K_F \to (U_G \cup U'_G) \setminus K_G$，它在有定义的地方将 $F: U_F \to U'_F$ 与 $G: U_G \to U'_G$ 共轭。注意到 $K_F \cap \partial U_F$ 由有限个修剪点的非实原像组成。因此，我们可以通过取 $F$ 下的原像，将 $H$ 在这些点附近 $K_F \cap \partial U_F$ 延拓，从而得到一个拟共形共轭 $H: U_F^* \setminus K_F \to U_G^* \setminus K_G$，它在这些集合上将 $F$ 与 $G$ 对应起来，其中 $U_F^*$、$U_G^*$ 分别是 $K_F$ 和 $K_G$ 的邻域。这里我们利用了 $F$、$G$ 可全纯地延拓到其定义域闭包的邻域这一事实。由于 $\mathbb{C} \setminus (\partial U_F \cup \partial U'_F)$ 和 $\mathbb{C} \setminus (\partial U_G \cup \partial U'_G)$ 是拟圆盘（并且可以方便地选取 $U_F^*$、$U_G^*$），$H$ 具有一个拟共形扩张 $H: \mathbb{C} \setminus K_F \to \mathbb{C} \setminus K_G$。

考虑 $\partial$ 上的标准共形结构 $\sigma$ 在 $\mathbb{C} \setminus K_F$ 上的共形结构，在其定义域上该结构在 $F$ 作用下保持不变。我们用 $\sigma$ 标准共形结构将 $\nu$ 延拓到 $\mathbb{C}$。由此得到 $\mathbb{C}$ 上的共形结构 $\mu$，该结构在 $U_F^* \setminus K_F$ 上于 $F$ 作用下保持不变。我们有 $\mathbb{C} \setminus K_F$ 上的 $\mu = H^*\sigma$。

应用可测黎曼映射定理（参见 [AB], ），我们将 $\mu$ 直化，并得到一个拟共形同胚 $H_\mu: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它具有 $\mathbb{R}$-对称性，并将由 $\mu$ 定义的椭圆场映到标准复结构。由此可知，$\tilde{F} = H_\mu \circ F \circ H_\mu^{-1}$ 是 $U_{\tilde{F}} = H_\mu U_F$ 上的 $\mathbb{R}$-对称保形修剪多项式型映射。我们可以并且将把 $H_\mu$ 规范化，使得 $H_\mu(-1) = -1, H_\mu(1) = 1$，这意味着 $\tilde{F}(\partial I) \subset \partial I$。由于在 $K_F$ 上 $\mu = 0$，且在 $K_F$ 上几乎处处 $\partial H_\mu = 0$，因此 $\tilde{F}$ 与 $F$ 混合共轭。这证明了性质（1）。

注意，根据构造，$H \circ H_\mu^{-1}: \bar{\mathbb{C}} \setminus K_{\tilde{F}} \to \bar{\mathbb{C}} \setminus K_G$ 是共形的。记为

$$\phi_F: \overline{\mathbb{C}} \setminus K_{F,X_F} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \text{ and } \phi_G: \overline{\mathbb{C}} \setminus K_{G,X_G} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

归一化的黎曼映射，因此 $\hat{}H = \phi_G \circ H \circ \phi_F^{-1}$ 是 $\hat{}F_X$ 与 $\hat{}G_X$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 附近的拟共形共轭，即 $\hat{}_H \circ \hat{}F_X = \hat{}G_X \circ \hat{}H$，因为 $\hat{}F_X = \phi_F \circ F \circ \phi_F^{-1}$ 和 $\hat{}G_X = \phi_G \circ G \circ \phi_G^{-1}$。于是

$\Psi$: 由 $\Psi$ 定义的 $\bar{\mathbb{C}}\setminus K_{\tilde{F}} \to \bar{\mathbb{C}}\setminus\bar{\mathbb{D}}$: $=\hat{H}\circ\phi_F\circ H_\mu^{-1} = \phi_G\circ H\circ\phi_F^{-1}\circ\phi_F\circ H_\mu^{-1} = \phi_G\circ H\circ H_\mu^{-1}$ 是共形的。由于归一化, $\Psi$ 因此与 $\phi_{\tilde{F}}$ 一致。此外, $\Psi\circ\tilde{F}\circ\Psi^{-1} =(\hat{H}\circ\phi_F\circ H_\mu^{-1})\circ(H_\mu\circ F\circ H_\mu^{-1})\circ(H_\mu\circ\phi_F^{-1}\circ\hat{H}^{-1}) =\hat{H}\circ(\phi_F\circ F\circ\phi_F^{-1})\circ\hat{H}^{-1} =\hat{H}\circ\hat{F}_X\circ\hat{H}^{-1} =\hat{G}_X$, 从而证明了性质（2）。

现在假设 $F_1, F_2$ 是两个这样的映射。那么 $F_1, F_2$ 准共形共轭，并且根据本证明下方的注记，该共轭具有如下性质：在 $K(F_1)$ 上有 $\partial H = 0$ 。同时, $F_1, F_2$ 的外部映射相同，因此 $F_1, F_2$ 在各自的填充朱利亚集之外共形共轭。根据构造，这些映射在各自的填充朱利亚集上一致, 因此 $F_1, F_2$ 共形共轭。由于该共轭将 $\pm1$ 映到 $\pm1$ ，可得$F_1 = F_2$。 □

20.1. **混合类局部共形等价**。利用前面的配对结果，我们得到:

**定理 20.2.** 假设 $F_0 : U_{F_0} \to U'_{F_0}$ 和 $G_0 : U_{G_0} \to U'_{G_0}$ 是修剪的类多项式映射，且满足 $Q(F_0) = Q(G_0)$。那么

- $F_0$ 和 $G_0$ 的混合类同胚;
- 如果 $G_0$ 的混合类具有解析结构，那么 $F_0$ 的混合类也具有解析结构。

证明。 比较 [Ly1，引理 4.3]。我们回顾如下事实:

**事实**。 如果$F_\lambda = H_\lambda\circ F_0\circ H_\lambda^{-1}$， $\lambda\in\Lambda\subset\mathbb{C}$ 是一个全纯映射族，且 $H_\lambda$ 是一个拟共形映射的全纯族，那么 $F_\lambda$ 关于 $\lambda$是全纯的。

根据粘合定理，即定理 20.1，我们有一个可逆映射 $\psi$： $\mathcal{H}_{G_0}\to\mathcal{H}_{F_0}$。下面证明它是连续的（证明 $\psi^{-1}$ 连续的方法相同）。

注意，在修剪多项式型映射空间上定义的 Carathéodory拓扑中，存在 $G_0$ 的一个邻域 $\mathcal{U}$ （见定义 17.1），使得对于 $G_0$的混合类中的每个$G\in\mathcal{U}$，我们都可以选取全纯运动的定义域 $U_G$， $U'_G$，使得 $G$ ： $U_G\to U'_G$ 是一个修剪多项式型映射，且 $Q(G) = Q(G_0)$。这个全纯运动在$U'_{G_0}\setminus U_{G_0}$上定义了一个共形结构族。更确切地说，我们得到一个全纯运动 $H_G$: $(U_{G_0}, U'_{G_0})\to(U_G, U'_G)$，它将$\partial U_{G_0}\cup\Gamma_{G_0}$从$\mathcal{U}$共轭$G_0$: $U_{G_0}\to U'_{G_0}$与 $G$: $U_G\to U'_G$在 $\partial U_{G_0}\cup\Gamma_{G_0}$上。

让我们从 $\mathbb{C}\setminus U_G$ 上的标准共形结构开始。通过 $H_G$ 将其拉回，我们得到 $\mathbb{C}\setminus U'_{G_0}$ 上的共形结构 $H_G^*\sigma$ 。由于 $F_0$ 和 $G_0$ 的外部映射拟共形共轭，存在一个拟共形映射 $H: U_{F_0}\to U_{G_0}$ ，使 $F_0$ 与 $G_0$ 在 $\partial U_{G_0}\cup\Gamma_{G_0}$ 上共轭。现在， $H^*H_{G_0}^*\sigma$ 是定义在 $U'_{F_0}\setminus U_{F_0}$ 上的共形结构。通过 $F_0^n$， $n = 0, 1, 2, .....$将其拉回，我们得到一个定义在 $U'_{F_0}\setminus K_{F_0}$ 上的不变贝尔特拉米微分；再通过 $\sigma$ 将其延拓到 $\mathbb{C}$ ，便得到贝尔特拉米微分 $\nu_G$。它在 $K_{F_0}$ 的某个邻域内不变，并且全纯地依赖于 $G$。根据可测黎曼映射定理及上述事实，我们得到一个族 $F_G$ : $U_{F_G}\to U'_{F_G}$ ，它由 $\mathcal{H}_{F_0}$，中的修剪多项式型映射构成，并连续地依赖于 $G$。因此，如果 $G_\lambda$ 是一个由修剪多项式型映射组成的全纯映射族，那么 $F_{G_\lambda}$ 也解析地依赖于 $\lambda$。 □

稍后我们将证明， $\mathcal{T}_f$ 可以看作 $\mathcal{H}_f$ 与某些带 puncture 环面的 Teichm¨uller 空间的乘积，见定理 22.1。

## 21. Hybrid classes form immersed analytic manifold

现在我们的目标是证明，实解析映射 $f$ 的实混合类具有解析流形的结构。为此，我们证明它可以由一族“相容的”复解析流形穷尽。我们需要克服的困难在于，区间上的实解析映射芽是修剪多项式型映射的等价类，而我们需要将修剪做到任意接近实轴。

**引理 21.1**。设 $f$ 是区间上的实解析映射，因此 $f$ 的每个周期点要么是双曲的，要么是简单抛物周期点。假设 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$。那么存在一个实解析区间映射序列 $g_n \in \mathcal{A}_a^\nu$ 以及截断 $^-$ 多项式类多项式映射 $F$、$G_n$，它们分别是 $f$、$g_n$ 的复扩张，使得

*(1)* $Q(F) = Q(G_n)$；*(2)* $F$、$G_n$ 的域紧包含于 $\Omega_a$ 中；并且对每个 $0 < a' < a$，在 $\Omega_{a'}$ 上都有 $g_n \to f$。*(3)* 若 $f$ 只有双曲周期点，则每个映射 $g_n$ 都是双曲的；*(4)* 若 $f$ 有抛物周期点，则可以选择 $g_n \in \mathcal{P}_f$（其中 $\mathcal{P}_f$ 如定理 *19.3* 所述），使得 $g_n$ 的每个临界点要么处于某个抛物周期点的吸引域中，要么处于某个双曲周期点的吸引域中。

证明。这由双曲性的稠密性推出，参见 [KSvS2]。这里，如果 $f$ 有简单抛物点，我们就限制在定理 19.3 所对应的具有抛物周期点的映射流形上。□

注记 21.1。注意，$f \in \mathcal{A}^\nu$ 可能有其吸引域内含有临界点的周期吸引子；在这种情况下，当 $n$ 充分大时，$g_n$ 也具有相同性质。

**定理 21.2**（的流形结构 $\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$）。假设 $f_0$ 是一个实解析映射，且其所有周期点都是双曲点或简单抛物点。那么，$f_0$ 芽的实混合类是$\mathcal{A}^\nu$的一个浸入实解析子流形。

证明。选取与 $f_0$相关联的有限修剪数据序列 $Q_n \subset \partial\mathbb{D}$、$n \geq 1$，使得$Q_{n+1} \supset Q_n$，且对每个 $n \geq 1$，$Q_n$ 都是 $f_0$ 的可容许剪枝集。特别地，对每个 $n$（对应于修剪数据 $Q_n$），$f_0$ 都有修剪多项式型延拓$F_{0,\,n}\colon U_{0,\,n} \to U'_{0,\,n}$。我们可以选取 $Q_n$，使得每个 $f \in \mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}}$ 都有一个对应于某个 $Q_n$的修剪多项式型延拓$F$。由前一个引理可知，若 $f_0$ 没有抛物周期点，则存在映射序列 $\{g_n\}$，它在 $\Omega_a$ 上收敛于 $f_0$，并满足以下性质：$g_n$ 是双曲的，且 $Q_n$ 是 $g_n$的可容许剪枝集。因此，对于每个 $f \in \mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}}$，当 $n$ 充分大时，$f$ 和 $g_n$ 都有修剪多项式型延拓$F_n\colon U_n \to U'_n$和 $G_n\colon U_{g_n} \to U'_{g_n}$，使得 $Q_n\colon = Q(G_n) = Q(F_n)$，并且 $F_n$、$G_n$ 的定义域紧包含于 $f$ 和 $g_n$的解析域 $\Omega_a$ 中。

如果 $f_0$ 有抛物周期点，但它们全都是简单型，那么我们可以假设 $g_n \in \mathcal{P}_f$，并且 $g_n$ 的所有临界点都位于双曲周期点或简单抛物周期点的吸引域中。这里，$n$（因此 $Q_n$）取决于 $f$，尤其取决于映射 $f$的解析域，进而取决于修剪区间 $J_i \supset J_i^* \ni f(c_i)$ 的大小。

根据定理 20.2，我们因此可以用 $G_n$ 的实混合类来参数化 $F_{0,\,n}\colon U_{0,\,n} \to U'_{0,\,n}$ 的实混合类：$U_{G_n} \to U'_{G_n}$。由 $g_n$ 的性质，根据定理 19.2（若 $f_0$ 有抛物周期点，则根据推论 19.4），可知对于每个足够小的 $a' \in (0,\ a]$，$\mathcal{H}_{g_n}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_{a'}$ 都是实解析巴拿赫流形。因此，定理 20.2 意味着

$F_{0,\ n}: U_{0,\ n} \to U'_{0,\ n}$ 的实混合类是 $\mathcal{A}^{\nu}$ 的一个浸入解析子流形 $X_n$。此外，对于所有足够大的 $n$ ，– $f_0$ 都属于这个混合类。由于 $Q_n \subset Q_{n+1}$ ，我们有$X_n \subset X_{n+1}$。由于任意 $f \in \mathcal{H}_{f_0}$ 都包含在某个 $X_n$ 中，我们有 $\cup X_n = \mathcal{H}_{f_0}$。□

## 22. Topological conjugacy classes form immersed analytic manifold

为讨论 $\mathcal{T}_{f_0}$的共轭类，记环面 $T^2$（带有 g 个标记点）的$Teichm\ddot{u}ller$ 空间 为 $\mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}})$。也就是说，$\mathrm{T}(T^2{}_{\mathrm{g}})$是由所有数对（$X, \phi$）构成的空间，其中 $X$是带有 g 个标记点的 2-环面，且 $\phi$: $T^2 \to X$ （将标记点映射到标记点）是一个拟共形映射；若 $\phi_2\phi_1^{-1}$: $X_1 \to X_2$ 同伦于一个全纯映射，则认为（$X_1, \phi_1$）与（$X_2, \phi_2$）等价。若 $g > 0$ ，此空间的实维数为 2g。若 $\mathrm{g} = 0$，则 $T^2_0$不是双曲曲面，并且 $T^2_0$的 Teichmuller 空间等于上半空间 $\mathbb{H}$ ，因此其实维数同样为二。更多内容请参见 [IT]。

在下面的定理中，我们只计算轨道无限的临界点，而不计算最终映入周期轨道的临界点。

**定理 22.1 (** $\mathcal{T}_f$的流形结构)。 假设 $f \in \mathcal{A}^{\nu}$ 只有双曲周期点。那么， $\mathcal{T}_f$ 与乘积 $\mathcal{H}_f$ 以及形如 $\mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}_1})$ 的集合共形等价:

$$\mathcal{T}_f \approx \mathcal{H}_f \times \mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}_1}) \times \ldots \mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}_a}) \tag{22.1}$$

并且是一个实解析流形。这里， $a$ 等于双曲周期吸引子的数量，而$\mathrm{g}_i$ 等于$i$号周期吸引子的吸引域中具有互不相交的无限轨道的临界点数量。

证明。 如果 $f_0$ 没有周期吸引子或抛物周期点，那么 $\mathcal{H}_{f_0} = \mathcal{T}_{f_0}$ ，因此该结论由前一个推论立即得出。故设 $f_0$ 恰有 $a > 0$个吸引周期轨道 $O_1$、.....、$O_a$，其周期分别为 $m_1$、.....、$m_a$。取一个周期点 $p_i \in O_i$，并令 $\mathrm{g}_i$ 表示包含在 $B(O_i) \setminus O_i$ 中且轨道互不相交的临界点数量。现在取一个围绕 $p_i$ 的基本环带 $A_i$ ，使得 $f^{m_i}$ 在由 $A_i$ 围成的圆盘上是微分同胚，并且每个进入 $p_i$ 的吸引域（且未映入 $O_i$）的临界点轨道都会进入 $A_i$。该环带的模数等于环带$\{z$ 的模数： $|\lambda_1| < |z| < 1\}$ ，其中 $\lambda_i = Df^{m_i}(p_i) \in \mathbb{R}$。通过边界上的识别 $z \mapsto f^{m_i}(z)$ 将$A_i$的内边界与外边界粘合起来，我们得到一个环面 $T^2_i$。

给定映射 $f \in \mathcal{H}_{f_0}$，在周期吸引子$p_{i,f}$ （对应于 $f_0$的周期吸引子 $p_i$ ）附近选取一个基本环带 $A_{i,f}$ ；它是映射 $f_0$ 的基本环带 $A_i$ 的全纯像（将 $f_0$ 在 $A_i$ 中的临界点的迭代映到 $f$的相应临界点）。根据$f_0$ 的动力系统，将 $A_i$ 的内、外边界点识别起来，我们得到一个带有 $\mathrm{g}_i$ 个标记点的环面 $T^2_i$。类似地，$A_{i,f}$ 诱导出一个带标记点的环面$T_{i,f}$，并且有一个共形映射 $\phi_f: T_{i,f} \to T_i$。现在选取 $\mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}_i})$中的一个元素，即 $X$，以及一个拟共形映射 $\phi$: $T_i \to X$。由此得到映射 $\phi \circ \phi_f: T_{i,f} \to X$。令 $\mu_i$为此映射在$A_{i,f}$上的贝尔特拉米系数。利用动力系统，这会在$p_{i,f}$的吸引域上诱导出一个不变的贝尔特拉米系数 $\mu_i$ 。现在对$f$的每个周期吸引子 $p_{i,f}$ 都进行此操作。然后将吸引域并集上的贝尔特拉米系数延拓为 $\mathbb{C}$上处处不变的贝尔特拉米系数 $\mu = \mu_{\phi_1,\ldots,\phi_a}$ ，使其在吸引域之外为零。利用黎曼映射定理，我们得到唯一的拟共形映射 $h_\mu$ ，并将其归一化，使得 $h_\mu(\pm 1) = \pm 1$。由于$\mu$ 是 $f$-不变的，映射 $f_\mu = h_\mu \circ f \circ h_\mu^{-1}$仍是全纯映射。若取 $\mu$为实对称的，则 $f_\mu$ 仍是区间映射。因此，我们得到由下式定义的映射 $\Psi$

$$\mathcal{H}_{f_0} \times \mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}_1}) \times \ldots \mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}_a}) \ni (f, \phi_1, \ldots, \phi_a) \mapsto f_{\mu(\phi_1,\ldots,\phi_a)} \in \mathcal{T}_{f_0}.$$

由于 $h_\mu$ 对所有选择都全纯依赖，因此该映射作为取值于 $\mathcal{A}$的映射是全纯的 $\nu$ 。 为说明上述映射是单射，设（$f$、$\phi_1$、...、$\phi_a$）、（$f$、$\phi_1$、...、$\phi_a$） $\in \mathcal{H}_{f_0} \times \mathrm{T}(T^2\mathrm{g}_1) \times \ldots \mathrm{T}(T^2\mathrm{g}_a)$ 满足：$\Psi$（$f$、$\phi_1$、...、$\phi_a$）$= \Psi$（$\tilde{f}$、$\tilde{\phi}_1$、...、$\tilde{\phi}_a$）。于是 $f$、$\tilde{f}$混合共轭。特别地，相应周期吸引子的乘子相同，并且$h_\mu^{-1}$（$\tilde{f}$、$\tilde{\phi}_1$、...、$\tilde{\phi}_a$）$\circ h_{\mu(f,\phi_1,\ldots,\phi_a)}$）的 $\bar{\partial}$导数在 $f$的吸引域上几乎处处为零。由魏尔引理可知，$h_\mu^{-1}$（$\tilde{f}$、$\tilde{\phi}_1$、...、$\tilde{\phi}_a$）$\circ h_{\mu(f,\phi_1,\ldots,\phi_a)}$）是共形的。因此 $\phi_i = \tilde{\phi}_i$。为说明 $\Psi$是满射，注意任意 $g \in \mathcal{T}_{f_0}$ 都可以通过拟共形手术以这种方式得到。事实上，对于每个周期吸引周期轨道，选取一个周期点 $p$，并取一个基本环带$A_i$、$_g$，围绕 $p$ 并包含吸引域 $p$ 中所有临界点的$\mathrm{g}_i$ 次正向迭代（并类似地定义$A_i$、$_{f_0}$）。选取微分同胚 $\phi_i$：$A_i$、$_{f_0} \to A_i$、$_g$，使其保持实轴，并使$A_i$、$_{f_0}$ 中的 $f_0$ 次迭代点映射到$A_i$、$_{f_0}$中的 $g$ 的相应临界迭代点。接下来令 $\mu$ 为$A_i$、$_{f_0}$中 $\phi_i$ 所对应的贝尔特拉米系数，并对 $\mu$ 进行延拓，使其保持不变，并在周期吸引点的吸引域之外为零。令 $h_\mu$ 为贝尔特拉米系数为 $\mu$的归一化拟共形映射，并定义 $g_0 = h_\mu \circ f_0 \circ h_\mu^{-1}$。按照通常情形， $g$ 与 $f_0$ 混合共轭，并且$g \in \mathcal{A}_a^\nu$。此外，根据构造

$$(g, \phi_1, \ldots, \phi_a) \mapsto g_{\mu(\phi_1,\ldots,\phi_a)} = f.$$

□

注22.1。在定理 26.2 中，我们将确定该流形作为 $\mathcal{A}^\nu$ 子集时的余维。

注22.2。空间 $\mathcal{T}_f$ 由实映射组成，因此环面 $T_i$ 中的标记点都是实点。具有 $\mathrm{g}_i$ 个实标记点的 $T_i$ 的 Teichmüller 空间，可以视为这些环面中的 $\mathrm{g}_i$ 个实点构成的有序集合。因此可见，该实 Teichmüller 空间是一个实维数为 $\mathrm{g}_i$ 的单形。若 $\mathrm{g}_i = 0$，则基本环带的模数，因而环面的共形结构，由乘子 $\lambda_i$ 确定。

$Re$注22.3。在 [McSu] 的第 6 节中也可以找到类似的讨论。

注22.4。如果 $f$ 有抛物周期点，那么基本域不是环带 $A_i$，而是图 12 中的新月形区域 $S$。识别边界后，我们得到一个无限圆柱，即具有 $\mathrm{g}_i$ 个标记点的 $\mathbb{C}_*$。将其 Teichmüller 空间记为 $\mathcal{T}(\mathbb{C}_{*,\ \mathrm{g}_i})$。如果 $f$ 的所有抛物周期点都是单的，则可得

$$\mathcal{T}_f \approx \mathcal{H}_f \times \mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}_1}) \times \ldots \mathrm{T}(T^2_{\mathrm{g}_a}) \times \mathrm{T}(\mathbb{C}_{*,g'_1}) \times \cdots \times \mathrm{T}(\mathbb{C}_{*,g'_p}) \tag{22.2}$$

其中 $p$ 是抛物型周期点的数量，而 $\mathrm{g}'_1, \ldots, \mathrm{g}'_p$ 是第 $i$个抛物型周期点的吸引域中的无限轨道数量。

## 23. Infinitesimal theory, horizontal, vertical and transversal vectorfields

至此，我们已经证明 $\mathcal{H}_f$ 和 $\mathcal{T}_f$ 具有流形结构。在接下来的几节中，我们将证明它们具有正确的余维。

开集 $U \subset \mathbb{C}$ 上的连续向量场 $\alpha$ 称为 $K$-拟共形，简称为 $K$-qc，如果它具有局部可积的分布偏导数 $\partial\alpha$ 和 $\partial\alpha$，并且 $\|\partial\alpha\|_\infty \leq K$。若向量场对于某个 $\kappa$ 是 $\kappa$-qc 的，则称该向量场为拟共形。如果一个 qc 向量场在 $\{-2, 2, \infty\}$ 或 $\{-1, 1, \infty\}$上消失，我们称其为归一化的。若 $\alpha$ 是一个连续向量场，

定义在闭集 $X$上，我们称 $\alpha$ 为拟共形的，如果它可延拓为 $\mathbb{C}$上的一个归一化 qc 向量场。我们定义

$$\|\alpha\|_{\mathrm{qc}} = \inf \|\xi\|_\infty,$$

其中下确界 是在黎曼球面上的所有标准化拟共形延拓 $\xi$ of $\alpha$ 中取的 .

**定义 23.1**（混合水平向量场 $E_f^h$）。 设 $f \in \mathcal{A}^\nu$。那么 $E_f^h$ 是所有在区间的某个邻域内定义的全纯向量场 $v \in T_f\mathcal{A}^\nu$ 所成的空间，并且满足：存在一个修剪多项式型延拓 $F$: $U \to U'$ of $f$，以及定义在 $U$ 上的拟共形向量场 $\alpha$，使得

$$v(z) = \alpha \circ F(z) - DF(z)\alpha(z) \text{ for } z \in U \tag{23.1}$$

并且 $\partial\alpha = 0$ 在 $K_F$ 上成立。我们称这样的向量场 $v$ 为混合水平。满足（23.1）的向量场 fields $v$ 称为水平，如果 $\partial\alpha = 0$ 在 $K_F$ 上不一定成立。

注 23.1。 定义 $v^n = \frac{d}{dt}(f + tv)^n|_{t=0}$，并假设 $F$ 的每个临界点都位于某个周期吸引子的吸引域内，且 $v$ 满足

$$Dv^n(p)(Df^n(p) - 1) = v^n(p)D^2f^n(p). \tag{23.2}$$

对于每个吸引周期轨道。接着，通过计算可知，对于形如 $f + tv$ 的映射，这些周期轨道的乘子在无穷小意义下保持不变。然而，如果 $p$ 的吸引域中有多个临界点，那么 (23.2) 和 (23.1) 并不足以保证 $v \in \mathcal{H}^f$，参见定理 22.1 中的讨论。

注 23.2。 混合切向量的定义 23.1 不依赖于 $F$ 的选择： $U \to U'$ ，具体而言，假设 $F\colon U \to U'$ 和 $F\colon U \to U'$ 是 $f$ 的修剪多项式型 延拓，且满足 $U \subset U$。如果 (23.1) 在 $U$ 上成立，那么它在 $U$ 上也成立，因为此时$\tilde{F}|\tilde{U} = F|\tilde{U}$。因此， $v \in E_f^h$ 是否成立，是关于限制在 $I$ 上的 $v$ 的一个条件。下一条命题也将使这一点更加明了。

下一个命题阐明了上述定义的动机，并表明混合水平向量场 $v$ 可用于参数化 $\mathcal{H}_f$，其方式与黎曼流形中的指数映射相同。

**命题23.1** $(T_f\mathcal{H}_f = E_f^h)$。 对于每个 $v \in E_f^h$，存在一个映射的单参数族 $f_{t,\,v} \in \mathcal{H}_f$，满足 $f_{0,\,v} = f$，并且关于 $t$解析地依赖，从而 $\dfrac{d}{dt} f_{t,\,v}\big|_{t=0} = v$。反之，对于每个接近 $f$ 的 $g \in \mathcal{H}_f$，存在 $v \in E_f^h$，使得 $f_{1,\,v} = g$。

类似地，对于每个接近 $f$ 的 $g \in \mathcal{T}_f$，存在一个水平向量场 $v$，使得 $f_{1,\,v} = g$；每个水平向量场 $v$ 则对应于一个族 $f_{t,\,v} \in \mathcal{T}_f$。

证明。假设 $v \in E_f^h$。则 $v$ 是全纯的，并且存在一个修剪多项式型延拓 $F\colon U \to U'$ 以及拟共形向量场 $\alpha$，使得 $v(z) = \alpha(F(z)) - F'(z)\alpha(z)$ 对于 $z \in U$成立。取 $\partial$导数，可见对于所有 $z \in U$，$0 = \partial\alpha(F(z))F'(z) - F'(z)\partial\alpha(z)$。即 $F^*\mu = \mu$。令 $H_t$ 为与 $t\mu$相关联的归一化拟共形同胚。由于 $\mu$是不变线场，我们得到存在一个实解析映射 $f_t$，其具有修剪多项式型延拓 $F_t\colon U_t \to U_t'$，使得 $F_t \circ H_t = H_t \circ F$。对 $F_t \circ H_t = H_t \circ F$取 $\frac{d}{dt}$导数，记 $\alpha = \frac{d}{dt}H_t\big|_{t=0}$, $v = \frac{d}{dt}F_t\big|_{t=0}$，可见 $v(z) + DF(z)\alpha(z) = \alpha \circ F(z)$，如要证明。

反之，如果 $g \in \mathcal{H}_f$，那么根据定理 15.1，映射 $f$，$g$ 具有修剪多项式型延拓 $F\colon U_F \to U_F'$以及 $G\colon U_G \to U_G'$，它们拟共形共轭，因此

共轭的 $\partial$ 在 $K_F$ 上消失。令 $\mu$ 为与该拟共形共轭相关联的贝尔特拉米系数。令 $h_t$ 为与 $t\mu$ 和 $f_t = h_t \circ f \circ h_t^{-1}$ 相关联的拟共形共轭，我们得到向量场 $v(z) = \frac{d}{dt} f_t(z)|_{t=0}$，它属于 $E_f^h$，因此 $f_{1,\ v} = g$。□

注 23.3. 设 $\mu_t$ 是全纯运动 $h_t$的贝尔特拉米系数，且 $\alpha = \frac{d}{dt} h_t|_{t=0}$。那么 $\mu_t$ 关于 $t$全纯地依赖， $\alpha$ 是一个拟共形向量场，并且 $\bar{\partial}\alpha = \frac{d\mu_t}{dt}|_{t=0}$，参见[ALM，引理 2.10] 和 [AB，引理 19]。

**定义 23.2**（混合垂直向量场 $E_f^v$）. 若存在 $f$ 的一个修剪多项式型延拓 $F: U_F \to U_F'$ 以及定义在 $\mathbb{C} \setminus K_F$ 上的全纯向量场 $\alpha$，且该向量场在 $\infty$ 处消失，使得全纯向量场 $v \in T_f\mathcal{A}^\nu$ 为混合垂直 的，

$$v(z) = \alpha \circ F(z) - DF(z)\alpha(z) \text{ for } z \in U_F \setminus K_F. \tag{23.3}$$

用 $E_F^v$ 表示与 $F$对应的、位于 $f$ 处的混合垂直向量场空间。

注 23.4. $E_F^v$的定义似乎依赖于 $F$。事实上，假设 $F: U \to U'$ 和 $\tilde{F}: \tilde{U} \to \tilde{U}'$ 都是 $f$的修剪多项式型延拓，且 $\tilde{U} \subset U$。那么，与 $F$相关联的一个 $\tilde{F}$ 垂直向量场 $v$未必也是与 $F$相关联的向量场。这是因为 $U \setminus K_{\tilde{F}}$未必包含于 $U \setminus K_F$，因此满足（23.3）的 $\alpha$ 未必会在 $U \setminus K_{\tilde{F}}$上诱导出 $\tilde{\alpha}$。

**定义 23.3**（混合横截）。 若对于任何满足 $\frac{d}{dt} f_t = v$ 的族 $f_t \in \mathcal{A}_a^\nu$，当 $|t|$ 足够小时且 $t \neq 0$ 时， $f_t$ 都不与 $f$ 混合共轭，则称向量场 $v \in T_f\mathcal{A}_a^\nu$ 是混合横截 的。

注 23.5。 假设 $f$ 没有抛物周期点。考虑到定理 22.1 中的 Teichmüller 空间 $\mathcal{T}^{g_i}$，也可以定义拓扑垂直向量场的概念，即具有附加性质的混合垂直向量场：它在无穷小意义下保持周期吸引子吸引域中无限临界轨道的位置（用 Teichmüller 空间 $\mathcal{T}^{g_i}$ 来表示）以及这些周期吸引子的乘子不变。我们不会进一步阐述或用到这种描述。

**命题 23.2**。 对于 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，则对于 $f$ 的每个修剪多项式型延拓 $F$，我们有

$$T_f\mathcal{A}^\nu = E_f^h \oplus E_F^v.$$

证明。 假设 $v \in T_f\mathcal{A}^\nu$ 是定义在区间的某个邻域 $\Omega_a$ 内的全纯向量场。选取一个修剪多项式型延拓 $F: U \to U'$ of $f$，使得 $v$ 在 $U \cup U'$ 的某个邻域内有定义。令 $\Gamma$ 为与 $F$ 相关联的曲线集。

我们声称，存在一个定义在 $\mathbb{C} \setminus K_F$ 上、在 $\infty$ 附近消失的光滑向量场 $w$，并且满足

$$v(z) = w(F(z)) - DF(z)w(z), \tag{23.4}$$

对所有 $z \in U$ （此处定义良好）。构造这样的 $w$，我们按如下步骤进行。令 $\gamma$表示 $\Gamma$ 中一条落在 $F$的周期点 $\alpha$ 上的曲线。首先，我们在基本域 $\gamma \cap (U' \setminus U)$的一个邻域 $O \cap \gamma$内定义 $w$，使得式（23.4）在 $O \cap \gamma$上成立。然后利用关系式 $v(F^{n-1}z) = w(F^n(z)) - DF^n(z)w(z)$将 $w$延拓到 $\gamma \cap U$，再延拓到 $\cup_{n=0}^N F^{-n}(\gamma)$；其中，选择 $N$使得 $F^{-N+1}(\gamma)$的复拉回与$\partial U'$相交。由此便在 $\partial U' \cap F^{-(N+1)}(\gamma)$上定义了 $w$。对 $\Gamma$中的所有这类曲线都进行上述操作。接下来，将 $w$光滑地延拓到 $\partial U'$的其余部分，并通过 $v(z) = w(F(z)) - DF(z)w(z)$在 $\partial U$上定义 $w$。注意，这个定义在 $\partial U \cap \partial U'$上与前一个定义一致。现在将 $w$ 光滑地延拓到 $\mathbb{C} \setminus U$

并使其在无穷远处趋于零，再通过 $v(F^{n-1}z) = w(F^n(z)) - DF^n(z)w(z)$。在 $\mathbb{C} \setminus K_F$上定义。这样，我们就构造出了式（23.4）中的 $w$。

我们来考虑贝尔特拉米微分 $\mu = \partial w$在$\mathbb{C} \setminus K_F$中的情形，并将其延拓到 $K_F$上，在那里取值为 0。由于$v$在 $U$上是全纯的， $\mu$在 $U$上是不变的 $F$:

$$\bar\partial v = 0 = \bar\partial(w \circ F) - \bar\partial(DF \cdot w),$$

$$0 = (\bar\partial w \circ F)DF - DF\,\bar\partial w, \quad \text{so} \quad \bar\partial w \circ F = \bar\partial w.$$

因此，我们有 $\mu$ 在球面上的 $L^\infty$-范数有界。现在，我们求解 $\partial$问题：$\partial u = \mu$ 其中， $u$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个拟共形向量场，并在 $\infty$处消失。

$U$上的向量场 $v^h = u \circ F - DFu$是全纯的，因为 $\mu$是 $F$-不变的。由于$\bar\partial u = \mu = 0$ 在 $K_F$上，$v^h$ 是混合水平的。设 $\alpha = w - u$。由于 $\bar\partial\alpha = 0$ 在 $\mathbb{C} \setminus K_F$上， $\alpha$ 在该集合 $\mathbb{C} \setminus K_F$ 上是全纯的，并且 $\alpha$ 在 $\infty$处消失。此外， $v - v^h = \alpha \circ F - DF\alpha$ 在$U$上，因此 $v - v^h$ 是一个垂直向量场。

分解的唯一性：假设存在向量场 $v \in E^h_f \cap E^v_f$, $v \neq 0$。那么存在一个修剪后的类多项式代表 $F$: $U \to U'$ $f$的一个拟共形向量场$w$，它定义在邻域 $U'$ $K_F$内，使得 $v = w \circ F - DFw$使得 $\partial w = 0$在 $K_f$上；还存在一个全纯向量场 $\alpha$，它定义在$\mathbb{C} \setminus K_F$内，并在 $\infty$处消失，使得 $v = \alpha \circ F - DF\alpha$。考虑定义在 $U' \setminus K_F$上的向量场 $u = w - \alpha$。由于 $u \circ F^n = (F^n)'u$，可得 $|u(z)| \to 0$，当 $z \to K_F$, $z \in U$ 时。值得注意的是，在 $K_F \cap \partial U$ 中的点处，我们也有相同的估计。因此， $u$ 可以连续延拓到$U$，并且在 $K_F$上为零。由此可知，$w$ 和 $\alpha$ 在修剪朱利亚集上相等。令 $\beta$为一个向量场，它在 $K_F$ 上等于 $w$，在 $\mathbb{C} \setminus K_F$上等于 $\alpha$。那么 $\beta$ 具有 $L^2$ 类分布导数，且 $\bar\partial\beta = 0$。因此，根据韦尔引理， $\beta$ 是定义在$\mathbb{C}$上的全纯向量场；又由于 $\beta$在 $\infty$处消失，它是线性的。因此，我们可以写成 $\beta(z) = [az+b]/dz$。所以

$$v(z) = v_0(z)/\partial z \text{ where } v_0(z) = [af(z) + b - f'(z)(az + b)].$$

由此很容易看出， $v = 0$。事实上，注意到 $f_t$ 是满足 $f_t(\partial I) \subset \partial I$ 的族。因此，$\frac{df_t}{dt} = v$ 意味着 $v(-1) = v(1) = 0$。我们来证明这意味着 $a = b = 0$。为此，我们需要考虑几种可能性。

(i) 如果 $f(-1) = -1$且 $f(1) = 1$，那么 $v_0(-1) = af(-1) + b - f'(-1)(-a+b) = (b-a)(1-f'(-1)) = 0$，并且 $v_0(1) = af(1) + b - f'(1)(a+b) = (a+b)(1-f'(1)) = 0$。由于我们假设 $f$ 没有抛物点，这意味着 $a = b = 0$。

（ii）如果 $f(-1) = -1$且 $f(1) = -1$，那么 $v_0(-1) = af(-1) + b - f'(-1)(-a+b) = (b-a)(1-f'(-1)) = 0$，由此得到 $a = b$，因此 $v_0(1) = af(1) + b - f'(1)(a+b) = (b-a) - f'(1)(a+b)] = 0$ 意味着 $a + b = 0$，因为我们假设 $f$ 在$\partial I$中没有临界点。

（iii）如果 $f(-1) = 1$且 $f(1) = -1$，那么我们得到 $v_0(-1) = af(-1) + b - f'(-1)(-a+b) = (a+b) - f'(-1)(b-a) = 0$，并且 $v_0(1) = af(1) + b - f'(1)(a+b) = (b-a) - f'(1)(a+b) = 0$。结合起来得到 $(b-a)(1 - f'(-1)f'(1)) = 0$，这再次意味着 $b = a$，因此利用前面的表达式可得 $a = b = 0$。□

## 24. Estimates for vertical vector fields

**引理 24.1**。令 $F$: $E \to E'$ 为修剪多项式型映射 $F$: $E \cup B \to E' \cup B'$ 中源自外部映射的扩张马尔可夫结构的部分。那么存在$\lambda > 1$和 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $z \in F^{-N}(\partial E)$，都有 $|DF^N(z)| > \lambda$，从而 $z, \ldots, F^{N-1}(z) \in E$。

注 24.1。 集合 $E$ 还包含周期吸引子的吸引域，前提是这些吸引域都能包含在集合 $K_{X,O}$ 中。如果 $f$ 有吸引域“较大”的周期吸引子，那么它的全局修剪多项式型扩张具有形式 $F$: $E \cup B \to E' \cup B'$，此时上述扩张成立于 $F^{-N}(\partial U)$ 上，而非 $F^{-N}(\partial B)$ 上。

证明。若 $F^n(z)$ 位于 $E'$ 的内部，则取包含 $F^n(z)$ 的球 $D \Subset D' \subset E'$。由 Koebe畸变定理以及拼图块的直径趋于零可知，如果 $n$ 足够大，则有 $|DF^n(z)| \geq 2$。若 $F^n(z) \in \partial E \cap \partial E'$，则 $F^n(z) \in \Gamma$。若 $F^n(z)$ 包含在曲线 $\gamma \subset \Gamma$ 中，而该曲线是扩张马尔可夫结构的一部分，则存在一个与 $z$ 无关的 $n_0$，使得 $z, \dots, F^{n-n_0}(z) \in E$。因此，在这种情况下，证明与前面相同。若 $\gamma$ 是吸引结构的一部分，且 $\gamma$ 是一条经过排斥周期点的不变曲线，那么可能出现 $F^k(z) \dots, F^{n-1}(z) \in \gamma$，并且 $z, \dots, F^{k-1}(z) \in E$；由于该周期点处的乘子是排斥的，且依据论证的第一部分，我们也能得到扩张。□

现在我们可以证明以下命题，它是[Ly1 引理 4.10]的一个改进。为了解决修剪多项式型映射没有模数界这一事实，我们利用拼图块边界上的扩张。这个引理是获得 $\mathcal{H}_f$余维下界的一项关键技术工具。在命题陈述中，我们比 [Ly1 引理 4.10] 多使用了一次回拉，因为如果 $F: \ U \to U'$ 是一个修剪多项式型映射，我们未必有 $U' \supset U$；不过，我们确实有 $U \supset F^{-1}(U)$。

**命题 24.2** (垂直向量场的控制)。 设 $F: \ U = E \cup B \to E' \cup B' = U'$ 是一个全局修剪类多项式映射。设 $W'' = E$, $W' = F^{-1}(W'')$ 和 $W = F^{-1}(W')$。设 $v$ 和 $\alpha$ 是满足以下条件的全纯向量场

$$v(z) = \alpha \circ F(z) - DF(z)\alpha(z), \quad z \in W',$$

其中， $v$在 $W''$上全纯，且 $\alpha$在$\mathbb{C} \setminus K_F$.上全纯。于是存在常数$C$ ，它取决于 $\lambda$、引理 *24.1* 中的常数以及构成 $U' \setminus U$的矩形的极值宽度，使得

$$\|\alpha\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus W} \leq C\|v\|_{W'} \ and \ \|v\|_W \geq C^{-1}\|v\|_{W'}.$$

证明。 令 $\gamma = \partial W$。根据引理 24.1，存在 $N \in \mathbb{N}$和 $\lambda > 1$，使得对于 $z \in F^{-N}\gamma$，$|DF^N$（$z$）$| > \lambda$.

我们有

$$\alpha \circ F^N(z) - DF^N(z)\alpha(z) = DF^N(z) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{v(F^k(z))}{DF^{k+1}(z)},$$

so

$$\alpha(z) = \frac{\alpha \circ F^N(z)}{DF^N(z)} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{v(F^k(z))}{DF^{k+1}(z)}$$

由于对于所有 $z \in F^{-N}\gamma$ 和所有 $0 \leq k \leq N-1$, $|DF^{k+1}(z)|$ 都远离零，因此该表达式表明存在一个常数 $A > 0$ （它取决于 $N$ 和 $F: \ U \to U'$），使得

$$\|\alpha\|_{F^{-N}\gamma} \leq \frac{\|\alpha\|_\gamma + \lambda A\|v\|_W}{\lambda} \leq \frac{\|\alpha\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus W} + \lambda A\|v\|_W}{\lambda}, \tag{24.1}$$

其中，最后一个不等式由最大值原理以及 $\partial W = \gamma$ 得出。根据最大值原理，我们还有

$$\|\alpha\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus W} \le \|\alpha\|_{F^{-N}\gamma}.$$

Thus

$$\|\alpha\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus W} \le \frac{\|\alpha\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus W} + \lambda A\|v\|_W}{\lambda},$$

因此

$$\|\alpha\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus W} \le \frac{\lambda A\|v\|_W}{\lambda - 1}.$$

这就证明了第一个不等式。第二个不等式由它和最大值原理得出：

$$\|v\|_{V'} \le \|\alpha\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus V''} + \|DF\|_{V'}\|\alpha\|_{\overline{\mathbb{C}}\setminus V'}$$

$$\le \|\alpha\|_{\overline{C}\setminus W}(1 + \|DF\|_{W'}) \le \frac{\lambda A}{\lambda - 1}(1 + \|DF\|_{W'})\|v\|_W.$$

□

注 24.2。 前一个命题是我们能够比在 [ALM] 中更容易处理垂直向量场的主要原因；在 [ALM] 中引入了拼图映射，它们具有无穷多个定义域，并构成 $I$的一个项链邻域。

## 25. Estimates for horizontal vectors fields

本节将证明以下结果，在[ALM]中称为关键估计。这里的证明可直接由我们论文的 A 部分得出。

**引理 25.1** (水平向量场的控制). 假设 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$ 只有双曲周期轨道。那么存在 $f$ 和 $C > 0$的一个邻域 $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}_a^\nu$，使得对于任意$g \in \mathcal{W}$和任意 $v \in T_g\mathcal{H}_g$，都存在一个修剪多项式型映射 $G\colon U_g \to U_g'$以及一个拟共形向量场 $\alpha$，使得

$$v(z) = \alpha \circ G(z) - DG(z)\alpha(z) \quad for\, z \in U_g,$$

使得

$$\|\bar\partial\alpha\|_{\mathrm{qc}} \le C\|v\|_\infty.$$

证明.取 $v \in T_g\mathcal{H}_g$。于是根据命题23.1，存在一个族 $g_t \in \mathcal{H}_g$，满足$\dfrac{d}{dt}g_t\big|_{t=0} = v$。令 $G_t$ 和 $G$ 分别为 $g_t$ 和 $g$的修剪多项式型延拓。根据定理15.1，存在一个拟共形映射族 $h_t$，使得 $G_t = h_t \circ G \circ h_t^{-1}$。根据推论15.2，我们有

$$\varkappa(h_t) \le 1 + L||g_t - g||_\infty,$$

其中 $\varkappa(h_t)$ 是 $h_t$的拟共形畸变，并且与前面一样，$||\cdot||_\infty$ 表示 $\Omega_a$ 上的上确界范数。因此，若记 $\alpha = \dfrac{dh}{dt}|_{t=0}$，便得到 $||\bar\partial\alpha||_{qc} \le L||v||_\infty$。与命题23.1的证明一样，我们还有 $v(z) = \alpha \circ G(z) - G'(z)\alpha(z)$，其中 $z \in U_g$。 □

## 26. The codimension of conjugacy classes

在第21节中，我们证明了映射 $\mathcal{A}^\nu$ 的共轭类是一个实解析流形。本节中，我们将证明它在 $\mathcal{A}^\nu$ 中具有预期的余维。

维数的下界来自命题 24.2。为了得到维数的上界，我们将使用以下引理，它由引理 25.1（即我们对 [ALM] 的“关键估计”的版本）推出：

**引理 26.1** (切空间的连续性)。 若 $f_n \in \mathcal{A}_a^\nu$ 收敛到 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，其中 $f$ 只有双曲周期点，并令 $F_n\colon\ U_n \to U_n'$ 为 $f_n$ 的修剪多项式型延拓，使得对每个 $n \geq 0$，$U_n'$ 都包含 $I$ 的一个 $\delta$-邻域。那么，若 $v_n \in E_{f_n}^h$ 是一个水平向量序列，且 $||v_n||_{U_n'} = 1$，则 $v_n$ 收敛到一个水平向量 $v \in E_f^h$，其中 $||v||_{U'} \geq 1$，对某个 $U' \supset I$ 成立。

证明。 由于 $v_n \in E_{f_n}^h$，存在一个拟共形向量场 $\alpha_n$，定义在 $U_n'$ 上，使得对所有 $z \in U_n$，$v_n(z) = \alpha_n(F_n(z)) - DF_n(z)\alpha_n(z)$，且 $v_n$ 在 $U_n$ 上全纯。由引理 25.1（关键估计）可知，$\alpha_n$ 是一个膨胀率有界的拟共形向量场序列。因此，根据拟共形向量场的紧性引理（例如参见 [ALM],），存在一个拟共形向量场 $\alpha$，使得沿某个子序列 $\alpha_n \to \alpha$，并且，由于 $||v_n||_{U_n'} = 1$，存在一个全纯的 $v$，使得在 $I$ 的某个确定邻域上 $v_n \to v$。此外，对于 $I$ 的某个确定邻域内的所有 $z$，都有 $v(z) = \alpha(F(z)) - DF(z)\alpha(z)$，因此 $v$ 是一个水平向量场，$v \in E_f^h$。□

现在我们证明混合类具有预期的余维，参见 [Ly1，定理 4.11]以及 [Sm，定理 10.4]。

**定理 26.2**。 假设 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$ 只有双曲周期点。那么

*(1)* $\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$ 是一个实解析流形，其在 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中的余维等于 $\nu_H = \nu + \xi_{noness-att}$，其中 $\nu$ 是 $f$ 的临界点数，$\xi_{noness-att}$ 是其吸引域中不含（实）临界点的周期吸引子数——我们称之为非本质吸引子。*(2)* $\mathcal{T}_f$ 是一个实解析流形，其在 $\mathcal{A}_a^\nu$ 中的余维等于 $\nu_T = \nu - \zeta(f)$，其中 $\nu$ 是 $f$ 的临界点数，而 $\zeta(f)$ 是具有两两不相交无限轨道的周期吸引子的吸引域中的临界点数的最大值。

证明。 我们只考虑空间 $\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$。空间 $\mathcal{T}_f$ 的维数可由此结合定理 22.1 得出。

余维下界的证明。 回忆一下，$\mathcal{A}_a^\nu$ 中的函数在 $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \text{ 上是全纯的:}\ |z - I| < a\}$. 假设 $f_n \in \mathcal{A}_a^\nu$ 是 $\Omega_a$ 上的半双曲映射序列 $f_n \to f$。这之所以可能，是因为双曲性的稠密性，参见[KSvS2]。

对每个 $f_n$，我们关联一个修剪多项式型映射 $F_n\colon\ U_n := E_n \cup B_n \to E_n' \cup B_n' =: U_n'$；对 $f$，我们关联一个修剪多项式型映射 $F\colon\ U := E \cup B \to E' \cup B' =: U'$。我们选择它们，使得对所有充分大的 $n$，$U' \subset \Omega_a$ 且 $U_n' \subset \Omega_a$，并且使得 $F_n\colon\ U_n \to U_n'$ 收敛到 $F\colon\ U \to U'$（因此，特别是当 $n$ 足够大时，$U_n$ 包含 $U$ 的每个紧子集；$U_n'$ 和 $U'$ 的情形也类似）。根据定理 19.2，对每个 $F_n$，垂直于 $\mathcal{H}_{F_n}$ 的向量空间维数为 $\nu_H$，令 $\{v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^{\nu_H}\}$ 为一组基。此外，我们可以假设这些向量的长度为单位长度，并根据黎斯定理，假设它们在如下意义下近似正交

$$\operatorname{dist}(v_n^i, \operatorname{span}\{v_n^1, \ldots, v_n^{i-1}\}) > \frac{1}{2}, \text{ for } i = 2, 3, \ldots, \nu_H, \tag{26.1}$$

其中，距离是在 $U_n$ 上连续延拓到 $U_n$ 的有界全纯函数空间中的距离。

下面证明垂直方向上的单位球是紧的，参见 [Sm，推论 10.1]：设 $w_n$ 是 $F$ 处一列长度为单位长度的垂直向量场。那么存在$\alpha_n$，它们在 $\mathbb{C} \setminus K_F$上全纯，在 $\infty$ 处取值为零，并且满足

$$w_n = \alpha_n \circ F_n - DF_n \alpha_n \text{ on } E_n.$$

注意，由于最大值原理和方程 (24.1)，对每个 $i$，都存在$C_i$ 使得

$$||\alpha_n||_{\overline{\mathbb{C}}\setminus F_n^{-i}(E_n')} \leq C_i \text{ for all } n \geq 0.$$

因此，由于吸引域 $B_n$ 包含于 $K(F_n)$ 的内部，存在一个子序列 $\alpha_{n_j}$，它在 $\mathbb{C}\setminus K_F$的紧子集上一致收敛到全纯向量场 $\alpha$，从而相应的向量场 $w_{n_j}$ 收敛到向量场 $w$，并且 $w = \alpha\circ F - DF\alpha$在 $U \setminus K_F$上成立。因此，垂直方向上的单位球是紧的。

由此可知，我们可以假设对每个 $i$，$v_n^i \to v^i$，在$U$的紧子集上一致收敛。根据命题 24.2，$v^i$ 不可能为零。最后，由于向量 $v_n^i$ 近似正交，见方程 (26.1)，集合 $\{v^1, \ldots, v^{\nu_H}\}$线性无关。✓

余维上界的证明。反设当 $n$ 充分大时，有 $\operatorname{codim}(\mathcal{H}_F) > \operatorname{codim}(\mathcal{H}_{F_n})$。由命题 23.2 可知，存在一个非零垂直向量场 $v$，它属于 $F$的切空间，并且可由与 $F_n$相切的水平向量场 $v_n$ 逼近。这与引理 26.1 矛盾。□

## 27. Hybrid conjugacies are embedded manifolds

**定理 27.1**。取 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，假设 $f$ 只有双曲周期点，并令 $v$为一个混合垂直向量场。那么存在 $\epsilon > 0$，使得族 $f_t = f + tv$ 与每个混合类恰好相交一次。

证明。这由下一个引理立即得出。□

**引理 27.2**。假设 $f_n$、$g_n \in \mathcal{A}_a^\nu$ 实混合共轭，收敛到 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，且 $f$ 只有双曲周期轨道。那么任意极限 $v$ 的

$$\frac{f_n - g_n}{||f_n - g_n||_a}$$

是 $f$ 的混合切向量，即 $v \in T_f\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$。

证明。参见 [ALM，引理 8.1]。□

注 27.1。除非假设 $f$ 只有双曲周期点，否则上述定理和引理不成立；参见 [ALM，第 453 页脚注]。在 [CvS2] 中，我们将对此作进一步阐述。

## 28. Hybrid classes are Banach manifolds

在定理 26.2 中，我们证明了 $\mathcal{H}_f$ 在芽意义下是一个实解析流形。现在让我们通过证明以下内容来改进这一结论：

**定理 28.1**。对于每个 $f_0 \in \mathcal{A}_a^\nu$，–

*(1)* $\mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_a^\nu$ 是 $\mathcal{A}_a^\nu$ 的实巴拿赫子流形，余维为 $\nu_H = \nu + \xi_{noness-att}$；*(2)* $\mathcal{T}_{f_0}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_a^\nu$ 是 $\mathcal{A}_a^\nu$ 的实巴拿赫子流形，余维为 $\nu_T = \nu - \xi(f)$。

证明。第19节中证明了，任意 $f \in \mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}}$ 都有一个修剪多项式型延拓$F\colon\ U \to U'$ 使得其混合共轭类与 $G$的混合共轭类共形等价：$U_G \to U'_G$其中 $G$是一个实解析半双曲映射 $g \in \mathcal{A}_a^\nu$的延拓。这意味着存在 $a' > 0$，使得 $f \in \mathcal{A}_{a'}^\nu$，并且$\mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}_{a'}^\nu$ 是一个余维为$\nu_H$ 的巴拿赫流形，位于 $f$ 附近，其中 $\nu_H = \nu + \xi_{noness-att}$。由此可得，存在一个实解析函数

$$\Psi\colon \mathcal{A}_{a'}^\nu \to \mathbb{R}^{\nu_H}$$

该函数在 $f$附近有定义，在 $f$ 处具有最大秩，并且在$\mathcal{A}_{a'}^\nu$ 中的 $f$ 的某个邻域内，有

$$\mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_{a'}^\nu = \Psi^{-1}(0).$$

由于$\mathcal{A}_a^\nu$ 在 $\mathcal{A}_{a'}^\nu$ 中稠密，因此 $\Psi$在$\mathcal{A}_a^\nu$ 上的限制 $\Psi$ 在 $\mathcal{A}_{a'}^\nu$中 $f$ 的某个邻域内的每个 $\tilde{f} \in \mathcal{A}_a^\nu$ 处也具有最大秩。此外，$\tilde{f}$ 是否属于 $\mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}}$ 仅取决于限制在 $I$上的 $\tilde{f}$。由此可得 $\mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_a^\nu = \tilde{\Psi}^{-1}(0)$，并且由于 $\tilde{\Psi}\colon\ \mathcal{A}_{a'}^\nu \to \mathbb{R}^{\nu_H}$ 具有最大秩，因此 $\mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_a^\nu$ 是一个巴拿赫流形。第二个断言可用类似方法证明。□

## 29. Conjugacy classes of real analytic maps are path connected

本节通过证明以下定理来得到定理 B：

**定理29.1**。设 $f$、$f\colon\ I \to I$ 是 $\mathcal{A}^\nu$ 中的两个实解析映射，其所有周期点均为双曲的，并且二者实混合共轭（通过一个保序共轭）。那么，存在一个实映射族$f_t \in \mathcal{A}^\nu$、$t \in [0,1]$，它关于 $t \in [0,1]$ 实解析地依赖，使得$f_0 = f$、$f_1 = f$，且对每个 $t \in [0,1]$，$f_t$ 都与 $f$实混合共轭，并且 $f$。

类似地，如果 $f, f \in \mathcal{A}^\nu$ 拓扑共轭且仅有双曲周期轨道，那么存在一条实解析路径连接 $f, f$于 $\mathcal{T}(f)$。

证明。由 [CvS] 可知，存在 $f$与 $f$之间的拟对称共轭。令 $F\colon U_F \to U'_F$, $F\colon U_{\tilde{F}} \to U'_{\tilde{F}}$为定理 3.1 中 $f, f$的修剪多项式型延拓。选取一个拟共形映射 $h\colon U'_F \to U'_{\tilde{F}}$，使得 $h$将 $\partial U_F$映到 $\partial U_{\tilde{F}}$，并将 $\Gamma_F$映到 $\Gamma_{\tilde{F}}$，且$h$ 在这些集合上是共轭，同时还使 $h$ 在实轴上与 $f$和 $f$ 之间的拟对称共轭一致。我们还可以确保 $h$ 在双曲的周期吸引子附近是保角共轭。现在令 $H_0 = h$，并由 $F \circ H_{n+1} = H_n \circ F$定义 $H_{n+1}$。由于 $F, F$是共形的，$F$ 的临界值映到 $F$的临界值，且共轭关系成立，因此 $H_{n+1}$ 定义良好，并具有与 $H_n$相同的拟共形畸变。由此可知，$H_n$ 存在一个子序列收敛到某个拟共形映射 $H$。

令 $Y_n = U'_F \setminus \cup_{i=0}^n (F^{-i}(U'_f \setminus U_F))$。于是对每个 $n \geq 0$，$Y_{n+1} \subset Y_n$ 和 $H_{n+1}$ 在 $Y_n$ 之外以及在 $\gamma_f$ 上都与 $H_n$ 一致。由命题 6.3 的最后一个断言可知，$\cap_{n\geq 0} Y_n$ 的内部为空，因此，对于该集合之外的每个点 $z$，存在 $n$，使得对所有 $i \geq 0$，$H_{n+i}(z) = H_n(z)$。由此可知，$H_n$ 的任意收敛子列都收敛到同一个映射 $H\colon\ U_F \cup U'_F \to U_{\tilde{F}} \cup U'_{\tilde{F}}$，因此 $F \circ H = H \circ F$。

令 $\mu$ 为与 $H$ 在 $U_F \cup U'_F$ 上相关的贝尔特拉米系数（描述由 $H$ 对标准圆场进行回拉所得到的椭圆场）。那么 $F$ 保持该椭圆

场，因为 $\tilde{F}$ 是共形的，且因为 $F = H^{-1} \circ \tilde{F} \circ H$。现在通过在 $\mathbb{C} \setminus (U_F \cup U_F')$ 上令 $\mu = 0$，将 $\mu$ 延拓到 $\bar{\mathbb{C}}$，并令 $H_{t\mu}$ 为对应于贝尔特拉米系数 $t\mu$ 的拟共形映射，且将其规范化，使得 $H_{t\mu}(I) = I$，并且 $H_{t\mu}(\infty) = \infty$（这里我们使用可测黎曼映射定理）。由于 $F$ 保持由 $\mu$ 定义的椭圆场，且 $F$ 是共形的，因此对每个 $t \in [0,1]$，$F$ 也保持由 $t\mu$ 定义的椭圆场。由此可知，$G_t := H_{t\mu} \circ F \circ H_{t\mu}^{-1}$ 在 $H_{t\mu}(U_F)$ 上是共形映射。我们可以确保 $\mu$ 是 $z \mapsto \bar{z}$ 对称的，因此可以假设当 $t$ 为实数时，$H_{t\mu}$ 也是实数。特别地，$g_t = F|_I$ 是区间上的一族解析映射。□

我们还有以下结果：

**Pr命题 29.2。** 假设 $f_0 \in \mathcal{A}_a^\nu$。那么 $\mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_a^\nu$ 是道路连通的 .

证明。为说明这一点，取 $f$，$\tilde{f} \in \mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{A}_a^\nu$，并按照前一定理证明中的方法构造一条路径 $g_t \in \mathcal{H}_{f_0}^{\mathbb{R}}$，连接这些映射。可能出现这样的情况：$g_t$ 在 $\Omega_a$上并非解析。为解决这一问题，我们采用 ALM 第 9 定理 [证明中的论证，此处为完整起见将其列出。该论证表明，曲线 $\{g_t\}$ 可以由˜中的一条曲线逼近，该曲线连接 $f_0 = f$和 $f_1 = f$。具体而言，令 $a' \in (0, a)$ 满足：对每个 $t \in [0,1]$，$\{g_t\} \subset \mathcal{A}_{a'}^\nu$。令 $\Pi_{a,\,a'}$ : $\mathcal{A}_a^\nu \to \mathcal{A}_{a'}^\nu$ 为包含映射，它由将 $f$ 限制在 $\Omega_{a'}$上得到。接下来，考虑向量场的一参数实解析族$\{\hat{v}_t\}$，使得对每个 $t$，$\hat{v}_t = (v_t^1, \ldots\ldots, v_t^{\nu'})$ 都是 $E_{g_t}^v$的一个基，其中 $E_{g_t}^v$是垂直于$T_{g_t}(\mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}_{a'}^\nu)$的向量空间。回忆一下，$\nu' = \nu + \nu_{noness}$。（这里用到了定理 28.1。）

定义

$$P(t, \hat{s}) = g_t + \hat{s} \cdot \hat{v}_t \in \mathcal{A}_{a'}^\nu,\ (t, \hat{s}) \in [0,1] \times [-1,1]^{\nu'} \tag{29.1}$$

并令 $i_0 : [0,1] \to [0,1] \times [-1,1]^{\nu'}$，其中 $i_0(t) = (t, 0, \ldots, 0)$。令 $\Phi : [0,1] \times [-1,1]^{\nu'} \to \mathcal{A}_a^\nu$为一个实解析族，使得 $\Phi(0, 0, \ldots, 0) = P(0, 0, \ldots, 0) = f_0$，$\Phi(1, 0, \ldots, 0) = P(1, 0, \ldots, 0) = f_1$，并且 $\Pi_{a,\,a'} \circ \Phi$ 与 $C^1$ 很接近。

为说明这样的 $\Phi$ 存在，我们如下论证：对于每个 $a^* \in (0, a')$ 和每个 $\epsilon > 0$，都存在一个整数 $k > 0$，使得与 $g_t$ 在比如说临界点 $c_1$处的泰勒展开的前 $k$ 项一致的 $k$ 阶多项式 $J^k g_t$ 具有性质$||J^k g_t - g_t||_{\Omega_{a^*}} < \epsilon$。（考虑每个 $x \in I$ 周围的 $a'$球，并观察幂级数展开，即可看出这一点。）

根据隐函数定理，存在一条实解析曲线 $\zeta : [0,1] \to [0,1] \times [-1,1]^{\nu'}$, $C^1$，它靠近 $i_0$，使得 $\Pi_{a,a'} \circ \Phi \circ \zeta$ 包含于 $\mathcal{H}_f \cap \mathcal{A}_{a'}^\nu$ 中，并且 $\zeta(t)$ 的第一个坐标等于 $t$。由于 $\Pi_{a,a'} \circ \Phi$ 靠近 $P$，我们有曲线$\Pi_{a,a'} \circ \Phi(\{0\} \times [-1,1])$ 仅在 $f_0$处与 $f_0$ 的实混合类相交，而 $\Pi_{a,a'} \circ \Phi(\{1\} \times [-1,1])$ 仅在 $f_1$处与 $f_0$ 的混合类相交。因此，$\Phi(\zeta(0)) = f_0$ 且 $\Phi(\zeta(1)) = f_1$。由于 $f_0, f_1 \in \mathcal{A}_a^\nu$，可知 $\Phi \circ \zeta : [0,1] \to \mathcal{A}_a^\nu$是一条实解析路径，在 $\mathcal{H}_f \cap \mathcal{A}_a^\nu$中连接 $f_0$与$f_1$。□

˜备注 29.1。在前一个定理中，我们不能去掉仅考虑 $f$，$f$ 双曲周期轨道这一假设。这是因为，$f$，$f$ 在˜区间 $I$上可能拓扑共轭，因此 $f$ 只有排斥周期轨道，而 $f$ 则有一些拓扑上排斥的周期轨道和抛物型周期轨道（经过坐标变换后，某个迭代可写成 $x \mapsto x + x^{2n+1}$的形式）。另一方面，如果我们考虑每个抛物周期点都是单纯的映射，则证明仍然成立。

## 30. Hybrid conjugacies form a partial lamination

在本节中，我们将证明定理 C:

**定理 30.1** (部分层状结构)。 每个没有抛物点的 $f \in \mathcal{A}^{\nu}$ 都有一个邻域，由实混合共轭类构成层状结构。更确切地说，对于 $f$ 的每个邻域 $\mathcal{V}_2$，存在 $f$ 的邻域 $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$，使得对于每个 $g_0$，$g_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{H}_f$，都存在一条路径 $g_t \in \mathcal{A}^{\nu}$， $t \in [0,1]$ 位于 $\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{H}_g$ 内，连接 $g_0$与 $g_1$。

证明。 考虑 $f$的修剪多项式型延拓 $F$: $E \cup B \to E' \cup B'$。由于$f$ 没有抛物周期点，这个修剪多项式型延拓通过全纯运动，在 $f$ 的一个邻域 $\mathcal{V}_1$（其中包含不一定为实的修剪多项式型映射）上持续存在。因此，存在修剪多项式型延拓 $G_i$: $U_{G_i} \cup B_{G_i} \to U_{G_i} \cup B'_{G_i}$，它们是由修剪多项式型延拓 $F$通过全纯运动得到的 $g_i$。根据 [BR，定理 2]，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个邻域$\mathcal{V}_1$，使得命题13.2中的“外部”拟共形共轭的膨胀率 $K$ 至多为 $1+\epsilon$。如定理15.1和推论15.2的证明所示，存在连接 $g_0$ 与 $g_1$ 的弧 $g_t$；当 $\epsilon > 0$ 接近零时，该弧的直径很小。□

## 31. Conjugacy classes of real analytic maps are contractible

取 $f_0 \in \mathcal{A}^{\nu}_a$。为了证明空间 $\mathcal{T}_{f_0}$ 可缩，我们首先需要证明，对于某个 $a' \in (0, a)$，剪枝多项式型结构在整个 $\mathcal{T}_{f_0}$ 上持续存在。要在整个无限维空间 $\mathcal{H}_{f_0}$ 上做到这一点，我们不能使用全纯运动，因此将使用拟共形运动的概念，参见 [ST]。

**定义 31.1.** 设 $\mathcal{S}$ 是一个连通的豪斯多夫拓扑空间，且 $X \subset \mathbb{C}$。那么映射 $H$: $\mathcal{S} \times X \to \mathbb{C}$ 称为拟共形运动，记 $H_t(z) := H(t,z)$，并满足以下条件:

(1) 对于某个基点 $t_0 \in \mathcal{S}$，有 $H_{t_0} = id$; (2) 对任意 $t \in \mathcal{S}$ 和任意 $\epsilon > 0$，存在 $t$ 的一个邻域 $U$，使得对所有 $t', t'' \in U$，以及 $X$ 中任意由互不相同的点 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 组成的四元组， $H_{t'}(x_1)$ $H_{t'}(x_2)$ $H_{t'}(x_3)$ $H_{t'}(x_4)$ 的交比与 $H_{t''}(x_1)$ $H_{t''}(x_2)$ $H_{t''}(x_3)$ $H_{t''}(x_4)$ 的交比都落在 $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ 的 Poincaré 度量下的某个 $\epsilon$-球内。

在我们的设定中，取 $\mathcal{S} = \mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^{\nu}_a$。 –

由于我们无法使用全纯运动，我们将采用 Douady-Earle 关于圆盘边界上拟对称映射的延拓的以下结果。为陈述该结果，我们先对拟共形映射 $H$: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 的膨胀率作如下定义:

$$\mu_H = \bar{\partial} H / \partial H.$$

**定理 31.1** （Douady-Earle 延拓）。设 $h$: $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ 并定义

$$G(z,w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{h(\zeta) - w}{1 - \bar{w}h(\zeta)} \frac{1 - |z|^2}{|z-\zeta|^2} |d\zeta|.$$

*(1)* 给定 $z \in \mathbb{D}$，存在唯一的 $w$，使得 $G(z, w) = 0$。定义 $H$: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$，使其满足$H_h(z) = w$。那么 $H_h$ 是 $\mathbb{D}$ 上的实解析微分同胚。*(2)* 映射 $H_h$: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 可延拓为从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的连续映射，使得 $H_h|\partial\mathbb{D} = h$。*(3)* 若 $h$: $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ 是拟对称的，则 $H_h$: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 的拟共形畸变有界。

*(4)* 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $h$ 存在膨胀率为 $\leq K$ 的拟共形扩张，则在 $K \leq 1+\delta$ 条件下，$H_h$ 的膨胀率至多为 $K^{3+\epsilon}$。

*(5)* 对任意 $\epsilon > 0$ 以及任意拟对称映射 $h_1$：$\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$，存在 $\delta > 0$，使得若 $h_2$：$\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$是拟对称映射，且映射 $h_2 \circ h_1^{-1}$有一个拟共形扩张 $H$ 到 $\mathbb{D}$，满足 $||\mu_H||_\infty \leq \delta$，那么 $||\mu_{H_{h_1}} - \mu_{H_{h_2}}||_\infty \leq \epsilon$。

证明。(1)–(3) 项见 [DE], ，另见 [Hub]。第 (4) 项是 [DE] 第 41 页上的推论 2。第 (5) 项推广了第 (4) 项，证明方法类似。事实上，令 $M$ 为巴拿赫空间 $L^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{C})$中的开单位球。给定 $\mu \in M$，根据可测黎曼映射定理，存在唯一的拟共形映射

$$\phi^\mu \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

¯固定 $\pm 1$ 和 $i$，使得 $\mu = \mu_{\phi^\mu}$（即 $\partial\phi^\mu = \mu \cdot \partial\phi^\mu$）。令 $h^\mu = \phi^\mu|\partial\mathbb{D}$。现在定义 $\sigma$：$M \to M$如下：

$$\sigma(\mu) = \mu_{H_{h^\mu}}.$$

因此，$\sigma$ 将任意拟对称映射延拓的贝尔特拉米系数映射为该拟对称映射的 Douady-Earle 延拓的贝尔特拉米系数。特别地，

$$\sigma(\mu_{H_{h_1}}) = \mu_{H_{h_1}}.$$

根据假设，存在一个映射 $H$：$\mathbb{D} \to \mathbb{D}$，使得 $H \circ h_1 = h_2$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上成立，并且使得 $||\mu_H||_\infty \leq \epsilon$。因此

$$\sigma(\mu_{H \circ H_{h_1}}) = \mu_{H_{h_2}}.$$

根据 [AIM，第 182 页，定理 5.5。6]

$$\mu_{\psi\circ\varphi^{-1}}(w) = \frac{\mu_\psi(z) - \mu_\varphi(z)}{1 - \mu_\psi(z)\overline{\mu_\varphi(z)}} \cdot \left(\frac{\varphi_z(z)}{|\varphi_z(z)|}\right)^2.$$

并取 $\psi = H \circ H_{h_1}$ 和 $\varphi = H_{h_1}$，由此公式可得

$$||\mu_{H_{h_1}} - \mu_{H\circ H_{h_1}}||_\infty \leq ||\mu_H||_\infty \leq \epsilon.$$

由于 $\sigma$ 是连续的，存在 $\delta$ 使得

$$||\mu_{H_{h_1}} - \mu_{H_{h_2}}||_\infty = ||\sigma(\mu_{H_{h_1}}) - \sigma(\mu_{H\circ H_{h_1}})||_\infty < \delta.$$

□

**命题 31.2**。令 $F_0$：$U_0 \to U_0'$为一个带有射线 $\Gamma_0$的修剪多项式型映射。对于每个 $\kappa > 1$，可以通过适当缩短射线 $\Gamma_0$ 并降低屋顶，重新定义 $F_0$ 的定义域，从而得到一个等价的修剪多项式型映射 $F_0$：$U_{F_0} \to U'_{F_0}$，使得以下结论成立。

- 令 $\mathcal{H}_{F_0}(\kappa)$ 为 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}$ 中与 $F_0$：$U_{F_0} \to U'_{F_0}$拟共形共轭的映射集合，其中拟共形系数为 $\kappa'$，且对某个 $\kappa' < \kappa$成立。则 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa)$ 是 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}$中的开子集，$\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa) \subset \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa)$ 对 $\kappa < \kappa^*$ 和 $\cup_{\kappa>0}\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa) = \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}$成立。
- 对于每个 $G \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa)$，存在一个修剪多项式型映射

$$G : U_G \to U'_G$$

带有射线 $\Gamma_G$ 和拟共形运动

$$H \colon \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa) \times X_n \to \mathbb{C}$$

$X_n = \overline{U_{F_0} \cup U'_{F_0} \cup \Gamma_{F_0}}$在 $\mathcal{H}_{F_0}(\kappa)$ 上，使得

*(1)* $\partial U_G = H_F(\partial U_{G_0})$ $\partial U'_G = H_G(\partial U_{F_0})$ </style}其中我们记作 $(\cdot) = H(G, \cdot)$。

$$H_G \circ F_0(z) = G \circ H_G(z) \text{ for all } z \in \partial U_{F_0} \cup \Gamma_{F_0}$$

并且 *(2)* $H_G$ 的贝尔特拉米系数关于 $G \in \mathcal{H}_{F_0}(\kappa)$ 连续，即 $G \mapsto \mu_{H_G} \in L^\infty(U_{F_0} \cup U'_{F_0}, \mathbb{D})$ 连续。

证明。 可以选择引理 6.2 中的光滑曲线 $\Gamma_{\hat{f}_X}$，使其与 $\partial\mathbb{D}$正交。事实上，考虑 $F_X|\partial\mathbb{D}$的排斥周期点 $p$ 处的线性化。 $f_X$ 保持 $\partial\mathbb{D}$ 这一事实意味着 $p$ 处的乘子为实数。利用线性化，我们立即看到，存在一条经过 $p$ 且与 $\partial\mathbb{D}$正交的唯一光滑不变曲线。这保证了曲线 $\Gamma_X$ 由 $f$ 和区间$J$唯一确定，长度除外。（事实上，经过 $\partial\mathbb{D}$ 的这些光滑曲线的长度下界由排斥周期点处的乘子以及 $|D\hat{}f_X|$ 和 $|D^2\hat{}f_X|$的上界决定。）

注意， $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa)$可以视为 $\mathcal{A}^\nu_a$ 的子集，而 $\mathcal{A}^\nu_a$ 是一个度量空间，因此存在单位分解。因此，利用单位分解论证，可以选择 $\Gamma_{\hat{f}_X}$，使这些曲线各自的弧长随$f \in T_n \subset \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{f_0} \cap \mathcal{A}^\nu_a$连续变化。$\hat{}$ 类似地，可以选择集合 $V_{\hat{f}_X}$ 的“屋顶”，使其随 $f \in T_n \subset \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{f_0} \cap \mathcal{A}^\nu_a$连续变化。这里，我们将选择这些屋顶曲线，使其在 $\partial\mathbb{D}$附近为圆。

注意，从 $\mathbb{C}\setminus K_X(f)$到 $\to \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$的归一化黎曼映射随 $K_X(f)$连续变化，因此也随 $f$连续变化，见定理 B.1。由此可知，与 $\partial V\hat{}f_X$和 $\partial V\hat{}f_X$相对应的集合 $\partial U_F$和 $\partial U'_F$, $\Gamma_F$，以及集合 $\Gamma\hat{}f_X$也随 $F$连续变化。换言之，修剪多项式型映射 $F\colon U_F \to U'_F$也随 $f$ 连续变化（在 Carath´edory 拓扑下）。

现在按弧长对 $\Gamma_F$ 中的基本域进行参数化（并在整个 $\Gamma_F$ 上按动力学方式参数化）。类似地，通过弧长对 $\partial U_F$ 和 $\partial U'_F$ 进行参数化。利用这一点，可以定义映射 $H_F$，将 $\partial U_{F_0} \cup \partial U'_{F_0}$ 映到 $\partial U_F \cup \partial U'_F$，使得 $H_F$ 在这些集合上共轭 $F$ 和 $F_0$。类似地，如有必要，我们也对与 $f$ 相关联的吸引结构 $B_f$ 进行这样的处理。根据构造，对于每个 $f$，集合 $U_F$、$U'_F$、 $U'_F \setminus U_F$、 $U_F \setminus U'_F$（以及类似的 $B_F$ 等）都是拟圆盘。

这意味着我们可以使用 Douady-Earle 延拓，将 $H_F$ 延拓为拟共形映射 $H_F$: $U_{F_0}\cup U'_{F_0} \to U_F \cup U'_F$。这里我们利用了这样一个事实： $\mathbb{C}\setminus(\partial U_F \cup \partial U'_F)$的有限多个连通分支各自都是拟圆盘，因此可以分别在每个连通分支上使用 Douady-Earle 延拓。由此我们得到一个拟共形映射 $H_F\colon U_{F_0} \to U_F$，它以所需的意义连续依赖于 $f$；参见定理 31.1 的第 5 条。□

注记 31.1。 这里无法使用全纯运动，因为它需要定义在整个无限维空间 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa)$ 上。这迫使我们采用单位分解论证。因此，我们得到的变形在 $t \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(\kappa)$ 中并非全纯。

**定理 31.3**。 设 $F_0\colon U_0 \to U'_0$ 是一个修剪多项式型映射。那么 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}$ 是可缩的。

证明。 设 $n > 1$ 为整数。我们先证明 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(n)$ 是可缩的。根据前一个命题以及定理 15.1 中的回拉论证，对于每个$\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(n)$，我们得到一个拟共形共轭 $H_G$，它共轭于 $G\colon U_G \to U'_G$ 和 $F_0\colon U_0 \to U'_0$，使得映射 $G \mapsto$

$\mu_{H_G} \in L^\infty(U_{F_0} \cup U'_{F_0},\ \mathbb{D})$ 是连续的。设 $H_{t\mu_{H_G}}$ 为与 $t\mu_{H_G}$ 相对应的拟共形共轭，并将其规范化，使得 $H_{t\mu_{H_G}}(\pm 1) = \pm 1$ 且 $H_{t\mu_{H_G}}(\infty) = \infty$。于是我们得到一个新的映射

$$R_t(G) = H_{t\mu_{H_G}} \circ F_0 \circ H^{-1}_{t\mu_{H_G}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}$$

解析地依赖于 $t$，并且使得 $R_0(G) = G$ 且 $R_1(G) = F_0$。由于 $G \mapsto \mu_{H_G} \in L^\infty$ 是连续的，映射 $(t,\ G) \mapsto H_{t\mu_G}$ 连续地依赖于 $t$ 和 $G$。因此，缩回 $(t,\ G) \to R_t(G)$ 也连续。

由于 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{F_0}(n)$ 可视为 $\mathcal{A}^\nu_a$ 的子集，结论由下一个定理得出。 □

**定理 31.4** ([AE])。 若正则空间 $\mathcal{S}$ 是一个开子集序列 $\mathcal{S}_n$ 的并，其中 $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$，且对于每个 $n \geq 1$，$\mathcal{S}_n$ 都在 $\mathcal{S}_{n+1}$ 中缩到一点，那么 $\mathcal{S}$ 是可缩的。

注 31.2。 由引理 C.3 可知，对于具有实解析拓扑的空间 $\mathcal{A}^\nu$ 中的任意开集 $O$ 以及任意 $a > 0$，都存在 $g \in O \setminus \mathcal{A}^\nu_a$。因此，上述论证不足以得出 $\mathcal{H}^\nu_f$ 是可缩的结论。

不过，我们确实有如下结论：

**定理 31.5.** 设 $f_0 \in \mathcal{A}^\nu_a$。则 $\mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^\nu_a$ 是可缩的。

证明。 选取一列修剪区间 $J_{f_0,n}$，对应于 $f_0$，并令 $X_n, Q_n$ 为相应的修剪数据。选取这些修剪区间，使得 $Q_{n+1} \supset Q_n$。令 $F_{0,n} : U_{F_0,n} \to U'_{F_0,n}$ 为一个修剪多项式型映射，它延拓 $f_0 : I \to I$，与修剪数据 $Q_n$ 相对应，从而 $F_{0,n+1}$ 是 $F_{0,n}$ 的一个限制。

令 $\mathcal{S}_n$ 为映射 $f \in \mathcal{S} := \mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^\nu_a$ 的集合，使得 $f$ 具有一个修剪多项式型映射延拓 $F : U_{F,n} \to U'_{F,n}$，与修剪数据 $Q_n$ 相对应，并且 $F_n$ 和 $F_{0,n}$ 拟共形共轭，且共轭的膨胀率为 $< n$。换言之，存在一个修剪朱利亚集 $K_{f,n}$，它与对应于修剪数据 $Q_n$ 的 $f$ 相关联，以及集合 $X_n$。这意味着可以将外部映射 $f_{X_n}$ 与 $f$ 和 $X_n$ 相关联。

我们先证明 $\mathcal{S}_n$ 在 $\mathcal{S}_{n+1}$ 中是可缩的。由命题 31.2 和回拉论证（见定理 15.1），对每个 $f \in \mathcal{S}_n$，我们得到一个拟共形共轭 $H_F$，它在 $F$ 之间建立共轭：$U_{F,\ n} \to U'_{F,\ n}$ 以及 $F_0 : U_{0,\ n} \to U'_{0,\ n}$，使得映射 $F \mapsto \mu_{H_F} \in L^\infty(U_{F_0} \cup U'_{F_0},\ \mathbb{D})$ 连续。令 $H_{t\mu_{H_F}}$ 为与 $t\mu_{H_F}$ 对应的拟共形共轭，并将其规范化，使得 $H_{t\mu_{H_F}}(\pm 1) = \pm 1$ 且 $H_{t\mu_{H_F}}(\infty) = \infty$。于是我们得到一个新映射

$$R_t(F) = H_{t\mu_{H_F}} \circ F_0 \circ H^{-1}_{t\mu_{H_F}} \in \mathcal{H}_{F_0}$$

它关于 $t$ 解析地依赖，并且满足 $R_0(F) = F_0$ 且 $R_1(F) = F$。由于 $F \mapsto \mu_f \in L^\infty$ 连续，映射 $(t, F) \mapsto H_{t\mu_F}$ 连续依赖于 $t$ 和 $F$。因此，缩回 $(t, F) \to R_t(F)$ 也连续。注意，对所有 $t \in [0, 1]$，$R_t(F)$ 未必属于 $\mathcal{A}^\nu_a$。不过，$R_0(F)$ 和 $R_1(F)$ 都属于 $\mathcal{A}^\nu_a$。由于对每个 $t \in [0, 1]$，$H_{t\mu_{H_F}}$ 至多是一个 $n$-拟共形同胚，因此存在 $a' \in (0, a)$，使得对所有 $t \in [0, 1]$，$R_t(F) \in \mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^\nu_{a'}$。换言之，$R_t(F)$ 可解析延拓至 $\Omega_{a'}$。我们并未声称修剪多项式型映射 $R_t(F)$ 的定义域包含在 $\Omega_a$ 中。

为了得到 $R_t(F) \in \mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^\nu_a$，我们采用命题 29.2 中的论证。事实上，选取向量场 $\{\hat{v}_f\}$，它们属于 $T_f \mathcal{A}^\nu_{a'}$，并且光滑地依赖于 $f \in \mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^\nu_{a'}$，使得向量 $\hat{v}_f = (v^1_f, \dots, v^{\nu'}_f)$ 与 $T_f(\mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^\nu_{a'})$ 一起张成切空间 $T_f(\mathcal{A}^\nu_{a'})$。

接下来定义

$$P(f,t,\hat{s}) = R_t(f) + \hat{s}\cdot\hat{v}_{R_t(f)} \in \mathcal{A}^{\nu}_{a'},\ (f,t,\hat{s}) \in \mathcal{S}_n \times [0,1] \times [-1,1]^{\nu'} \tag{31.1}$$

并令 $i_0$： $\mathcal{S}_n \times [0,1] \to \mathcal{S}_n \times [0,1] \times [-1,1]^{\nu'}$，其中对于所有 $f \in \mathcal{S}_n$ 和 $t \in [0,1]$， $i_0(f,\ t) = (f,\ t,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$。令 $\Phi$： $\mathcal{S}_n \times [-1,1]^{\nu'} \to \mathcal{A}^{\nu}_{a}$ 为一个实解析族，使得对于每个 $f$， $\Phi(f,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0) = P(f,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0) = f$，并且 $\Pi_{a,\ a'} \circ \Phi$ 与 $P$ $C^1$ 接近。按照命题 29.2 中的方法，这可以通过多项式逼近来实现。

由定理 28.1， $\mathcal{S}_n$ 是一个巴拿赫流形。因此，利用隐函数定理（在巴拿赫流形上），我们得到 $\zeta$: $\mathcal{S}_n \times [0,1] \to \mathcal{S}_n \times [0,1] \times [-1,1]^{\nu'}$， $C^1$ 与 $i_0$ 接近，使得 $\Pi_{a,\ a'} \circ \Phi \circ \zeta$ 包含于 $\mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^{\nu}_{a'}$ 中。如前所述， $\Phi \circ \zeta$： $[0,1] \to \mathcal{A}^{\nu}_{a}$ 是一条光滑路径，在 $\mathcal{H}_{f_0} \cap \mathcal{A}^{\nu}_{a}$ 中连接 $f$ 与 $f_0$。由于 $\Phi \circ \zeta$ 与 $P$ $C^1$ 接近，事实上位于 $\mathcal{S}_{n+1}$ 中。因此， $\mathcal{S}_n$ 在 $\mathcal{S}_{n+1}$ 内是可缩的。于是，定理 31.4 蕴含 $\mathcal{S}$ 是可缩的。□

## C 部分：开放问题

$Pol^{\mathbb{R},\ d}$ 是次数为 $d$ 的实多项式所构成的空间。

**Q问题 1.** 设 $f \in \mathcal{A}^{\nu}_{a} \cap Pol^{\mathbb{R},\ d}$。$\mathcal{T}^{\nu}_{f\ ,\ a} \cap Pol^{\mathbb{R},\ d}$ 是实解析流形吗？

由于横截性，若 $f$ 的实临界点具有有限轨道，则这个问题的答案是肯定的，参见 [Eps, LSvS3]。另一方面，显然，仅有 $\mathcal{T}^{\nu}_{f\ a,}$ 是实解析流形这一条件还不够，不能据此断定 $\mathcal{T}^{\nu}_{f\ ,\ a} \cap Pol^{\mathbb{R},\ d}$ 是实解析流形，参见定理 A。

类似地，我们在定理 B 中证明了，两个实混合共轭的实多项式可以通过同一实混合类中的一参数族实解析区间映射相连。若能找到这样一族多项式，将会很有趣。

这个问题的一个部分答案见 [**?** ]，其中研究了 $U^{2d}$ 这一空间在$d = 2$下的情形。这里， $\mathcal{U}^{2d}$ 是实系数、次数为 $2d$ 且在实轴上恰有一个临界点的多项式空间。因此，这些映射是实轴上的单峰映射。

**问题2.** 假设 $f_0$、 $f_1 \in \mathcal{U}^4$ 的实临界点都是周期的，并且 $f_0$、 $f_1$在 $\mathbb{R}$上拓扑共轭。这是否意味着存在一个连续族 $f_t$ ，使得每个映射 $f_t$ 在 $\mathbb{R}$上也与 $f_0$、 $f_1$ 拓扑共轭?

在 [CvS] 中，证明了对于 $d = 2$ ，答案是肯定的。这意味着，在 $\mathcal{U}^4$ 中，具有给定拓扑熵的映射集合构成连通子集，从而将 [MTr, BvS] 部分推广到了具有非实临界点的多项式。

## 附录与参考文献

### Appendix A. Local connectivity of the pruned Julia set and complex box mappings which include domains that do not intersect thereal line

本附录旨在证明定理 4.2。为此，我们需要以下记号。给定一个区间 $I \subset \mathbb{R}$，以及 $\theta \in (0,\ \pi)$，我们用 $D^{+}_{\theta}(I)$（分别用 $D^{-}_{\theta}(I)$）表示上半平面（分别为下半平面）中的区域，该区域由 $I$ 以及一段截取 $I$ 的圆弧围成；这段圆弧在$I$的每个边界点处以外角 $\theta$ 与实轴相交。我们令 $D_{\theta}(I) = D^{+}_{\theta}(I) \cup D^{-}_{\theta}(I) \cup I$，并将此集合称为 庞加莱 圆盘。如果 $\theta > \pi/2$，我们将

其称为 透镜域。此集合对应于在 $\mathbb{C}_I$ 中的庞加莱′度量下，到 $I$ 距离固定的点集。令 $\mathbf{Cr}_{na}(f)$ 表示不属于周期吸引子吸引域的临界点集。

**定理 A.1.** 存在复邻域 $W \subset W'$，分别是复平面$_{na}(f)$和 $\delta > 0$，使得若 $J_i$ 是包含 $f(c_i)$ 的区间，且对所有 $i$ 都有 $|J_i| < \delta$，并取 $J = \cup J_i$，则下述结论成立。设 $R_{K_1^*}$是到 $K_1^* := \mathbf{cc}_{\mathrm{Cr}} f^{-1}(J)$的首次回归映射。那么 $R_{K_1^*}$可延拓为一个可能是多值的映射 $F\colon W \to W'$。更确切地说，

*(1)* $W' \supset K_1^*$和 $W'$是两两不交的 *Poincar´e* 域的并，每个域都以一个实区间为基；

*(2)* $W \subset W'$，即对于每个 $x \in K_1^*$和 $c \in$复平面$_{na}(f)$，以及每个满足 $f^n(x)$的 $n > 0$，若 $\in W_c'$使得 $W_c'$是 $W'$的一个连通分支，则有

$$cc_x f^{-n}(W_c') \subset W'.$$

注意， $K_1^* := \mathrm{cc}_{\mathrm{Cr}} f^{-1}(J)$并不包含在 $\mathbb{R}$中，但 $f(K_1^*) \subset \mathbb{R}$ .

注记 A.1. 由此可知，若 $A \subset I$ 是一个吸引周期轨道，使得每个 $a \in A \cap W'$的直接吸引域都包含于 $W'$中，那么对于每个最终映入 $A$的 $x \in K_1^*$，包含 $x$ 的 $A$ 的吸引域连通分支也包含于 $W'$中。

A.1. **术语**。 若一个拼图块在 $\omega(c)$中包含一个临界点，我们称它为 $\omega(c)$-临界 拼图块。设 $P$ 是一个 $\omega(c)$-临界拼图块。若一个 $\omega(c)$-临界拼图块 $Q$ 是 $P$ 的单临界回拉，则称它为子块；也就是说，存在一个正整数 $n$ ，使得 $Q$是 $f^{-n}(P)$的一个连通分支，且在 $\omega(c)$中包含一个临界点；并且存在一个拼图块 $Q' \supset f(Q)$，使得映射 $f^{n-1}\colon Q' \to P$是一个微分同胚。

如果映射 $f$ 满足以下条件，则称其在 $\omega$上$c$持续回归： $c$ 是回归的、非周期的，并且每个 $\omega(c)$-临界拼图块都只有有限多个子块。如果 $c$ 是回归的，但并非持续回归，则称 $c$ 勉强回归。

定义如下会很方便:

$$\mathcal{L}_x V := \mathrm{cc}_x f^{-n}(V) \text{ and } \hat{\mathcal{L}}_x V := \mathrm{cc}_x f^{-n'}(V)$$

其中， $n > 0$和 $n' \geq 0$是满足 $f^n(x)$ $f^{n'}(x)$ $\in V$的最小整数。令 $\rho > 0$。围绕持久回归临界点的拼图块 $P$ 称为 $\rho$-良好拼图块，如果对任意$x \in P \cap \omega(c)$，都有 $\mathrm{mod}(P \setminus \mathcal{L}_x(P)) \geq \rho$；若存在拼图块 $P^+ \supset P \supset P^-$使得$(P^+ \setminus P^-) \cap \omega(c) = \emptyset$、$\mathrm{mod}(P^+ \setminus P) \geq \rho$且 $\mathrm{mod}(P \setminus P^-) \geq \rho$，则称其为 $\rho$-自由拼图块。我们将与 $\omega(c)$不相交的环带 $P^+ \setminus P^-$称为自由空间。若单连通域 $U$ 相对于 $x \in U$ 具有 $\rho$-有界几何，就称其具有 $\rho$-有界几何；具体而言，欧几里得球$B(x, \rho \cdot \mathrm{diam}(U)) \subset U$。如果存在一个 $x \in U$，使得 $U$相对于 $x$具有 $\rho$-有界几何，则称定义域 $U$具有 $\rho$-有界几何。若 $K' \setminus K$ 的每个连通分支的长度均为 $\geq \rho|K|$，则称 $K'$ 是 $K$ 的 $\rho$-缩放邻域。

A.2. **定理 A.1 的证明**。

证明。 此结果使用了 [CvST、CvS] 的复界，但在两个方面更为一般：我们将考虑映射 $F\colon U \to V$，它可能包含不与实轴相交的域；同时， $V$ 包含所有临界点的一个共同邻域。为构造 $F$，将临界点集合 $\mathbf{Cr}_{na}(f)$ 分解为以下四个集合:

(1) $\mathbf{Cr}_{nr}$：非回归临界点；(2) $\mathbf{Cr}_{rr}$：勉强回归
临界点;

(3) $\mathrm{Cr}^{pr}$：持续回归但并非无限可重整化的临界点；(4) $\mathrm{Cr}_{ren}$：无限可重整化临界点。

定义 $\mathrm{Cr}'$ 为 $\mathrm{Cr}^{pr}$ 或 $\mathrm{Cr}_{nr}$，令 $\mathrm{Cr}'_2$，$\mathrm{Cr}'_1$ 为满足$\mathcal{L}_c I_{\mathrm{Cr}'} = I_{\mathrm{Cr}'}(c)$的临界点集合 $c \in \mathrm{Cr}'$，或者满足$\mathcal{L}_c I_{\mathrm{Cr}'} \Subset I_{\mathrm{Cr}'}(c)$的临界点集合。为证明定理 A.1，我们需要结合这些集合周围的下列复界，使相应的非实域包含在内。

**定理 A.2** (持续回归情形下的复界). 假设 $c \in \mathrm{Cr}_{pr} \cup \mathrm{Cr}_{ren}$。那么，存在 $\rho_0 > 0$ 以及直径任意小的组合定义的区间（拼图块） $I \ni c$，使得下述结论成立。令

$$\hat{I} := \bigcup_{c' \in \mathrm{Crit}(f) \cap \omega(c)} \hat{\mathcal{L}}_{c'}(I).$$

*(1)* 假设 $f$ 不可重整化。那么到 $I$ 的首次回归映射可扩张为一个复盒映射

$$F \colon U \to V \ so\ that\ V \cap \mathbb{R} = \hat{I}\ and$$

- 对于 $U$ 的每个连通分支 $U_i$，$F|U_i$ 至多有一个临界点，
- $V$ 的每个连通分支都是 $\rho_0$-良好的且 $\rho_0$-自由的，
- $V$ 的每个连通分支都具有 $\rho_0$-有界几何。*(2)* 假设 $I$ 是 $f$ 的终止区间。那么到 $I^\infty$ 的回归映射可扩张为多项式型映射 $F\colon\ U \to V$，使得 $\mathrm{mod}(V \setminus U) > \rho_0$。

证明。 这是 [CvST] 中的定理 1.1。 □

注 A.2。 在第一种情况下，存在 $\theta_0 \in (0, \pi/2)$，使得对于每个$c \in \mathrm{Cr}_{pr} \cup \mathrm{Cr}_{ren}$，$V_c \subset D_{\theta_0}(I_c^*)$，其中 $I_c^*$ 是 $I_c = V_c \cap \mathbb{R}$ 的一个邻域，且 $I_c^* \cap \omega(c) \subset I_c$。这样的 $\theta_0$ 存在，因为 $V_c$ 相对于 $\omega(c)$ 是 $\rho_0$-自由的，并且 $V_c$ 具有有界几何。由于 $V_c$ 具有 $\rho_0$-有界几何，我们可以假设当 $I$ 较小时，$I_c^*$ 也较小。

注记 A.3。 在第二种情形下，将 $V$ 替换为由$V \setminus U$ 中的核心曲线围成的圆盘 $V'$，并将 $U$ 替换为 $V'$的回拉 $U'$ 后，我们可以假设 $V$是 $\rho$-良好的、$\rho$-自由的，且具有 $\rho$-有界几何（均相对于 $\omega(c)$）。

**定理 A.3** （勉强回归和非复发情形下的复界）。 设复平面′ 为复平面$_{rr}$ 或复平面$_{nr}$。那么存在 $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ 以及任意小的、由组合方式定义的实邻域 $I_{\mathrm{Cr}'}$，其邻域为复平面′，使得

- 到 $I_{\text{复平面}'}$ 的回归映射可延拓为复盒映射 $F_{\text{复平面}'}\colon\ U_{I_{\text{复平面}'}} \to V_{I_{\text{复平面}'}}$，其中 $V_{I_{\text{复平面}'}} \subset \cup_{c' \in \text{复平面}'} D_\theta(I_{\text{复平面}'})$ 其中 $\theta \in (\theta_0, \pi/2)$;
- $V_c = D_{\pi/2}(I_c)$ 对每个 $c \in \mathrm{Cr}'_1$。

证明。 在所有临界点的阶均为偶数的情形下，这就是 [KSvS2] 中的定理 3 和命题 1 证明的第一行。在 [CvS 的定理 5.3]中，这一结果被推广到了一般情形。□

我们还 将利用庞加莱圆盘的微分同胚回拉仍处于可控范围内这一事实 :

**引理 A.4**。 对于任意 $\theta \in (0, \pi/2)$，存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\theta \in (0, \pi/2)$，使得以下结论成立。设 $|J_s| < \varepsilon$，且 $f^s\colon\ J_0 \to J_s$是一个微分同胚。令 $\{J_j\}_{j=0}^s$为如下的链：$J_j = cc_{f^j(J_0)} f^{-(s-j)}(J_s)$。令 $U_s = D_\theta(J_s)$，并对

~$j = 0, \ldots, s$。则 $U_j \subset D_{\tilde{\theta}}(J_j)$，其中，通过取得 $\varepsilon > 0$ 充分小，可以使差值 $\theta - \theta$ 任意小。

证明。这建立在 [GSS] and [LS 的定理 B]所推出的结果之上。在附加假设 $J_0 \cap \omega(c) \neq \emptyset$ 下，这个引理恰好就是引理 5.9 [CvST]。如果 $J_0 \cap \omega(c) \neq \emptyset$，则它可由 [CvS]中的引理 4.4 和 4.5 立即推出。□

证明定理 A.1 的主要难点，是将一个类型临界点附近的值域回拉到另一类型临界点附近的值域。请注意，在上述定理中，区间 $I$ 都是优良区间，其边界是周期点或前周期点。

根据定义，$c \in \mathbf{Cr}_{pr}$ 的正向轨道不会聚集到 $_{nr} \cup \mathbf{Cr}_{rr} \cup \mathbf{Cr}_{ren}$上；同理，$c \in \mathbf{Cr}_{ren}$ 的正向轨道不会聚集到 $_{nr} \cup \mathbf{Cr}_{rr} \cup \mathbf{Cr}_{pr}$上。因此，我们可以将邻域 $I_{\mathrm{Cr}_{nr}}$、$I_{\mathrm{Cr}_{rr}}$、$I_{\mathrm{Cr}_{pr}}$和 $I_{\mathrm{Cr}_{ren}}$取得足够小，使得对于任意满足 $c' \neq \omega(c)$ 的 $c' \in \mathbf{Cr}$，$c \in \mathbf{Cr}_{ren}$的正向迭代都避开 $I_{\mathrm{Cr}_{nr}}$、$I_{\mathrm{Cr}_{rr}}$、$I_{\mathrm{Cr}_{pr}}$和 $I_{c'}$；同理，对于任意满足 $c' \neq \omega(c)$ 的 $c' \in \mathbf{Cr}$，$c \in \mathbf{Cr}_{pr}$的正向迭代都避开 $I_{\mathrm{Cr}_{nr}}$、$I_{\mathrm{Cr}_{rr}}$、$I_{\mathrm{Cr}_{ren}}$和 $I_{c'}$。

设 $\theta_0 > 0$ 如注 A.3 所述。设 $V_c$ 为定理 A.2 和 A.3 中构造的、包含 $c$ 的复盒映射的相应值域。对每个 $c \in \mathbf{Cr}$，选取围绕 $c$ 的区间 $J(c)$，使其足够小，从而 $\mathbf{cc}_c f^{-1}(J) \subset V_c$。现在的主要问题是处理这样的情形：点 $x$ 进入 $V$ 的一个连通分支，而该分支不包含 $x$。

我们声称，对每个 $c \in \mathbf{Cr}_{pr} \cup \mathbf{Cr}_{ren}$，都可以将 $I_c$ 选得足够小，使得对每个 $c' \in \mathbf{Cr}' := \mathbf{Cr}_{rr} \cup \mathbf{Cr}_{nr}$，以及每个满足 $f^n(x) \in V_{I_c}$（其中某个 $n > 0$ 满足该条件）的 $\mathbf{cc}_{c'} f^{-1}(J)$，都有 $\mathcal{L}_x(V_{I_c}) \subset V_{I_{c'}}$。类似地，我们声称，如果某个 $x \in I_c$ 的正向迭代（其中某个 $c \in \mathbf{Cr}_{pr}$）进入某个 $c \in \mathbf{Cr}_{ren}$ 对应的 $V_{I_c}$，那么 $\mathcal{L}_x(V_{I_c}) \subset V_{I_{c'}}$。下面证明第一个断言；第二个断言的证明方法相同。取 $\mathbf{cc}_{c'} f^{-1}(J)$，并假设 $f^n(x) \in V_c$，其中 $c \in \mathbf{Cr}_{pr} \cup \mathbf{Cr}_{ren}$。然后取最大的 $k < n$，使得 $f^k(x) \in V_{I_{\mathrm{Cr}'}}$；再取最小的 $k < k' \leq n$，使得只要 $f^i(x)$，$k' \leq i \leq n$ 包含于 $V_{I_c}$，那么它就包含于 $F$ 的一个定义域中：该定义域与 $\omega(c)$ 相交。如果不存在这样的整数 $k'$，则仍设 $k' = n$。由定理 A.2，$U_{I_c} \subset V_{I_c}$，因此我们有：若 $k' < n$，则 $\mathcal{L}_{f^{k'}(x)}(V_{I_c}) \subset V_{I_c}$；若 $k' = n$，则根据假设有 $f^{k'}(x) \in V_{I_c}$。由注 A.3，我们有

$$f^{k'}(x) \in V_{I_c} \subset D_{\theta_0}(I_c^*)$$

其中 $I_c^*$ 满足 $(I_c^* \setminus I_c) \cap \omega(c) = \emptyset$。

由于区间 $I_c$ 的选取，且因为 $(I_c^* \setminus I_c) \cap \omega(c) = \emptyset$，根据 $k$的定义，$k'$可知，通过 $f^{-(k'-k)}$ 将 $D_{\theta_0}(I_c^*)$ 回拉到 $f^k(x)$ 所得到的集合不包含来自 $\omega(c)$、$c \in \mathbf{Cr}_{pr} \cup \mathbf{Cr}_{ren}$ 的任何临界点。因此，映射 $f^{k'-k}: \mathcal{L}_{f^k(x)}(D_{\theta_0}(I_c^*)) \to D_{\theta_0}(I_c^*)$ 是一个微分同胚。于是，根据引理 A.4，并通过适当缩小区间 $I_c$，我们可以假设集合 $\mathcal{L}_{f^k(x)}(V_{I_c}) \subset D_{\theta_0/2}(\mathcal{L}_{f^k(x)}(I_c^*))$。

我们来证明，对每个 $\rho_1 > 0$，都存在 $\epsilon > 0$，使得若 $|I_c| < \epsilon$，则$\mathcal{L}_{f^k(x)}(I_c^*)$的 $\rho_1$倍缩放邻域包含于 $I_{\mathrm{Cr}'}$的相应连通分支中。事实上，若$I_c$ 很小，则$I_c^*$ 也很小。因此，$I_c^*$ 的所有原像也都很小——这是收缩原理的结论，见 [dMvS，第 IV.5]节（此原理与游荡区间的不存在有关）。因此，只要 $\epsilon > 0$ 足够小，$\mathcal{L}_{f^k(x)}(I_c^*)$相对于 $I_{c'}$ 就很小。若断言不成立，则$\mathcal{L}_{f^k(x)}(I_c^*)$包含在一个很小的区间内，而该区间包含 $I_{\mathrm{Cr}'}$的一个边界点。注意，$I_{\mathrm{Cr}'}$ 的边界点是某个周期点 $p$的原像。因此，在$\mathcal{L}_{f^k(x)}(I_c^*)$被映射到$I_c^*$之前，它的某次迭代 $K$ 会靠近周期点 $p$。因此，取足够小的 $\epsilon > 0$（从而 $I_c$ 和 $I_c^*$ 也很小），就能确保 $K$只占周期点 $p$的基本域中很小的一部分。这

进而意味着，只要 $\epsilon > 0$足够小，$\mathcal{L}_{f^k(x)}(I_c^*)$的 $\rho_1$倍缩放邻域就包含于$I_{\mathrm{Cr}'}$中。

由对 $k$ 的选择可知，$f^k(x)$ 必须包含在 $I_{c'}$ 中，且 $c' \in \mathrm{Cr}'_1$，因为与 $c' \in \mathrm{Cr}'_2$ 相对应的连通分支 $I_{c'}$ 会被映到与 $c' \in \mathrm{Cr}'_1$ 相对应的连通分支 $I_{c'}$ 上。这里我们利用了这样一点：点只能经由与 $c' \in \mathrm{Cr}_1$ 相对应的连通分支 $I_{c'}$，逃离围绕 $\mathrm{Cr}'$（即持续回归的 $c$）的盒映射。由于 $\mathcal{L}_{f^k(x)}(I_c^*)$ 的一个 $\rho_1$-缩放邻域包含在 $I_{c'}$ 中，因此由此及定理 A.3 的第二部分可知，$D_{\theta_0/2}(\mathcal{L}_{f^k(x)}(I_c^*)) \subset V_{I_{c'}}$（只要 $\rho_1$ 足够大）。由此可得 $\mathcal{L}_{f^k(x)}(V_c) \subset V_{I_{c'}}$。这里，若 $k = 0$，则我们利用 $J$，因此 $J^{-1}$ 可以任意小（这一论证是必要且充分的，因为 $x$ 可能不是实数，但 $f(x) \in J$ 是）。若 $k > 0$，则我们利用定理 A.3 进行回拉，直到到达 $x_c$。这说明如何将围绕 $\mathrm{Cr}^{pr}$、$\mathrm{Cr}_{ren}$ 中临界点的复盒映射的值域回拉到靠近 $\mathrm{Cr}_{nr}$、$\mathrm{Cr}_{rr}$ 处的值域中（也说明如何将围绕 $\mathrm{Cr}_{ren}$ 处的值域回拉到靠近 $\mathrm{Cr}^{pr}$ 处的值域中）。

现在我们说明如何将 $_{nr}\ \mathrm{Cr}_{rr}$ 附近的值域回拉到 $c \in \mathrm{Cr}^{pr}$ 附近的值域。这需要在 $c \in \mathrm{Cr}^{pr}$ 时，将 $f$（$c$）的邻域 $J$（$c$）选得足够小。

因此，取 $x \in \mathrm{cc}_c f^{-1}$（$J$）以及一个（最小的）$n$（$x$），使得 $f^n$（$x$）（$x$）$\in I_{c'}$，其中某个 $c' \in \mathrm{Cr}_{rr} \cup \mathrm{Cr}_{nr}$。根据假设，$c$ 的正向轨道不会进入 $I_{\mathrm{Cr}_{rr}} \cup I_{\mathrm{Cr}_{nr}}$。特别地，$f^n$（$x$）$_{-1}$：$\mathcal{L}_{f(x)}V_{I_{c'}} \to V_{I_{c'}}$ 是一个微分同胚；如果 $J$（$c$）足够小，那么 $n$（$x$）就很大。由此可知，当 $J$（$c$）足够小时，$\mathcal{L}_{f(x)}V_{I_{c'}}$ 的实迹也很小，因此，$f^{-1}$（$\mathcal{L}_{f(x)}V_{I_{c'}}$）中靠近 $c$ 的连通分支都包含在 $V_{I_c}$ 中。如果对于一个非最小的 $n$，有 $f^n$（$x$）$\in I_{c'}$，那么我们对 $f^{n-n(x)}$ 应用定理 A.3，并再次得到 $\mathrm{cc}_x f^{-n}$（$V_{I_{c'}}$）$\subset V_{I_c}$。

这就完成了定理 A.1 的证明。注意，尽管 $\mathcal{L}_{f(x)}V_{I_{c'}}$ 与实轴相交，某些形如 $f^{-1}(\mathcal{L}_{f(x)}V_{I_{c'}})$ 的连通分支可能与实轴不相交。□

A.3. **定理 4.2 的证明**。令 $F$：$W \to W'$ 为定理 A.1 中的映射。该定理表明 $K_X(f) \cap \partial W \subset \mathbb{R}$。根据引理 A.4，结论 (1) 和结论 (2) 的第一部分随即得出。特别地，对于每个 $a' < a$，我们可以安排使得 $K_X(f) \subset \Omega_{a'}$。

$K_X(f)$ 的内部为空。为此，反设 $K_X(f)$ 包含一个开集 $U$。那么，对于某个 $N$，$U$ 与 $K_N$ 相交。由于 $K_X(f)$ 是正向不变的，因此存在一个与 $I$ 相交且包含 $K_X(f)$ 的开集 $U'$。然而，这是不可能的：取 $U' \cap I$ 中一个周期为 $k$ 的周期点 $p$，并构造一条经过 $p$ 的周期“射线”$\gamma$，使得 $f^k(\gamma) \supset \gamma$，且 $f^k(\gamma) \setminus \gamma$ 位于 $\Omega_{a'}$ 的补集内。特别地，$\gamma \setminus \{p\}$ 中的每个点最终都会被映射到 $\Omega_{a'}$ 之外。由于 $K_X(f) \subset \Omega_{a'}$，且 $K_X(f)$ 是正向不变的，这意味着 $\gamma \setminus \{p\}$ 中没有任何点可以包含在$K_X(f)$ 中。这与 $U'$ 包含 $K_X(f)$ 矛盾。

$K_X(f)$ **是全的**。反设某个 $\mathbb{C} \setminus K_X(f)$ 包含一个有界连通分支 $U$。那么 $U$ 就是一个拓扑圆盘 $D$ 的内部，该圆盘由形如$\cup_{N \geq 0}\tau_N$ 的集合围成，其中 $\tau_N$ 是有限树 $K_N$ 的子树 $\tau_N$ 构成的序列，使得对所有 $N \geq 0$ 都有 $\tau_N \subset \tau_{N+1}$，并且 $\tau_N$的某些端点 $x_N$，$y_n$ 都收敛到同一个点 $x_c$。于是，利用上一段中的同一论证，$D$ 的某次迭代与实轴相交。换言之，$\mathbb{C} \setminus K_X(f)$的某个连通分支 $U'$的闭包 $D'$与$I$在一段弧 $J$上相交。由于 $K_X(f)$是正向不变的，并且由于 $f$：$I \to I$没有游荡区间，因此 $U'$ 必定是周期的。于是 $D' \cap I$ 包含一个吸引周期点。然而，根据修剪区间 $J_i$的选取（见例 4.1 中的讨论）

关于图3，周期吸引子吸引域内的集合 $K_N$ 不会随着 $N$增大，因此上述情况不可能发生。

$K_X(f)$是局部连通的。为证明这一点，考虑映射 $F\colon W \to W'$，并令 $V$为 $W$ 的一个连通分支，令 $U$ 为 $V$ 在 $f^n$下的一个回拉。若 $U$ 包含一个临界点$c \in \mathbf{Cr}_{pr} \cup \mathbf{Cr}_{ren}$，那么 $f^n$是 $F\colon W_{I_c} \to W'_{I_c}$的首次回归映射的一个迭代。由于$K_X(f) \cap \partial W \subset \mathbb{R}$，可知 $U \cap K_X(f)$是连通的。一般而言， $f^n$是 $f$的一个微分同胚迭代、定理 A.3 中的盒映射 $F_{rr}\colon W_{I_{\mathrm{Cr}'}} \to W'_{I_{\mathrm{Cr}'}}$ 的一个迭代（可能是恒等映射）、一个微分同胚迭代，以及 $F\colon W_{I_c} \to W'_{I_c}$的一个迭代的复合，其中 $c \in \mathbf{Cr}_{pr} \cup \mathbf{Cr}_{ren}$ （可能是恒等映射）。根据定理 A.2 和 A.3， $F_{rr}\colon W_{I_{\mathrm{Cr}'}} \to W'_{I_{\mathrm{Cr}'}}$和 $F\colon W_{I_c} \to W'_{I_c}$的拼图块直径会随着深度增加而缩小。因此，由引理 A.4 可知， $U$ 的直径会随着$n \to \infty$ 趋于零，除非存在 $f$ 无限可重整化的临界点。在这种情况下，可以取一个不断缩小的重整化区间序列，从而也能得到每个点周围都存在任意小的拼图块。由于 $\partial W$只在实轴上与 $K_X(f)$相交，因此每个点 $x \in K_X(f)$要么包含在某个 $W$ 连通分支的原像中，且该连通分支的直径任意小；要么 $x$ 为实数且不聚集到 $\mathbf{Cr}$。在后一种情况下，根据（实）Ma˜n´e 定理，参见 [dMvS]， $x$ 包含在一个双曲集中；并且 $x$ 再次包含在任意小的邻域 $W_n(x)$中，使得 $W_n(x) \cap K_X$是连通的。由此可知 $K_X$ 是局部连通的。因此，每个点 $z \in K_X(f)$处都有射线落点。

**最多只有有限条射线会落在 $K_X(f)$ 上。** 注意， $K_X(f)$是嵌套树列 $K_{n+1} \supset K_n$的闭包。令 $z \in K_X(f)$，并假设有两条射线 $\gamma_1$， $\gamma_2$落在 $z$上。那么 $\mathbb{C} \setminus (\gamma_1 \cup \{z\} \cup \gamma_2)$的两个连通分支都与 $K_X$ 有非空交集，因此也与某个 $n$的 $K_n$ 有非空交集。由于 $K_n$ 是一棵树，因此可得$z \in K_n$。此外， $K_{n+1} \setminus K_n$ 不包含与 $K_n$端点相连的弧。由此可知，若有无限多条互不相同的射线 $\gamma_i$ 落在 $z$上，那么当$i \neq j$时， $\mathbb{C} \setminus (\gamma_i \cup \{z\} \cup \gamma_j)$的每个连通分支都与 $K_n$ 有非空交集（其中 $n$不依赖于 $i$， $j$）。由于 $K_n$ 是有限度数的有限树，这是不可能的。由此证明了断言（3）。

**中的每个非实周期点 $K_X(f)$ 都是排斥的。**由于每个非实点 $z \in K_X$都包含在一个彼此嵌套的拼图块序列中，如果 $z$ 是周期的，那么存在拓扑圆盘 $D' \supsetneq D \ni z$，满足 $D \cap \mathbb{R} = \emptyset$和 $n$，使得 $f^n(z) = z$，且 $f^n$将 $D$微分同胚地映射到 $D'$。因此，根据施瓦茨引理， $z$ 是一个双曲周期点。□

## Appendix B. Continuity of the pruned Julia set

**定义 B.1**。 设 $(U_n,\ u_n)$ 和 $(U,\ u)$ 是带基点开圆盘。我们称 $(U_n,\ u_n)$ 与 $\to(U,\ u)$ 在 ***Carath´eodory*** 意义下，如果 (i) $u_n \to u$，(ii) 对每个紧 $K \subset U$，当 $K \subset U_n$足够大时， $n$ 成立，并且 (iii) 对于任意包含 $u$的开连通集 $N$，如果 $N \subset U_n$ 对无穷多个 $n$ 成立，则 $N \subset U$。

令 $f \in \mathcal{A}_a^\nu$，并令 $f_n \in \mathcal{A}_a^\nu$ 使得在 $\Omega_a$ 上有 $f_n \to \overline{f}$。此外，取区间 $J_{n,\,i} \ni f_n(c_i)$ 足够小，使定理 4.2 成立，并假设 $J_{n,\,i} \to J_i$ （即 $J_{n,\,i}$ 的边界点收敛于 $J_i$ 的边界点）。令 $X$， $X_n$ 对应于 $\partial J^{-1}$ 和 $\partial J_n^{-1}$，其中 $J_n = f_n^{-1}(J) \setminus \mathbb{R}$。类似地，选择 $J^*_{n,\,i} \Subset J_{n,\,i}$，使得 $J^*_{n,\,i} \ni f_n(c_i)$，并且使 $J^*_{n,\,i}$ 的边界点或者是（前）周期的，或者包含于某个周期吸引子的吸引域中。取一点 $x \in \mathbb{C} \setminus K_X(f)$ 和 $x_n \in \mathbb{C} \setminus K_{X_n}(f_n)$。

如前所述，令 $\psi_X$: $\overline{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}\to\mathbb{C}\setminus K_X$ 为固定 $\infty$ 且在 $\infty$，处具有实导数的一致化映射，并记 $\phi_X=\psi_X^{-1}$： $\mathbb{C}\setminus K_X\to\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$。

**定理 B.1.** 我们有如下结论：

*(1)* $K_{X_n}(f_n)\to K_X(f_n)$ 在豪斯多夫拓扑下；*(2)* $(\mathbb{C}\setminus K_{X_n}(f_n)\ x_n)$ 在 *Carathéodory*拓扑下收敛于$(\mathbb{C}\setminus K_X(f)\ x)$；*(3)* $\phi_{X_n}\to\phi_X$;^^ ^ ^ *(4)* $F_{X_n}\to F_X$在 $\partial\mathbb{D}\setminus J^*$的一个邻域上，其中 $J$是与 $J^*$对应的集合 .

证明. 结论 (1) 可由前一附录中的证明推出。结论 (2) 根据 Carath´eodory 收敛的定义得出。结论 (3) 根据 Carath´eodory 核定理得出，参见 [Pom]。结论 (4) 由 (3) 得出。□

Appendix 复平面. A topological and analytic structure on the space of real analytic functions

令 $\mathcal{A}$ 为 $I=[-1,1]$ 上的实解析函数空间。按照 [Ly1，附录2]，，本节将定义实解析拓扑以及 $\mathcal{A}$ 上的解析结构。这个空间可以通过以下方式视为一个芽空间：

定义 C.1（$\mathcal{A}$ 作为芽空间）。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{C}$ 中包含 $[-1,1]$ 的一族开集，使得对每个 $a>0$，都存在一个开集 $U\in\mathcal{U}$，满足 $I\subset U\subset\Omega_a:=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{dist}(z,I)<a\}$。对于 $U\in\mathcal{U}$，令 $\mathcal{A}_U$ 为 $U$ 上可连续延拓至 $U$上的全纯映射所构成的巴拿赫空间。若 $U\subset V$，则定义 $i_{U,V}$：$\mathcal{A}_V\to\mathcal{A}_U$ 为限制函数（对于 $f\in\mathcal{A}_V$，令 $i_{U,V}f=f|U$）。我们称 $f_1\in\mathcal{A}_U$ 与 $f_2\in\mathcal{A}_V$ 等价，若存在 $W\in\mathcal{U}$，满足 $W\subset U\cap V$，使得 $i_{W,U}f_1=i_{W,V}f_2$。等价类称为芽，这类芽的空间称为巴拿赫空间 $\mathcal{A}_U$ 的归纳极限。若 $f$ 的某个代表属于 $\mathcal{A}_U$，则称 $f\in\mathcal{A}$ 属于 $\mathcal{A}_U$。

注记 C.1. $i_{U,\ V}$： $\mathcal{A}_V\to\mathcal{A}_U$ 是连续的（当 $U\subset V$时）。

**定义 C.2**（$\mathcal{A}$上的逆极限拓扑）。在 $\mathcal{A}$ 上，$C^\omega$ 拓扑（也称为实解析拓扑或逆极限拓扑）规定：当且仅当对于任意 $U\in\mathcal{U}$，$\mathcal{O}\cap\mathcal{A}_U$ 是开集时，集合 $\mathcal{O}$ 才是开集（这里采用 $\mathcal{A}_U$上的巴拿赫空间拓扑）。

由于关于 $\mathcal{U}$ 的假设，且$i_{U,\ V}$是连续的，因此 $\mathcal{A}$ 上的 $C^\omega$ 拓扑不依赖于 $\mathcal{U}$的选择。通常，考虑由形如$\Omega_a$ 的开集组成的集合族 $\mathcal{U}$ 会很方便，并定义 $\mathcal{A}_a:=\mathcal{A}_{\Omega_a}$。

为后文所用，令 $\mathcal{A}_U$（$f$，$R$）表示 $\mathcal{A}_U$中以 $f$为中心、半径为 $R$的球，即满足 $||g-f||_U:=\sup_U|g(z)-f(z)|\le R$的函数 $g\in\mathcal{A}_U$所构成的集合。

上述拓扑是豪斯多夫的。下一个引理是 [Ly1, 引理 11.4] 的一部分（也是逆极限拓扑一般结果的特例），并给出了该拓扑的一些理想性质：

**引理 C.1.**

- 对于 $f_n,f\in\mathcal{A}$，在 $C^\omega$ 拓扑下，$f_n\to f$ 当且仅当存在 $U\in\mathcal{U}$，使得 $f_n,f\in\mathcal{A}_U$，且 $f_n\to f$ 在 $U$ 上。
- 如果 $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$ 是紧的，那么存在 $U\in\mathcal{U}$，使得 $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}_U$。

证明。让我们针对开集集合 $\mathcal{U}$ $\Omega_a$, $a>0$证明这一点。假设 $f_n\to f$，并假设（反证法）存在 $a_n\downarrow 0$，使得 $f_n\in\mathcal{A}_{a_n}\setminus\mathcal{A}_{a_{n-1}}$。我们可以假设

对所有 $n$，都有 $f_n \neq f$。那么 $\mathcal{O} = \mathcal{A} \setminus \{f_1, f_2, \dots\}$ 是 $f$的开邻域，这就产生了矛盾。因此，我们来证明第二个断言：如果 $\mathcal{K}$ 是紧的，那么每个无限序列$f_n \in \mathcal{K}$ 都必须有一个聚点。然而，如果所声称的断言不成立，那么存在 $f_n$ 和 $a_n \downarrow 0$，使得 $f_n \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{a_n}$。根据引理的第一部分，这样的序列不可能有聚点。□

另一方面，

**引理 C.2**。

- 令 $U \subsetneq V$。那么 $i_{U,\,V}\mathcal{A}_V$不是 $\mathcal{A}_U$的开子集。
- 对于任意 $f \in \mathcal{A}_V$、任意 $U \subsetneq V$ 以及实解析拓扑中的任意开集 $\mathcal{O} \ni f$，都存在 $g \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{A}_U$。

~ ~证明。如果 $f \in \mathcal{A}_V$，那么 $f = i_{U,\,V} f \in \mathcal{A}_U$。 $\mathcal{A}_U$中 $f$的每个开邻域都包含在 $V$上不解析的映射。因此，$i_{U,\,V}\mathcal{A}_V$在 $\mathcal{A}_U$中不是开集（因而在 $\mathcal{A}$中也不是开集）。

第二个断言由此得出：由于对任意 $W \subsetneq U \subsetneq V$， $f \in \mathcal{A}_U$ 蕴含 $f \in \mathcal{A}_W$，前一个断言表明存在一个映射 $g$，属于 $\mathcal{O}$，但不包含在$\mathcal{A}_U$中。□

显然，当 $U \subsetneq V$ 是开子集时，以下性质成立，参见 [Ly1，第 412、416 页及第 342] 页中的性质 C1-C2、P1-P3：

C1. $i_U$ 的像 $_{,V}\mathcal{A}_V$ 在 $\mathcal{A}_U$ 中稠密。

C2. 映射 $i_{U,\,V}$ 是紧的，即对任意 $R > 0$, $i_{U,\,V}\mathcal{A}_V(f,\ R)$ 在 $\mathcal{A}_U$ 中相对紧。

以下结果隐含于关于逆极限拓扑的更一般结果中，参见 [Eng]。

**引理 C.3.** $\mathcal{A}$ 不是局部紧的、不可度量化，也不是贝尔空间。然而，它是正则的、仿紧的、林德洛夫的，并且存在单位分解。

我们回顾一下，若一个拓扑空间中每个点 $x$ 都有一个紧邻域，则称该空间为局部紧，也就是说，存在开集 $U$ 和紧集 $K$，使得 $x \in U \subset K$。若开稠密集的可数交稠密，则称该空间为贝尔空间。如果任意一点和闭集都能由开集分离，则称该拓扑空间为正则（或 $T_3$）。如果每个覆盖都包含一个局部有限的子覆盖，则称该空间为仿紧。如果每个覆盖都包含一个可数子覆盖，则称该空间为林德洛夫¨性质。

证明。根据前一个引理，对于每个包含 $f$ 的开集 $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ 以及每个$a > 0$，都存在 $f_n \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{A}_a$。由引理 C.1 可知，这意味着没有集合 $K \supset U$ 是紧的。为了证明 $\mathcal{A}$ 不可度量化，假设 $d$ 是 $\mathcal{A}$上的一个度量。取 $f \in \mathcal{A}_a$ 以及一列直径趋于零的开球 $\mathcal{O}_n \ni f$。那么，根据前一个引理，$\mathcal{O}_n$ 包含某个 $f_n \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{1/n}$。因此 $d(f_n,\ f) \to 0$，但不存在这样的 $\epsilon > 0$，使得每个 $f_n$都包含于 $\mathcal{A}_\epsilon$，这与引理 C.1 矛盾。为了证明 $\mathcal{A}$ 不是贝尔空间，取 $a_n \downarrow 0$ 和$f_n \in \mathcal{A}_{a_n} \setminus \mathcal{A}_{a_{n-1}}$，使得 $f_n \neq 0$。那么集合 $\mathcal{O}_n = \{f \in \mathcal{A};\ f \neq f_n\}$ 在实解析拓扑中是开且稠密的。另一方面，$\cap \mathcal{O}_n$ 不稠密，因为 $\mathcal{O} = \mathcal{A} \setminus \{f_1, f_2, \dots\}$是一个开集（包含 $f \equiv 0$），且与每个 $\mathcal{O}_n$都不相交。

为证明 $\mathcal{A}$ 是正则的，取 $f \in \mathcal{A}_{a_0}$，并令 $K_1 = \{f\}$ 以及某个不包含 $f$的闭集 $K_2$。由于 $f \notin K_2$， $K_2$ 包含于形如 $K_2' = \cup_{0<a<a_0}\{g \in \mathcal{A}_a$的闭集；$\sup_{z\in\Omega_a} |g(z) - f(x)| \geq t(a)\}$，其中 $t(a) > 0$。于是，$\sup |g(z) - f(z)| < (1/4)t(a)\}$和 $U_2 = \cup_{0<a<a_0}\{g \in \mathcal{A}_a;\ \sup |g(z) - f(z)| \geq (3/4)t(a)\}$是两个不交的开集，分别包含 $K_1$ 和 $K_2$，从而证明了 $\mathcal{A}$ 是正则的。

接下来证明 $\mathcal{A}$ 是紧子集的可数并。事实上，对于每个 $f \in \mathcal{A}$，存在 $n$、$k \in \mathbb{N}$，使得 $f \in \mathcal{A}_{1/n}(0,k)$，因此特别有 $f \in i_{\Omega_{1/2n}}$，$\Omega_{1/n}\mathcal{A}_{1/n}(0,k)$。由此可得 $\mathcal{A} = \bigcup_k$，$_n\, i_{\Omega_{1/2n}}$，$\Omega_{1/n}\mathcal{A}_{1/n}(0,k)$。根据性质 C1，集合 $i_{\Omega_{1/2n}}$，$\Omega_{1/n}\mathcal{A}_{1/n}(0,k)$ 是 $\mathcal{A}_{1/2n}$的相对紧子集。因此，$i_{\Omega_{1/2n}}$在 $\mathcal{A}_{1/2n}$ 中的闭包 $C_n$，$_k$ 是 $\mathcal{A}_{1/2n}$的一个紧子集。令 $\mathcal{W}$ 为 $\mathcal{A}$ 的开子集的并，并覆盖 $C_n$，$_k$。根据 $\mathcal{A}$上的拓扑定义，集合 $W \cap \mathcal{A}_{1/2n}$，$W \in \mathcal{W}$ 在 $\mathcal{A}_{1/2n}$ 中是开集，并覆盖 $C_n$，$_k$。因此，$\mathcal{W}$ 中的有限族已经覆盖 $C_n$，$_k \subset \mathcal{A}$，所以 $C_n$，$_k$ 作为 $\mathcal{A}$的子集也是紧的。由此可得，$\mathcal{A}$ 是紧子集的可数并。

由于这一点，且由于 $\mathcal{A}$ 是正则的，它是一个林德洛夫空间，[Eng，第 192] 页。因此它是仿紧的，参见 [Eng，第 5.1.1 定理，第 300] 页。因此，$\mathcal{A}$ 的任意开覆盖都有从属于它的单位分解，参见 [Eng，第 5.1.9 定理，第 301] 页。□

**引理 C.4**。 $C^\omega$ 上的拓扑比 $\mathcal{A}$ 上的 $C^\infty$ 拓扑更细。

证明。只需证明，存在实解析拓扑中的一个开集 $\mathcal{O}$，使其包含于集合 $\{g;\ \sup_{x\in I}|D^k g(x)| < \epsilon\}$。因此，取足够小的 $\epsilon(a) \gtrsim 0$，使得若 $g \in \mathcal{A}_a$ 满足：在 $\Omega_a$ 上有 $|g(x)| < \epsilon(a)$，则 $\{g;\ \sup_{x\in I}|D^k g(x)| < \epsilon\}$。由此可知，实解析拓扑中的开集 $\mathcal{O} = \cup_a\{g \in \mathcal{A}_a;\ \sup_{x\in\Omega_a}|g(x)| < \epsilon(a)\}$ 具有所需性质，□

**定义 C.3.** $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ 是一个以巴拿赫空间族为模型的实解析流形，或简称实解析流形，如果 $\mathcal{M}$ 是某个单射族$j_V$ 的像的并集：$\mathcal{O}_U \to \mathcal{M}$ 其中 $U \in \mathcal{U}$，且其中 $\mathcal{O}_U$ 是巴拿赫空间 $\mathcal{A}_U$的一个开子集。集合 $j_V(\mathcal{O}_U)$称为 $\mathcal{M}$的巴拿赫切片。

本文将为 $\mathcal{U}$ 选择以下某一类开集：

(1) 所有形如 $\Omega_a$ 的集合，或 (2) 某个实解析 $f$的修剪多项式型延拓的定义域 $U$：$I \to \mathbb{R}$。

**定义 C.4.** 如果存在一个实解析流形 $\mathcal{M}$ 和一个映射 $i$：$\mathcal{M} \to \mathcal{A}$，使得 $Di(m)$是到其值域上的线性同胚，且 $\mathcal{X} = i(\mathcal{M})$，则称集合 $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ 为浸入子流形。若 $i$：$\mathcal{M} \to \mathcal{X}$ 是一个同胚，且 $\mathcal{X}$ 上的拓扑来自 $\mathcal{A}$上的拓扑，则称 $\mathcal{X}$ 为嵌入流形。

注记 C.2。包含映射 $i$：$\mathcal{M} \to \mathcal{A}$ 具有 [Ly1，附录2]中的 P1-P3 性质。这意味着 $\mathcal{X}$ 可以赋予内在流形结构，并且 $\mathcal{X}$ 上的切空间和余维都有明确的定义，参见 [Ly1]。

备注 C.3. 引理 C.1 意味着，$f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^k$ 是在 $\mathcal{A}$ 中的一个映射族，该族关于 $\lambda$ 连续变化；$\lambda$ 包含于一个浸入子流形 $\mathcal{X}$ 中。因此，对于 $\lambda \approx \lambda_0$，我们有 $f_\lambda$ 包含于一个实解析巴拿赫流形中。

## AppendixD. Summary of notation and definitions

$\mathbb{C}$ 中的集合通常用 $U, U', V, V, O$ 等符号表示，而函数空间则用 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ 等符号表示。


| | |
|---|---|
| $\mathcal{A}^\nu$, $\mathcal{A}_a^\nu$, $\Omega_a$ | p. 3 |
| 拓扑共轭类 $\mathcal{T}_f$ | p. 3 |
| 修剪多项式型<br>映射 $F\colon U \to U'$, $\Gamma_f$ | p. 7 |
| 修剪充满朱利亚集 $K_f$ | p. 7 |
| 记号 $f\colon I \to I$, $F\colon U \to U'$<br>vs. $\hat{f}_X\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$, $\hat{F}_X\colon E \to E'$ | p. 9 |
| $X_0$, $X$ 和修剪区间 $J_i$ | 第 10 页 |
| 修剪朱利亚集 $K_X(f)$ | 第 10 页 |
| 外部映射 $\hat{f}_X\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\hat{X}$ | 第 15 页 |
| 符号 $\epsilon(f)$ | 第 16 页 |
| $X^*$、$Y$、$Y'$ 和 $J_i^*$ | 第 19 页 |
| $\Lambda_N$、$\Lambda'_\infty$ | 第 20 页, 20 |
| 扩张马尔可夫结构<br>$\hat{\hat{\hat{F}}}_X\colon E \to E'$ | 第 22 页 |
| 射线与屋顶/等势线 | 第 22 页 |
| 可容许剪枝集 $Q$ | 第 24 页 |
| 修剪数据与……的等价性<br>修剪多项式型映射 | 第 24 页 |
| 吸引结构 $F\colon B \to B'$ | 第 25 页 |
| 全局剪枝多项式类映射<br>带有吸引子<br>$F\colon E \cup B \to E' \cup B'$ | 第 26 页 |
| $\mathcal{B}_a^\nu$ | 第 29 页 |
| 简单抛物点 | 第 30 页 |
| 混合共轭类 $\mathcal{H}_f^{\mathbb{R}}$ 和 $\mathcal{H}_F$ | 第 34,34 页 |
| 实解析拓扑 | 第 38 页 |
| Carath´eodory 拓扑 | 第 39 页 |
| $\mathcal{A}^\nu$ 上的流形结构 – | 第 38、71 页 |
| 双曲的、半双曲映射 | 第 40 页 |
| 横截于……的向量场<br>拓扑共轭类<br>双曲映射的 | 第 40 页 |
| 拟共形向量场 | 第 51 页 |
| 水平向量场 | 第 52 页 |
| 垂直向量场和横截向量场 | 第 53 页 |
| 拟共形运动 | 第 61 页 |
| 实解析流形 | 第 38 页 |

## References

[AB] L. Ahlfors 和 L. Bers, 《可变度量下的黎曼映射定理》, 《数学年刊》72（1960年）, 385–404。[AE] F.D. Ancel 和 R.D. Edwards, 《可缩开集的单调并是否可缩？》, 《拓扑应用》214（2016年）, 89–93。[AIM] K. Astala、T. Iwaniec 和 G. Martin, 《平面上的椭圆偏微分方程与拟共形映射》, 普林斯顿数学丛书, 第48卷。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 纽约州, 2009年。xviii+677页。[AL] A. Avila 和 M. Lyubich, 《高次单峰映射的完整重整化马蹄：混合类上的指数收缩》, 《高等科学研究所数学出版物》第114期（2011年）, 171–223。[ALM] A. Avila、M. Lyubich 和 W. de Melo, 《实解析单峰映射族中的正则或随机动力学》, 《数学发明》154（2003年）, 451–550。[BM] E. Bierstone 和 P.D. Milman, 《半解析集与亚解析集》, 《高等科学研究所数学出版物》67（1988年）, 5–42。[BvS] H. Bruin 和 S. van Strien, 《实多峰映射的熵单调性》, 《美国数学会杂志》28（2015年）, 第1期, 1–61。[BR] L. Bers 和 H.L. Royden, 《单射的全纯族》, 《数学学报》157（1986年）, 259–286。[ChvS] D. Cheraghi 和 S. van Strien, 《单峰映射三维族中的熵单调性》, 手稿。[C] T. Clark, 《高次单峰映射族中的正则或随机动力学》, 《遍历理论与动力系统》34(5)（2014年）, 1538–1556。[CDKS] T. Clark、K. Drach、O. Kozlovski 和 S. van Strien, 《复盒映射的动力学》, 即将发表于《阿诺德数学杂志》8（2022年）, 第2期, 319–410。[CvS] T. Clark 和 S. van Strien, 《拟对称刚性》, https://arxiv.org/abs/1805.09284, 已投稿。[CvS2] T. Clark 和 S. van Strien, 《共轭类层叠-单峰映射及其应用》, 准备中。[CvST] T. Clark、S. van Strien 和 S. Trejo, 《实映射的复界》, 《数学物理通讯》355（2017年）, 1001–1119。[CDKvS] T. Clark、K. Drach、O. Kozlovski 和 S. van Strien, 《复盒映射的动力学》, 《阿诺德数学杂志》（2022年）8：319–410。[DE] A. Douady 和 C.J. Earle, 《圆周同胚的保角自然延拓》, 《数学学报》157（1986年）, 23–48。[DH] A. Douady 和 J.H. Hubbard, 《关于类多项式映射的动力学》, 《高等师范学校科学年刊》（第4辑）18（1985年）, 287–343。[Eng] R. Engelking, 《一般拓扑学》, 作者由波兰语译出。第二版。Sigma纯数学丛书, 第6卷。Heldermann出版社, 柏林, 1989年。viii+529 页。[Eps] A. Epstein, 《全纯动力学中的横截性》, http://homepages.warwick.ac.uk/~mases/Transversality.pdf, 以及可在 https://icerm.brown.edu/materials/Slides/sp-s12-w1/Transversality_Principles_in_Holomorphic_Dynamics_%5D_Adam_Epstein,_University_of_Warwick.pdf 获取的讲座幻灯片。[dFdM] E. de Faria 和 W. de Melo, 《临界圆映射的刚性 I》, 《欧洲数学学会杂志》13, 2（2000年）, 343–370。[dFdM2] E. de Faria 和 W. de Melo, 《临界圆映射的刚性 II》, 《美国数学会杂志》1, 4（1999年）, 339–392。[GS2] J. Graczyk 和 G. ´Swi ̨atek, 《逻辑斯谛族中的一般双曲性》, 《数学年刊》146（1997年）, 1–52。[GSS] J. Graczyk、D. Sands 和 G. ´Swi ̨atek, 《单峰映射的几何衰减：负施瓦茨导数情形》, 《数学年刊》161（2005年）, 613–677。[GSm] C. Grotta-Ragazzo、D. Smania, 《作为分布的比尔科夫和 II：动力系统变形的应用》, https://arxiv.org/abs/2104.04820。

[Hub] J.H. Hubbard, 《Teichmüller理论及其在几何、拓扑和动力系统中的应用》, 第1卷。Matrix Editions, 纽约州伊萨卡, 2006年。xx+459 页。[IT] Y. Imayoshi 和 M. Taniguchi, 《Teichmüller空间导论》, Springer Verlag, 1992年。[Koz] O.S. Kozlovski, 《Axiom A 映射在单峰映射空间中稠密》, 按拓扑, 《数学年刊》（第2辑）157（2003年）, 第1期, 1–43。[KvS] O. Kozlovski 和 S. van Strien, 《不可重整化多项式的局部连通性与拟共形刚性》, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）99（2009年）, 275–296。[KSvS1] O. Kozlovski、W. Shen、S. van Strien, 《实多项式的刚性》, 《数学年刊》165（2007年）, 749–841。[KSvS2] O. Kozlovski、W. Shen、S. van Strien, 《一维中的双曲性稠密性》, 《数学年刊》166（2007年）, 145–182。[KP] S. G. Krantz 和 H. R. Parks, 《实解析函数入门》, 第2版, Birkhäuser, 波士顿, 2002年。[LSvS1] G. Levin、W. Shen 和 S van Strien, 《通过转移算子和全纯运动实现正横截性及其在区间映射单调性问题中的应用》, 《非线性》33（2020年）, 第8期, 3970–4012。[LSvS2] G. Levin、W. Shen 和 S van Strien, 《双曲映射与抛物映射情形下的横截性》, 《数学分析杂志》141（2020年）, 第1期, 247–284。[LSvS3] G. Levin、W. Shen 和 S van Strien, 《有理映射族临界关系的横截性：一个初等证明》, 载于《一维动力系统新趋势》, 201–220, Springer数学与统计学论文集, 285, Springer, Cham（2019年）。[LS] S. Li 和 W. Shen, 《改进的实 Koebe 原理》, 《遍历理论与动力系统》30（2010年）, 1485–1494。[Ly1] M. Lyubich, 《Feigenbaum-Coullet-Tresser 普适性与 Milnor 毛刺猜想》, 《数学年刊》149（1999年）, 319–420。[Ly2] M. Lyubich, 《二次多项式的动力学 I–II》, 《数学学报》178（1997年）, 185–297。[MMS] R. Ma˜n´e、P. Sad 和 D. Sullivan, 《关于有理映射的动力学》, 《高等师范学校科学年刊》（第4辑）16（1983年）, 第2期, 193–217。[MMvS] M. Martens、W. de Melo 和 S. van Strien, 《实一维动力学的 Julia-Fatou-Sullivan 理论》, 《数学学报》168（1992年）, 第3–4期, 273–318。[McM] C.T. McMullen, 《复动力学与重整化》, 《数学年刊研究》135。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 1994年。[McSu] C.T. McMullen 和 D. Sullivan, 《拟共形同胚与动力学。III. 全纯动力系统的 Teichmüller 空间》, 《高等数学》135（1998年）, 第2期, 351–395。[dMvS] W. de Melo 和 S. van Strien, 《一维动力系统》, Springer-Verlag, 柏林（1993年）。[Mil] J. Milnor, 《单复变量中的动力学》, 《数学年刊研究》160, 2006年。[MTr] J. Milnor 和 C. Tresser, 《实三次映射的熵与单调性》, 附录由 Adrien Douady 和 Pierrette Sentenac 撰写。《数学物理通讯》209（2000年）, 第1期, 123–178。[Pom] Ch. Pommerenke, 《共形映射的边界行为》, Grundlehren 299, Springer Verlag。[R] L. Rempe, 《超越整函数逃逸动力学的刚性》, 《数学学报》203（2009年）, 第2期, 235–267。[RvS] L. Rempe-Gillen 和 S. van Strien, 《实超越整函数类与圆映射类中的双曲性稠密性》, 《杜克数学杂志》164（2015年）, 第6期, 1079–1137。[She1] W. Shen, 《实有理函数的可测动力学》, 《遍历理论与动力系统》23（2003年）, 957–983。[Sh] M. Shub, 《紧致可微流形的自同态》, 《美国数学杂志》91（1916年）, 175–199。[Sm] D. Smania, 《拼图几何与刚性：斐波那契周期是双曲的》, 《美国数学会杂志》20(3)（2007年）, 629–673。[Sm2] D. Smania, 《有界组合结构的溶度环吸引子是稀有的》, 《数学年刊》（第2辑）191（2020年）, 第1期, 1–79。[vS1] S. van Strien, 《光滑区间映射单参数族中的双曲性稠密性与鲁棒混沌》, 《美国数学会会刊》138（2010年）, 第12期, 4443–4446。

[vS2] S. van Strien，实解析一维映射族中的双曲性稠密性，准备中。[vSV] S. van Strien 和 E. Vargas，多峰映射的实界、遍历性与负施瓦西导数，美国数学会杂志**17**（4）（2004），749–782。[Su1] D. S ullivan，拟共形同胚与动力系统 *I*：*Fatou-Julia*问题中关于游荡域问题的解，《数学年刊》**122** （1985年），401-418。[ST] D. Sullivan 和 W. Thurston，扩展全纯运动，《数学学报》**157** （1986年），243–257。

Mathematics Department, Imperial College London