arXiv:2304.00888v1 [math.CO] 3 Apr 2023

# 由凸集决定的局部差集

KRISHNENDU BHOWMICK、MIRIAM PATRY 和 OLIVER ROCHE-NEWTON

Abstract. 本文提出了一个关于凸集加性性质的新问题。设 $S = \{s_1 < \cdots < s_n\}$ 为一个实数集，并令 $D_i(S) = \{s_x - s_y : 1 \leq x - y \leq i\}$。我们预期，对于任意凸集 $S$， $D_i(S)$ 相对于 $S$ 的大小和参数 $i$ 而言都很大。

我们给出一种构造，表明 $D_3(S)$ 可以小至 $n+2$，并证明这是可能的最小规模。另一方面，我们用一个初等论证证明 $D_4(S)$ 的一个非平凡下界，即 $|D_4(S)| \geq \frac{5}{4}n - 1$。对于足够大的 $i$，我们能够利用关联几何证明一个随 $i$ 增长的非平凡界。

## 1. Introduction

设 $S \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有限集合，并写作 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$，使得对所有 $i \in [n-1]$ 都有 $s_i < s_{i+1}$。若对所有 $i \in [n-2]$ 都有 $s_{i+1} - s_i < s_{i+2} - s_{i+1}$，则称 $S$ 为凸集。

秉承和积问题的思路，Erd˝os 提出了这样一个问题：对于任意凸集， $A + A$ 和 $A - A$ 是否必定都很大？通过结合关联几何方法（例如参见 [2]）与初等方法（参见 [3], [8] 和 [4]），这一问题已有进展，但确定最佳下界的问题仍未解决。目前最先进的结果表明，存在某个绝对常数 $c > 0$，使得以下界

$$|S - S| \gg \frac{n^{8/5}}{(\log n)^c}, \quad |S + S| \gg \frac{n^{30/19}}{(\log n)^c} \tag{1}$$

对任意凸集 $A \subset \mathbb{R}$ 都成立，分别参见 [10] 和 [7] 。记号 $\gg$ 用于吸收一个乘法常数。也就是说， $X \gg Y$ 表示存在一个绝对常数 $C > 0$，使得 $X \geq CY$。

本文介绍了该问题的一种新的局部变体，其中只考虑 $A$ 中相近元素之间的差集。我们定义

$$D_i(S) := \{s_x - s_y : 1 \leq x - y \leq i\}.$$

此外，对于任意集合 $\mathcal{I} \subset [n-1]$，定义

$$D_{\mathcal{I}}(S) := \{s_x - s_y \mid x - y \in \mathcal{I}\}.$$

我们预期，对于任意凸集 $S \subset \mathbb{R}$， $D_i(S)$ 相对于 $i$而言很大，而 $D_{\mathcal{I}}(S)$ 相对于 $|\mathcal{I}|$而言也很大。我们先给出一些平凡观察。

• 对于任意凸集 $S$，$|D_1(S)| = |S| - 1$。事实上，根据凸集的定义可立即得出，$S$ 具有互异的连续差。这类集合的加性性质已在 [8] 和 [9] 中得到研究。

• 对于任意凸集 $S$，都有 $|D_2(S)| \geq |S|$。观察可知，$s_n - s_{n-2} \in D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{1\}}(S)$，因此

$$|D_2(S)| = |D_{\{1\}}(S)| + |D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{1\}}(S)| \geq n - 1 + 1 = n. \tag{2}$$

另一方面，考虑集合

$$S = \{f_{i+3} : i \in [n]\}, \tag{3}$$

其中 $f_i$ 是第 $i$ 个斐波那契数。我们看到 $|D_2(S)| = n$，因此下界 (2) 是最优的。

• 令 $i = n - 1$，可知集合 $D_i(S)$ 等于差集 $S - S$ 中所有正元素组成的集合。因此，求 $D_{n-1}(S)$ 的下界，等价于求 $S - S$ 的大小下界。

本文的主要结果涉及当 $S$ 为凸集时，$D_3(S)$ 和 $D_4(S)$ 可能达到的最小大小。令 $\mathcal{S}(n)$ 表示所有大小为 $n$ 的凸集组成的集合。定义

$$D_i(n) := \min\{|D_i(S)| : S \in \mathcal{S}(n)\}.$$

以上讨论表明，$D_1(n) = n - 1$ 且 $D_2(n) = n$。对于 $D_3(n)$，我们将给出以下结果的构造性证明。

定理 1.1. 对于 $n \geq 5$

$$D_3(n) = n + 2.$$

然而，当 $i$ 从 3 变为 4，且 $D_4(n)$ 不是 $n + O(1)$ 的形式时，会出现有趣的行为变化。本文将证明以下结果。

定理 1.2.

$$D_4(n) \geq \frac{5}{4}n - 1.$$

我们还考虑一种更强的凸性概念，即 $k$-凸性，这是论文 [4] 的主要研究内容之一。

定义 1.3. 如果 $D_1(S)$ 是一个 $(k-1)$-凸集，则称 $S$ 为 $k$-凸集。凸集也称为 1-凸集。

令 $\mathcal{S}^2(n)$ 表示所有大小为 $n$ 的 2-凸集构成的集合。定义

$$D_i^2(n) := \min\{|D_i(S)| : S \in \mathcal{S}^2(n)\}.$$

注意，$D_1^2(n) = n - 1$。在 (3) 中定义的集合 $S$ 是一个满足 $|D_2(S)| = n$ 的 2-凸集，因此可得 $D_2^2(n) = n$。

与定理 1.1 类似，我们将证明以下结果。

定理 1.4. 对于 $n \geq 5$

$$D_3^2(n) = n + 2. \tag{4}$$

我们给出了一个比定理 1.2 中 $D_4(n)$ 的下界略优的 $D_4^2(n)$ 下界。

定理 1.5。

$$D_4^2(n) \geq \frac{4}{3}n - \frac{4}{3}.$$

我们预期， $D_i(n)$ 和 $D_i^2(n)$ 的值会随着 $i$ 的增大而增大。然而，我们无法将用于证明定理 1.2 和定理 1.4 的初等方法推广到更大的 $i$，从而得到更好的界。另一方面，当 $i$ 足够大时，可以使用入射几何方法给出一个非平凡的界。

定理 1.6。对于所有 $i \in \mathbb{N}$,

$$D_i(n) \gg i^{3/2}.$$

特别地，若 $i \geq n^{2/3+\epsilon}$，则定理 1.6 给出的下界具有 $D_i(n) \gg n^{1+\epsilon'}$ 的形式。看起来，在较弱的假设 $i \geq n^{\epsilon}$ 下， $D_i(n)$ 也可能有这样的下界。

## 2. Proofs of the main results

定理 1.1 和 1.4 的证明。为了证明 $D_3(n) \geq n + 2$，我们需要证明

$$|D_3(S)| \geq n + 2 \tag{5}$$

对于任意满足 $|S| = n$ 的凸集 $S$，该结论都成立。注意，由于 $s_n - s_{n-3} \in D_3(S) \setminus D_2(S)$，因此 $|D_3(S)| \geq |D_2(S)| + 1$。于是 $|D_3(S)| \geq n + 1$。反设对于某个 $n \geq 5$，有$|D_3(S)| = n + 1$。注意

$$s_2 - s_1 < s_3 - s_2 < s_3 - s_1 < s_4 - s_2 < s_4 - s_1 < s_5 - s_2 < \cdots < s_n - s_{n-3}$$

and

$$s_2 - s_1 < s_3 - s_2 < s_4 - s_3 < s_4 - s_2 < s_5 - s_3 < s_5 - s_2 < \cdots < s_n - s_{n-3}.$$

我们在 $D_3(S)$ 中找到了两个长度为 $n + 1$ 的递增序列，因此这两个序列必定相同。比较两个序列的第三项，得到

$$s_4 - s_3 = s_3 - s_1 \tag{6}$$

比较两个序列的第五项，得到

$$s_4 - s_1 = s_5 - s_3. \tag{7}$$

由方程 (6) 和 (7) 可得

$$s_5 - s_4 = s_3 - s_1 = s_4 - s_3.$$

但由于 $S$ 是一个凸集，这是不可能的。因此，我们关于 $|D_3(S)| = n+1$的假设是错误的，所以 $|D_3(S)| \geq n+2$，从而证明了 (5)。

由于每个 2-凸集也是凸集，因此对于所有 2-凸集 $S$，$|D_3(S)| \geq n+2$。因此，$D_3^2(n) \geq n+2$。

为了证明 $D_3(n) \leq n+2$ 和 $D_3^2(n) \leq n+2$，我们给出一个满足 $|D_3(S)| = n+2$ 的 2-凸集（因而也是凸集）的例子。考虑集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$，其中

$$s_1 = 0,\ s_2 = 10,\ s_3 = 23,\ s_4 = 40,$$
$$s_i := a_{i-1} + s_{i-2} - s_{i-4} \quad \text{for } i = 5, \ldots, n.$$

事实上，$|D_3(S)| = n+2$，并且 $S$ 是 2-凸的。

□

仔细观察上述集合 $S$ 的构造，可以发现它具有额外的结构，因为集合 $D_{\{5\}}(S)$ 与 $D_3(S)$ 有很大部分重叠。具体而言，我们有

$$|D_{\{1,2,3,5\}}(S)| = n+4.$$

由于 $D_{\{1,2,3,5\}}(S)$ 中最大的两个元素不属于 $D_3(S)$，由定理 1.1 可知，对于任意凸集 $S$，$D_{\{1,2,3,5\}}(S) \geq n+4$，因此这种构造在这方面是最优的。

定理 1.2 的证明。为证明定理 1.2，我们需要证明

$$|D_4(S)| \geq \frac{5}{4}n - 1 \tag{8}$$

对于大小为 $n$ 的任意凸集 $S$，该结论都成立。事实上，设 $S$ 是这样一个集合。(8) 的证明分为两种情况。

情况 1 - 假设 $|D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{1\}}(S)| \geq \frac{n}{4} - 2$。由此可得

$$|D_4(S)| \geq |D_2(S)| + 2 = |D_{\{1\}}(S) \cup [D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{1\}}(S)]| + 2 \geq (n-1) + (n/4-2) + 2 = \frac{5n}{4} - 1.$$

情况 2 - 假设 $|D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{1\}}(S)| < n/4 - 2$。由此可得

$$s_{i+2} - s_i, s_{i+3} - s_{i+1} \in D_{\{1\}}(S)$$

对至少

$$(n-3) - 2(n/4-2) = \frac{n}{2} + 1$$

$i \in [n-3]$ 个取值成立。令 $I$ 为所有此类 $i$ 的集合。那么，对于所有 $i \in I$，

$$s_{i+2} - s_i = s_{j+1} - s_j, \quad s_{i+3} - s_{i+1} = s_{j'+1} - s_j,$$

对于某些 $j, j' \in [n-1]$。

情况 2a - 假设，对于元素 $i \in I$ 中至少 $\frac{n}{4}+2$ 个元素，我们有 $j' = j+1$。那么 $s_{j+2} - s_j$ 属于 $D_{\{2\}}(S)$，但它也严格位于 $D_{\{4\}}(S)$ 中两个相邻元素之间。事实上

$$\begin{aligned} s_{i+3} - s_{i-1} &= (s_{i+3} - s_{i+1}) + (s_{i+1} - s_{i-1}) \\ &< (s_{i+3} - s_{i+1}) + (s_{i+2} - s_i) \\ &= (s_{j+2} - s_{j+1}) + (s_{j+1} - s_j) \\ &= s_{j+2} - s_j \\ &< (s_{i+4} - s_{i+2}) + (s_{i+2} - s_i) \\ &= s_{i+4} - s_i. \end{aligned}$$

由此可得 $|D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{4\}}(S)| \geq \frac{n}{4}+2$。因此,

$$|D_4(S)| \geq 1 + |D_{\{2,4\}}(S)| = 1 + |D_{\{4\}}(S) \cup [D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{4\}}(S)]| \geq 1 + n - 4 + \frac{n}{4} + 2 = \frac{5n}{4} - 1.$$

情况 2b——假设不属于情况 2a，因此，对于 $I$ 中至少 $\frac{n}{4}-1$ 个元素，有 $j' \geq j+2$。那么 $s_{j+2} - s_{j+1}$ 严格位于 $D_{\{2\}}$ 中两个相邻元素 $s_{i+2} - s_i$ 和 $s_{i+3} - s_{i+1}$ 之间。因此, $|D_{\{1\}}(S) \setminus D_{\{2\}}(S)| \geq \frac{n}{4} - 1$，于是

$$|D_4(S)| \geq |D_2(S)| + 2 = |D_{\{2\}}(S) \cup [D_{\{1\}}(S) \setminus D_{\{2\}}(S)]| + 2 \geq (n-2) + (n/4 - 1) + 2 = \frac{5n}{4} - 1.$$

□

仔细考察定理 1.2 的证明可以发现，在证明 (8) 的过程中，我们几乎没有用到 $D_{\{3\}}(S)$ 中的元素。稍作修改证明，便可得到以下界

$$|D_{\{1,2,4\}}(S)| \geq \frac{5}{4}n - 2$$

对于基数为 $n$ 的任意凸集 $S$。

定理 1.1 中集合 $S$ 的构造给出了以下界

$$|D_4(S)| \leq |D_3(S)| + (n-4) = 2n - 2.$$

结合这一观察与定理 1.2 的结果，我们得到

$$\frac{5}{4}n - 1 \leq D_4(n) \leq 2n - 2.$$

现在我们开始证明定理 1.5。证明过程与定理 1.2 的证明大体相同。主要差别在于，我们可以利用 2-凸条件证明情况 2b 不会出现。

定理 1.5 的证明。为证明定理 1.5，我们需要证明

$$|D_4(S)| \geq \frac{4}{3}n - \frac{4}{3} \tag{9}$$

对于任意大小为 $n$ 的 2-凸集 $S$，该结论均成立。事实上，设 $S$ 是这样一个集合。证明分为两种情况。

情况 1 - 假设 $|D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{1\}}(S)| \geq \frac{n}{3} - \frac{7}{3}$。由此可得

$$|D_4(S)| \geq |D_2(S)|+2 = |D_{\{1\}}(S) \cup [D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{1\}}(S)]|+2 \geq (n-1)+\left(\frac{n}{3}-\frac{7}{3}\right)+2 = \frac{4}{3}n-\frac{4}{3}.$$

情况 2 - 假设 $|D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{1\}}(S)| < \frac{n}{3} - \frac{7}{3}$。由此可得

$$s_{i+2} - s_i, s_{i+3} - s_{i+1} \in D_{\{1\}}(S)$$

对至少

$$(n-3) - 2\left(\frac{n}{3} - \frac{7}{3}\right) = \frac{n}{3} + \frac{5}{3}$$

个 $i \in [n-3]$取值成立。令 $I$ 为所有这类 $i$构成的集合。那么，对所有 $i \in I$,

$$s_{i+2} - s_i = s_{j+1} - s_j, \quad s_{i+3} - s_{i+1} = s_{j'+1} - s_j,$$

对某些满足 $j' > j > i$的 $j, j' \in [n-1]$ 成立。现在我们断言，必有$j' = j+1$。事实上，反设 $j' \geq j+2$。于是可得

$$\begin{aligned}(s_{j+3} - s_{j+2}) - (s_{j+1} - s_j) &\leq (s_{j'+1} - s_{j'}) - (s_{j+1} - s_j) \\ &= (s_{i+3} - s_{i+1}) - (s_{i+2} - s_i) \\ &= (s_{i+3} - s_{i+2}) - (s_{i+1} - s_i).\end{aligned}$$

然而，由于 $j > i$，这与 $S$ 是 2-凸的假设矛盾。事实上，将凸集 $D_1(S)$ 写作 $= \{d_1 < d_2 < \cdots < d_{n-1}\}$，于是 $d_i = s_{i+1} - s_i$。那么，前一个不等式可以写成

$$d_{j+2} - d_j \leq d_{i+2} - d_i.$$

但如果 $D_1(S)$ 是凸集，这个不等式不可能成立，由此证明了该断言。

与定理 1.2 的证明中一样， $s_{j+2} - s_j$ 属于 $D_{\{2\}}(S)$，但它也严格位于 $D_{\{4\}}(S)$中两个相邻元素之间。事实上

$$\begin{aligned}s_{i+3} - s_{i-1} &= (s_{i+3} - s_{i+1}) + (s_{i+1} - s_{i-1}) \\ &< (s_{i+3} - s_{i+1}) + (s_{i+2} - s_i) \\ &= (s_{j+2} - s_{j+1}) + (s_{j+1} - s_j) \\ &= s_{j+2} - s_j \\ &< (s_{i+4} - s_{i+2}) + (s_{i+2} - s_i) \\ &= s_{i+4} - s_i.\end{aligned}$$

由此可得 $|D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{4\}}(S)| \geq \frac{n}{3} + \frac{5}{3}$。因此,

$$|D_4(S)| \geq 1 + |D_{\{2,4\}}(S)| = 1 + |D_{\{4\}}(S) \cup [D_{\{2\}}(S) \setminus D_{\{4\}}(S)]| \geq 1 + n - 4 + \frac{n}{3} + \frac{5}{3} = \frac{4}{3}n - \frac{4}{3}.$$

□

现在我们转向定理 1.6 的证明，该证明是对 [2] 中主要结果证明的修改。

定理的证明 定理 1.6。设 $S = \{s_1 < \cdots < s_n\}$ 为一个凸集。我们将证明 tha t

$$D_i(S) \gg i^{3/2}.$$

由于 $S$ 是凸的，因此存在一个严格凸函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得$f(i) = s_i$。

定义 $P$ 为点集

$$P = \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\} \times D_i(S).$$

令$\ell_{a,\ b}$ 表示 方程为 $y = f(x+a) - b$ 的曲线。定义 $L$ 为曲线集 s

$$L = \{\ell_{j,s_h} : 1 \le j \le n, 1 \le h \le n/2\}.$$

集合 $L$ 由同一条凸曲线的平移像组成，因此可得 Szemer´edi-Trotter 型界

$$I(P, L) \ll |P|^{2/3}|L|^{2/3} + |P| + |L|, \tag{10}$$

其中

$$I(P, L) := \{(p, \ell) \in P \times L : p \in \ell\}.$$

对于每个 $\ell_{j,\ s_h} \in L$，以及任意满足 $1 \le k - h \le i$ 的 $k$，注意到

$$(k - j, s_k - s_h) \in P \cap \ell_{j,s_h}.$$

这意味着 $I(P, L) \gg |L|i \gg n^2 i$。将此界与 (10) 比较可得

$$n^2 i \ll n^2 |D_i(S)|^{2/3} + n|D_i(S)| + n^2.$$

若右侧第三项占主导，则 $i = O(1)$，定理 1.6 显然成立。若第二项占主导，则有

$$|D_i(S)| \gg ni \ge i^{3/2}.$$

若第三项占主导，则可得所述界

$$|D_i(S)| \gg i^{3/2}.$$

□

稍微修改定理 1.6 的证明，可以证明，对于任意$G \subset [n] \times [n]$,

$$|\{s_x - s_y : (x, y) \in G\}| \gg \left(\frac{|G|}{n}\right)^{3/2}. \tag{11}$$

例如，文献[1] 和 [5]研究了受限数对的类似和积型结果。注意，当 $|G|$ 显著大于 $n$时，界（11）才有意义。文献 [6] 中的一个具有丰富差集的凸集构造表明，当 $G$ 的基数达到 $n/2$ 时，集合$\{s_x - s_y : (x, y) \in G\}$ 的基数可以小至1。

## 3. Concluding remarks

**3.1.** 和而非差。也可以考虑这个问题的一个求和版本。令 $E_i(S)$表示集合

$$E_i(S) = \{s_x + s_y : 1 \le x - y \le i\}.$$

然而，事实表明，对问题作出这一修改后，要证明一个随 $i$ 增长的非平凡界就变得相当直接。如果将 $S$ 划分为互不相交的连续块 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_t$，每个块含有 $i$ 个元素（我们可能会舍弃一些元素，以确保所有块的大小完全相同，因此 $t = \lfloor n/i \rfloor$），那么和集 $S_j + S_j$ 两两不交。于是，由 (1) 中给出的 $S_j + S_j$ 的下界可得

$$|S + S| \ge \sum_{j=1}^{t} |S_j + S_j| \gg \frac{n}{i} \cdot \frac{i^{30/19}}{(\log n)^c} = \frac{ni^{11/19}}{(\log n)^c}.$$

**3.2.** 满足 $D_{\mathcal{I}} = n+O(1)$ 的集合 $\mathcal{I}$。在定理 1.1 中，我们已经看到 $D_{\{1,2,3\}}(n) = n+2$。还存在其他基数为 3 的集合 $\mathcal{I} \subset [n-1]$，满足 $D_{\mathcal{I}}(n) = n + O(1)$。例如，我们可以通过以下递推关系定义 $S$

$$s_n = s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-6}.$$

通过适当选择 $S$ 的初始元素，集合 $S$ 是凸的。然而，这些递推关系会导出如下方程组

$$s_j - s_{j-2} = s_{j-3} - s_{j-6} = s_{j-5} - s_{j-9}, \quad \forall\ 10 \le j \le n.$$

这意味着， $D_{\{2\}}(S)$ $D_{\{3\}}(S)$ 与 $D_{\{4\}}(S)$ 中的元素基本相同，只有在这三个集合的极端位置上存在少数例外。因此，对于某个绝对常数 $C$，有 $D_{\{2,3,4\}}(S) = n + C$。似乎可以用同样的论证证明 $D_{\{k,k+d,k+2d\}}(n) = n + O_{k,\ d}(1)$。

另一方面，本文已证明 $D_{\{1,2,4\}}(n) = \frac{5n}{4} - O(1)$。这引出了以下问题：能否对具有如下性质的基数为 3 的集合 $\mathcal{I}$ 进行分类：$D_{\mathcal{I}}(n) = n + C$，其中 $C$ 是某个常数（可能取决于 $\mathcal{I}$ 的元素）？


## Acknowledgements

作者的研究获得奥地利科学基金 FWF 项目 P 34180 的资助。本研究的部分工作是在第二作者参加由 FFG 项目 895224 - JKU 青年科学家资助的实习期间完成的。我们感谢 Audie Warren 和 Dmitrii Zhelezov 提供的宝贵讨论。

## References

[1] N. Alon、I. Z. Ruzsa 和 J. Solymosi, 《图的边上的和、积与比》, Publ. Mat. 64（2020年）, 第 1 期, 143-155。[2] G. Elekes 、 M. Nathanson 和 I. Ruzsa, 《凸性与和集》, J. Number Theory. 83（1999年）, 194-201。[3] M. Z. Garaev, 《关于某些指数和的 $L_1$-范数下界》, Mat. Zametki 68（2000年）, 第 6 期, 842-850。[4] B. Hanson、O. Roche-Newton 和 M. Rudnev, 《高阶凸性与迭代和集》, Combinatorica 42（2022年）, 第 1 期, 71-85。[5] O. Roche-Newton, 《稀疏图上的和、积与伸缩集》, SIAM J. Discrete Math. 35（2021年）, 第 1 期, 194-204。[6] O. Roche-Newton 和 A. Warren, 《一个具有丰富差集的凸集》, Acta Math. Hungar. 168（2022年）, 第 2 期, 587-592。[7] M. Rudnev 和 S. Stevens, 《和积问题的最新进展》, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 173（2022年）, 第 2 期, 411-430。[8] I. Z. Ruzsa 、 G. Shakan 、 J. Solymosi 和 E. Szemer´edi, 《关于互异的连续差》, 《组合与加法数论 IV》, 425-434, Springer Proc. Math. Stat., 347, Springer, Cham, （2021年）。[9] I. Z. Ruzsa 和 J. Solymosi, 《半凸集的和集》, Canad. Math. Bull. 65（2022年）, 第 1 期, 84-94。[10] T. Schoen 和 I. Shkredov, 《关于凸集的和集》, Combin. Probab. Comput. 20（2011年）, 第 5 期, 793-798。

Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, Linz, Austria电子邮箱: Krishnendu.Bhowmick@oeaw.ac.at

电子邮箱: m.patry@outlook.at

Institute for Algebra, Johannes Kepler Universität, Linz, Austria电子邮箱: o.rochenewton@gmail.com