arXiv:2304.00901v1 [math.CO] 3 Apr 2023

霍奇拉普拉斯算子的谱单调性

OLIVER KNILL

Abstract. 若 $K \subset G$ 是有限抽象单纯复形，则 t 的特征值 he 霍奇拉普拉斯算子满足 $\lambda_k(K) \leq \lambda_k(G)$（若在左侧补齐）。

1. The theorem

1.1. 如果 d 是一个由 G 个元素组成的**有限抽象单纯复形**的**外微分**，那么 $L = D^2 = (d+d^*)^2 = dd^* + d^*d$ 就是 G 的**霍奇拉普拉斯算子**。它是一个分块对角$n \times n$ 矩阵，其中各个分块是大小为 $f_k \times f_k$ 的**k-形式拉普拉斯算子** $L_k = d_k^* d_k + d_{k-1} d_{k-1}^*$； $f = (f_0, f_1, ..., f_d)$ 是 G 的 f **向量**，用于统计 G 中基数为 $k+1$ 的元素数量 f_k。对 x 中元素的排序以及它们在列表 G 中的位置，构成一种坐标选择，并确定这些矩阵。贝蒂向量 $\vec{b} = (b_0, b_1, ...)$ 以及**贝蒂数**$b_k = \dim(\ker(L_k))$ 均不依赖于排序。

1.2. 对称矩阵 $n \times n$ matrix L 是半正定的，因为 $L = D^2$ with a symmetric matrix D。**狄拉克矩阵** $D = d + d^*$ 的正特征值和负特征值成对出现，且对角矩阵 $P(x) = (-1)^{\dim(x)}$ 将特征向量 v 映射到特征值 λ 对应的特征向量 Pv，其特征值为 $-\lambda$。因此， L 的非零特征值也成对出现。但事实不止于此：**McKean-Singer 对称性** [10] 表明，非零特征值在偶形式和奇形式之间均匀分布。通常将其写成欧拉示性数的等式：$\mathrm{str}(e^{-tL}) = \mathrm{str}(1)$，其中 $\mathrm{str}(L) = \sum_x (-1)^{\dim(x)} L_{xx}$。我们按升序排列特征值$\lambda_k(G)$。

1.3. 若 K 是 G 的子单纯复形，且含有 $m \leq n$ 个元素，则定义 $\lambda_k(K) = 0$，其中 $k \leq n-m$，以及 $\lambda_{n-m+k}(K) = \mu_k(K)$，其中 μ_k 是 m 个 K 的霍奇拉普拉斯算子的特征值，同样按**升序**排列。现在，可以将 K 和 G 的谱视为**左侧补齐**的非递减序列进行比较。 K 中有 m 个特征值， G 中有 n 个特征值，但补齐后，两个序列都含有 n 个元素。起初，由于采用了不同的补齐方式，我们遗漏了以下结果：

定理 1 (谱单调性)。 $\lambda_j(K) \leq \lambda_j(G)$ 对所有 $j \leq n$。

证明。 证明与基尔霍夫拉普拉斯算子的情形类似 L_0 [11]。 G 是一个由非空集合构成的有限集合族，并且对取有限非空子集的运算封闭。若集合 $x \in G$ 不包含于其他单形中，则称其为**局部极大**。这意味着集合 $U = \{x\}$是在非豪斯多夫**亚历山德罗夫拓扑** $\mathcal{O}$ 中的一个开集，该拓扑定义在 G 上，由基**星** $U(x) = \{y \in G, x \subset y\}$生成。若向给定复形中添加一个局部极大单形，谱便会单调变化。此外， U的霍奇拉普拉斯算子 $L(U) = D(U)^2$是其狄拉克算子 $D(U)$ 的平方。若 $K \subset G$，则 $L(K) \leq L(G)$ 在**洛温纳偏序**下成立。可以如下说明：若 $u : G \to \mathbb{R}$ 是一个向量，那么拉普拉斯二次型

日期：2023年4月2日。关键词和短语。 谱理论、霍奇算子、单纯复形。

形式是 $\langle u, Lu\rangle = \langle u, D^2u\rangle = \langle Du, Du\rangle = ||Du||^2$ ，而添加新的极大单形只会增大这个二次型，即使将其限制在线性子空间上也是如此。于是，利用 $\mathcal{S}_k = \{V \subset \mathbb{R}^n, \dim(V) = k\}$，**Courant–Fischer 定理** 便可得出

$\lambda_k(K) = \min_{V\in\mathcal{S}_k}\max_{|u|=1,u\in V}\langle u, L(K)u\rangle \le \min_{V\in\mathcal{S}_k}\max_{|u|=1,u\in V}\langle u, L(G)u\rangle = \lambda_k(G)$.

从**交错定理** 的角度来看也可以发现这一点：将其应用于 D 时， K 的狄拉克矩阵是通过删除属于新增元素 x 的行和列，从 L 的狄拉克矩阵中得到的。现在， K 的狄拉克矩阵 D_K 的特征值与 G的狄拉克矩阵 D_G 的特征值相互交错。□

1.4. 对 G的开子集也有类似的谱不等式：对所有$j \le n$， $\lambda_j(U) \le \lambda_j(G)$。论证相同。

1.5. 由于我们可以按字典序写出复形 G （可以把 $x \in G$ 想成一个“单词”，然后像查字典一样排列各元素，较短的单词排在前面），其中**顶点集** $V = \bigcup_{x\in G} x$ 是全序集，而 $\dim(x)$ 给出一个偏序，因此列表中的最后一个元素总是局部极大的。子集序列 $G_k = \{x_1, \dots, x_k\}$ subset $G = \{x_1, \dots, x_n\}$ 现在构成一个**莫尔斯滤过**。步骤 $G_k \to G_{k+1}$ 将$f_{\dim(x_{k+1})}$增加一个，并使$b_{\dim(x_{k+1})}$ 增加或使$b_{\dim(x_{k+1})-1}$ 减少，从而确保超和$\sum_k(-1)^k f_k$ 和 $\sum_k(-1)^k b_k$ 始终保持不变。由于每个新的 k-单形都自然地粘接到一个$(k-1)$维球面上，这也说明每个单纯复形自然都是一个**有限抽象 CW 复形**。（我们在 [6]中用到了这一结构。与有限抽象单纯复形一样，这里从不涉及几何实现。）G 的 CW 结构比 G 包含更多信息，因为它还使用了 G上的一个次序。一个给定的单纯复形可以有许多不同的 CW 实现。在每次扩展 $G \to G \cup \{x\}$ 之前，我们可以例如重新排列 $V = \bigcup_{x\in G} x$上的全序。也可以从莫尔斯函数 f 的角度来看这个 CW 复形，该函数对 G 中的元素进行编号，使得 $\{f \le k\} = G_k$。

1.6. 闭子复形 $K \subset G$ of G 可以视为由星生成的有限拓扑中的一个**闭集** $\mathcal{O}$。补集 U 是开集。外微分也可以针对开集 $U = G \setminus K$定义。离散情形中的一个新特点是，可以为**开集定义上同调**。与单纯复形嵌入连续统的情形不同，这里的拓扑$\mathcal{O}$ 是非豪斯多夫的。它属于扎里斯基型，因为闭子集是子单纯复形。将空间 G 分成一个开集 U 和一个闭集 K 的做法，为迈耶–维托里斯提供了一种新方法，因为两者没有交叠。我们将在别处讨论这一点。

1.7. 对任意开集或闭集及霍奇拉普拉斯算子 L，都有一个**贝蒂向量** $b = (b_0, b_1, \dots, b_d)$，其中 b_k是 $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots L_d$中第 k 个块的零度。我们还有 f**向量** $f = (f_0, f_1, \dots, f_d)$，其中整数 f_k 表示复形中 k 维部分的数量。对于开集和闭集，**欧拉 – 庞加莱´公式** $\chi = \sum_k(-1)^k f_k = \sum_k(-1)^k b_k$ 均成立。请注意，在开集的情形下，我们有时需要处理一些**霍奇块** 0×0 矩阵，其谱为空。

1.8. 例如，我们很容易看出，每个 f**-向量** $f \ge 0$ 和每个 **贝蒂向量**$b \ge 0$都可以由开集实现。对于闭集，也就是子单纯复形，我们尚不清楚如何刻画可能的贝蒂向量集合；但对于 f-向量，已有**克鲁斯卡尔-卡托纳** 刻画。要用开集实现给定的 f-向量 $f \ge 0$ ，只需取 U 若干个非空集合的不交并集，使这些集合的基数分别为 $k+1$、 ， ，那么 b（U）$= f$（U）就与预先指定的 f一致，而且在这种情况下甚至 $b = f$。开集

$U = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5,6,7,8\},\{9,10,11,12\}\}$ 例如实现了 $\vec{f} = (3,\ 1,\ 0,\ 2)$。霍奇拉普拉斯算子是一个含有 4 个块的 6×6 矩阵。 L_0 是 3×3 零矩阵， L_1 是一个 1×1 零矩阵， L_2 是 0×0 矩阵，而 L_3 是 2×2 零矩阵。

1.9. 现在可以比较 $L_{U,K} = L_U \oplus L_K$ 的谱（其中 U 和 K 不相交）与 L_G 的谱，在后者中这两个集合合并在一起。两个矩阵 $L_{U,K} = L_U \oplus L_K$ 和 L_G 都是对称 $n\times n$ 矩阵。虽然 $\sigma(L_{U,K}) \leq \sigma(L_G)$ 通常并不成立，但我们将在别处看到，通过使用适当函数 g 的**维滕变形** $d_s = e^{-gs} d e^{gs}$ ，我们可以使外微分 d_G 和 $d_{U,K} = d_U \oplus d_K$ 满足这一谱不等式。维滕变形不会改变 L_k 的核的维数，因此会保留零谱。不过，它可以使其他特征值发生变化。根据实验，我们看到 $\sigma(L_{U,K}) \leq 2\sigma(L_G)$，但这尚未得到证明。

1.10. 通过选择一个支撑于 K 和 U 的界面集上的函数 g ，我们可以改变关注点。对于足够大的 s，我们便得到 $\sigma(L^{(s)}_{U,K}) \leq \sigma(L^{(s)}_G)$。由于零特征值在维滕变形下不会改变，这尤其可以确立**融合不等式** $\vec{b}_U + \vec{b}_K \geq \vec{b}_G$，这表明在一个开集与一个闭集融合的过程中，可能会生成新的调和形式，但不会失去任何调和形式。本文暂且只宣布这一不等式，并希望在未来的文章中进一步讨论。

1.11. 单调性定理1表明，当 $U = \{x\}$ 是仅含一个点 x 的开集时，若 U 的霍奇拉普拉斯算子是一个 1×1 矩阵，且 $\sigma(L_U) = \{0\}$ ，则有 $\sigma(L_{U,\ K}) \leq \sigma(L_G)$。对于像单点集 $U = \{x\}$ 这样的开集，当 $\dim(x) \neq k$ 时，所有 k-形式拉普拉斯算子都是 1×1 零矩阵。

1.12. 一个简单的例子是，融合等式成立 $\vec{b}_U + \vec{b}_K = \vec{b}_G$ 的情形：闭区间 $K = \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ 和开区间 $U = \{\{3\},\{4\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}$ 合并为一个圆 $G = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\ \{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}$，从而得到 $\vec{b}(K) = (1, 0)$、 $\vec{b}(U) = (0, 1)$ 和 $\vec{b}(G) = (1, 1)$。这可以推广到任意维数：一个 d 维球面 G 是一个开 d 维球 U（对应 $\vec{b}(U) = (0, \cdots, 0, 1)$）与一个闭 d 维球 K（对应 $\vec{b}(K) = (1, 0, \ldots, 0)$）的并，两者相加得到 $\vec{b}(G) = (1, 0, \ldots, 0, 1)$。

1.13. 一个小例子，其中融合不等式是严格不等式： $\vec{b}_U + \vec{b}_K > \vec{b}_G$ 是 $K = \{\{1\},\{2\}\}$ 与 $U = \{\{1,2\}\}$ 合并到 $G = \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，并且 $\vec{b}(K) = (2,\ 0)$， $\vec{b}(U) = (0,\ 1)$，以及 $\vec{b}(G) = (1,\ 0)$。这里有 $\sigma(L_{K,\ U}) = \{0, 0, 0\}$ 和 $\sigma(G) = \{0, 2, 2\}$。一个调和 1-形式和一个调和 0-形式合并了。

1.14. 定理中的不等式对 k-形式的每个扇区都成立。只有添加一个 $(k-1)$ k 维或 $(k+1)$维单形时，k-形式拉普拉斯算子的谱才会改变。无论如何，最好说明分别限制在各阶形式拉普拉斯算子上的单调性：

推论 1(形　　式单调性). $\lambda_j(L_{k,K}) \leq \lambda_j(L_{k,G})$ 对于所有 $j \leq n$ 且 $0 \leq k \leq$ 维数(G) .

1.15. 如此看来，该结果推广了基尔霍夫拉普拉斯算子的相应结果 L_0；这一结果通常在图论 [11] 中表述，并以谱单调性 [2]为基础。若 $G = (V, F)$是 $K = (V, E)$的子图，则基尔霍夫拉普拉斯算子的特征值满足$\lambda_k(K) \leq \lambda_k(G)$。对于一维单纯复形，1-形式拉普拉斯算子 $L_1 = d_0 d_0^*$ 与 $L_0 = d_0^* d_0$基本等谱。一般而言，**McKean-Singer 对称性** 保证$\bigcup_{k\text{偶}} L_k$ 与$\bigcup_{k\text{奇}} L_k$ 基本等谱，即它们具有相同的非零特征值。

1.16. 我们利用 McKean-Singer 对称性证明，通常情况下，霍奇谱无法确定单纯复形 [3] 。这并不令人意外，因为在连续情形中，米尔诺针对流形上的卡茨逆谱问题给出的首批反例，已经提供了霍奇等谱例子。逆谱问题仍有许多值得探索之处。若不知道特征值属于哪个 k-形式扇区，能否仅凭谱读出贝蒂向量？若已知该复形所有重心细分的特征值，能否重建这个单纯复形？能否根据霍奇谱和连接拉普拉斯算子的谱重建该复形？

1.17. 考察为单纯复形 G 定义的其他拉普拉斯算子时，这个定理或许会显得更令人意外一些。**连接拉普拉斯算子** 定义为：若 $x \cap y$ 非空，则为 $H_{xy} = 1$；否则为 $H_{xy} = 0$ 。在这种情况下，我们看不出 K 与 G 的特征值之间有什么关系。虽然大多数特征值满足 $\lambda_j(K) \leq \lambda_j(G)$，但这并非普遍成立。此外，虽然$H(G)$ $H(K)$ 是幺模的 [6]，但对于开集而言并非如此：$H(U)$ 通常是奇异的。一般来说，霍奇拉普拉斯算子的谱往往比连接拉普拉斯算子的谱更大，但这也并非普遍成立。对于一维复形 [5]，连接拉普拉斯算子与霍奇拉普拉斯算子之间存在一种关系：我们称之为氢恒等式 $L = H - H^{-1}$。

1.18. 单纯复形的**复杂度** $\mathrm{Det}(L(G))$定义为霍奇拉普拉斯算子的伪行列式[4] $\prod_{k,\ \lambda_k \neq 0} \lambda_k(G)$。森林量 $\det(L(G)+1)$也具有单调性[4, 9]。另外值得关注的还有**总能量** $\mathrm{tr}(L) = \sum_j \lambda_j$，即$L$的特征值之和。定理（1）可立即推出：

推论 2 （复杂度具有单调性）。若 $K \subset G$，则 $\mathrm{Det}(L(K)) \leq \mathrm{Det}(L(G))$，$\det(L(K)+1) \leq \det(L(G)+1)$ 且 $\mathrm{tr}(L(K)) \leq \mathrm{tr}(L(G))$。

1.19. 到目前为止，我们甚至在所有实验中都观察到 $\mathrm{Det}(L(G)) \geq \mathrm{Det}(L(K))\mathrm{Det}(L(U)))$，且 $\mathrm{tr}(L(G)) \geq \mathrm{tr}(L(K)) + \mathrm{tr}(L(U)))$，但这并不能由已有结论推出。如果将 L 的伪行列式视为单纯复形**复杂度** 的度量，并将迹视为该复形的**总能量** ，这些现象便很直观。但这些更强的不等式尚未得到证明。

1.20. 这里有一些代码，可用于计算开集或闭集 K 及其补集 U的谱。我们还添加了计算一些基本数据的代码，例如 f-向量、贝蒂向量、伪行列式、欧拉示性数、迹和解析挠率。由于伪行列式 $\mathrm{Det}(L_0)$ 是由 $V = \bigcup_{|x|=1} x$ 和 $E = \bigcup_{|x|=2} x$构成的图的 **骨架复形** (V, E) 中有根生成树的数量，因此可以将 $\mathrm{Det}(L)$ 解释为高维树的超计数。这出现在 **解析挠率** $A(G) = \prod_k \mathrm{Det}(L_k)^{k(-1)^{k+1}}$ [7] 的背景下，该值与 **超伪行列式**$\prod_k \mathrm{Det}(D_k)^{(-1)^k}$ （即 **狄拉克块** $D_k = d_k^* d_k$的超伪行列式）一致。

1.21. 对于基尔霍夫矩阵 L_0，我们已在 [8] 中证明 $\lambda_k \leq a_k + a_{k-1}$，其中 a_k 是 L_0的对角元素，即顶点度，而 $a_0 = 0$。（这里我们使用字母 a_k，因为 d_k，b_k 已用于外微分或贝蒂数。）这个上界在霍奇情形下并不总是成立。为了得到界，首先需要得到类似于谱半径的 Anderson-Morley 界 [1] 。我们目前认为 $\lambda_k \leq 2a_k + a_{k-1} + a_{k-2}$ 可行，因为在零维情形下，我们只需处理 $L_0 = d_0^* d_0$ ；而对于一般的k-形式，我们有 $L_k = d_k^* d_k + d_{k-1} d_{k-1}^*$。

```
F[G_]:=模[{l=映射[长度,G]}, If[G=={}, {},
 表[和[如果[l[[j]]==k,1,0],{j,长度[l]}],{k,最大[l]}]]];          s[x_]:=置换符号[x];L=长度;
s[x_,y_]:=如果[子集Q[x,y]&&(L[x]==L[y]+1), s[前置[y,补集[x,y]]]]*s[x],0];
狄拉克[G_]:=模[{f=F[G],b,d,n=长度[G]},b=前置[表格[求和[f[[l]],{l,k}],{k,长度[f]}],0];
 d=表格[s[G[[i]],G[[j]]],{i,n},{j,n}];      {d+转置[d],b}];
霍奇[G_]:=模[{Q,b,H},{Q,b}=狄拉克[G];H=Q.Q;表格[表格[H[[b[[k]]+i,b[[k]]+j]],
 {i,b[[k+1]]-b[[k]]},{j,b[[k+1]]-b[[k]]}],{k,长度[b]-1}]];
贝尔特拉米[G_]:= 模块[{B=狄拉克[G][[1]]}, B.B];      nu[A_]:=如果[A=={}, 0, 长度[零空间[A]]];
贝蒂[G_]:=映射[nu, 霍奇[G]];
闭包[A_]:=如果[A=={}, {}, 删除[并集[排序[扁平化[映射[子集, A], 1]]], 1]]; 闭=闭包;
惠特尼[s_]:=如果[长度[边列表[s]]==0, 映射[{#}&, 顶点列表[s]],
   映射[排序, 排序[团[查找团[s, 无穷, 全部]]]]];
开星形[G_, x_]:=模[{U={}},执行[如果[子集判定[G[[k]],x],U=追加[U,G[[k]]]],{k,长度[G]}];U];
基底[G_]:=表[开星形[G,G[[k]]],{k,长度[G]}];                星形=基底;
随机开集[G_, k_]:=模块[{A=随机选取[B原样[G],k],U={}},执行[U=并集[U,A[[j]]],{j,k}];U];
F向量[G_]:=如果[长度[G]==0,{}, 删除[BinCounts[映射[长度,G]],1]];
第一个非零项[f_]:=-(-1)^数组规则[截断[f]][[1,1]]          数组规则[截断[f]][[1,2]];
伪行列式[A_]:=如果[A=={},1,第一个非零项[系数列表[特征多项式[A,x],x]]];
F向量[G_,U_,K_]:={"f G=", F向量[G],"f U=", F向量[U],"f K=", E向量[K]};
w[x_]:=-(-1)^长度[x];          dim[x_]:=长度[x]-1;      欧拉示性数[A_]:=总计[映射[w,A]];
欧拉示性数[G_,U_,K_]:={"X(G)=␣", 欧拉示性数[G],"X(U)=␣", 欧拉示性数[K],"X(U)=␣", 欧拉示性数[U]};
Betti[G_,U_,K_]:={"b G=", Betti[G],"b U=", Betti[U],"b K=", Betti[K]};
扭率[G_]:=模[{u=映射[伪行列式, 霍奇[G]],k},
   乘积[如果[偶数[k],u[[k]]^(k-1),1/u[[k]]^(k-1)],{k,长度[u]}]];
联络拉普拉斯算子[G_]:=模[{n=长度[G],A=表[1,{n},{n}]},
   当[如果[不相交[G[[k]],G[[l]]],A[[k,l]]=0],{k,n},{l,n}];A];

G=惠特尼[随机图[{20,50}]];U=随机开集[G,10];K=补集[G,U];
KK=贝尔特拉米[K];GG=贝尔特拉米[G]; UU=贝尔特拉米[U];特征值[L_]:=排序[特征值[1.0*L]];
打印[Betti[G,U,K]];      打印[F向量[G,U,K]];          打印[欧拉示性数[G,U,K]];
打印[{"tr(G)=␣",迹[GG],"␣K的迹=␣",迹[KK],"␣U的迹=␣", 迹[UU]}];
打印[{"G的行列式=␣", 伪行列式[GG],"␣行列式(K)=␣",伪行列式[KK],"␣行列式(U)=␣",伪行列式[UU]}];
打印[N[伪行列式[GG]/(伪行列式[KK]*伪行列式[UU])]]
打印[{"T(G)=␣", 扭率[G],"␣T(K)=␣", 扭率[K],"␣T(U)=␣", 扭率[U]}];

打印["The␣谱的差异由–保证为非负␣␣␣␣␣定理␣1␣␣␣"];
{EG,EK,EU}=左侧填充[映射[ev,{GG,KK,UU}]];列表绘图[{EG–EK,EG–EU},Joined–>True]

打印["这␣成立。␣对于每个k形式␣根据␣推论␣␣␣␣"];
m=长度[霍奇[K]];表[KK=霍奇[K][[k]];          GG=霍奇[G][[k]];    UU=霍奇[U][[k]];
{EG,EK,EU}=左侧填充[映射[ev,{GG,KK,UU}]];      列表绘图[{EG–EK,EG–EU},Joined–>True],{k,m}]

Print["能量不等式␣␣对于L_{K,U}=L_K+L_U和L_G并不总是成立␣␣␣␣␣"];
列表绘图[{ev[GG],排序[合并[ev[KK],ev[UU]]]}, 已连接–>真]
```

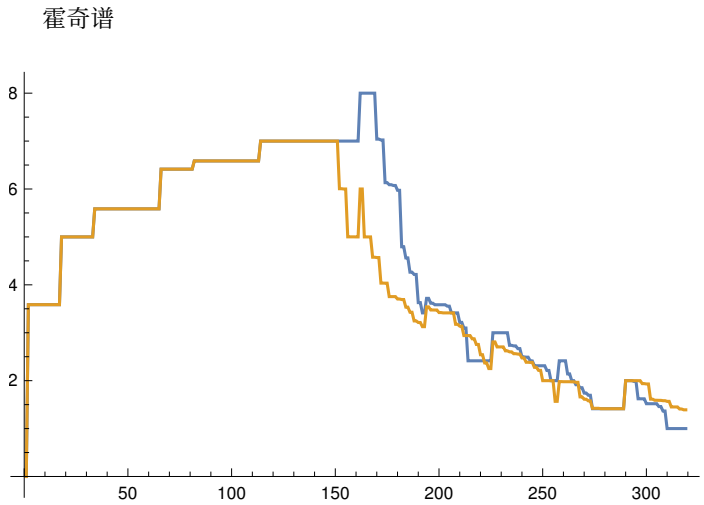

FIGURE 1. 根据定理得到的谱之差。我们可以看到，差值既有 $\sigma(L_G) - \sigma(L_K)$（橙色），也有 $\sigma(L_G) - \sigma(L_U)$（蓝色）

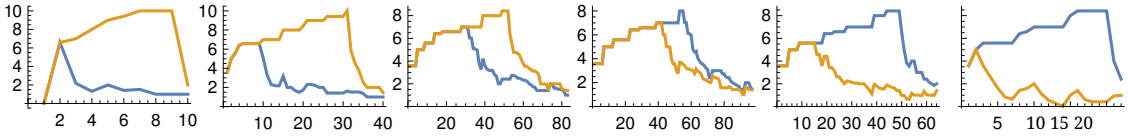

FIGURE 2. 形式拉普拉斯算子之差如图所示，用以说明该推论。在某些扇区中，$\sigma(L_G) - \sigma(L_U)$ 占主导；而在另一些扇区中，$\sigma(L_G) - \sigma(L_K)$ 占主导。

REFERENCES

[1] W.N. Anderson和T.D. Morley。图的拉普拉斯算子特征值。《线性与多重线性代数》，18(2):141–145，1985。[2] R.A. Horn和C.R. Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，第二版，2012。[3] O. Knill。图论中的麦基恩–辛格公式。http://arxiv.org/abs/1301.1408，2012。[4] O. Knill。伪行列式的柯西–比内公式。《线性代数及其应用》，459:522–547，2014。[5] O. Knill。拉普拉斯算子的氢恒等式。https://arxiv.org/abs/1803.01464，2018。[6] O. Knill。单纯复形的能量。《线性代数及其应用》，600:96–129，2020。[7] O. Knill。图的解析挠率。https://arxiv.org/abs/2201.09412，2022。[8] O. Knill。基尔霍夫拉普拉斯算子的特征值界。https://arxiv.org/abs/2205.10968，2022。[9] O. Knill。树-森林比。https://arxiv.org/abs/2205.10999，2022。[10] H.P. McKean和I.M. Singer。曲率与拉普拉斯算子的特征值。《微分几何杂志》，1(1):43–69，1967。[11] D.A. Spielman。谱图论。讲义，2009。

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HARVARD UNIVERSITY, CAMBRIDGE, MA, 02138