arXiv:2304.00905v2 [math.PR] 7 Feb 2024

布朗树之间的最大一致子树与赫尔德同胚

Thomas BUDZINSKI* 与 DelphinSÉNIZERGUES†

2024年2月8日

摘要

我们证明，对于大小为 n 的两棵均匀随机、相互独立且带叶节点标记的二叉树，其最大公共子树的大小通常小于 $n^{1/2-\varepsilon}$，其中某个 $\varepsilon > 0$。我们的证明依赖于离散随机树与布朗树之间的耦合，以及 Aldous 提出的布朗树递归分解。与此同时，我们还证明，几乎必然不存在两个布朗树的独立副本之间的$(1-\varepsilon)$-赫尔德同胚。

1 引言

最大一致子树。设 t, t′ 是两棵有 n 个叶子、叶子标记为 1 到 n 的二叉树。t 和 t′ 的最大一致子树是满足以下条件的最大子集 I $\subset \{1, \ldots, n\}$ 的大小：由 I 中的标签诱导出的 t 和 t′ 的子树相同（如图 1 所示，精确定义另见第 2 节.1）。这一数量记为 MAST(t, t′)，由 Gordon 和 Finden [15, 14] 引入，用于衡量系统发育学中不同分类方法所得结果的兼容性。它也是一个研究已久的排列最长递增子序列问题的推广，并且这两个问题有许多相似之处（例如 [5] 中所述）。此后，人们从算法、极值和概率等角度对其进行了研究。特别地，MAST(t, t′) 可以在关于 n 的多项式时间内计算 [29]。在极值方面，所有大小为 n 的带叶标记二叉树对 (t, t′) 中，MAST(t, t′) 的最小可能值已知为 log n 阶（上界见 [20]，下界见 [23]）。

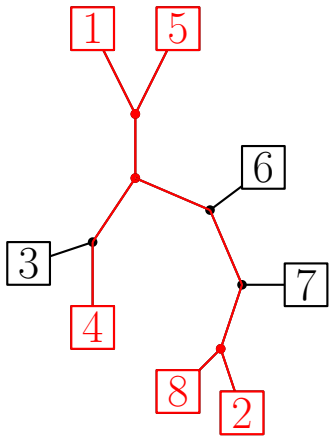
随机树的最大一致子树。另一个自然的问题是，了解最大一致子树的典型数量级，也就是随机变量 MAST(T_n, T′n)，其中 T_n 和 T′n 是大小为 n 的随机树。最自然的模型是：T_n 和 T′n 相互独立，并从大小为 n 的带标记二叉树集合中均匀抽取。Bryant、McKenzie 和 Steel [10], 最先研究了这一模型，他们通过一阶矩计算证明，MAST(T_n, T′n) 以高概率为 O($\sqrt{n}$)。他们还提供了数值证据，表明对于某个接近 12 的 β，MAST(T_n, T′n) 的量级应为 n^{β}。另一方面，Bernstein、Ho、Long、Steel、St. John 得到了一个量级为 $n^{1/8}$ 的多项式下界

以及 Sullivant 在 [7] 中的结果。Aldous [5] 最近将这一上界改进为 $n^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \approx n^{0.366}$，Khezeli [19] 则证明了其期望为 $n^{0.4464}$。最后，我们还要指出，若树 T_n 和 T'_n 被条件化为具有相同的形状 [25], , 则已证明 $\sqrt{n}$ 是正确的数量级；而对于许多由分枝过程产生的随机树模型，$\sqrt{n}$ 中的上界也稳健成立 [27]。

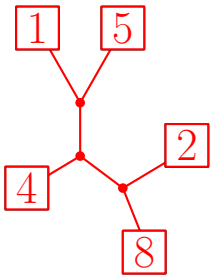
*里昂高等师范学院和法国国家科学研究中心。

†MODAL'X，UPL，巴黎南泰尔大学，法国国家科学研究中心，法国南泰尔 F92000。

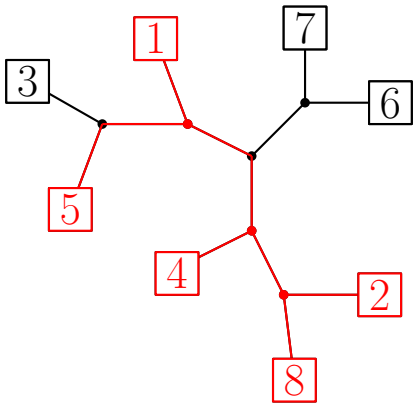
thomas.budzinski@ens-lyon.fr
dsenizer@parisnanterre.fr



(a) 一棵树t 及其诱导子树$t|_I$



(b) 树$t|_I = t'|_I$



(c) 一棵树t' 及其诱导子树$t'|_I$

图 1：两棵带标号二叉树t 和t' 及其最大公共子树，该子树由集合$I = \{1, 2, 4, 5, 8\}$诱导。

本文的主要贡献是证明，在独立模型中，上界 $\sqrt{n}$ 实际上并非最优；Aldous 曾在 [5]中提出这一猜想。

定理 1. 对所有 $n \geq 3$，设 T_n 和 T'_n 是两棵大小为 n 的独立均匀带标号二叉树。存在常数 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{MAST}(T_n, T'_n) < n^{1/2-\varepsilon_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

更具体地说，我们发现可以取 $\varepsilon_1 = 10^{-338}$ （关于显式常数的讨论见第5.1节）。我们没有尝试优化这些常数，这个值应该很容易改进，但我们认为，我们的证明策略无法给出一个“合理”的下界（例如 $\varepsilon_1 = 10^{-6}$）。我们还指出，我们的论证足以证明，对于某个 $a > 0$，$\mathrm{MAST}(T_n, T'_n)$ 大于 $n^{1/2-\varepsilon_1}$ 的概率为 $O(n^{-a})$，并且对于某个 $\varepsilon > 0$，$\mathbb{E}[\mathrm{MAST}(T_n, T'_n)] \leq n^{1/2-\varepsilon}$（简要讨论见第5.2节）。

与布朗树的比较。 如前所述，文献中已证明 [25] 两个形状相同的树，其最大一致子树的规模通常为 $\sqrt{n}$ 的量级。因此，我们的策略基于这样一个事实：两棵独立的大型随机树在每个尺度上都具有“不同的形状”。为了将这一点形式化，我们大量利用 T_n 的连续缩放极限。它具有良好的尺度不变性，并且可以据此进行更明确的计算。

更准确地说，我们记 $\mathcal{T}$ 为布朗树，它是 T_n 的缩放极限，将其视为带测度度量空间，其中距离按 $\sqrt{n}$ 归一化，质量按 n 归一化。这种紧致连续随机树的分形维数为 2，最早于 [2] 提出，并可通过标准化布朗离差以自然的方式构造（完整定义见第 2.2 节）。它还有一个重要性质：其分支点的度均为 3。我们强调，对离散树 T_n 与连续对象 $\mathcal{T}$ 的比较，已经在证明 [5] 和 [19] 的下界时发挥了重要作用。

布朗树的赫尔德同胚。 由于证明定理1 需要比较两个独立副本 $\mathcal{T}$的形状，我们在此过程中得到了以下具有独立意义的结果。

定理 2. 设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 是布朗树的两个独立副本。存在一个常数 $\varepsilon_2 > 0$，使得几乎必然不存在从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{T}'$ 的 $(1-\varepsilon_2)$- 赫尔德同胚。

正如在定理 1 中一样，我们发现可以取 $\varepsilon_2 = 10^{-338}$，但我们并未尝试对其进行优化。尽管定理 1 和定理 2 中没有一个能轻易推出另一个，但它们彼此密切相关。事实上，如图 1 所示，两棵树 T_n 和 T'_n 的一个公共子树在 T_n 的一部分与 T'_n 的一部分之间给出了一个“对应关系”，在连续极限下可将其延拓为一个同胚。这并非一个全新的想法，因为 [5] 的论证（以及 [19] 中所作的改进）已经可以被解释为证明了从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{T}'$ 的、具有某个赫尔德指数的同胚的存在。正如我们在下文附录中的定理 22 所验证的，[5] 给出的实际赫尔德指数结果为 $5-2\sqrt{6}\approx 0.10\underline{1}0$。更一般地，在几何学文献中，关于非常不同对象的、类似于定理 2 的陈述以赫尔德等价之名出现。在几何学中，这个问题通常具有如下形式：给定一个与 $\mathbb{R}^n$ 同胚的度量空间 X，从 $\mathbb{R}^n$ 到 X 的同胚的最优赫尔德指数是多少？一个直接的上界是 $\mathrm{n}\,\dim_H(\mathrm{X})$，其中 $\dim_H(\mathrm{X})$ 是 X 的豪斯多夫维数。关于在诸如次黎曼流形或接触流形等特定情形下得到的改进上界，我们参见 [16]。然而，我们这里的情形非常不同，因为所涉及的布朗树并非流形，因此我们的论证并无任何共同之处。我们的情形与 Gromov 所研究的情形之间的另一个差别是：我们证明了，在同胚两侧具有相同豪斯多夫维数的背景下，赫尔德指数不可能任意接近于 1。

我们还注意到，如果将“定理 2 中的“$(1-\varepsilon)$-Hölder”替换为“利普希茨”[1]，那么该定理就会变得相当简单。最后，我们指出，我们的结果与以下文献中证明的结果有相似之处：[6, 定理 1.2、定理 1。7]，后者研究的是一种截然不同的模型（随机可分排列的最长递增子序列）。更准确地说，[6] 中的证明旨在说明，随机树不可能包含一个满足某些性质的大子树；这一结果改进了基于一阶矩方法得到的上界，并通过与连续对象进行比较得以证明。最新的预印本 [9] 通过仔细分析布朗树及其相关的碎裂过程，改进了他们的结果（并且还给出了一些下界）。

布朗树的递归分解。 为了更准确地说明定理 1和定理 2 的共同之处，我们介绍证明中一项重要的工具；它已在 [5]中发挥了关键作用。这是一种对布朗树进行随机化递归分解的方法 $\mathcal{T}$，由 Aldous 提出 [4]。这种分解通过选取 3 个独立均匀随机点 X_1,X_2,X_3，在 $\mathcal{T}$处将其分成三部分；分割位置是唯一一个将 分开的分支点 X_1,X_2,X_3,，然后在这三部分中分别迭代该分解（完整定义见第 2.5 节）。经过 k 步后，我们得到 $\mathcal{T}$ 的一个（随机）划分，分为 3^k 个区域，并由集合 $\mathbb{T}_3^k$ 索引。我们将这些区域记为 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}])^{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k}$。这种分解具有非常好的独立性性质，我们将在后文中大量利用。

现在我们可以陈述一个关键结果，用于证明定理 1和定理2。该结果大致表明，两个独立实现 $\mathcal{T}$，$\mathcal{T}'$ 的布朗树之间的同胚不可能是“近乎保测度”的，具体而言，它必须将$\mathcal{T}$中的“大多数”区域映射到 $\mathcal{T}'$ 中质量小得多的区域。我们用 $|A|$ 表示子集 A 的测度，其中该子集取自一棵布朗树。

命题 3。 设 $\mathcal{T}$及 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}])^{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k}$ 为一棵布朗树及其递归分解，并设 $\mathcal{T}'$ 为 $\mathcal{T}$的一个独立副本。存在常数 ξ，$\eta>0$ 使得当 k 充分大时，以下结论几乎必然成立：对于任意同胚 Ψ：$\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$，若将指标集合 $U^{k,\Psi}\subset\mathbb{T}_3^k$ 定义为

$$U^{k,\Psi}:=\left\{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k \;\middle|\; |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|>e^{-\eta k}\,|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|\right\},$$

那么，集合 $E^{k,\Psi}:=\bigcup_{\mathbf{i}\in U^{k,\Psi}}\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 中，$\mathcal{T}$的测度至多为 $e^{-\xi k}$。

[1]例如，取 $\mathcal{T}$的一个较大的分支点b_1，并考虑一个“异常尺度” δ，在该尺度上b_1 与另一个分支点b_2的距离异常近。于是，$\Psi(b_1)$ 必须是 $\mathcal{T}'$的一个较大的分支点，而 $\Psi(b_2)$ 必须是 $\mathcal{T}'$ 的一个分支点（尺度为 $\approx\delta$），且非常靠近 $\Psi(b_1)$；这种点不太可能存在。

由此结果几乎可以立即推出定理 2。另一方面，为了从命题 3 推出定理 1，我们将依赖于离散随机树 T_n 与连续树 $\mathcal{T}$ 之间良好的耦合。接着，我们可以论证，T_n与 T'_n 之间的公共子树可以扩展为一个从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{T}'$的同胚 Ψ。命题 3 保证，对于大多数区域 $\mathcal{R}(i)$，$\mathcal{R}(i)$ 或 $\Psi(\mathcal{R}(i))$ 都很小，因此当 T_n 与 $\mathcal{T}$ 耦合、T'_n 与 $\mathcal{T}'$耦合时，只有少数标签会同时出现在 $\mathcal{R}(i)$ 和 $\Psi(\mathcal{R}(i))$ 中。最后，我们将对每个这样的区域使用经典的平方根上界（引理 19）。

命题 3 的证明思路。最后，我们来谈谈命题 3 证明背后的一些思路。证明大致在于说明，对树 $\mathcal{T}$ 进行某种多尺度探索时，与在 $\mathcal{T}'$中进行的类似探索会出现许多“不匹配”，我们认为这是本研究的主要创新之处。固定一个典型点 $x \in \mathcal{T}$，并设想我们试图构造一个从 $\mathcal{T}$到 $\mathcal{T}'$的“良好”同胚。通过考察点 x 周围递归分解中越来越小的区域，我们可以用一个序列 $(f(x)_j)_{j\geq 0}$ 来编码 x 的一系列嵌套邻域的质量，其中 j 表示逐渐减小的尺度。我们将论证，不可能找到 $x' \in \mathcal{T}'$，使得对于大多数尺度 j，$f(x')$ 与 $f(x)$ 都非常接近。这意味着，x 周围某个小区域的质量与其像在 $\Psi(x)$ 周围的质量之比，无法随着该区域的尺度减小至 0 而保持“稳定”。通过一种“类似鞅”的论证，我们将得出结论：这个比值必定快速衰减，从而得到命题 3。这在某种程度上让人联想到 [6], 的一些思路：“难以找到大的子结构，因为每个尺度上都会损失一定比例的质量”。

论文结构。在第2节中，我们将介绍证明所需的所有离散与连续对象的定义，以及布朗树及其递归分解的一些基本性质。第3 节是论文的核心部分，专门用于证明命题3，这构成了大部分工作。在第4节中，我们完成主要定理的证明。在第5节中，我们讨论证明所给出的 ε_1 和 ε_2 的定量取值，并提出一些开放问题。在附录A 中，我们构造了一个从 $\mathcal{T}$到 $\mathcal{T}'$的赫尔德同胚。

致谢。作者感谢 Omer Angel 就本文所研究模型的各个方面进行了许多有益的讨论。他们也感谢 Nicolas Curien 的宝贵讨论，并感谢 Valentin Féray 指出了与 [6, 9]的类比。他们还感谢匿名审稿人提出的建设性意见和建议。D.S. 的研究是在 FP2M联合会（法国国家科学研究中心 FR 2036）框架内开展的。

目录

1 引言 1
2 定义与预备知识 5
2.1 带标记二叉树与最大一致子树 . 5
2.2 布朗树 . 5
2.3 狄利克雷分布与贝塔分布 . 6
2.4 离散与连续随机树之间的耦合 . 7
2.5 Aldous递归分解 . 9
3 命题 3 的证明 13
3.1 寻找不匹配 . 13
3.2 鞅论证 . 19

4 主要结果的证明 224.1 赫尔德同胚 .224.2 最大公共子树界 .234.3 改进的平方根界 .25

5 结果讨论 275.1 显式常数 .275.2 备注与开放问题 .28

2 定义与预备知识

2.1 带标记二叉树与最大一致子树

一棵有限树 是一个有限的、连通且无环的图。有限二叉树 t 是指所有顶点的度均为 3 或 1 的有限树。度为 3 的顶点称为t 的节点，度为 1 的顶点称为它的叶子。一棵大小为 n 的带标记二叉树 ≥ 2 是恰有n 个叶子（因此有$n - 2$ 个节点）的有限二叉树，其中部分叶子标有整数，且每个标记最多出现一次。按照惯例，我们也称一个没有边的单顶点为大小为 1 的二叉树，空树为大小为 0 的二叉树。

对于$n \geq 1$，我们用 $\mathcal{B}_n$ 表示所有n 个叶子均带有标签，且标签为 $1, \ldots, n$的这类树的集合（在文献中有时称为分支图），其中树按同构关系取等价类。需要强调的是，我们考虑的树没有根，也不是平面树（即固定顶点的邻点之间不存在顺时针排列）。

我们回顾一下，对于所有$n \geq 3$，都有

$$\#\mathcal{B}_n = (2n-5)!! = 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-7) \cdot (2n-5).$$

在全文中，我们用 T_n 表示 $\mathcal{B}_n$ 上的一个均匀随机变量。我们还用 $\mathrm{T}'\mathrm{n}$ 表示 T_n 的一个独立副本。若 $\mathrm{t} \in \mathcal{B}_n$，且 I 是 $\{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ 的一个子集，我们用 $\mathrm{t}|_I$ 表示由 I 诱导的 t 的子树。更准确地说，这是通过仅保留连接 I 中各标签的路径，并将过程中可能出现的度为 2 的顶点收缩而得到的带标记二叉树（见图 1）。注意，$\mathrm{t}|_I$ 不属于 $\mathcal{B}_{\#I}$，除非 $\mathrm{I} = \{1, \ldots, \mathrm{k}\}$。若 $\mathrm{t}, \mathrm{t}' \in \mathcal{B}_n$，我们记作

$$\mathrm{MAST}(t, t') = \max\left\{\#I \,\middle|\, I \subset \{1, \ldots, n\} \text{ such that } t|_I = t'|_I\right\},$$

其中，$t|_I = t'|_I$ 表示$t|_I$ 和$t'|_I$ 作为叶标记树是同构的。

若 v_1,v_2 是有限二叉树中的节点，则由 v_1,v_2 界定的 t 的区域 r，是将节点 v_1 和 v_2 分别扩展为三个叶子后所得森林的一个连通分支。特别地，它是一棵带标记二叉树，其中来自 v_1 或 v_2 的叶子没有标记。我们用 #r 表示属于区域 r 的 t 的原始叶子数，并称此数量为 r 的大小。若 t、t′ 是两棵带标记二叉树，且 $\mathrm{r} \subset \mathrm{t}$ 和 $\mathrm{r}' \subset \mathrm{t}'$ 是这样的两个区域，则可考虑 MAST(r, r′)，它表示 {1, ..., n} 中最大的子集 I 的大小，其中 I 的所有元素都同时出现在 r 和 r′ 中，且 $\mathrm{r}|_I = \mathrm{r}'|_I$。

2.2 布朗树

我们从构造布朗树 $\mathcal{T}$的 [2, 3]开始。令$\mathbf{e} = (e_t)_{0 \leq t \leq 1}$ 为标准化布朗离差（即在$(0, 1)$内条件于保持正值并在时刻 1 到达 0 的布朗运动）。对于s、$t \in [0, 1]$，记$s \sim_{\mathbf{e}} t$，如果

$$e_s = e_t = \min_{[s \wedge t, s \vee t]} e_u,$$

其中$s \wedge t$和$s \vee t$分别表示$\min(s,t)$和$\max(s,t)$。我们还记

$$d_{\mathbf{e}}(s,t) = e_s + e_t - 2 \min_{[s\wedge t, s\vee t]} e_u.$$

那么，$\mathbf{d_e}$是$[0,1]$上的一个伪距离，即它是对称的，并满足三角不等式。此外，$\mathbf{d_e(s,t) = 0}$当且仅当$\mathbf{s \sim_e t}$。于是，赋予$\mathbf{d_e}$的商空间$\mathcal{T} = [0,1]/\sim_{\mathbf{e}}$是一个随机紧度量空间，我们称之为布朗树。此外，$\mathcal{T}$带有一个自然的概率测度，它是勒贝格测度在$[0,1]$上经由从$[0,1]$到$\mathcal{T}$的典范映射得到的推前测度。我们将$|\cdot|$记为$\mathcal{T}$上的这一概率测度；它具有全支撑且没有原子。我们回顾一下，度量空间$\mathcal{T}$几乎必然是一棵实树，即对$\mathcal{T}$中的任意x、y，都存在一条从x到y的唯一单射连续路径，且这条路径是一条测地线。对于$\mathbf{m > 0}$，若随机测度度量空间$(\mathcal{E}, \mathbf{d}, \mu)$满足$(\mathcal{E}, \mathbf{m}^{-1/2}\mathbf{d}, \mathbf{m}^{-1}\mu)$的分布与$\mathcal{T}$相同，则称其为质量为m的布朗树。特别要注意，$\mathcal{T}$是一棵质量为1的布朗树。

令$k \geq 1$，并令$(\mathcal{E}, d, \mu)$为一棵质量为m的布朗树。给定$(\mathcal{E}, d, \mu)$，令$X_1, \ldots, X_k$为从$\mathcal{E}$中按（归一化后的）μ抽取的k个独立同分布点。注意，几乎必然，点X_i全都是叶子，即$\mathcal{E}\backslash\{X_i\}$连通。我们称$(\mathcal{E}, d, \mu, X_1, \ldots X_k)$为一棵质量为$m$的带$k$个标记点的布朗树。

在本文中，将$\mathcal{T}$分解为若干区域将起到关键作用。为此，我们称区域$\mathcal{T}$为$\mathcal{T}\backslash F$的一个连通分支的闭包，其中F是$\mathcal{T}$的一个基数为0、1或2的子集。

我们回顾一下，$\mathcal{T}$几乎必然是一棵二叉实树，即对于所有$x \in \mathcal{T}$，空间$\mathcal{T}\backslash\{x\}$至多有三个连通分支。若点$b \in \mathcal{T}$满足$\mathcal{T}\backslash\{b\}$恰有三个连通分支，则称分支点为$\mathcal{T}$的一个分支点。此外，我们将分支点$b$的大小定义为$\mathcal{T}\backslash\{b\}$的三个连通分支中最小者的测度，并将该量记为$|b|_{\mathcal{T}}$。类似地，若$\mathcal{R}$是$\mathcal{T}$的一个区域，且$b \in \mathcal{R}$满足$\mathcal{R}\backslash\{b\}$有三个连通分支，则$b$在$\mathcal{R}$中的相对大小定义为其中最小连通分支的测度，并记为$|b|_{\mathcal{R}}$。

2.3 狄利克雷分布与贝塔分布

这里回顾狄利克雷分布和贝塔分布的定义。对于$(a_1, \ldots, a_d) \in (0,\infty)^d$，狄利克雷分布$\mathbf{Dir}(a_1, \ldots, a_d)$是单纯形上的概率测度，其密度为

$$\left\{ (m_1, \ldots, m_d) \;\middle|\; \forall 1 \leq i \leq d, \quad m_i \geq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{d} m_i = 1 \right\}$$

其密度为

$$\frac{\Gamma(a_1 + \cdots + a_d)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_d)} \prod_{i=1}^{d} m_i^{a_i - 1}$$

关于勒贝格测度。对于$(W_1, W_2) \sim \mathbf{Dir}\ (a, b)$，第一个坐标$W_1$称为服从贝塔$(a,b)$分布。

狄利克雷分布具有本文中贯穿使用的两个性质。第一个性质可由所谓的贝塔-伽马代数结果推导得出，相关结果见[13]；第二个性质参见[1, 引理17]。设$(W_1, \ldots, W_d) \sim \mathbf{Dir}\ (a_1, \ldots, a_d)$。那么

- For any $1 \leq i \leq d-1$, we have

$$\begin{cases} W_1 + \cdots + W_i \sim \mathrm{Beta}(a_1 + \cdots + a_i, a_{i+1} + \cdots + a_d) \\ (W_1 + \cdots + W_i)^{-1} \cdot (W_1, \ldots, W_i) \sim \mathrm{Dir}\,(a_1, \ldots, a_i) \\ (W_{i+1} + \cdots + W_d)^{-1} \cdot (W_{i+1}, \ldots, W_d) \sim \mathrm{Dir}\,(a_{i+1}, \ldots, a_d) \end{cases} \tag{1}$$

并且最后一个公式中出现的三个随机变量相互独立。

- 令I满足 $\mathbb{P}(I = i \mid (W1, \ldots, Wd)) = W_i$。那么，对于任意$i \in \{1, \ldots, d\}$，我们有

$$\mathbb{P}(I = i) = \frac{a_i}{a_1 + \cdots + a_d} \quad \text{and} \quad \text{Law}((W_1, \ldots, W_d) \mid I = i) = \text{Dir}(a_1, \ldots, a_i + 1, \ldots, a_d). \tag{2}$$

2.4 离散随机树与连续随机树之间的耦合

我们回顾离散树T_n与连续树$\mathcal{T}$之间经典的耦合。设$n \geq 3$，并令$(e_i)_{1 \leq i \leq 2n-3}$为$T_n$的边的一个枚举，使得对于$1 \leq i \leq n$，边$e_i$是与标记为$i$的叶节点相连的唯一一条边。

令 $(W_i)_{1 \leq i \leq 2n-3}$ 为服从狄利克雷分布 $\text{Dir}\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$的随机向量，且与 T_n独立。给定 T_n 和 (W_i)，令 $\left(\mathcal{T}_i, X_i^1, X_i^2\right)_{1 \leq i \leq 2n-3}$ 为相互独立的双重点布朗树，其质量分别为 W_i。对所有 i，令 v_i^1 和 v_i^2为 T_n中边 e_i 的两个端点；约定若其中一个端点是叶节点，则该端点记为 v_i^1。对于 $1 \leq i, i' \leq 2n-3$ 和 $j, j' \in \{1, 2\}$，记 $X^j i \sim X^{j'} i'$，若 $v^j i = v^{j'} i'$；并记

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \left(\bigcup_{i=1}^{2n-3} \mathcal{T}_i \right) / \sim .$$

作为一个度量空间，这个商空间可理解为 $\mathcal{T}_i$按照~[11]的“度量粘合”。$\mathcal{T}$上的测度可直接由 $\mathcal{T}_i$的测度得到，其总质量为$\sum_{i=1}^{2n-3} W_i = 1$。

对于$n = 3$，以下结果见于 [4]。尽管相应的$n > 3$结果已是众所周知的 folklore，但我们未能在文献中找到与此处所用结果完全一致的表述。不过，它可以视为 [26,练习 7.4.12 和练习 7.4.13] 中所证明离散结果的推论（证明依赖 Rémy 算法 [28] 来构造均匀二叉树，而狄利克雷分布则来自波利亚瓮论证）。

定理 4。 *[4, 26]* 带有 n 个标记的带测度度量空间 $\left(\widetilde{\mathcal{T}}, X_1^1, \ldots, X_n^1\right)$ 服从总质量1的 n 标记布朗树的分布。

参见图 2，其中展示了这一构造。特别地，连接 n 个均匀随机点 $X_1, \ldots, X_n$ 的路径的组合结构 $\mathcal{T}$与 T_n相同。在本文余下部分，我们始终假设连续树 $\mathcal{T}$与离散树 T_n 以这种方式耦合。

我们以一个引理结束本节，该引理比较了 $\mathcal{T}$中某个区域的质量与T_n中相应区域的质量。

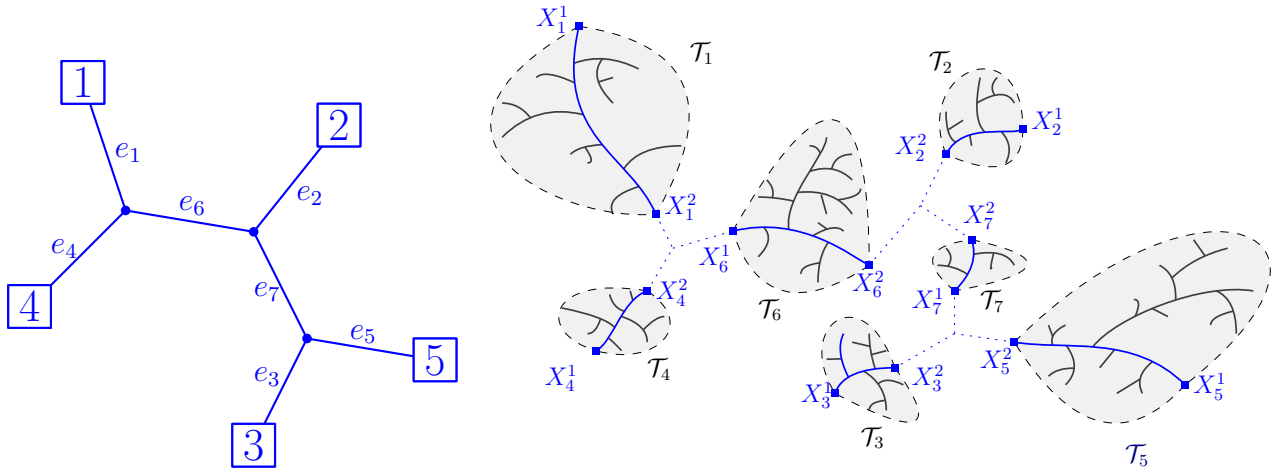
引理 5. 设 $\varepsilon > 0$，并设 $(\mathcal{T}, X_1, \ldots, X_n)$ 为一棵 n 标记布朗树。那么，以概率$1 - o_n(1)$，对于 $\mathcal{T}$中任意一个由至多两个分支点界定的区域 $\mathcal{R}$，记 R 为 T_n 中包含所有标记为 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 且满足 $X_j \in \mathcal{R}$ 的叶子的最小区域，则有以下界

$$\#R \leq n^{\varepsilon} \vee (n^{1+\varepsilon} \cdot |\mathcal{R}|).$$

证明。 设 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{T}$中一个由至多两个分支点界定的区域。这样，该区域 $\mathcal{R}$ 的拓扑边界 $\partial\mathcal{R}$ 至多包含两个元素。采用上文的记号，对于任意
$1 \leq i \leq 2n-3$，我们用 $\mathcal{T}_i$ 表示区域 $\mathcal{T}_i$的内部，并将其视为 $\mathcal{T}$的子集。我们引入

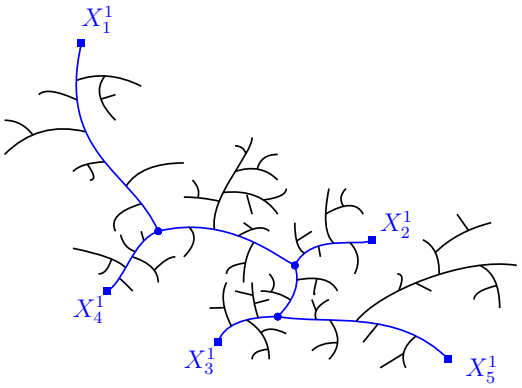
$$I = \left\{ i \in \{1, \ldots, 2n-3\} \;\middle|\; \mathring{\mathcal{T}}_i \cap \mathcal{R} \neq \emptyset \right\}.$$

注意，边集 $\{e_i, i \in I\}$ 定义了 T_n 中的一个区域 $\tilde{R}$，其边界至多包含两个节点；我们记 $N := \#\tilde{R}$。根据 I的定义，区域 $\tilde{R}$ 包含所有标签为 $j \in \{1, \ldots\ldots n\}$的叶子



(a) T_5 的一个实现

(b) 沿着 T_5 的结构拼接独立布朗树的缩放副本



(c) 得到的五重点树

图 2：五重点布朗树 $(\widetilde{\mathcal{T}}, X_1^1, \ldots, X_5^1)$ 与 T_5 之间的耦合。蓝色标示的连接指定点的路径的组合结构，与我们起初采用的离散树 T_5 相同。

满足$X_j \in \mathcal{R}$的条件，因此$R \subset \tilde{R}$，从而$\#R \leq \#\tilde{R} = N$。如果$N < n^{\varepsilon}$，则无需证明任何内容，因此假设$N \geq n^{\varepsilon}$。注意，由于 $\tilde{R}$ 是T_n的一个区域，它至多有两个无标记叶子，因此其边数满足 $\#I \in \{2N-3、\ 2N-1$ 或 $2N+1\}$，具体取决于它由 0 、 1 还是 2 个节点界定。

。 。现在，对于任意$i \in I$，如果 $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{R} \neq \mathcal{T}_i$，则意味着$(\partial\mathcal{R}) \cap \mathcal{T}_i \neq \emptyset$。由于 $\partial\mathcal{R}$ 的基数至多为2，这种情况至多对两个这样的$i \in I$成立，记为$i1$和$i2$（如果这样的值只有0个或1个，就任意选取）。这意味着 $\mathcal{R} \supset \bigcup_{i \in I \setminus \{i_1, i_2\}} \mathcal{T}_i$。

现在，设 $(W_i)_{1 \leq i \leq 2n-3}$ 与定理 4 中的耦合相同（也就是说，W_i 是满足以下条件的点集的质量：$x \in \mathcal{T}$使得 e_i 是从 T_n 到 x的最近边）。由上述推理可得

$$|\mathcal{R}| \geq \sum_{i \in I \setminus \{i_1, i_2\}} W_i. \tag{3}$$

现在我们以离散树 T_n为条件。回顾一下，$(W_i)_{1 \leq i \leq 2n-3}$ 与 T_n 相互独立且服从狄利克雷分布，因此根据（1）可得

$$\sum_{i \in I \setminus \{i_1, i_2\}} W_i \sim \text{Beta}\left(\frac{\#I-2}{2}, \frac{2n-1-\#I}{2}\right)$$

以T_n为条件。现在固定树T_n的区域 $\tilde{R}$。利用贝塔分布的显式密度，并回顾$N = \#\tilde{R} \geq n^{\varepsilon}$ 且 $2N-3 \leq \#I \leq 2N+1$，可写为：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i \in I \setminus \{i_1, i_2\}} W_j \leq n^{-1-\varepsilon} \cdot N \,\middle|\, T_n\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\#I-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1-\#I}{2}\right)} \int_0^{n^{-1-\varepsilon} \cdot N} x^{\frac{\#I-4}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{2n-3-\#I}{2}} \mathrm{d}x. \\
&\leq \frac{n^{\#I/2+1}}{(\#I/2)^{(\#I)/2} e^{O(\#I)}} \cdot \left(n^{-1-\varepsilon} N\right)^{\frac{\#I-4}{2}} \\
&\leq n^{-\varepsilon n^{\varepsilon} + O\left(\frac{n^{\varepsilon}}{\log n}\right)},
\end{aligned}$$

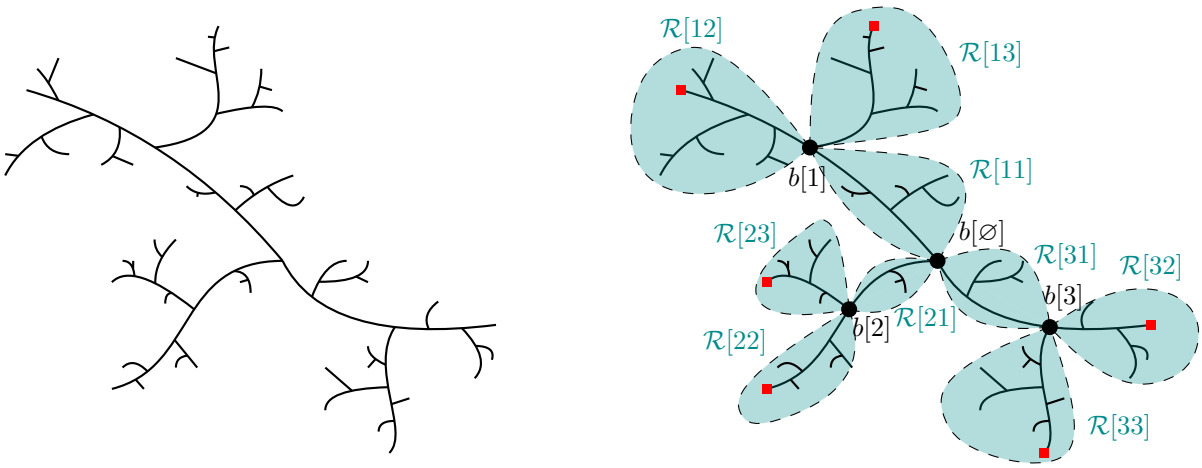
其衰减速度快于关于 n 的任何多项式。在上述计算中，我们用到了以下事实：对任意 $x > 0$ 以及满足 $-x - k > 0$的任意整数 k，$\Gamma(x)\Gamma(x-k) \leq x^k$；最后还用到了假设 $N \geq n^{\varepsilon}$。仍以 T_n为条件，我们可以对选择区域 R 以及对应于被移除的边的两个标签 i_1, i_2 的所有 $O(n^4)$ 种可能性应用并集界。结合 (3)，以高概率，对任意区域 $\mathcal{R}$ 及其对应的 I、i_1, i_2, N，均有

$$|\mathcal{R}| \geq \sum_{i \in I \setminus i_1, i_2} W_i \geq n^{-1-\varepsilon} \cdot N \geq n^{-1-\varepsilon} \cdot \#\tilde{R} \geq n^{-1-\varepsilon} \cdot \#R,$$

这正是我们想要证明的。 □

2.5 Aldous 的递归分解

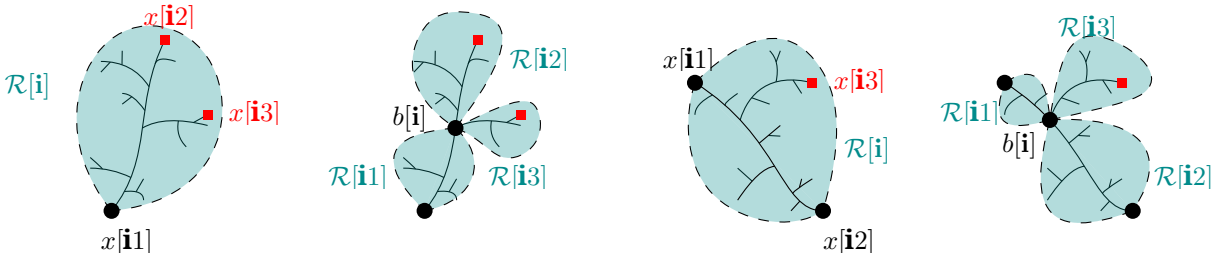
将 $\mathcal{T}$ 分解为三个区域。现在我们引入布朗树 $\mathcal{T}$的一种递归分解，它通过反复应用上述分解来处理 $n = 3$。更确切地说，令 $(\mathcal{T}, x[1], x[2], x[3])$ 为一棵质量为 1 的三点标记布朗树。注意，几乎必然，点 x[1], x[2] 和 x[3] 都是叶子。在这种情况下，存在 $\mathcal{T}$ 中唯一的分支点 b[∅]，使得 x[1], x[2] 和 x[3] 分别位于 $\mathcal{T} \setminus \{b[\emptyset]\}$的三个不同连通分支中。对于 $i \in \{1,2,3\}$，我们将 $\mathcal{R}[i]$ 称为包含 x[i]的连通分支（在 $\mathcal{T}$中的闭包）。于是，$n = 3$时的定理 4 蕴含向量 $(|\mathcal{R}[1]|, |\mathcal{R}[2]|, |\mathcal{R}[3]|)$ 服从狄利克雷分布 $\text{Dir}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，且在给定该向量的条件下，三个区域 $(\mathcal{R}[i], b[\emptyset], x[i])$ 是相互独立、具有指定质量的双重点布朗树。然后，我们将在每个 $\mathcal{R}[i]$ 中均匀随机选取第三个点，并递归地应用这一分解。



(a) 布朗树 $\mathcal{T}$ 的一个实现。

(b) 它截至深度 2 的递归分解。

图 3：分解布朗树 $\mathcal{T}$ 及其深度为 2 的分解 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}])^{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^2}$。



(a) 一个由……界定的区域一个点。

(b) 它的分解。

(c) 由两个点界定的区域。

(d) 其分解。

图 4：对分别由一个点和两个点界定的区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 进行分解的一步。注意，在这两种情况下，新创建的区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}3]$ 都仅由一个点界定。

完全三叉树。更准确地说，设

$$\mathbb{T}_3 = \bigcup_{k\geq 0} \{1,2,3\}^k$$

为字母表 $\{1,2,3\}$ 上的有限词集合。通常我们用记号 $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\ldots\mathbf{i}_k$ 表示 $\mathbb{T}_3$ 中的一个元素。对于这样的词，我们称 $\mathbf{k}$ 为 $\mathbf{i}$ 的深度，并用 $\mathbb{T}_3^k$ 表示 $\mathbb{T}_3$ 中深度为 $\mathbf{k}$ 的元素集合。集合 $\mathbb{T}_3$ 可视为一棵完全三叉树，其根为 $\emptyset$，而 $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\ldots\mathbf{i}_k$ 的父节点是 $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\ldots\mathbf{i}_{k-1}$。对于任意 $\mathbf{k} \geq 0$，以及任意深度至少为 $\mathbf{k}$ 的词 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$，我们记作 $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_1\ldots\mathbf{i}_k$。最后，我们将使用 $\mathbb{T}_3$ 中词的拼接：若 $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1\ldots\mathbf{i}_k$ 且 $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1\ldots\mathbf{j}_\ell$，则将 $\mathbf{ij}$ 记作 $\mathbf{i}_1\ldots\mathbf{i}_k\mathbf{j}_1\ldots\mathbf{j}_\ell$。

布朗树的递归分解。我们的分解将为 $\mathbb{T}_3$ 的每个词 $\mathbf{i}$ 关联一个区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ of $\mathcal{T}$，使得对于所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$，区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}1]$、$\mathcal{R}[\mathbf{i}2]$ 和$\mathcal{R}[\mathbf{i}3]$ 构成 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$的一个划分。更准确地说，我们记 $\mathcal{R}[\emptyset] = \mathcal{T}$，并按照上一段中的定义，定义分支点 $\mathbf{b}[\emptyset]$ 以及双标记点树 $\mathcal{R}[1]$、$\mathcal{R}[2]$ 和 $\mathcal{R}[3]$。此外，取一个深度为 $\mathbf{k} \geq 1$ 的 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$，并假设区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 已定义；记 $\mathbf{x}[\mathbf{i}1], \mathbf{x}[\mathbf{i}2]$为其标记点。在给定其余所有部分的条件下，令 $\mathbf{x}[\mathbf{i}3]$ 为按照 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$上的质量测度随机抽取的一个点。我们将 $\mathbf{b}[\mathbf{i}]$ 记作 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 的唯一分支点，使得 $\mathbf{x}[\mathbf{i}1]$、$\mathbf{x}[\mathbf{i}2]$ 和 $\mathbf{x}[\mathbf{i}3]$ 分别位于 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]\setminus\{\mathbf{b}[\mathbf{i}]\}$ 的三个不同连通分支中，并分别将这三个分支的闭包记为 $\mathcal{R}[\mathbf{i}1]$、$\mathcal{R}[\mathbf{i}2]$和 $\mathcal{R}[\mathbf{i}3]$。然后，对于一个 $\in \{1,2,3\}$，令 $\mathbf{x}[\mathbf{i}a1] := \mathbf{b}[\mathbf{i}]$，并令 $\mathbf{x}[\mathbf{i}a2] := \mathbf{x}[\mathbf{i}a]$（也就是说，我们按照第一步中的相同方式，在每个区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}a]$, 上标记两个点）。最后，我们为区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}a]$ 赋予从 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$自然继承的度量和测度。图 3 和图 4 展示了示意图。

通过对深度进行归纳，可以很容易地验证该构造是合理的，并且对于所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$，树 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 都是带有随机质量的双重点布朗树。事实上，如果 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}], \mathbf{x}[\mathbf{i}1],\mathbf{x}[\mathbf{i}2])$ 是一棵布朗树，那么几乎必然，前文定义的点 $\mathbf{x}[\mathbf{i}1], \mathbf{x}[\mathbf{i}2]$ 和 $\mathbf{x}[\mathbf{i}3]$ 是两两不同的叶子，因此 $\mathbf{b}[\mathbf{i}]$ 有唯一确定的定义，且与 $\mathbf{x}[\mathbf{i}1]$, $\mathbf{x}[\mathbf{i}2]$,$\mathbf{x}[\mathbf{i}3]$ 不同；而 $\mathbf{n} = 3$ 时的定理 4 保证 $\mathcal{R}[\mathbf{i}a]$ 是布朗树。若 $\mathbf{i}$ 的深度为 $\mathbf{k}$，我们称 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 为尺度 $\mathbf{k}$ 的区域。在每个尺度上应用 $\mathbf{n} = 3$ 时的定理 4，即可轻松得到以下独立性性质。

命题6。 以下陈述成立。

(i) 以下向量

$$\left(\frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}1]|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|}, \frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}2]|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|}, \frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}3]|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|}\right) \tag{4}$$

对于$\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$，是独立同分布的，其分布为狄利克雷分布 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。

(ii) 对所有 $k \geq 1$，在给定其质量的条件下，度量测度空间 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}], x[\mathbf{i}1], x[\mathbf{i}2])$（其中 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$）是独立同分布的双重点布朗树。

证明。 令 $\mathcal{F}_k$ 为由以下质量生成的 σ-代数：$|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$，其中 $\mathbf{i}$ 的深度至多为 k。只需证明，对于所有 $k \geq 0$，在给定 $\mathcal{F}_k$的条件下，深度为 4的 $\mathbf{i}$ 对应的向量 (k) 独立同分布，且服从狄利克雷分布 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$；并且在给定 $\mathcal{F}_k$及这些向量的条件下，区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$（其中 $\mathbf{i}$的深度$k+1$）是相互独立且具有指定质量的双重点布朗树。我们对 k 进行归纳证明这一结论。

对于 $k = 0$，这只是关于 $\mathbf{n} = 3$的定理 *4*。如果某个 $k \geq 0$下该陈述成立，那么归纳假设保证，在给定 $\mathcal{F}_k$的条件下，$\mathcal{R}[\mathbf{i}]$，深度为 $\mathbf{k}$ 的 $i+1$ 相互独立，且都是带有随机质量的双指向布朗树。然后，我们在仍给定 4的条件下，将定理 $n = 3$ 应用于这些布朗树中的每一棵 $\mathcal{F}_k$。 □

聚焦随机点。 最后，设 $x \in \mathcal{T}$ 和 $k \geq 0$。如果 x 不是点 $x[\mathbf{i}]$,之一（几乎对所有 $x \in \mathcal{T}$，情况确实如此），我们将记 $\mathbf{i}_k(x)$ 为深度为 k 且满足 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$、$x \in \mathcal{R}[\mathbf{i}]$, 的唯一指标，并将 $i_k(x)$ 记为词 $\mathbf{i}_k(x)$的第k个字母。研究围绕从 $\mathcal{T}$ 中均匀随机选取的点 X 进行的递归分解将对我们有所帮助。在这种情形下，我们需要以下结果。

引理 7. 设 $\left(\mathcal{T}, (\mathcal{R}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}\right)$ 为一棵分解布朗树，并在 $\mathcal{T}$ 上均匀采样一个点 X，且该采样与分解相互独立。则向量

$$\left(\frac{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)1]\right|}{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)]\right|}, \frac{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)2]\right|}{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)]\right|}, \frac{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)3]\right|}{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)]\right|}, i_{j+1}(X)\right) \tag{5}$$

对 $j \geq 0$，它们是独立同分布的。此外，它们服从(W_1,W_2,W_3,I)的分布，其中$(W_1,W_2,W_3) \sim$狄利克雷分布 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，且 $\mathbb{P}(I = i \mid W_1,W_2,W_3) = W_i$对 $i \in \{1,2,3\}$成立。特别地，指标 I 在 $\{1,2,3\}$ 上均匀分布，变量 W_I服从贝塔分布$^{-}\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ 分布。

证明。 论证与命题6的证明基本相同，只需将 $\mathcal{F}_k$ 替换为由向量 σ生成的代数 $\mathcal{G}_k$ （5）所生成的 $0 \leq j \leq k-1$。唯一额外的一点是，由于X 独立于分解选取，因此在给定布朗树 $\mathcal{R}[1]$、$\mathcal{R}[2]$、$\mathcal{R}[3]$的条件下，它以概率 $|\mathcal{R}[a]|$ 落在 $\mathcal{R}[a]$ 中，对$a \in \{1,2,3\}$成立。特别地，我们有

$$\mathbb{P}\left(i_1(X) = a \mid |\mathcal{R}[1]|, |\mathcal{R}[2]|, |\mathcal{R}[3]|\right) = |\mathcal{R}[a]|$$

并且在给定 $(|\mathcal{R}[1]|, |\mathcal{R}[2]|, |\mathcal{R}[3]|, i_1(X))$后，区域 $\mathcal{R}[i_1(X)]$ 仍然是一棵具有指定质量的（双重点）布朗树。遗传性步骤以同样的方式调整。最后，W_I服从贝塔分布 $\left(\frac{3}{2},1\right)$ 这一事实是 (1) 和 (2) 的推论。

– □

注 8。 本文中常常需要将一个量重新解释为某个子集的质量，该子集属于 $\mathcal{T}$，通常具有 $|\cup_{\mathbf{i}\in U^k} \mathcal{R}[\mathbf{i}]|$ 且 $U^k \subset \mathbb{T}_3^k$ 的形式；也就是说，将其视为随机点 X 落入该子集的概率。通常可写成以下形式

$$\left|\bigcup_{\mathbf{i}\in U^k} \mathcal{R}[\mathbf{i}]\right| = \mathbb{P}\left(\mathbf{i}_k(X) \in U^k \,\middle|\, \mathcal{T}, (\mathcal{R}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}\right).$$

区域大小的估计。 现在我们给出一个非常粗略的结果，用于控制 $\mathcal{T}$ 的 Aldous递归分解中出现的各区域的大小。

引理 9。 存在常数 $C > c > 0$，使得几乎必然地，当 k 足够大时，对所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$，都有

$$e^{-Ck} \leq |\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \leq e^{-ck}.$$

证明。 证明运用了经典分枝随机游走论证。首先注意到，由于递归分解具有独立性，过程 $(\log|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|)_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}$ 是一个分枝随机游走。也就是说，这些向量

$$(\log|\mathcal{R}[\mathbf{i}1]| - \log|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|, \log|\mathcal{R}[\mathbf{i}2]| - \log|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|, \log|\mathcal{R}[\mathbf{i}3]| - \log|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|)$$

对于 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$，它们独立同分布，且服从$(\log W_1, \log W_2, \log W_3)$的分布，其中$(W_1, W_2, W_3)$ 服从狄利克雷分布 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。因此，对于任意$C > 0$，利用切尔诺夫界，我们可以写出：对于任意$\lambda > 0$，对于任意$\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$，

$$\mathbb{P}\left(\log|\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \leq -Ck\right) \leq e^{-\lambda Ck}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\log(W_1)}\right]^k. \tag{6}$$

由于狄利克雷分布具有多项式尾部，我们可以找到 λ，使得期望有限。随后可以找到C，使得上一个等式右侧被 4^{-k} 控制。对$\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$ 取并集界，再对k应用 Borel–Cantelli 引理，即可完成证明。类似地，对于$c > 0$和 $\lambda > 0$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\log|\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \geq -ck\right) \leq e^{\lambda ck}\mathbb{E}\left[e^{\lambda \log(W_1)}\right]^k.$$

由于W_1在零点没有原子，因此存在 $\lambda > 0$使得 $\mathbb{E}\left[e^{\lambda \log(W_1)}\right] < \frac{1}{5}$。固定 λ 的值后，我们可以将$c > 0$ 取充分小，使得最后一个右端项不超过 4^{-k}。再次利用并集界和博雷尔–坎泰利引理，即可证明另一个方向。 □

命题3的证明3

This 本节将专门证明命题3，它是下一节主要结果证明的核心 in 果 在下一节中。

证明思路概述。我们先简要介绍证明思路。固定一点$x \in \mathcal{T}$，并考虑这些比值

$$\left(\frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(x)]|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j-1}(x)]|}\right)_{1\leq j\leq k} \tag{7}$$

通过围绕 x“逐个尺度地缩放”得到。根据引理 7，这些是具有固定绝对连续分布的独立同分布变量。利用这一点，我们将论证：如果固定一个小区域 r′ of $\mathcal{T}'$，那么在 r′ 周围找到属于 $\mathcal{T}'$ 的嵌套区域、使其满足比例 (7) 且在至多 $1 \pm \delta$ 个尺度 $1 \leq$ j $\leq$ k 上的偏差不超过一个因子的概率，数量级为 δ^k。通过选择足够小的 δ，我们将能够对 $\mathcal{T}'$中的候选区域 r′ 进行并集界。这表明，对于任意小区域 r′ of $\mathcal{T}'$，将 x 映射到 r′ 中某一点的同胚，在比例 $\frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j \quad]|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j-1}}$ (x) (x)| 与 $\frac{|\Psi\ \mathcal{R}[\mathbf{i}_j \quad]|}{|\Psi\ \mathcal{R}[\mathbf{i}_{j-1} \quad]}$ ((x)) ((x))| 之间会在“许多”尺度 j 上出现“δ-不匹配”（这就是下文~~的命题13，~~我们将在第 3.1 节中证明）。此外，该比例

$$\frac{|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_k(x)]\right)|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_k(x)]|} \tag{8}$$

可以写成这些不匹配的望远镜乘积，因此不匹配的存在表明，比值 (8) 会“相当频繁地”变化一个 $1 \pm \delta$ 倍的因子。最后，我们将论证，对于大多数点 x，这些不匹配不会彼此抵消。事实上，如果对于区域$\mathcal{R}[\mathbf{i}] = \mathcal{R}[\mathbf{i}1] \cup \mathcal{R}[\mathbf{i}2] \cup \mathcal{R}[\mathbf{i}3]$，我们有 $|\Psi(\ \mathcal{R}[\ ]\ |\ \mathbf{i}\ )\ \mathbf{i}]|\quad \ll 1$，那么如果某个不匹配使比值 $\frac{|\Psi(\ \mathcal{R}[\ 1]\ |\ \mathbf{i}\ )\ \mathbf{i}}{|\mathcal{R}[\ 1]|}$ 更接近 1，它就会使比值 $\frac{|\Psi(\ \mathcal{R}[\ 2]\ |\ \mathbf{i}\ )\ \mathbf{i}}{|\mathcal{R}[\ 2]|}$ 和 $\frac{|\Psi(\ \mathcal{R}[\ 3]\ |\ \mathbf{i}\ )\ \mathbf{i}}{|\mathcal{R}[\ 3]|}$ 变得更小。换句话说，如果在 $\mathcal{T}$中均匀随机地选取 x，那么比值 (8) 关于 k 构成一个非负鞅（见下文 (19)），因此它们几乎必然收敛。由于不匹配的存在，这些比值会多次变化一个 $1 \pm \delta$ 倍的因子，因此该鞅的极限必为 0。第 3.2 节将定量地给出这一论证。

3.1 查找不匹配

在给出不匹配的精确定义之前，先将范围限制在一组（规模不算太小的）中间尺度上会更方便。更确切地说，我们首先注意到，根据 Aldous递归分解的构造，若词 i 的最后一个字母为 3，则区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 在 $\mathcal{T}$中的边界是单个点（见图 4）。

定义 10。 设 $\alpha > 0$，并设 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$ 的深度为 k。若尺度 $1 \le j \le k-1$ 是-良好的，且适用于$\mathbf{i}$，相对于$(\mathcal{R}[\mathbf{i}])^{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}$，如果 j 为奇数，如果 $i^j = i_{j+1} = 3$，并且此外

$$\min\left(\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j 1]\right|, \left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j 2]\right|, \left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j 3]\right|\right) \ge \alpha \left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j]\right|. \tag{9}$$

我们希望 $\mathbf{i}_j = 3$ 的原因是，这意味着存在两个小区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}_j 2], \mathcal{R}[\mathbf{i}_j 3]$，它们的边界是单元素集合 $\{\mathbf{b}[\mathbf{i}_j]\}$（见图 4）；这些区域的质量之比提供了一种便捷的方式，用来描述在某个尺度下 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}'$ 具有“不同形状”。假设 (9)的作用在于，如果分支点 $\mathbf{b}[\mathbf{i}]$ 以非常不均匀的方式将区域 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 分开，那么 $\Psi(\mathbf{b}[\mathbf{i}])$将有许多可能的取值；而如果 $\mathbf{b}[\mathbf{i}]$ 在 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$ 中“居中”，可选的取值就很少。

第一步是确保对于树 $\mathcal{T}$上的大多数点，良好尺度占所有尺度的正比例。

引理 11. 设 $\left(\mathcal{T}, (\mathcal{R}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}\right)$ 为一棵分解布朗树。存在常数 $\alpha, \beta, \gamma > 0$，使得记

$$U^k := \left\{ \mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k \;\middle|\; \mathbf{i} \textit{ has at least } \beta k \textit{ scales that are } \alpha\textit{-good} \right\}$$

且 $E^k := \bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k \setminus U^k} \mathcal{R}[\mathbf{i}]$, 那么几乎必然地，当 k 足够大时，我们有 $|E^k| < e^{-\gamma k}$。

证明。 我们来证明，可以找到 α， β， γ 使得 $\mathbb{E}\left[|E^k|\right] < e^{-2\gamma k}$，从而可以利用马尔可夫不等式和 Borel–Cantelli 引理得到引理的结论。设 X 是从 $\mathcal{T}$ 上的质量测度中独立于分解均匀选取的一个点。根据注 8，我们可以将 $\mathbb{E}\left[|E^k|\right]$ 改写如下：

$$\mathbb{E}\left[|E^k|\right] = \mathbb{P}\left(\mathbf{i}_k(X) \text{ has less than } \beta k \text{ scales that are } \alpha\text{-good}\right).$$

与引理7的证明中一样，对于 $k \ge 0$，我们用 $\mathcal{G}_k$ 表示由词 $\mathbf{i}_k(X)$以及质量 $\mathcal{R}[\mathbf{i}j(X)a]$（其中 $0 \le j \le k-1$ 且 $a \in \{1,2,3\}$）生成的 σ-代数。显然，事件“j 是 $\mathbf{i}_k(X)$ 的良好尺度”属于 $\mathcal{G}_{j+1}$。

此外，根据引理7，对于每个奇数j，我们有

$$\mathbb{P}\left(j \text{ is } \alpha\text{-good for } X \mid \mathcal{G}_{j-1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\mathbb{P}\left(\min\left(W_1, W_2, W_3\right) \ge \alpha\right), \tag{10}$$

其中 (W_1, W_2, W_3) ∼狄利克雷分布 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。这一概率是确定的，且不依赖于$j$，因此记为$p$；注意，如果 $\alpha > 0$ 选得足够小，那么$p > 0$。因此，这些变量

$$\left(\mathbb{1}_{\{\text{the scale } 2j+1 \text{ is } \alpha\text{-good for } X\}}\right)_{0\le j<\frac{k}{2}}$$

是均值为正的独立同分布伯努利变量，由此根据 Chernoff 界即可证明该引理。

□

从现在起，我们固定 α， β， $\gamma > 0$，它们满足引理11 的结论，并且我们将 α-良好尺度简称为良好尺度。

现在令 $0 < \delta < \alpha$，并令 $\Psi: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 是一个同胚。

定义 12. 令 $k \ge 0$ 且 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$。我们称尺度 $1 \le j \le k-1$ 是 δ-不匹配，对应于 Ψ 在 $\mathbf{i}$ 处，且相对于 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}])^{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}$ 而言，若它是一个良好尺度，并且满足

$$\max_{1\le a\le 3}\left|\frac{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j a]\right|}{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j]\right|} - \frac{\left|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_j a]\right)\right|}{\left|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_j]\right)\right|}\right| > \delta.$$

由于 $\mathcal{T}$、$(\mathcal{R}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}$ 和 δ 在全文中固定不变，我们通常只写“ Ψ 在 $\mathbf{i}$处不匹配”，而不写“δ-不匹配，对应于 Ψ 在 $\mathbf{i}$ 处，且相对于 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}$而言”。直观地说，尺度 j 是 Ψ 在 $\mathbf{i}$ 处的不匹配尺度，表示当我们在 $\mathcal{T}$中执行一步 Aldous递归分解时，将 $\mathcal{R}[\mathbf{i}_j]$ 分成三部分所得的分解，与其在 $\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}_j])$中的像经 Ψ 作用后所得的分解，对质量的划分比例并不相同。

我们的下一个目标是证明以下结果，它保证对于任意同胚，大多数点周围都存在不匹配。这构成了命题3证明中相当重要的一部分。

命题13。存在 $\delta>0$，使得几乎必然，当 k 足够大时，对于任何至少有 βk 个良好尺度的$\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k$，对于从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{T}'$ 的任意同胚 Ψ，以下情况之一成立：
1. 要么 $|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|\le e^{-}k|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$，*2.* 在 $\{1,\dots,\ k-1\}$ 中，至少有 $\lfloor\frac{\beta}{2}k\rfloor$ 个良好尺度是 Ψ 在$\mathbf{i}$处的 δ-不匹配。

证明。令 $\delta\in(0,\ \alpha)$，其取值稍后确定。令 $\mathrm{k}\ \ge 0$。令 $\mathrm{C}\ >0$ 为引理 9 中下界所给出的常数，并令 B^k 表示以下事件：对于所有深度至多为 k 的 $\mathrm{i}\in\mathbb{T}_3$，分支点 $\mathrm{b}[\mathrm{i}]$ 满足 $|\mathrm{b}[\mathrm{i}]|_{\mathcal{T}}\ge \mathrm{e}^{-}\mathrm{Ck}$。根据引理 9（应用于 $\mathrm{k}+1$），当 k 足够大时，B^k 几乎必然发生。

现在令$\mathbf{i}\ \in\ \mathbb{T}_3^k$，并令$J$为 $\{1,2,,\ ...,\ k-1\}$的一个子集，其大小为 $\lfloor\frac{\beta}{2}k\rfloor$，且只包含奇数元素。我们关注是否存在一个同胚 Ψ，使其满足以下三个性质：

(i) 对所有 $0\le j\ \le k,\quad |b[\mathbf{i}_j]|_{\mathcal{T}}\ge e^{-}Ck$；(ii) 有 $|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|>e^{-}k|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$；(iii) 对所有$j\ \in J$，尺度$j$是良好的，但对于 Ψ 在$\mathbf{i}$处并非 δ-不匹配。

我们强调，在条件 (i) 中，我们指的是$e^{-}Ck$，而不是$e^{-}Cj$。因此，我们将事件$AJ(\mathbf{i})$ 定义为

$$AJ(\mathbf{i})=\{\text{存在一个同胚 }\Psi:\ \ \mathcal{T}\to\mathcal{T}'\text{ 使得 (i)、(ii)、(iii) 对于 }\Psi\text{ 成立，并且 }\mathbf{i}\}。$$

在证明的其余部分，只要存在一个同胚 Ψ，使得对于Ψ 和 $\mathbf{i}$，(i)、(ii)、(iii) 均成立，我们就称“Ψ 使 $AJ(\mathbf{i})$ 发生”。

现在考虑这样的事件：B^k 发生，但对于任意 $\mathrm{i}\in\mathbb{T}_3^k$ 以及任意满足 $\#\mathrm{J}\ =\lfloor\frac{\beta}{2}\mathrm{k}\rfloor$的 $\mathrm{J}\ \subset\{1,2,\dots$ $\dots\mathrm{k}\ -1\}$，AJ(i) 均不发生。固定一个 $\Psi:\ \mathcal{T}\to\mathcal{T}'$和一个至少有 $\beta\mathrm{k}$ 个良好尺度的 $\mathrm{i}\in\mathbb{T}_3^k$。在所考虑的事件上，(i) 成立，因此要么 (ii) 不成立（此时命题的第 1 点成立）；要么 (ii) 对 Ψ 和 i 成立，这意味着无论如何选择 J，(iii) 都不成立。由于我们假设 i 有多于 $\beta\mathrm{k}$ 个良好尺度，而我们找不到任何 $\lfloor\frac{\beta}{2}\mathrm{k}\rfloor$ 个不是 δ-不匹配的良好尺度，这说明其中至少有 $\beta\mathrm{k}\ -\lfloor\frac{\beta}{2}\underline{\mathrm{k}}\rfloor\ge\lfloor\frac{\beta}{2}\underline{\mathrm{k}}\rfloor$ 个确实是 δ-不匹配。鉴于此，既然我们已经知道当 k 足够大时 B^k会发生，只需找到 $\delta>0$，使得几乎必然地，当 k 足够大时，对于基数为 $\lfloor\frac{\beta}{2}\mathrm{k}\rfloor$ 的 $\mathrm{J}\ \subset\{1,\dots\dots\mathrm{k}\}$，任意 $\mathrm{i}\ \in\mathbb{T}_3^k$对应的 AJ(i) 都不发生。为此，我们将利用并集界证明其概率为

$$\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k}\ \bigcup_{\substack{J\subset\{1,\dots,k-1\}\\ \#J=\lfloor\frac{\beta}{2}k\rfloor}} A_J(\mathbf{i}) \tag{11}$$

关于k可求和，并由 Borel–Cantelli 引理得出结论。

假设存在某个 Ψ，使得事件$AJ(\mathbf{i})$ 发生。记 $\ell=\lfloor\frac{\beta}{2}k\rfloor$，并将$j_1<j_2<\cdots<j_\ell$ 记为J的元素；对所有 $1\le h\ \le\ell$，记$b_h=b[\mathbf{i}_{j_h}]$。现在我们试图理解点序列

$$\mathbf{c}=(c_h)_{1\le h\le\ell}=(\Psi(b_h))_{1\le h\le\ell}\,.$$

我们首先注意到，这个序列必须满足一个拓扑条件：回顾一下，$i_{j_h}=i_{j_h+1}=3$，因为尺度 j_h 是良好的。因此，对于所有 $1\le h\ \le\ell$，点 b_h 是 $\mathcal{T}$的一个分支点，且

点 $\mathbf{b}_1, ...、\mathbf{b}_{h-1}$ 位于 $\mathcal{T}\backslash\{\mathbf{b}_h\}$的同一个连通分支中，而点 $\mathbf{b}_{h+1}、...、\mathbf{b}_\ell$ 位于另一个连通分支中。由于 Ψ 是一个同胚，序列 $(\mathbf{c}_h)$ 在 $\mathcal{T}'$中也满足同样的性质。此外，我们声称分支点 $\mathbf{c}_h$ 的大小不能太小。更准确地说，对于所有 $1 \leq \mathbf{h} \leq \ell - 1$，令 $\mathcal{R}'_h(\mathbf{c})$ 表示 $\mathcal{T}'\backslash\{\mathbf{c}_h\}$ 中包含 $\mathbf{c}_{h+1}、...、\mathbf{c}_\ell$的连通分支，并约定 $\mathcal{R}'_0(\mathbf{c}) = \mathcal{T}'$。换言之，我们有 $\mathcal{R}'_h(\mathbf{c}) = \Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_h+1}]\right)$。于是，对于所有 $1 \leq \mathbf{h} \leq \ell$，我们有

$$|c_h|_{\mathcal{R}'_{h-1}(\mathbf{c})} = |c_h|_{\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_{h-1}+1}]\right)} \geq |c_h|_{\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_h}]\right)} = \min_{a\in\{1,2,3\}} \left|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_h}a]\right)\right|.$$

依次利用j_h 不是一个 δ-不匹配这一事实，以及尺度j_h 是 α-良好的这一事实，我们推得，对于 $1 \leq h \leq \ell - 1$:

$$|c_h|_{\mathcal{R}'_{h-1}(\mathbf{c})} \geq \left(\frac{\min_{a\in\{1,2,3\}} \left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_h}a]\right|}{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_h}]\right|} - \delta\right) \cdot \left|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_h}]\right)\right| \geq (\alpha - \delta)\left|\mathcal{R}'_h(\mathbf{c})\right|. \tag{12}$$

从现在起，我们假设$\delta < \frac{\alpha}{4}$，于是

$$|c_h|_{\mathcal{R}'_{h-1}(\mathbf{c})} \geq \frac{\alpha}{2}\left|\mathcal{R}'_h(\mathbf{c})\right|$$

对于 $1 \leq h \leq \ell - 1$。出于同样的理由，我们还有

$$|c_\ell|_{\mathcal{R}'_{\ell-1}(\mathbf{c})} \geq \frac{\alpha}{2}\left|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_\ell}]\right)\right| \geq \frac{\alpha}{2}\left|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}]\right)\right|$$

因此，利用事件$\mathrm{A}J(\mathbf{i})$定义中的（ii）和（i），我们有

$$|c_\ell|_{\mathcal{R}'_{\ell-1}(\mathbf{c})} \geq \frac{\alpha}{2}e^{-k}\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}]\right| \geq \frac{\alpha}{2}e^{-(C+1)k}.$$

根据前文，我们将长度为 ℓ 的分支点序列$(c_h)_{1\leq h\leq \ell}$ 定义为 $\mathcal{T}'$ 的分支点序列，满足:

- 对于所有 $1 \leq h \leq \ell$，点$c1$，...，$ch-1$ 都位于 $\mathcal{T}'\backslash\{ch\}$的同一个连通分支中，而点$ch+1$，...，$c_\ell$ 位于另一个连通分支中；若$h < \ell$，则将其记为 $\mathcal{R}'h(\mathbf{c})$。
- 对于所有 $1 \leq h \leq \ell - 1$，都有 $|ch|_{\mathcal{R}'h-1(\mathbf{c})} \geq \frac{\alpha}{2}\downarrow\mathcal{R}'h(\mathbf{c})|$;
- 我们有 $|c\ell|_{\mathcal{R}'_{\ell-1}(\mathbf{c})} \geq \frac{\alpha}{2}e^{-(C+1)k}$。

值得注意的是，候选序列的概念并不依赖于 δ。根据上述讨论，任何能够使事件 $AJ(\mathbf{i})$ 发生的 $\Psi: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$，都必须将 $(b_h)_{1\leq h\leq \ell}$ 映射到 $\mathcal{T}'$中的某个长度为 ℓ 的候选序列。现在我们将给出 $\mathcal{T}'$中此类候选序列数量的上界。这个上界完全是确定性的，只用到这样一个事实：$\mathcal{T}'$ 是一棵总质量为 1 、所有分支点的度均为 3 的实树，而对于布朗树的一次实现，这几乎必然成立。

引理 14. 存在常数 $K = K(C<style\ id='6',\ \alpha<style\ id='9',\ \beta)$ 使得几乎必然地，对所有 $\ell \geq 2$，$\mathcal{T}'$ 中长度为 ℓ 的候选序列数量至多为 K^ℓ。

证明. 若$\mathbf{c} = (c_h)_{1\leq h\leq \ell}$ 是一个候选序列，我们首先定义它的尺度序列$(s_h(\mathbf{c}))_{0\leq h\leq \ell}$ 如下:

$$s_h(\mathbf{c}) = \lfloor -\log\left|\mathcal{R}'_h(\mathbf{c})\right|\rfloor$$

对于 $1 \leq h \leq \ell - 1$，按照约定，$s_0(\mathbf{c}) = 0$ 和 $s_\ell(\mathbf{c}) = \lfloor -\log |c\ell|_{\mathcal{R}'_{\ell-1}(\mathbf{c})}\downarrow$。那么，$\mathbf{s}(\mathbf{c}) = (s_h(\mathbf{c}))_{1\leq h\leq \ell}$ 是一个从 0 开始的非递减整数序列。此外，根据候选序列的定义，数值 $s_h(\mathbf{c})$ 有上界

$$-\log\left(\frac{\alpha}{2}e^{-(C+1)k}\right) = -\log\frac{\alpha}{2} + (C+1)k.$$

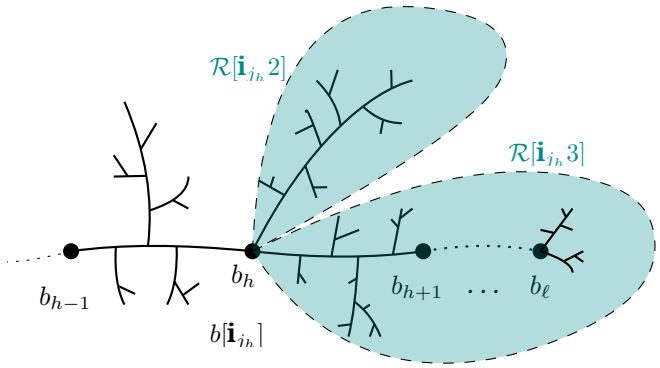


图 5：序列 $(b_h)_{1\le h\le \ell}$ 及其相对于 $\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_h}2]$ 和 $\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j_h}3]$ 的位置。

因此，序列 $(s_h(\mathbf{c}))_{0\le h\le \ell}$ 可能取值的数量至多为

$$\binom{\log(2/\alpha)+(C+1)k+\ell}{\ell} \le \frac{2}{\alpha}2^{(C+2)k}. \tag{13}$$

另一方面，对于任意这样的序列 $\mathbf{s}=(s_h)_{0\le h\le \ell}$，我们来界定使尺度序列 $\mathbf{s}(\mathbf{c})$ 为 $\mathbf{s}$ 的候选序列 $\mathbf{c}$ 的数量。为此，我们先给出一个简单的观察。设 $\mathcal{R}$ 了的一个区域，其质量为 m_0。那么我们断言如下

命题。 $\mathcal{R}$ 中满足 $|c|_{\mathcal{R}}\ge m$ 的分支点 c 的数量至多为 m^0m。 —

事实上，令 S_m 为 $\mathcal{R}$ 中大小至少为 m 的分支点集合。于是，$\mathcal{R}$ 可以通过沿着一棵有限二叉树的结构粘合 $\mathcal{R}\backslash S_m$ 的连通分支得到。这棵二叉树的节点与 S_m 中的点相对应，因此这棵二叉树有 $\#S_m$ 个节点，从而有 $\#S_m+2$ 片叶子。这 $\#S_m+2$ 片叶子对应于 $\mathcal{R}$ 中 $\#S_m+2$ 个互不相交的部分，每部分的质量至少为m，因此 $(\#S_m+2)m\le m_0$，命题得证。

现在，令 $\mathbf{s}=(s_h)_{0\le h\le \ell}$ 为一个非递减整数序列，满足 $s_0=0$ 和 $s_\ell\le \log\frac{2}{\alpha}+(C+1)\ell$。下面我们逐步构造一个满足 $\mathbf{s}(\mathbf{c})=\mathbf{s}$ 的候选序列 $\mathbf{c}$：

- 要使 $\mathbf{c}$ 成为候选序列，$c1$ 需要满足

$$|c_1|_{\mathcal{R}_0'(\mathbf{c})}=|c_1|_{\mathcal{T}}\ge\frac{\alpha}{2}\cdot|\mathcal{R}_1'(\mathbf{c})|\ge\frac{\alpha}{2}\cdot e^{-(s_1(\mathbf{c})+1)}$$

根据$s_1(\mathbf{c})$的定义。利用上一个公式和该命题，满足$s_1(\mathbf{c})=s_1$ 的c_1 可能取值至多为 $\frac{2}{\alpha}e^{s_1+1}$种。

- 设 $1\le h\le \ell-1$，并假设 $\mathrm{c1},\ldots,\mathrm{ch}_{-1}$ 已经选定。那么 $\mathcal{R}'\mathrm{h}_{-2}(\mathbf{c})$ 由 $(\mathrm{c1},\ldots,\mathrm{ch}_{-1})$ 确定，而 $\mathcal{R}'\mathrm{h}_{-1}(\mathbf{c})$ 是 $\mathcal{R}'\mathrm{h}_{-2}(\mathbf{c})\backslash\{\mathrm{ch}_{-1}\}$ 的一个连通分支，因此 $\mathcal{R}'\mathrm{h}_{-1}(\mathbf{c})$ 只有 3 种可能的取值。此外，一旦选定这个区域，点 ch 必须是 $\mathcal{R}'\mathrm{h}_{-1}(\mathbf{c})$ 中的一个点，且满足

$$|c_h|_{\mathcal{R}_{h-1}'(\mathbf{c})}\ge\frac{\alpha}{2}\left|\mathcal{R}_h'(\mathbf{c})\right|\ge\frac{\alpha}{2}e^{-(s_h(\mathbf{c})+1)}$$

根据$s_h(\mathbf{c})$的定义。再次使用该结论以及 $|\mathcal{R}_{h-1}'(\mathbf{c})|\le e^{-s_{h-1}(\mathbf{c})}=e^{-s_{h-1}}$由构造可知，对于给定的$c_h$，满足$s_h(\mathbf{c})=s_h$的可能选择数（给定$c_1,\ldots..c_{h-1}$）至多为

$$3\cdot\frac{|\mathcal{R}_{h-1}'(\mathbf{c})|}{|c_h|_{\mathcal{R}_{h-1}'(\mathbf{c})}}\le\frac{6}{\alpha}e^{s_h-s_{h-1}+1}.$$

• 最后，依照相同的推理，给定$c1$，.....，$c_{\ell-1}$时，可能的c_ℓ选择数至多为

$$\frac{6}{\alpha}e^{(C+1)\ell-s_{\ell-1}}.$$

将上述结果依次应用并约去连乘项，可得对于任意$\mathbf{s}$，满足$\mathbf{s}(\mathbf{c}) = \mathbf{s}$的候选序列$\mathbf{c}$的数量至多为

$$\left(\frac{6}{\alpha}\right)^{\ell} e^{(C+2)\ell}.$$

结合式（13），即可证明该引理，其中

$$K = \frac{6}{\alpha}\cdot e^{C+2}\cdot 2^{\frac{2C+4}{\beta}}. \tag{14}$$

□

我们回到命题13的证明。从现在起，我们以树$\mathcal{T}'$为条件进行讨论，并固定 J、i。回忆一下，$j_1 < \cdots < j_\ell$是 J 中的元素，且 $b_h = b[i_{j_h}]$。我们已经看到，如果存在一个使事件 $A_J(\mathbf{i})$ 发生的 Ψ，那么序列 $(\Psi(b_h))_{1\le h\le \ell}$ 是 $\mathcal{T}'$中的候选序列。因此，我们固定这样一个候选序列 $(c_h)_{1\le h\le \ell}$，并估计存在一个满足 (i)、(ii)、(iii) 以及对所有 $1 \le h \le \ell$均有 $\Psi(b_h) = c_h$ 的 Ψ 的概率。为此，令 $2 \le h \le \ell - 1$。在存在这样一个 Ψ 的事件上，由于 j_h 不是 i 的 δ-不匹配，我们有

$$\left(\frac{\left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right)\right|}{\left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}]\right)\right|} - \delta\right)\left|\mathcal{R}[i_{j_h}]\right| \le \left|\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right| \le \left(\frac{\left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right)\right|}{\left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}]\right)\right|} + \delta\right)\left|\mathcal{R}[i_{j_h}]\right|, \tag{15}$$

并且对 $\left|\mathcal{R}[i_{j_h}3]\right|$也有类似的估计。

另一方面，根据我们在构造递归分解时采用的约定，以及 $i_{j_h} = i_{j_h+1} = 3$（因为 j_h是 i 的良好尺度），包含 b_ℓ 的 $\mathcal{T}\backslash\{b_h\}$ 的连通分支是 $\mathcal{R}[i_{j_h}3]$，既不包含 b_1 也不包含 b_ℓ 的连通分支是 $\mathcal{R}[i_{j_h}2]$，见图 5。因此，$\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right)$ 必定是 $\mathcal{T}'\backslash\{c_h\}$ 中既不包含 c_1 也不包含 c_ℓ 的连通分支，而 $\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}3]\right)$ 必定是 $\mathcal{T}'\backslash\{c_h\}$ 中包含 c_ℓ 的连通分支。我们用 $n_2^h := \left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right)\right|$ 和 $n_3^h := \left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}3]\right)\right|$ 分别表示这两个连通分支的质量，并强调，这些质量完全由序列 c 确定。由式 (15) 以及对 $\mathcal{R}[i_{j_h}3]$的相应等式，利用 $(x, y) \mapsto \frac{x}{x+y}$ 关于 x 递增、关于 y 递减这一性质，可得

$$\frac{n_2^h - \delta\left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}]\right)\right|}{n_2^h + n_3^h} \le \frac{\left|\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right|}{\left|\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right| + \left|\mathcal{R}[i_{j_h}3]\right|} \le \frac{n_2^h + \delta\left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}]\right)\right|}{n_2^h + n_3^h}. \tag{16}$$

由于尺度 j_h是 α-良好的，且我们选择了 $\delta < \frac{\alpha}{2}$，因此与式（12）一样，有 n_2^h，$n_3^h \ge \frac{\alpha}{2}\left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}]\right)\right|$，所以 $n_2^h + n_3^h \ge \alpha\left|\Psi\left(\mathcal{R}[i_{j_h}]\right)\right|$ 且式（16）变为

$$\left|\frac{\left|\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right|}{\left|\mathcal{R}[i_{j_h}2]\right| + \left|\mathcal{R}[i_{j_h}3]\right|} - \frac{n_2^h}{n_2^h + n_3^h}\right| \le \frac{\delta}{\alpha}$$

对所有 $2 \le h \le \ell - 1$ 均成立。另一方面，根据命题 6，对于 $j \ge 0$，变量 $\frac{\left|\mathcal{R}[i_j2]\right|}{\left|\mathcal{R}[i_j2]\right| + \left|\mathcal{R}[i_j3]\right|}$ 是 $\frac{W_2}{W_2+W_3}$ 的独立同分布副本，其中 (W_1, W_2, W_3) 服从狄利克雷分布 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。因此，我们有

$$\mathbb{P}\left(\exists\Psi \text{ 使} A_J(\mathbf{i}) \text{ 出现，并且 } \forall 2 \le h \le \ell - 1, \Psi(b_h) = c_h \mid \mathcal{T}'\right) \le \prod_{h=2}^{\ell-1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{W_2}{W_2 + W_3} - q_h\right| \le \frac{\delta}{\alpha}\right),$$

其中 $q_h = \frac{n_2^h}{n_2^h+n_3^h} \in \left[\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}\right]$。另一方面，根据 (1)，$W_2W_2+W_3$ 的分布为贝塔分布 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，其密度为 $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathbb{1}_{[0,1]}(t)\,\mathrm{d}t$。特别地，该密度在 $\left[\frac{\alpha}{4}, 1-\frac{\alpha}{4}\right]$ 上有界，上界为 $\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{4}}} \le \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$。因此，在 $q_h - \frac{\delta}{\alpha}$ 和 $q_h + \frac{\delta}{\alpha}$ 之间积分，假设 $\delta < \frac{\alpha^2}{4}$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\exists \Psi \text{ that makes } A_J(\mathbf{i}) \text{ occur and } \forall\, 2 \le h \le \ell-1, \Psi(b_h) = c_h \mid \mathcal{T}'\right) \le \left(\frac{2\delta}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)^{\ell-2}.$$

现在我们可以对所有候选序列 (c_h)使用并集界。由引理 14，我们得到 in

$$\mathbb{P}\left(A_J(\mathbf{i}) \mid \mathcal{T}'\right) \le K^\ell \left(\frac{2\delta}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)^{\ell-2}.$$

现在我们可以去掉对 $\mathcal{T}'$ 的条件化，并对$\mathbf{i}$ 的 3^k 种可能取值以及集合J的$\binom{k-1}{\ell} \le 2^k$ 种可能取值应用并集界。于是得到

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k}\bigcup_{\substack{J\subset\{1,\dots,k-1\}\\ \#J=\ell}} A_J(\mathbf{i})\right) \le 6^k \cdot \left(\frac{2\delta K}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)^{\ell-2}. \tag{17}$$

记住 $\ell = \lfloor \frac{\beta k}{2} \rfloor$，若我们将常数 $\delta > 0$ 选得足够小，该量会随 k呈指数衰减。结合（11）之前的讨论，这就证明了该命题。 □

3.2 鞅论证

在论证的下一部分，我们需要引入另一种不匹配的概念，它比定义12中的概念稍宽松。从现在起，我们固定一个满足命题13结论的 $\delta > 0$ 值。假设 $\left(\mathcal{T}, (\mathcal{R}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}\right)$ 是一棵分解布朗树，$\mathcal{T}'$ 是另一棵布朗树，并且 $\Psi\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 是一个同胚。

定义 15. 令 $j \ge 1$，并令 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$ 的深度至少为 $j+1$。若对于所有 $a \in \{1,2,3\}$，都有 $\frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j\,]|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j]|} \ge \alpha$ a，且此外

$$\max_{a\in\{1,2,3\}} \left| \frac{|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}_j a])|}{|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}_j])|} - \frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j a]|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j]|} \right| > \delta.$$

特别地，定义 12 中定义的不匹配也是一种弱不匹配。这两个定义的区别在于，我们去掉了关于j 必须是良好尺度的假设中的“拓扑”部分，也就是说，即 $i_j = i_{j+1} = 3$ （见定义 10）。本节证明以下结果。

命题 16. 设 β 如引理 11所述。存在常数 $\eta > 0$，使得对于任意同胚Ψ 从 $\mathcal{T}$到 $\mathcal{T}'$，以及任意 $k \ge 1$，集合

$$V^{k,\Psi} := \left\{ \mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k \;\middle|\; \Psi \text{ has more than } \frac{\beta}{2}k \text{ weak mismatches at } \mathbf{i} \text{ and } \frac{|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|} \ge e^{-\eta k} \right\}$$

使得

$$\left| \bigcup_{\mathbf{i}\in V^{k,\Psi}} \mathcal{R}[\mathbf{i}] \right| < e^{-\eta k}.$$

我们强调，该结果实际上是确定性的：对于布朗树 $\mathcal{T}$、$\mathcal{T}'$ 的几乎所有实现、分解 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}])^{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k}$ 以及任意同胚 Ψ，该结果都成立。下文中，我们将弱不匹配简称为不匹配。

证明。尽管这个结果是确定性的，我们仍将给出一个概率论证明：将子集的质量 $\mathcal{T}$ 解释为点 X 在 $\mathcal{T}$ 中均匀抽样后落入该子集的概率，详见注8。在整个证明中，我们将 $\mathcal{T},\mathcal{T}'$ 视为确定的紧实树，并赋予其无原子质量测度；同时也将 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}])^{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}$ 视为确定的。我们按照其质量测度从 $\mathcal{T}$ 中选取 X。对于 $j\geq 0$，记 $\mathcal{H}_j$ 为由 $\mathbf{i}j(X)$生成的 σ-代数，因此 $(\mathcal{H}_j)_{j\geq 0}$ 是一个滤过。注意，由于 X 是均匀抽取的，对于 $j\geq 0$ 和 $a\in\{1,2,3\}$

$$\mathbb{P}\left(i_{j+1}(X)=a \mid \mathcal{H}_j\right)=\frac{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)a]\right|}{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)]\right|}. \tag{18}$$

我们还注意到，若 $0\leq j\leq k$，则尺度 j 在 Ψ 的 $\mathbf{i}_k(X)$ 处不匹配这一事件是 $\mathcal{H}_j$-可测的[2]，，因为它仅取决于 $\mathbf{i}j(X)$。现在，对于 $j\geq 0$，我们定义

$$M_j:=\frac{\left|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)]\right)\right|}{\left|\mathcal{R}[\mathbf{i}_j(X)]\right|}. \tag{19}$$

利用（18）进行简单计算可知，过程 $(Mj)_{j\geq 0}$ 是一个 $(\mathcal{H}_j)$-鞅。

命题 16 背后的思路是，不匹配为 $Mj+1$ 与 Mj 产生显著差异提供了机会。由于鞅 M 为正，它几乎必然收敛；如果它的值频繁变化，那么极限必为 0。为了将这一直觉定量化，我们将研究 $(\log Mj)_{j\geq 0}$，它是一个超鞅。我们将利用这样一个事实：与不匹配相对应的步骤，往往会使该过程的值在期望意义下下降超过一个加性常数。因此，经过大量的 k 步之后，要么我们观察到的不匹配很少，要么 $\log M$ 已大幅下降。

更准确地说，固定一个常数 $\mu>0$（稍后再具体确定）。对于$j\geq 1$，我们引入

$$Z_j:=\log M_j-\log M_{j-1}\quad\text{and}\quad\widetilde{Z}_j=Z_j+\mu\cdot\mathbb{1}_{\{\text{scale } j-1 \text{ is a mismatch for } \mathbf{i}_k(X)\}}.$$

我们将证明，若 $\mu>0$ 取值足够小，则对所有$j\geq 1$，都有

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\widetilde{Z}_j\right)\,\middle|\,\mathcal{H}_{j-1}\right]\leq 1. \tag{20}$$

由此，利用切尔诺夫界即可得到该结果。事实上，利用级联中最后一个公式，我们得到 $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^k \widetilde{Z}_j\right)\right]\leq 1$，因此有

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k\widetilde{Z}_j\geq 2\eta k\right)\leq\exp(-\eta k).$$

将 $\sum_{j=1}^k \widetilde{Z}j=\log Mk+\mu\cdot\sum_{j=1}^k\mathbb{1}_{\{\text{尺度 } j-1 \text{ 是 } \mathbf{i}_k(X)\}}$ 的不匹配记作，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\log M_k\geq(2\eta-\mu\beta/2)k\text{ and }\mathbf{i}_k(X)\text{ has more than }\frac{\beta}{2}k\text{ mismatches}\right)\leq\exp(-\eta k),$$

这正是我们在设定 $\eta=\frac{\mu\beta}{8}$ 后要证明的内容。 □

[2]这就是我们考察定义 15 中的弱不匹配，而不是定义 12 中不匹配的原因：良好尺度定义中的假设 $i_{j+1}=3$不可测 $\mathcal{H}_j$-可测。

所以现在，我们只需证明（20）对某个值 $\mu > 0$成立。首先，在尺度 $j-1$ 不是不匹配的事件上，我们有

$$\mathbb{E}\left[e^{\tilde{Z}_j} \,\middle|\, \mathcal{H}_{j-1}\right] = \mathbb{E}\left[e^{Z_j} \,\middle|\, \mathcal{H}_{j-1}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{M_j}{M_{j-1}} \,\middle|\, \mathcal{H}_{j-1}\right] = 1$$

根据鞅性质。因此，由$x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ 的凹性以及詹森不等式，我们有$\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\tilde{Z}^j} \,\middle|\, \mathcal{H}_{j-1}\right] \leq 1^{\frac{1}{2}} = 1$。因此，我们只需关注尺度$j-1$不匹配的事件。为此，我们使用以下引理。

引理17. 存在 $\mu = \mu(\alpha, \delta)$ 使得以下结论成立。设(p_1, p_2, p_3) 和(q_1, q_2, q_3) 是单纯形 $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$中的两个元素，并设$Z$为一个随机变量，其定义为

$$Z = \log q_I - \log p_I, \qquad \textit{where for all } i \in \{1,2,3\}, \quad \mathbb{P}(I = i) = p_i.$$

若$\max_{1 \leq i \leq 3} |p_i - q_i| \geq \delta$ 且$p_1, p_2, p_3 \geq \alpha$，则有

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(Z + \mu)\right)\right] \leq 1. \tag{21}$$

然后，在Z^j 的条件下，$\mathcal{H}_{j-1}$，在$j-1$ 是不匹配事件的条件下，$p_i = \frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j-1}](X)_i|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j-1}]|}(X)$以及 $q_i = \frac{|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j-1}]|}{|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}_{j-1}]|}(X)_i)((X))$，将引理应用于随机变量。这确保了在选取引理中给出的适当20时，条件（μ）成立。

□

引理17的证明。对于 $\mu > 0$，我们有

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(Z + \mu)\right)\right] = e^{\frac{1}{2}\mu} \sum_{i=1}^{3} p_i^{\frac{1}{2}} \cdot q_i^{\frac{1}{2}}.$$

对于每一项，我们有 $p_i^{\frac{1}{2}} \cdot q_i^{\frac{1}{2}} \leq \frac{p_i + q_i}{2}$。此外，令 a 满足 $|p_a - q_a| \geq \delta$。我们有

$$p_a^{\frac{1}{2}} \cdot q_a^{\frac{1}{2}} = \frac{p_a + q_a}{2} - \frac{1}{2}\left(p_a^{\frac{1}{2}} - q_a^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \frac{p_a + q_a}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

因为 $\sqrt{y} - \sqrt{x} \geq \frac{1}{2}(y - x)$ 对于 $0 \leq x \leq y \leq 1$。因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(Z + \mu)\right)\right] = e^{\frac{1}{2}\mu} \sum_{i=1}^{3} p_i^{\frac{1}{2}} \cdot q_i^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}\mu}\left(-\frac{\delta^2}{8} + \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i + q_i}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}\mu}\left(1 - \frac{\delta^2}{8}\right).$$

这证明了我们的论断，只需取 $\mu > 0$ 足够小。 □

根据命题13 和16，现在很容易得出命题3的证明。

命题 3 的证明。 我们知道，几乎必然地，当 k 足够大时，引理 11和命题 13 的结论成立。我们固定一个满足此条件的k。令 $\Psi: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$，并考虑某个$\mathbf{i} \in U^{k,\Psi}$，也就是说，$|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])| > e^{-\eta_k}|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$。于是

- 要么 $\mathbf{i} \in U_k$，如引理 11所定义，也就是说 $\mathbf{i}$ 的良好尺度少于 βk 个，
- 或者命题 13 的第2项成立，因为由于 $|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])| > e^{-\eta_k}|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$，第1项不可能成立，因此区域 $\mathbf{i}$ 必须至少有 $\lfloor \frac{\beta}{2} k \rfloor$ 个属于 δ-不匹配的尺度，因此也有弱 δ-不匹配。这结合我们对$\mathbf{i}$的初始假设可推出，$\mathbf{i} \in V_{k,\Psi}$。

因此，在我们所考虑的事件上，有$U^{k,\Psi} \subset U^k \cup V^{k,\Psi}$，所以

$$\left|\bigcup_{\mathbf{i} \in U^{k,\Psi}} \mathcal{R}[\mathbf{i}]\right| < e^{-\eta k} + e^{-\gamma k} \leq e^{-\xi k},$$

其中 γ 和 η 分别由引理 11 和命题16给出。取 $0 < \xi < \min(\gamma, \eta)$即可完成证明。

□

4 主要结果的证明

4.1 赫尔德同胚

我们先证明定理 2，这可由命题 3直接得出。

定理 2 的证明。令 $\left(\mathcal{T},(\mathcal{R}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}\right)$ 为一棵分解布朗树，并令 $\mathcal{T}'$ 为一棵独立布朗树。再令 $\Psi:\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ 为一个同胚。我们将找到一个常数 $\zeta>0$，使得几乎必然地，当 k 充分大时，可以找到 $\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k$ 使得

$$\operatorname{diam}(\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}]))^{1-\zeta}\le\operatorname{diam}(\mathcal{R}[\mathbf{i}]). \tag{22}$$

由于所有第k 级区域中的最大直径在$k\to+\infty$时趋于 0，这意味着 Ψ^{-1} 不可能是$(1-\frac{\zeta}{2})$-赫尔德的。由于问题关于 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}'$对称，这也表明 Ψ 不可能是$(1-\frac{\zeta}{2})$-赫尔德的。

令 $\mathrm{k}\ge 0$。一方面，我们知道几乎必然地，当 k 充分大时，命题 3 和引理 9 的结论成立。另一方面，回顾命题6，给定各区域的质量后，区域 $(\mathcal{R}[\mathrm{i}])^{\mathrm{i}\in\mathbb{T}_3^k}$ 是彼此独立的布朗树，且质量分别如其所示。此外，存在一个常数 $\mathrm{u}>0$，使得质量为 1 的布朗树 $\mathcal{T}$满足$\mathbb{P}(\operatorname{diam}(\mathcal{T})\le \mathrm{x})\le\exp(-\mathrm{u}\mathrm{x}^{-2})$，对所有 $\mathrm{x}>0$ 均成立（例如，可由最大值的显式分布 [18]推得）。由并集界和博雷尔–坎泰利引理，存在一个常数 $\mathrm{c}>0$，使得几乎必然地，当 k 充分大时，我们有

$$\min_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k}\left\{\frac{\operatorname{diam}(\mathcal{R}[\mathbf{i}])}{\sqrt{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|}}\right\}\ge\frac{c}{\sqrt{k}}.$$

结合引理 9 (它保证 $|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$ 在大致意义上随 k呈指数递减)，这意味着对于任意 $\varepsilon>0$，几乎必然当 k 足够大且 $\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k$ 时，我们有

$$\operatorname{diam}(\mathcal{R}[\mathbf{i}])\ge c\sqrt{\frac{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|}{k}}\ge|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}. \tag{23}$$

无法以同样的方式控制 $\Psi(\mathcal{R}[\mathrm{i}])$ 的直径，因为我们事先无法估计 $\Psi(\mathcal{R}[\mathrm{i}])$ 的形状。因此，我们将利用 $\mathcal{T}'$ 基于布朗 excursion 的定义，以及 excursion 是 Hölder 连续这一事实。更准确地说，我们回顾第2.2节，$\mathcal{T}'$ 是通过布朗 excursion $\mathrm{e}'=(\mathrm{e}'\mathrm{t})_{0\le t\le 1}$对 $[0,1]$ 取商空间构造的。我们用 $\mathrm{p}_{\mathrm{e}'}$ 表示从 $[0,1]$ 到 $\mathcal{T}'$的典范投影。现在，对于任意 $\mathrm{i}\in\mathbb{T}_3$，区域$\mathcal{R}[\mathrm{i}]$ 至多由 2 个点界定。因此，$\mathcal{T}'$中的区域 $\Psi(\mathcal{R}[\mathrm{i}])$ 也至多由 2 个点界定。这意味着 $\Psi(\mathcal{R}[\mathrm{i}])$ 可写成 $\mathrm{p}_{\mathrm{e}'}(\mathrm{I}_1\cup\mathrm{I}_2\cup\mathrm{I}_3)$ 的形式，其中 $\mathrm{I}_1\cup\mathrm{I}_2\cup\mathrm{I}_3$ 是 $[0,1]$ 的三个子区间的并。由 $\Psi(\mathcal{R}[\mathrm{i}])$ 的连通性可知，

$$\operatorname{diam}\left(\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}]\right)\right)\le\sum_{j=1}^{3}\operatorname{diam}\left(p_{\mathbf{e}'}(I_j)\right).$$

现在令 $\varepsilon>0$。我们知道，如果 $|s-t|$足够小，那么 $|e'_s-e'_t|\le\frac{1}{3}|s-t|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$。另一方面，我们知道，当 $\mathbf{i}$ 的深度趋于 $+\infty$ 时，$|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|$ 几乎处处趋于 0，因此几乎必然地，对于足够大的k以及深度为k的$\mathbf{i}$，我们可以写成

$$\operatorname{diam}\left(\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}]\right)\right)\le\sum_{j=1}^{3}\operatorname{diam}\left(p_{\mathbf{e}'}(I_j)\right)\le\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{3}|I_j|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\le|\Psi\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}]\right)|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tag{24}$$

因为$p_{\mathbf{e}'}$ 是保测度的。

终于可以把各部分拼在一起了。利用命题 3 的结论，几乎必然地，当 k 足够大时，存在 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$ 使得

$$|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])| \le e^{-\eta k} |\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \le |\mathcal{R}[\mathbf{i}]|^{1+\eta/C}, \tag{25}$$

其中第二个不等式来自引理 9。对于这个 $\mathbf{i}$，我们有

$$\operatorname{diam}(\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])) \underset{(24)}{\le} |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \underset{(25)}{\le} |\mathcal{R}[\mathbf{i}]|^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)(1+\frac{\eta}{C})} \underset{(23)}{\le} \operatorname{diam}(\mathcal{R}[\mathbf{i}])^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)(2-\varepsilon)(1+\frac{\eta}{C})}.$$

由此，只需令 $\varepsilon > 0$ 足够小即可得出结论。这就证明了定理，并且可以取 $\varepsilon_2 < \frac{\eta}{2C}$。 □

4.2 最大一致子树上界

本节通过两个中间结果证明定理 1 。第一个结果——推论18——是命题 3 的直接推论。第二个结果——引理 19——大致说明，在T_n 和T'_n 的所有区域中，平方根上界同时成立（其证明依赖于与经典平方根上界相同的思路）。这里仅陈述该引理，并在下一小节中证明它。

推论 18。 设 $\left(\mathcal{T}, (\mathcal{R}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}\right)$ 为一棵分解布朗树，并设 $\mathcal{T}'$ 为一棵独立的布朗树。存在常数 $\rho > 0$，使得以概率 $1 - o_k(1)$，对于任意同胚$\Psi:\ \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$，都有

$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k} \sqrt{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \cdot |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|} \le \exp(-\rho \cdot k).$$

证明。 令 $\xi, \eta > 0$ 由命题 3给出，并令 $\Psi:\ \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 为一个同胚。对于按命题 3 中所述定义的 $U^{k,\Psi}$，在其结论成立且概率为 $1 - o_k(1)$ 的事件上，当 k 足够大时，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k} \sqrt{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \cdot |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|} &= \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k\setminus U^{k,\Psi}} \sqrt{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \cdot |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|} + \sum_{\mathbf{i}\in U^{k,\Psi}} \sqrt{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \cdot |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|} \\
&\le \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k\setminus U^{k,\Psi}} |\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \cdot \sqrt{\frac{|\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|}{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|}} + \sqrt{\sum_{\mathbf{i}\in U^{k,\Psi}} |\mathcal{R}[\mathbf{i}]|} \cdot \sqrt{\sum_{\mathbf{i}\in U^{k,\Psi}} |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|} \\
&\le 1 \cdot e^{-\eta k/2} + e^{-\xi k/2} \cdot 1 \\
&< e^{-\rho k},
\end{aligned}$$

其中 ρ 的选取使得 $\rho < \frac{1}{2}\min(\eta, \xi)$；第一个不等式由柯西–施瓦茨不等式得出，第二个不等式则由命题3得出。 □

引理 19。 设 $\varepsilon > 0$。当 $n \to \infty$ 时，以高概率，对于任意两个区域 $R \subset T_n$ 和 $R' \subset T'n$，均有

$$\operatorname{MAST}(R, R') \le 4e\sqrt{2} \cdot \left(n^{\varepsilon} \vee \sqrt{\frac{(\#R) \cdot (\#R')}{n}} \right). \tag{26}$$

现在我们可以证明定理1。

定理1的证明。令 $\theta = \min\left(\frac{1}{2}C,\ \frac{1}{4\log 3}\right)$，其中$C > 0$由引理9给出，并取$k = \lfloor \theta \log n \rfloor$。特别要注意，尺度为

$\mathcal{T}$k处递归分解的区域数为 $3^k \le n^{\theta}\log^3 \le n^{\frac{1}{4}}$。现在令$\varepsilon = \frac{\theta\rho}{4}$，其中 ρ 由推论 18 给出。我们假设T′n按第2.4节所述的方式与一个n标记布朗树 $\left(\mathcal{T}', (X'j)_{1\le j\le n}\right)$ 耦合。我们还假设 $\left(\mathcal{T}', (X'j)\right)$ 与 $\mathcal{T}$、$(\mathcal{R}[i])^{i\in\mathbb{T}_3^k}$ 和T$_n$相互独立。

假设对于某个 $S \subset \{1,\dots,n\}$，我们有 $T_n|_S = T'n|_S = t$。于是我们声称，存在一个同胚 Ψ from $\mathcal{T}$ to $\mathcal{T}'$，使得 $\Psi(X_j) = X'j$ 对所有 $i \in S$ 都成立。事实上，在对边重新参数化后，存在唯一的 t 到 $\mathcal{T}$ 的嵌入 φ，它将标记为 j 的叶节点映射到 X_j（对于 t 中出现的任意标签 j），并且存在唯一的 t 到 $\mathcal{T}'$ 的嵌入 φ'，类似地将 j 映射到 X′j。对于 t 的每条边 $e = (x_e, y_e)$，令 $\mathcal{T}_e$ 为这样一组点 $x \in \mathcal{T}$：从 x 到 $\varphi(t)$ 的最近点属于 $\varphi(e)$。我们类似地定义区域 $\mathcal{T}'_e \subset \mathcal{T}'$。对于每个 e，区域 $\mathcal{T}_e$ 和 $\mathcal{T}'e$ 都是紧实树，其中分支点稠密且其度均为 3，因此根据 [8, 定理 1]（另见 [12]）[3]，它们具有相同的拓扑。因此，存在一个同胚 $\Psi_e : \mathcal{T}_e \to \mathcal{T}'e$，使得 $\Psi_e(\varphi(x_e)) = \varphi'(x_e)$ 且 $\Psi_e(\varphi(y_e)) = \varphi'(y_e)$。通过将这些 Ψ_e 拼接在一起即可得到同胚 Ψ。最后，对于任意 $i \in \mathbb{T}_3^k$，我们将 R[i] 定义为 T$_n$ 中包含所有标签 $j \in \{1,\dots,n\}$（满足 $X_j \in \mathcal{R}[i]$）的最小区域。我们类似地使用 $\mathcal{T}'$ 和 (X′j) 定义 T′n 的区域 R′[i]。

对于每个 $i \in \mathbb{T}_3^k$，注意根据 R[i],R′[i] 的定义，以及 $\Psi(X_j) = X'j$ 对于 $j \in S$ 这一事实，我们有 $S \cap R[i] = S \cap R'[i]$。特别地，该子集在 R[i] 和 R′[i] 中诱导出相同的子树。因此，我们可以写成

$$\#S = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k} \#(S \cap R[\mathbf{i}]) \le \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k} \mathrm{MAST}\left(R[\mathbf{i}], R'[\mathbf{i}]\right).$$

O另一方面，引理 19 保证，以概率 $1 - o_n(1)$，对于所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{MAST}(R[\mathbf{i}], R'[\mathbf{i}]) &\le 24e \cdot \left(n^{\varepsilon} \vee \sqrt{\frac{(\#R[\mathbf{i}])(\#R'[\mathbf{i}])}{n}}\right)\\ &\le 24e\left(n^{\varepsilon} + \sqrt{\frac{(\#R[\mathbf{i}])(\#R'[\mathbf{i}])}{n}}\,\mathbb{1}_{\{\#R[\mathbf{i}]\ge n^{\varepsilon} \text{ and } \#R'[\mathbf{i}]\ge n^{\varepsilon}\}}\right).\end{aligned}$$

现在我们使用引理 5：以概率 $1 - o_n(1)$，对于任意满足 $\#R[\mathbf{i}], \#R'[\mathbf{i}] \ge n^{\varepsilon}$ 的 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$，我们有 $\#R[\mathbf{i}] \le n^{1+\varepsilon} \cdot |\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$，且 $\#R'[\mathbf{i}] \le n^{1+\varepsilon} \cdot |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|$，因此

$$\sqrt{\frac{(\#R[\mathbf{i}])(\#R'[\mathbf{i}])}{n}} \le n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \cdot \sqrt{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \cdot |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|}.$$

最后，将所有结果汇总起来，我们得到

$$\begin{aligned}\#S &\le 24e \cdot \left(3^k \cdot n^{\varepsilon} + n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \cdot \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3^k} \sqrt{|\mathcal{R}[\mathbf{i}]| \cdot |\Psi(\mathcal{R}[\mathbf{i}])|}\right)\\ &\underset{\text{Cor. 18}}{=} O(n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}) + O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon-\rho\theta})\\ &\underset{\text{choice of } \varepsilon}{<} n^{\frac{1}{2}-\frac{\rho\theta}{2}},\end{aligned}$$

以概率 $1 - o_n(1)$。 □

[3]文献 [8] 中的结果仅针对无标记布朗树给出，但其证明可以直接推广到双标记树。

4.3 精细的平方根界

This 本节旨在证明引理 19。在开始证明之前，我们先陈述一个 d
prov另外两个中间结果是引理 20 和引理 21。

首先，下面陈述的引理20是 [10, 引理 4。1], 另见 [7, 引理 4.1，命题 4。2], ，但表述的背景略有不同。为完整起见，我们根据相同的参考文献给出一个简短证明。若一棵随机标号树的分布在对叶子标签进行均匀随机置换后保持不变，则称其为可交换的。

引理 20。假设 S_m 和 $S'm$ 是定义在 $\mathcal{B}_m$ 上、具有 m 个叶子的独立可交换随机变量（分布可以不同）。那么对任意 $s \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{MAST}(S_m, S'_m) \geq s\right) \leq \binom{m}{s} \frac{2^{s-2} s}{s!}.$$

特别地

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{MAST}(S_m, S'_m) \geq 2e\sqrt{m}\right) \leq \exp\left(-2e(\log 2)\sqrt{m} + o(\sqrt{m})\right)$$

当 $m \to \infty$ 时。

证明。 我们使用一阶矩方法来写出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathrm{MAST}(S_m, S'_m) \geq s\right) &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{\substack{A \subset \{1,\ldots,m\} \\ \#A = s}} \mathbb{1}_{S_m|_A = S'_m|_A}\right] \\ &= \binom{m}{s} \mathbb{P}\left((S_m)|_{\{1,\ldots,s\}} = (S'_m)|_{\{1,\ldots,s\}}\right),\end{aligned}$$

其中，最后一个等号由叶标签的可交换性得出。现在，我们可以将上一个式子右侧出现的概率界定为

$$\mathbb{P}\left((S_m)|_{\{1,\ldots,s\}} = (S'_m)|_{\{1,\ldots,s\}}\right) \leq \sup_{t \in \mathcal{B}_s} \mathbb{P}\left((S_m)|_{\{1,\ldots,s\}} = t\right).$$

对于$t,t' \in \mathcal{B}_s$ ，若t' 可通过重新标记t 的叶子得到，我们记作$t,t' \in \mathcal{B}_s$ 。注意，这在 $\mathcal{B}_s$上定义了一个等价关系。于是，对于 $\mathcal{B}_s$ 上满足可交换性性质的任意随机变量T_s ，我们有

$$\mathbb{P}\left(T_s = t\right) = \mathbb{P}\left(T_s \sim t\right) \cdot \mathbb{P}\left(T_s = t \mid T_s \sim t\right) \leq \mathbb{P}\left(T_s = t \mid T_s \sim t\right) = \frac{1}{\#\left\{t' \mid t' \sim t\right\}}.$$

由于$(S_m)|_{\{1,\ldots,s\}}$ 的分布满足可交换性条件，我们只需验证不等式右侧分母中的数量有下界$s!\, 2^{s-2}s$ ，对任意$t \in \mathcal{B}_s$均成立。为此，只需证明任意树$t \in \mathcal{B}_s$ 的图自同构数量有下界 $2^{s-2}s$。这是因为树的一个自同构由一个叶子的像以及每个节点周围边的循环次序确定。这就证明了引理的第一个结论，第二个结论则由斯特林公式得出。

□

在引理 19的证明中，将使用上述结果，根据两个区域 $R \subset T_n$ 和 $R' \subset T_n$ 的共同标签数量来控制它们的最大一致子树的大小。下一个结果旨在根据 $m = \#R$ 和 $m' = \#R'$的值给出这些共同标签数量的上界。

引理 21. 令 $\varepsilon > 0$。设 S 和 S' 是从 $\{1,\ldots,n\}$ 中选取的两个相互独立的均匀随机子集，其大小分别为 m,m'。则有以下界：

$$\mathbb{P}\left(\#(S \cap S') \geq 8 \cdot \left(n^{\varepsilon} \vee \frac{mm'}{n}\right)\right) \leq 2\exp\left(-\frac{2n^{\varepsilon}}{3}\right).$$

证明。 我们将 $\#(S \cap S')$ 写成示性函数之和 $\#(S \cap S') = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i \in S \cap S'}$。我们还将由序列 $(\mathbb{1}_{i \in S}, \mathbb{1}_{i \in S'})_{1 \le i \le n}$ 生成的滤过记为 $(\mathcal{H}_i)_{0 \le i \le n}$。我们可以验证

$$\mathbb{P}\left(i+1 \in S \cap S' \mid \mathcal{H}_i\right) = \frac{m - \sum_{j=1}^{i} \mathbb{1}_{i \in S}}{n-i} \cdot \frac{m' - \sum_{j=1}^{i} \mathbb{1}_{i \in S'}}{n-i} \le \frac{mm'}{(n-i)^2}.$$

因此，我们有如下随机支配关系

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \mathbb{1}_{i \in S \cap S'} \preceq_{\mathrm{st}} \mathrm{Bin}\left(\frac{n}{2}, 1 \wedge \frac{4mm'}{n^2}\right) \preceq_{\mathrm{st}} \mathrm{Bin}\left(\frac{n}{2}, 1 \wedge 4 \cdot \left(n^{\varepsilon-1} \vee \frac{mm'}{n^2}\right)\right).$$

通过打乱指标，同样的支配关系对 $\sum_{i=1}^{2} \mathbb{1}_{i \in S \cap S'}$ 也成立，因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\#(S \cap S') \ge 8 \cdot \left(n^{\varepsilon} \vee \frac{mm'}{n}\right)\right) \\
&\le \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \mathbb{1}_{i \in S \cap S'} \ge 4 \cdot \left(n^{\varepsilon} \vee \frac{mm'}{n}\right)\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \mathbb{1}_{i \in S \cap S'} \ge 4 \cdot \left(n^{\varepsilon} \vee \frac{mm'}{n}\right)\right) \\
&\le 2\exp\left(-\frac{2n^{\varepsilon}}{3}\right),
\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了期望为 μ 的二项随机变量 X 满足 $\mathbb{P}(X \ge (1+\varepsilon)\mu) \le \exp(-\frac{\varepsilon^2 \mu}{3})$。 □

我们现在终于可以证明引理19。

引理 19 的证明。 实际上，我们将证明一个强得多的结论：即使在给定T_n、T'_n的形状的条件下，引理19 中的估计仍然成立。

更确切地说，设 σ、σ' 是定义在同一概率空间上且相互独立的 $\{1, \dots, n\}$ 的两个均匀随机排列，并且与 T_n、T'_n 独立。我们将 T_n^{σ}（分别为 $(T'_n)^{\sigma'}$）记作由 T_n（分别为 T'_n）中每个标签 j 替换为标签 $\sigma(j)$（分别为 $\sigma'(j)$）后得到的树。由模型的可交换性，$(T_n^{\sigma}, (T'_n)^{\sigma'})$ 与 (T_n, T'_n) 同分布，因此我们可以对前者证明该引理；后者也同样成立。对于 T_n（分别为 T'_n）中的任意区域 R（分别为 R'），我们将 T_n^{σ}（分别为 $(T'_n)^{\sigma'}$）中的对应区域记作 R^{σ}（分别为 $(R')^{\sigma'}$）。也就是说，标签 j 属于 R^{σ} 当且仅当 $\sigma^{-1}(j)$ 属于 R。

注意，如果我们的某个区域为空或只包含一个叶子，结论显然成立，因此我们可以只考虑由 1 个或 2 个节点界定的区域。令 E_n 表示如下事件：存在两个至多由两个节点界定的区域$R \subset T_n$ 和 $R' \subset T'_n$，使得对于区域 R^{σ} 和$(R')^{\sigma'}$，(26) 不成立。我们要证明，当$n \to +\infty$时，$\mathbb{P}(E_n) \to 0$。事实上，即使在以T_n,T'_n为条件的情况下，这一点仍然成立，也就是说

$$\max_{t,t' \in \mathcal{B}_n} \mathbb{P}\left(E_n \mid (T_n, T'_n) = (t, t')\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{27}$$

为此，我们固定 $t, t' \in \mathcal{B}_n$。从现在起，我们以 $(T_n, T'_n) = (t, t')$ 为条件。令 r, r' 为 t, t' 中分别至多由 2 个节点界定的两个区域。由于这两棵树中的节点数固定且等于 $n-2$，这样的区域对 (r, r') 有 $O(n^4)$ 个。我们分别用 m, m' 表示 r 和 r'中的叶子数。我们用 $\mathrm{Lab}(\sigma, r)$（分别用 $\mathrm{Lab}(\sigma', r')$）表示 T_n^{σ}（分别为 $(T'_n)^{\sigma'}$）中区域 r^{σ}（分别为 $(r')^{\sigma'}$）包含的标签集合。那么，$\mathrm{Lab}(\sigma, r)$ 和 $\mathrm{Lab}(\sigma', r')$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 中两个相互独立的均匀随机子集，其大小分别为 m 和 m'。

任何同时是r^{σ}和$(r')^{\sigma'}$的诱导子树，都只能使用这两个区域共有的叶标签。因此，记$L = \mathrm{Lab}(\sigma, r) \cap \mathrm{Lab}(\sigma', r')$，我们有

$$\mathrm{MAST}(r^{\sigma}, (r')^{\sigma'}) = \mathrm{MAST}(r^{\sigma}|_L, (r')^{\sigma'}|_L).$$

此外，在给定(T_n, T'_n, L)的条件下，随机标号树$r^\sigma|_L$和$(r')^{\sigma'}|_L$相互独立（其分布可能不同），且其叶标签取自L并且可交换。综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\mathrm{MAST}(r^\sigma,(r')^{\sigma'}) \geq 4e\sqrt{2}\left(n^\varepsilon \vee \sqrt{\frac{mm'}{n}}\right) \,\middle|\, (T_n,T'_n)=(t,t')\right)\\
&\leq \mathbb{P}\left(\#L \geq 8\cdot\left(\frac{mm'}{n}\vee n^{2\varepsilon}\right) \,\middle|\, (T_n,T'_n)=(t,t')\right)\\
&+\mathbb{P}\left(\mathrm{MAST}(r^\sigma|_L,(r')^{\sigma'}|_L) \geq 4e\sqrt{2}\cdot\sqrt{n^{2\varepsilon}\vee\frac{mm'}{n}} \text{ and } \#L \leq 8\cdot\left(\frac{mm'}{n}\vee n^{2\varepsilon}\right) \,\middle|\, (T_n,T'_n)=(t,t')\right)\\
&\leq 2\exp\left(-\frac{2n^{2\varepsilon}}{3}\right)+\exp\left(-4e\sqrt{2}(\log 2)n^\varepsilon+o(n^\varepsilon)\right).
\end{aligned}$$

其中，第一项由引理 21界定，第二项则由引理 20 界定（由可交换性可知该引理适用），并将其应用于 $8\left(mm'_n \wedge n^{2\varepsilon}\right)$。此外，这些界与$(t,t')$以及 (r,r')无关，因此我们可以对 $O(n^4)$ 种 (r,r') 选择求和，从而得到（27）。 □

5 结果讨论

5.1 显式常数

本段的目标是为定理 1 和 2中出现的常数给出一个定量下界。我们不打算优化计算过程。

引理 9中 C 的取值。 在引理 9 的证明中的（6）式里，简单计算可得 $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda}\log(W_1)\right] = \frac{1}{1-2\lambda}$，因此我们要寻找 $\lambda < \frac{1}{2}$和 $C > 0$，使得 $e^{-\lambda C}{}_{1-2\lambda} \leq \frac{1}{4}$。令$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{C}$，并假设 $C > 2$。现在我们希望 $C2e^{1-C^2} \leq \frac{1}{4}$，因此可以取 $C = 7.5$。

引理 α,β,γ 中的取值选择11。为了对（10）中出现的概率p 给出定量界，我们可以使用并集界，并利用W_1, W_2, W_3都服从贝塔分布$(12,1)$，且密度为 $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathbb{1}_{(0,1]}(x)$。于是得到

$$\mathbb{P}(W_1,W_2,W_3 \geq \alpha) \geq 1-3\mathbb{P}(W_1<\alpha) = 1-3\sqrt{\alpha}.$$

我们决定取 $\alpha = 10^{-6}$。于是有$p \geq \frac{1}{9}\cdot(1-3\sqrt{\alpha}) = 0.9979$，并且需要 $\beta < p\,2$，因此取 $\beta = \frac{1}{20}$。最后，为了以定量方式完成证明，我们使用霍夫丁不等式，得到 $\gamma = (p-2\beta)^2 \approx 10^{-4}$（后续计算不需要其精确值）。

命题 δ 中的取值选择13。由（14）可知，引理14中出现的常数K 由$K = \frac{6}{\alpha}\cdot e^{C+2}\cdot 2^{\frac{2C+4}{\beta}}$给出。现在，由命题13 证明中的（17）可知，只需选择 δ使得 $6\cdot\left(\frac{2\delta K}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)^{\frac{\beta}{2}} < 1$。这等价于

$$\delta < 6^{-\frac{2}{\beta}}\cdot\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2K} = \frac{6^{-1-\frac{2}{\beta}}}{2}\cdot e^{-(C+2)}\cdot\alpha^{\frac{5}{2}}\cdot 2^{-\frac{2C+4}{\beta}} = \frac{6^{-41}}{2}\cdot e^{-9.5}\cdot 10^{-15}\cdot 2^{-19.20} \approx 1.89\cdot 10^{-166},$$

因此我们可以取 $\delta = 10^{-166}$。特别地，只考虑 βk 个良好尺度，正是我们的最终值非常小的原因。

在引理 μ、η 中的选择17。按照引理 17的证明，我们选择 μ 使得

$$e^{\frac{1}{2}\mu}\left(1-\frac{\delta^2}{8}\right)\le 1 \qquad \text{i.e.} \qquad \mu \le -2\log\left(1-\frac{\delta^2}{8}\right).$$

例如，我们可以选择 $\mu = \frac{\delta^2}{10} = 10^{-333}$。此外，我们将 η 定义为 $\frac{\mu\beta}{8} = \frac{\mu}{160} > 10^{-336}$。

选择 ξ 命题 3中的 我们只需要 $\xi < \min(\gamma,\eta)$，因此可以取 $\xi = 10^{-336}$。

选择 ρ 推论 18 和 θ,ε_1 定理 1中的取值，以及 ε_2 定理 2中的取值。 在推论 18的证明中，常数 ρ 必须选得满足 $\rho < \frac{1}{2}\min(\eta,\xi) = \frac{\xi}{2}$。在定理 1的证明中，可以取 $\theta = \frac{1}{2C} = \frac{1}{15}$，最后取 $\varepsilon_1 < \frac{\rho\theta}{2}$，因此可以取 $\varepsilon_1 = 10^{-338}$。类似地，$\varepsilon_2$必须选得满足 $\varepsilon_2 < \frac{\eta}{2C} = \frac{\eta}{15}$，因此可以取 $\varepsilon_2 = 10^{-338}$。

5.2 备注与开放问题

最大一致子树的期望。在本文所有论证中，标为概率 $1-o_n(1)$ 的估计，$1-O(n^{-a})$ 实际上对某个（较小的）$a>0$（或者以概率 $1-O(e^{-ak})$成立；由于我们取 k 为 $\log n$的数量级，这与前者等价）。因此，由定理 1 和引理 20，我们可以写成

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{MAST}(T_n,T_n')\ge n^{1/2-\varepsilon_1}\right)\le n^{-a}, \quad \text{and} \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{MAST}(T_n,T_n')\ge Cn^{1/2}\right)\le e^{-c\sqrt{n}}$$

对某些常数 C、$c>0$。因此，由于最大一致子树$(T_n,\ T'n)$ 不超过 n，我们可以写成

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{MAST}(T_n,T_n')\right]\le n^{1/2-\varepsilon_1}+n^{-a}\times C\sqrt{n}+e^{-c\sqrt{n}}\times n = O\left(n^{1/2-\min(\varepsilon_1,a)}\right),$$

因此，期望最大一致子树也远小于 $\sqrt{n}$。

其他随机树模型。另一个曾被用于研究最大一致子树的自然随机树模型 [10, 7] 是尤尔–哈丁模型 Y_n，即通过均匀随机选择一个叶节点，并将其分裂为一个节点和两个叶子，Y_n 由Y_{n-1} 得到的模型。该模型目前已知的最佳上下界分别为 [7]，其数量级分别为 $n^{0.344}$ 和 $\sqrt{n}$。我们认为，对本文所提出思想的改造很可能可用于证明尤尔–哈丁模型的定理 1。

超越二叉情形，另一个自然的问题是尝试估计更一般的伽尔顿–沃森树之间的最大一致子树。我们相信，只要后代分布的尾部足够轻，就可以得到类似的结果（技术上的困难在于，离散模型与布朗树之间的耦合不会那么简单）。另一方面，当尾部非常厚重时，由于星形子树的存在，最大一致子树应当会变得更大。

连续随机结构之间同胚的最优正则性。引入以下量似乎是很自然的

$$\gamma_+ := \inf\left\{\gamma\ge 0 \;\middle|\; \text{there a.s. exists no homeomorphism } \Psi:\mathcal{T}\to\mathcal{T}' \text{ that is } \gamma\text{-Hölder}\right\},$$

它在某种意义上刻画了布朗树两个独立实现之间的度量差异。定理 2 保证 $\gamma_+ \le 1-10^{-338}$，正如引言中所指出的，Aldous 在 [5] 中的构造相当于构造一个$(5-2\sqrt{6})$-赫尔德同胚

介于 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}'$之间，因此 $\gamma_+ \geq 5-2\sqrt{6} \approx 0$。1010。寻找 γ_+ 的更紧界，或为 γ_+ 的取值提出一种可靠的启发式方法，将是一个有趣的研究方向。

对于随机度量空间的独立副本之间的同胚，如何找到最优正则性？这个问题也可以针对许多其他模型提出。例如，自然会问：对于具有平面拓扑的某些模型，例如布朗地图 [22, 24]，，或者更一般地，对于 Liouville 量子引力度量 [17]，能否证明定理 2 的类似结论？

赫尔德同胚的构造

定理 22. 设 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}'$是布朗树的两个独立副本。几乎必然存在一个同胚 Ψ，它将 $\mathcal{T}$映到 $\mathcal{T}'$，且 Ψ和 Ψ^{-1}对于任意 $\gamma < 5-2\sqrt{6}$都属于 γ-赫尔德连续。

证明。考虑树 $\mathcal{T}$的 Aldous 分解，如第 2.5 节所述，以及与之相关的点集 $(\mathbf{x}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3\setminus\{\varnothing\}}$ 和分支点集 $(\mathbf{b}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}$。再令 $\left(\mathcal{T}', (\mathbf{x}'[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3\setminus\{\varnothing\}}, (\mathbf{b}'[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}\right)$为 $\left(\mathcal{T}, (\mathbf{x}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3\setminus\{\varnothing\}}, (\mathbf{b}[\mathbf{i}])_{\mathbf{i}\in\mathbb{T}_3}\right)$的一个独立副本，因此特别地，$\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}'$是布朗树。我们通过令 $\Psi(\mathbf{b}[\mathbf{i}]) = \mathbf{b}'[\mathbf{i}]$，构造映射 Ψ：$\{\mathbf{b}[\mathbf{i}] \mid \mathbf{i} \in \mathbb{T}_3\} \to \{\mathbf{b}'[\mathbf{i}] \mid \mathbf{i} \in \mathbb{T}_3\}$。下面将证明，对任意 $\gamma < 5-2\sqrt{6}$，此映射几乎必然是 γ-赫尔德连续的。然后，利用所考虑的分支点集的稠密性，可以将 Ψ唯一延拓为一个从 $\mathcal{T}$到 $\mathcal{T}'$的 γ-赫尔德映射。由对称性，对 Ψ^{-1}也可以作同样的延拓，因此映射 Ψ确为同胚，且 Ψ和 Ψ^{-1}几乎必然都是 γ-赫尔德连续的。由于这对趋于 $5-2\sqrt{6}$的 γ的一列可数取值几乎必然成立，定理的结论便得证。

从现在起，我们固定 $\gamma < 5-2\sqrt{6}$，并对任意$k \geq 1$引入，

$$S_k := \max_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbb{T}_3 \\ |\mathbf{i}|,|\mathbf{j}|\leq k}} \frac{d_{\mathcal{T}'}(b'[\mathbf{i}], b'[\mathbf{j}])}{(d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{i}], b[\mathbf{j}]))^{\gamma}} \qquad \text{and} \qquad S := \sup_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbb{T}_3} \frac{d_{\mathcal{T}'}(b'[\mathbf{i}], b'[\mathbf{j}])}{(d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{i}], b[\mathbf{j}]))^{\gamma}} = \sup_{k\geq 1} S_k.$$

证明 ..... Ψ 几乎处处是 γ-Hölder 连续的 $\{b[\mathbf{i}] \mid \mathbf{i} \in \mathbb{T}_3\}$，归结为证明$S$ 几乎必然有限。我们分两步证明这一结论：

- 首先，我们对第k层“相邻分支点”之间的距离进行控制，并且该控制对所有这类点对同时成立。这类点对在第$(x[\mathbf{i}1], x[\mathbf{i}2])$ 节所述的分解中以如下形式出现：2.5。下一引理给出了这一估计。

- 然后，我们利用这个估计来界定$S_k - S_{k-1}$，从而S_k 递增并趋于一个有限极限。

引理23。几乎必然地，当 k 足够大时，对于任意$\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$，我们有

$$d_{\mathcal{T}'}\left(x'[\mathbf{i}1], x'[\mathbf{i}2]\right) \leq k^{-2} \cdot d_{\mathcal{T}}\left(x[\mathbf{i}1], x[\mathbf{i}2]\right)^{\gamma}. \tag{28}$$

引理23的证明。回顾命题6，其中指出，对于任意 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$，在给定 $\mathcal{R}[\mathbf{i}]$, 的条件下，区域 $(\mathcal{R}[\mathbf{i}], \mathbf{x}[\mathbf{i}1], \mathbf{x}[\mathbf{i}2])$ 服从质量为 $|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$的双重点布朗树的分布。因此，对于任意 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3$，在给定 $|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$的条件下，距离 $\mathrm{d}_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}[\mathbf{i}1], \mathbf{x}[\mathbf{i}2])$ 的分布为

$$d_{\mathcal{T}}\left(x[\mathbf{i}1], x[\mathbf{i}2]\right) \overset{\mathrm{d}}{=} |\mathcal{R}[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{2}} \cdot Y,$$

其中 Y 服从瑞利分布，密度为 $4xe^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$ 定义在 $[0, \infty)$，例如参见 [21,定理 2。11]。对于 $\mathcal{T}'$ 中的类似量，结论当然也成立。

对于任意 $\gamma \in (0,1)$ 以及 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$，我们记

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(d_{\mathcal{T}'}\left(x'[\mathbf{i}1], x'[\mathbf{i}2]\right) > k^{-2} \cdot d_{\mathcal{T}}\left(x[\mathbf{i}1], x[\mathbf{i}2]\right)^{\gamma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|\mathcal{R}'[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{2}} \cdot Y' > k^{-2} \cdot \left(|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{2}} \cdot Y\right)^{\gamma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{|\mathcal{R}'[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{2}} \cdot Y'}{\left(\mathcal{R}[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{2}} \cdot Y\right)^{\gamma}} > k^{-2}\right) \\
&\leq k^{2\lambda} \cdot \mathbb{E}\left[|\mathcal{R}'[\mathbf{i}]|^{\frac{\lambda}{2}}\right] \cdot \mathbb{E}\left[|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|^{-\frac{\lambda\gamma}{2}}\right] \cdot \mathbb{E}\left[(Y')^{\lambda}\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^{-\gamma\lambda}\right],
\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们将所有项都取了某个次幂 $\lambda < \frac{2}{\gamma}$ 并使用了马尔可夫不等式。条件 $\lambda < \frac{2}{\gamma}$ 保证量 $C(\gamma,\lambda) := \mathbb{E}\left[(Y')^{\lambda}\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^{-\gamma\lambda}\right]$ 有限。另一方面，由命题 6 可知，$|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|$ 是k 个独立同分布的贝塔分布$(1/2, 1)$随机变量的乘积。由于这类贝塔随机变量的p阶矩为 12_{p+1}（当$p > -\frac{1}{2}$时），因此我们得到

$$\mathbb{E}\left[|\mathcal{R}'[\mathbf{i}]|^{\frac{\lambda}{2}}\right] \mathbb{E}\left[|\mathcal{R}[\mathbf{i}]|^{-\frac{\lambda\gamma}{2}}\right] = \left(\frac{1}{(1+\lambda)(1-\gamma\lambda)}\right)^{k}.$$

分母中出现的表达式 $(1+\lambda)(1-\gamma\lambda)$ 在 λ 处取得最大值，最大值点为 $\lambda = \frac{1-\gamma}{2\gamma} < \frac{2}{\gamma}$，最大值为 $1 + (1-\gamma)_{4\gamma}^{2}$。该值随 γ 增大而减小，并在 $5 - 2\sqrt{6}$处达到 3。因此，对于 $\gamma < 5 - 2\sqrt{6}$，我们可以对所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k$ 使用并集界，得到

$$\mathbb{P}\left(\exists \mathbf{i} \in \mathbb{T}_3^k : d_{\mathcal{T}'}\left(x'[\mathbf{i}1], x'[\mathbf{i}2]\right) > k^{-2} \cdot d_{\mathcal{T}}\left(x[\mathbf{i}1], x[\mathbf{i}2]\right)^{\gamma}\right) \leq k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot \left(\frac{3}{1 + \frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}}\right)^{k} \cdot C(\gamma, \tfrac{1-\gamma}{2\gamma}),$$

这是关于$k \geq 1$可求和的。因此，根据博雷尔-坎特利引理可知，我们的引理成立。

□

从现在起，令 K_0 为使得对所有 $k \geq K_0$，，(28) 均成立的最早时刻，并固定 $k \geq K_0$。考虑 $\mathbb{T}_3$中的两个指标，比如 i 和 j，使得 $|i|, |j| \leq k$，并考虑树 $\mathcal{T}$中从 b[i] 到 b[j]的路径 $p^{i \to j}$。我们将 l 记为满足以下条件的指标：b[l] 是 $p^{i \to j}$ 沿途经过的第一个点，且属于 $\{b[i] \mid i \in \mathbb{T}_3, |i| \leq k-1\}$（注意，如果 $|i| \leq k-1$，该指标也可能就是 i）。类似地，令 m 满足 b[m] 是最后一个这样的点。于是我们可以写成

$$d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{i}], b[\mathbf{j}]) = d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{i}], b[\mathbf{l}]) + d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{l}], b[\mathbf{m}]) + d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{m}], b[\mathbf{j}]).$$

现在，要么 $b[i] = b[l]$，，此时它们之间的距离为 0；要么 $b[i] \neq b[l]$，此时这对分支点可以写成 $\{b[i], b[l]\} = \{x[u1], x[u2]\}$，其中某个 $u \in \mathbb{T}_3$ 满足 $|u| = k+1$。事实上，沿路径 $p^{i \to j}$ 相邻的、深度至多为 k 的两个分支点总是这种形式，并且其中一个的深度恰为 k，另一个的深度至多为 $k-1$，因此 b[l] 要么是 b[i]，要么是 $p^{i \to j}$上的第二个分支点。对 $\mathcal{T}'$ 也有同样的结论，因此无论哪种情况，根据引理23，我们都有

$$d_{\mathcal{T}'}\left(b'[\mathbf{i}], b'[\mathbf{l}]\right) \leq (k+1)^{-2} \cdot d_{\mathcal{T}}\left(b[\mathbf{i}], b[\mathbf{l}]\right)^{\gamma},$$

并且，类似的不等式对$d_{\mathcal{T}'}(b'[\mathbf{m}], b'[\mathbf{j}])$也成立。

因此，对于 $k \geq K_0,$ ，我们有

$$
\begin{aligned}
& d_{\mathcal{T}'}\left(b'[\mathbf{i}], b'[\mathbf{j}]\right) \\
& = d_{\mathcal{T}'}\left(b'[\mathbf{i}], b'[\mathbf{l}]\right) + d_{\mathcal{T}'}\left(b'[\mathbf{l}], b'[\mathbf{m}]\right) + d_{\mathcal{T}'}\left(b'[\mathbf{m}], b'[\mathbf{j}]\right) \\
& \leq (k+1)^{-2} \cdot d_{\mathcal{T}}\left(b[\mathbf{i}], b[\mathbf{l}]\right)^{\gamma} + S_{k-1} \cdot d_{\mathcal{T}}\left(b[\mathbf{l}], b[\mathbf{m}]\right)^{\gamma} + (k+1)^{-2} \cdot d_{\mathcal{T}}\left(b[\mathbf{m}], b[\mathbf{j}]\right)^{\gamma} \\
& \leq \left((k+1)^{-\frac{2}{1-\gamma}} + S_{k-1}^{\frac{1}{1-\gamma}} + (k+1)^{-\frac{2}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} \cdot \left(d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{i}], b[\mathbf{l}]) + d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{l}], b[\mathbf{m}]) + d_{\mathcal{T}}(b[\mathbf{m}], b[\mathbf{j}])\right)^{\gamma} \\
& \leq \left(S_{k-1}^{\frac{1}{1-\gamma}} + 2(k+1)^{-\frac{2}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} \cdot d_{\mathcal{T}}\left(b[\mathbf{i}], b[\mathbf{j}]\right)^{\gamma},
\end{aligned}
$$

其中我们使用了Hölder不等式，取$p = {}_{1-\gamma}^{1}$ 和$q = -\frac{1}{\gamma}$。这保证了对于$k \geq K_0,$ ，我们有

$$
S_k \leq \left(S_{k-1}^{\frac{1}{1-\gamma}} + 2(k+1)^{-\frac{2}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} \leq S_{k-1} + \frac{2}{(k+1)^2},
$$

因此 $\sup_{k \geq 1} S_k < \infty$。证明完毕。 □

参考文献

[1] L. ADDARIO-BERRY、N. BROUTIN 和 C. GOLDSCHMIDT，临界随机图：极限构造与分布性质，Electronic Journal of Probability，15（2010），第741–775页。编号25。[2] D. ALDOUS，连续随机树 *I*，概率年刊，19（1991），第1–28页。[3] ,连续随机树 *III*，概率年刊，21（1993），第248–289页。[4] D. ALDOUS，随机树、随机三角剖分与布朗 *excursion* 的递归自相似性，Ann. Probab.，22（1994），第527–545页。[5] D. J. ALDOUS，随机叶标记二叉树的最大公共子树，SIAM离散数学杂志，36（2022），第299–314页。[6] F. BASSINO、M. BOUVEL、M. DRMOTA、V. FÉRAY、L. GERIN、M. MAAZOUN 和 A. PIER- ROT，随机余图中的线性大小独立集与可分排列中的递增子序列，组合理论，2（2022）。[7] D. I. BERNSTEIN、L. S. T. HO、C. LONG、M. STEEL、K. S. JOHN 和 S. SULLIVANT，最大一致子树期望大小的界，SIAM离散数学杂志，29（2015），第2065–2074页。[8] M. BONK 和 H. TRAN，连续自相似树，载于《分形几何与随机性VI》，U. Freiberg、B. Hambly、M. Hinz 和 S. Winter 编，施普林格，2021，施普林格国际出版，第143–189页。[9] J. BORGA、W. DA SILVA 和 E. GWYNNE，布朗可分 *permuton* 中递增子序列以及布朗余图核中齐次集的幂律界，（2023）。[10] D. BRYANT、A. MCKENZIE 和 M. STEEL，随机二叉树的最大一致子树大小，载于《生物共识：DIMACS生物共识工作组会议论文集》，2000年10月25–26日及2001年10月2–5日，DIMACS中心，普罗维登斯，罗得岛州：美国数学学会，2003，第55–65页。[11] D. BURAGO、Y. BURAGO 和 S. IVANOV，度量几何教程，数学研究生教材第33卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。[12] D. CROYDON 和 B. HAMBLY，连续随机树的自相似性与谱渐近，随机过程及其应用，118（2008），第730–754页。

[13] D. DUFRESNE，贝塔分布和伽马分布的代数性质及其应用，Adv. Appl. Math.，20（1998），第285–299页。[14] C. R. FINDEN 和 A. D. GORDON，求取公共剪枝树，Journal of Classification，2（1985），第255–276页。[15] A. D. GORDON，分类的评估与比较，Analyse de Données et Informatique，（1980），第149–160页。[16] M. GROMOV，从内部看卡诺-卡拉塞奥多里空间，Birkhäuser Basel，巴塞尔，1996，第79–323页。[17] E. GWYNNE 和 J. MILLER，李维尔量子引力度量的存在性与唯一性$\gamma \in (0,2)$，Inventiones Mathematicae，223（2021），第213–333页。[18] D. P. KENNEDY，布朗 *excursion* 最大值的分布，J. Appl. Probability，13（1976），第371–376页。[19] A. KHEZELI，随机叶标记二叉树最大公共子树的改进下界，arXiv:2208.05148（2022）。[20] E. KUBICKA、G. KUBICKI 和 F. MCMORRIS，两棵二叉树的一致子树，Congressus Numerantium，（1992），第217–217页。[21] J.-F. LE GALL，随机树及其应用，Probab. Surv.，2（2005），第245–311页。[22] ，布朗地图的唯一性与普适性，Ann. Probab.，41（2013），第2880–2960页。[23] A. MARKIN，最大一致子树极值问题，Discrete Applied Mathematics，285（2020），第612–620页。[24] G. MIERMONT，布朗地图是均匀随机平面四边形剖分的缩放极限，Acta Math.，210（2013），第319–401页。[25] P. MISRA 和 S. SULLIVANT，给定树形状时最大一致子树期望大小的界，SIAM离散数学杂志，33（2019），第2316–2325页。[26] J. PITMAN，组合随机过程，数学讲义第1875卷，Springer-Verlag，柏林，2006。内容为2002年7月7–24日在圣弗卢尔举行的第32届概率论暑期学校讲座，并有 Jean Picard 作序。[27] B. PITTEL，一棵随机树的两个独立副本共有的诱导子树的期望数量，SIAM离散数学杂志，37（2023），第1–16页。[28] J.-L. RÉMY，一种二叉树计数的迭代方法及其在随机生成中的应用，RAIRO. Informatique théorique，19（1985），第179–195页。[29] M. STEEL 和 T. WARNOW，凯库拉树定理：最大一致子树的计算，Information Processing Letters，48（1993），第77–82页。