排版后的文章中将在此处显示与文章类型相应的页眉。

arXiv:2304.00907v1 [physics.flu-dyn] 3 Apr 2023

三维浮力水力裂缝：有限体积释放

Andreas Möri 和 Brice Lecampion†
地能实验室 - Gaznat 地能讲席，洛桑联邦理工学院，
ENAC-IIC-GEL-EPFL，Station 18，CH-1015，瑞士

（收稿日期：2023年4月3日；修订日期：–；接受日期：–）

在不渗透介质中，如果水力裂缝的体积超过静水压力加载的径向裂缝的极限体积，即使不再注入流体，裂缝也能继续扩展。该极限取决于周围固体的力学性质，以及流体与固体之间的密度差。自持裂缝扩展由两个无量纲数表征。第一个参数是浮力因子，通过比较总释放体积与极限体积，判断是否会发生浮力驱动扩展。第二个参数是当浮力效应达到量级 1 时径向裂缝的无量纲黏度。该无量纲黏度显著取决于流体体积的释放速率，表明总体积和释放历史都会影响自持浮力扩展。根据这两个无量纲数，可以确定六种明确的扩展历程。裂缝扩展会在径向扩展和浮力驱动扩展这两种不同的极限状态之间演变，从而形成不同的裂缝形状。根据裂缝前缘中占主导地位的能量耗散机制（黏性流动或裂缝形成），可以确定两种扩展速率。对于有限的材料韧度，韧度主导极限在扩展速率和前缘形状方面代表所有裂缝的晚期解（但可能只有在很晚的时刻才能达到）。黏度主导极限可能出现在中间阶段。我们的三维模拟证实了预测的标度关系，并凸显了在准确分析浮力水力裂缝时，考虑完整扩展历程和释放历史的重要性。

1. 引言

本研究探讨了从点源释放有限流体体积后，平面三维水力裂缝的扩展及其可能向自持浮力裂缝转变的过程。水力裂缝是由内部流体压力超过最小原位压应力而驱动的张性充液裂缝（Detournay 2016年）。自然界中的水力裂缝与岩浆侵入通过岩石圈输运岩浆有关（Rivalta 等 2015年；Spence 等 1987；Lister & Kerr 1991年），也可能由烃类储层形成过程中地球化学反应导致的孔隙压力升高引起（Vernik 1994）。水力裂缝最常见的工程应用之一是对烃类井进行增产改造（Economides& Nolte 2000；Smith & Montgomery 2015年；Jeffrey 等2013）。

† 通讯邮箱：brice.lecampion@epfl.ch, andreas.mori@epfl.ch

摘要不得延伸至第2页

近期，人们详细分析了在无浮力作用下，径向水力裂缝在释放结束时（工业应用中称为“关井”）的扩展过程（Möri & Lecampion 2021）。在不渗透介质中，水力裂缝的最终半径仅取决于材料参数以及注入/释放的流体总体积。然而，水力裂缝并不一定会在释放结束时立即停止扩展。如果释放结束时黏性流体流动造成的耗散仍然显著，裂缝就会在黏度主导的脉冲区间内继续扩展一段时间，最终停滞在一个与释放速率无关的停止半径处。

考虑重力时，近期研究主要聚焦于推导形成三维浮力裂缝所需的极限体积（Dahm 2000；Davis 等，2020；Salimzadeh 等，2020；Smittarello 等，2021）。忽略流体黏度时，Davis 等（2020）确定的临界体积与此前的二维预测（Weertman 1971）相近。然而，若不考虑流体黏度的影响，就无法约束裂缝的上升速率（Garagash & Germanovich（2014）对此有所讨论）。这些研究普遍认为，形成的浮力裂缝具有头尾结构（Lister & Kerr 1991）：头部主导裂缝的整体行为，而尾部主导其上升速率（Garagash & Germanovich 2022）（见图1）。Davis 等人（2023）估算了黏度主导尾部情况下的最大上升速度。Garagash & Germanovich（2014）也推导出了类似的解（详情见 Garagash & Germanovich（2022）），适用于头部由韧度主导的指状裂缝。在他们的研究中，推导得到的三维头部与 Davis 等（2020）提出的极限体积相似。该裂缝“头部”与宽度恒定的尾部相连，在径向扩展向自持浮力传播转变结束后，形成晚期解。Salimzadeh 等（2020）考虑初始阶段径向扩展裂缝中的润滑流，通过若干次数值模拟研究了向浮力驱动扩展转变的早期阶段。与 Davis 等（2020）和 Garagash & Germanovich（2014）的结果相同，他们报告了浮力裂缝形成所需释放体积的极限值。三项关于最小/临界体积释放量的估算具有相同的特征尺度，仅前因子不同。目前尚无一项综合研究探讨极限体积，既考察浮力驱动裂缝的形成，也考察其向晚期特征演变的过程。

2. 预备知识

我们研究拉伸型（I 型）水力裂缝，采用线弹性断裂力学（LEFM）和层流牛顿流体润滑流的经典假设（Detournay 2016年）。有限体积从深处的点源释放到性质均匀的线弹性不透水介质中。裂缝方位和应力状态与 Möri& Lecampion (2022) 所述情况相同，如图 1所示。我们省略数学表述的详细讨论（详情见 Möri & Lecampion (2022)），因为唯一的区别在于流体释放历程。这里考虑一种简单的注入历程：流体体积以恒定速率释放，直到时刻 $t = t_s$ 释放结束（即停注时间），此时释放速率骤降为零。我们将块状注入期间的恒定释放速率记为 Q_o 因此，释放速率历程为：

$$Q(t) = \begin{cases} Q_o & t \leqslant t_s \\ 0 & t > t_s \end{cases}. \tag{2.1}$$

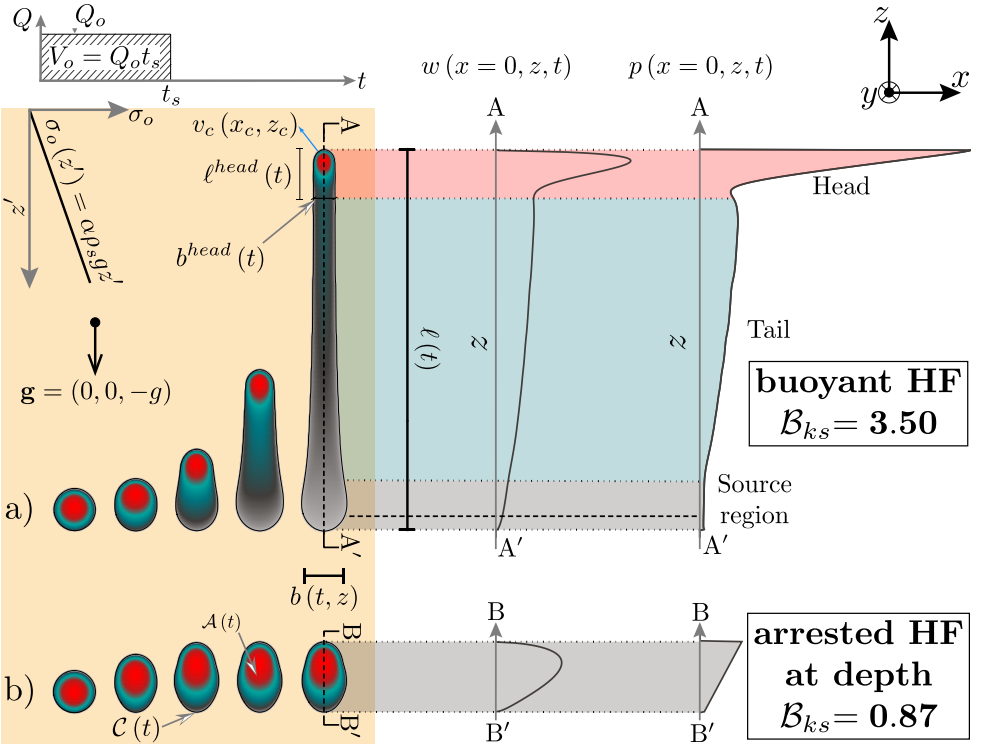

图 1：a）水力裂缝在浮力作用下自持增长。b）在一定深度停滞的水力裂缝。两条裂缝均由点源通过块状注入释放有限流体体积而形成，并在均匀线弹性介质（$x|z$ 平面）中扩展；向下的重力矢量$\mathbf{g}$（单位：$-z$）产生线性围限应力 σ_o（z）。裂缝面积记为 A（t），闭合前缘记为 C（t），局部法向速度记为 v_c（x_c，z_c）（其中（x_c，z_c）$\in$C（t））。裂缝延伸范围由其局部宽度 b（z，t）和总长度l（t）定义。

不透水介质情况下的全局体积平衡为

$$\mathcal{V}(t) = \int_{\mathcal{A}(t)} w(t, x, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \begin{cases} Q_o t & t < t_s \\ V_o = Q_o t_s & t \geqslant t_s \end{cases}, \tag{2.2}$$

其中 $V_o = Q_o t_s$ 为释放的流体总体积。

下文将结合尺度分析与数值模拟，采用完全耦合的平面三维水力裂缝求解器 PyFrac（Zia &Lecampion 2020）。关于数值格式的详细说明，请参阅Zia & Lecampion (2020)及其中的参考文献。开源代码的文档和应用示例可从以下网址下载：PyFrac。数值模拟所用的初始条件和参数详见Möri & Lecampion (2022)第 2.2 节以及本文的共享数据。

2.1. 无浮力有限体积径向水力裂缝的停滞

在不存在浮力的情况下，考虑不透水介质这一极限情形，注入结束后，水力裂缝最终会在注入体积与线弹性断裂力学扩展条件达到平衡时停滞。该问题由 Möri & Lecampion (2021年 进行了研究。停滞时的裂缝特征与停注时间无关 t_s。它们仅取决于固体的性质

以及释放的流体总量。例如，停止半径 R_a （停滞时的下标 a ）由下式给出

$$R_a = \left(\frac{3}{8\sqrt{\pi}}\right)^{2/5} \left(\frac{E' V_o}{K_{Ic}}\right)^{2/5}, \tag{2.3}$$

其中， $E' = E/(1-\nu^2)$ 为平面应变模量， E 为材料的杨氏模量， ν 为其泊松比，而 K_{Ic} 为该材料的断裂韧度。

尽管停止半径与 t_s 无关，但停滞前的扩展历程取决于它。特别是，裂缝不一定会在释放结束后立即停滞。当水力裂缝在释放结束时处于黏度主导区时，尤其会出现这种情况。关井后立即停滞还是继续扩展，取决于关井时的无量纲韧度：

$$\mathcal{K}_{ms} = K_{Ic} \frac{t_s^{1/9}}{E'^{13/18} \mu'^{5/18} Q_o^{1/6}}. \tag{2.4}$$

其中， $\mu' = 12\mu$ 和 μ 为压裂液黏度。在式（2.4）中，我们使用下标 m 和 s 分别表示黏性标度和释放结束。如果裂缝受黏度主导（$\mathrm{K}_{ms} \ll 1$），它会在黏度主导脉冲区间内继续扩展一段时间，直到达到 $R = R_a$ 后最终停滞。另一方面，如果断裂能已经占主导（$\mathrm{K}_{ms} \gg 1$），则关井后立即停滞。研究表明，当 $\mathrm{K}_{ms} \lessapprox 0.3$ 时会出现黏度主导脉冲区间（有关黏度主导脉冲区间的详细说明，见Möri & Lecampion (2021)第3.2节）。对立即停滞条件的数值估算得出 $\mathrm{K}_{ms} \gtrapprox 0.8$（注意，Möri & Lecampion (2021)报告的数值为2.5，这是因为他们在式（2.4）中采用了另一种定义，使用 $\overline{K'} = \sqrt{32/\pi} K_{Ic}$ 代替 K_{Ic}）。

2.2. 连续释放下的浮力主导水力裂缝

当流体以恒定体积流率释放时 Q_o，在浮力作用下，裂缝沿重力方向延伸。由此出现两个无量纲浮力，分别对应黏度主导区间（下标 m）和韧度主导区间（下标 k）（Möri & Lecampion2022）：

$$\mathcal{B}_m = \Delta\gamma \frac{Q_o^{1/3} t^{7/9}}{E'^{5/9} \mu'^{4/9}}, \quad \mathcal{B}_k = \Delta\gamma \frac{E'^{3/5} Q_o^{3/5} t^{3/5}}{K_{Ic}^{8/5}}. \tag{2.5}$$

当浮力达到 O(1) 量级时，这两个无量纲浮力与径向裂缝的无量纲黏度相关：

$$\mathcal{M}_{\widehat{k}} = \mu' \frac{Q_o E'^3 \Delta\gamma^{2/3}}{K_{Ic}^{14/3}} \tag{2.6}$$

as

$$\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_m^{27/35} \mathcal{M}_{\widehat{k}}^{12/35}. \tag{2.7}$$

与释放结束时的无量纲韧度类似，$\mathcal{K}_{ms}$ (2.4) $\mathcal{M}_{\widehat{k}}$ 用于确定径向水力裂缝扩展过程中，从径向裂缝转变为细长浮力主导裂缝发生在黏度主导阶段（$\mathcal{M}_{\widehat{k}} \gg 1$）还是韧度主导阶段（$\mathcal{M}_{\widehat{k}} \ll 1$。随着无量纲黏度 $\mathcal{M}_{\widehat{k}}$ 的变化，会出现一系列解，详见Möri & Lecampion (2022。值得注意的是，Garagash & Germanovich(2014) 中得到了一个大韧度极限解（详见Garagash & Germanovich (2022）。该解

Focus on Fluids 文章的篇幅不得超过此页

在$\mathcal{M}_{\widehat{k}} \leqslant 10^{-2}$ (Möri&Lecampion 2022) 条件下可观察到大韧度极限，其特征是浮力指状裂缝具有恒定宽度和定体积头部。这些特征与恒定注入速率相结合，使浮力裂缝呈线性增长。在$\mathcal{M}_{\widehat{k}} \in \left[10^{-2}, 10^{2}\right]$取中间范围的值时，裂缝呈现均匀水平宽度和指状形状。在$\mathcal{M}\widehat{k}$这一范围内，前置系数（如长度、宽度等）取决于无量纲黏度$\mathcal{M}\widehat{k}$ (2.4。具体而言，随着$\mathcal{M}\widehat{k}$ 增大，裂缝宽度和头部体积也会增加。更大的$\mathcal{M}_{\widehat{k}} \geqslant 10^{2}$值会产生韧度可忽略的浮力解；在中间时段，裂缝增长呈次线性。此类裂缝的宽度会先持续增大，之后相对于非零断裂韧度达到的最终值保持恒定。随后，裂缝增长速率变为恒定。同时，头尾结构趋于稳定。在严格的零韧度极限下，由于全局体积平衡，宽度会持续增大，裂缝高度增长始终呈次线性。

2.3. 静水压力加载的径向裂缝

多位作者从静态线弹性平衡的角度，研究了有限体积裂缝自持浮力扩展的发生条件，其中将径向裂缝视为承受线性变化载荷（Davis 等 2020年；Salimzadeh 等 2020年；Davis 等 2023年）的裂缝。假设黏性流动为零，张开裂缝的净载荷等于静水流体压力减去线性变化的背景应力 σ_o（z）。对于这种载荷，其弹性解以及上端与下端的应力强度因子演化均已有解析表达式（Tada 等 2000）。采用线弹性断裂力学扩展条件后，上端的应力强度因子（SIF） K_I 设为材料断裂韧度 K_{Ic}。另一方面，下端的 SIF 设为零，使裂缝闭合并释放继续向上扩展所需的体积。令上端满足 $K_I = K_{Ic}$，下端满足 $K_I = 0$，可将极限体积约束为

$$V_{\text{limit}} \propto \frac{K_{Ic}^{8/3}}{E' \Delta\gamma^{3/5}} = V_{\widehat{k}}^{\text{head}} \tag{2.8}$$

这一浮力驱动扩展所需的最小体积，近期已有多项研究独立识别出（Davis 等2020年；Salimzadeh 等2020；Davis 等2023年）。有趣的是，它对应于 $V_{\widehat{k}}^{\text{head}}$ 恒定释放情况下浮力水力裂缝韧度主导头部的体积（Garagash & Germanovich 2014；Möri & Lecampion2022）。

如果径向裂缝中释放的流体体积略大于此值，上端裂尖将具有应力强度 $K_I > K_{Ic}$，表明存在导致裂缝向上扩展的过剩能量。同样，下端将具有 $K_I < 0$，因而发生闭合。释放体积在这一最小值附近的小幅扰动，会导致裂缝停滞（体积较小）或浮力裂缝脱离（体积较大）。需要注意的是，当裂缝体积等于这一最小体积且忽略流体黏度时，先前的推导无法预测裂缝随后将如何扩展。只有引入流体黏度，才能克服这一方法在物理上的局限性。

此外，先前推导自持扩展发生所需最小体积时，假设在全部流体体积释放完毕前，裂缝始终保持完全径向形态。这种方法相当于认为，只有在全部流体注入完成后，浮力才开始发挥作用。它未涵盖释放过程中浮力

不可忽略的情况。此外，对于释放结束后裂缝扩展仍在继续、而浮力仍可忽略的情况，这种方法是否适用也尚不明确。

3. 浮力主导水力裂缝的深度停滞与自持扩展

根据对无浮力作用时水力裂缝停止半径的讨论（见第 2.1 节），以及连续释放条件下浮力主导水力裂缝扩展流态的讨论（见第 2.2 节），我们可以预见自持浮力有限体积裂缝形成的几种情形。当释放结束时裂缝扩展处于韧度主导状态，向浮力驱动扩展的转变可能发生在流体释放期间，也可能发生在脉冲传播阶段。我们将结合第 2 节中引入的无量纲浮力和无量纲浮力黏度，研究这些不同的扩展历程，并讨论它们与临界最小体积（2.8）的关系。

3.1. 释放结束时韧度主导

我们首先研究释放结束时裂缝处于韧度主导状态的情形。没有浮力作用时，圆币形裂缝内会形成恒定的流体压力，裂缝随即在其停止半径 R_a （见公式（2.3））处停止。由于浮力效应的加入，会形成线性压力梯度，从而产生上述构型（见第 2.3 节）。我们预计，释放的总体积必须超过 $V_{\widehat{k}}^{\text{head}}$ （2.8），浮力裂缝才会形成。忽略时间演化时，只需比较 $V_o/V_{\widehat{k}}^{\text{head}}$，即可判断浮力裂缝是否形成。考虑随时间发生的径向扩展时，无量纲浮力 $\mathcal{B}_k$ （t）（2.5）表明浮力何时开始占据主导地位。在释放结束时 $t = t_s$估算 $\mathcal{B}_k$ （t），可得

$$\mathcal{B}_{ks} = \mathcal{B}_k\,(t = t_s) = \Delta\gamma \frac{E'^{3/5} Q_o^{3/5} t_s^{3/5}}{K_{Ic}^{8/5}} = \Delta\gamma \frac{E'^{3/5} V_o^{3/5}}{K_{Ic}^{8/5}} = \left(\frac{V_o}{V_{\widehat{k}}^{\text{head}}}\right)^{3/5}. \tag{3.1}$$

由最后这个关系式（3.1）可知，释放结束时无量纲浮力$\mathcal{B}_{ks} > 1$ （在径向韧度主导裂缝的假设下）这一条件，严格等价于释放体积大于浮力生长所需的最小体积这一条件（2.8）。

3.2. 释放结束时黏度主导$\mathcal{K}_{ms} \ll 1$

与韧度主导的水力裂缝不同，释放结束时径向黏度主导裂缝会继续以黏性脉冲区制扩展，直至达到其停止半径 R_a （2.3）（Möri & Lecampion 2021）。在释放后传播阶段，裂缝可能变得受浮力主导，因此继续扩展。此外，我们还需要检查：如果裂缝在释放结束时已经受浮力主导，它是否仍能保持这一状态。为此，可以估算释放结束时径向黏性裂缝的无量纲浮力$\mathcal{B}_m$（t）（2.5） $t = t_s$:

$$\mathcal{B}_{ms} = \mathcal{B}_m\,(t = t_s) = \Delta\gamma \frac{Q_o^{1/3} t_s^{7/9}}{E'^{5/9} \mu'^{4/9}} = \Delta\gamma \frac{V_o^{1/3} t_s^{4/9}}{E'^{5/9} \mu'^{4/9}}. \tag{3.2}$$

$\mathrm{B}_{ms} \geqslant 1$ 的值表明，释放停止时，裂缝已经转变为浮力驱动扩展，并且已经呈细长形。另一方面，如果 $\mathrm{B}_{ms} < 1$，浮力

在释放结束时并非主要影响因素，裂缝仍呈现径向形状。

3.2.1. 释放结束时的主导浮力 $\mathcal{B}_{ms} \geqslant 1$

在 $\mathcal{B}_{ms} \geqslant 1$ 的情况下，裂缝在释放结束时已经受到浮力主导。我们必须检查释放结束后它是否仍受浮力主导，或是否可能停滞。自然的做法是将释放结束时黏性头部的体积 $V_{\widehat{m}}^{\text{head}}(t = t_s)$ 与极限体积（方程 (2.8)）进行比较。黏性头部随时间变化的体积由Möri & Lecampion (2022) 的方程 5.6 给出，并与方程 (3.2) 的关系如下：

$$\mathcal{B}_{ms} = \left(\frac{V_o}{V_{\widehat{m}}^{\text{head}}(t = t_s)} \right)^{2/3}. \tag{3.3}$$

利用方程 (2.7) 中的关系，可得到与最小极限体积之间的以下关系：

$$\frac{V_o}{V_{\widehat{k}}^{\text{head}}} = \left(\frac{V_o}{V_{\widehat{m}}^{\text{head}}(t = t_s)} \right)^{6/7} \mathcal{M}_{\widehat{k}}^{4/7}.$$

对于黏度主导裂缝，必然有$\mathrm{M}_{\widehat{k}} \geqslant 1$；若要在释放结束时受到浮力主导，则必然有 $V_o \geqslant V_{\widehat{m}}^{\text{head}}(t = t_s)$，因为 $\mathrm{B}_{ms} \geqslant 1$。由上述关系可得，我们必然有 $V_o \geqslant V_{\widehat{k}}^{\text{head}}$，相应地 $\mathrm{B}_{ks} \geqslant 1$；释放的体积大于线性压力梯度作用下韧性主导径向裂缝开始受到浮力主导所需的最小体积。释放结束后，头部的黏性力逐渐减弱，最终转变为韧度主导。因此，释放结束后，由于浮力的量级为 1，条件 $\mathrm{B}_{ks} \geqslant 1$ 始终成立，自持浮力扩展必将继续。

3.2.2. 释放结束时浮力可忽略的黏度主导裂缝$\mathcal{B}_{ms} < 1$

如果释放结束时浮力可忽略，且扩展由黏度主导（$\mathrm{B}_{ms} < 1$和 $\mathrm{K}_{ms} \ll 1$），则有限体积裂缝将在黏性脉冲区制下继续沿径向生长一段时间，直至最终停滞。在存在浮力的情况下，浮力可能在裂缝停滞之前成为主导的驱动机制。为将这种可能的生长历程纳入分析，我们采用该径向黏性脉冲区制下的无量纲浮力：

$$\mathcal{B}_m^{[V]}(t) = \Delta\gamma \frac{V_o^{1/3} t^{4/9}}{E'^{5/9} \mu'^{4/9}} = \mathcal{B}_{ms} \left(t/t_s \right)^{4/9}, \tag{3.4}$$

其中上标 $[V]$ 表示该标度关系与有限体积释放有关（在连续释放表达式中，将 Q_o 替换为 V_o/t ）。根据Möri & Lecampion(2021年)，我们知道，径向黏性脉冲裂缝在转为韧度主导时会停止扩展。对于无浮力条件下（见Möri & Lecampion(2021年)的公式 10），有限体积径向水力裂缝的$\mathcal{K}_m^{[V]}$达到 1 量级、裂缝发生停滞时对应的时间尺度为

$$t_{mk}^{[V]} = \frac{E'^{13/5} V_o^{3/5} \mu'}{K_{Ic}^{18/5}}. \tag{3.5}$$

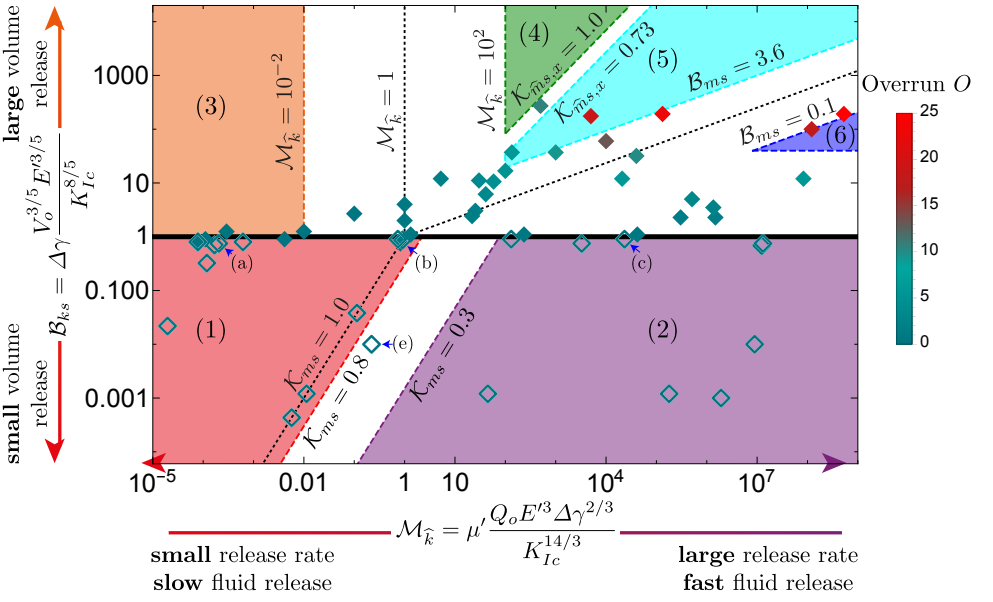

图2：有限体积释放水力裂缝解的结构随无量纲浮力$\mathcal{B}_{ks}$ (3.1)和黏度$\mathcal{M}_{\widehat{k}}$ (2.6)的变化。每个符号代表一次数值模拟。停滞裂缝以空心符号表示，实心符号表示自持浮力驱动脉冲。不同颜色的编号区域划分出不同的扩展历程。符号的颜色表示水平超越量 O (5.4)的值。我们用蓝色箭头标出了图 3 中展示的数值模拟。

因此，可以在这一特征停滞时间处估算无量纲浮力$\mathcal{B}_m^{[V]}(t)$（3.4），以判断浮力是否达到 1 量级：$t = t_{mk}^{[V]}$：

$$\mathcal{B}_m^{[V]}\left(t = t_{mk}^{[V]}\right) = \Delta\gamma \frac{E'^{3/5} V_o^{3/5}}{K_{Ic}^{8/5}} = \left(\frac{V_o}{V_{\widehat{k}}^{\text{head}}}\right)^{3/5} = \mathcal{B}_{ks}. \tag{3.6}$$

有趣的是，这一评估严格等价于将极限体积 $V_{\widehat{k}}^{\text{head}}$ 与总释放体积 V_o (参见(3.1))进行比较。我们得出结论，无论扩展历程如何，将释放体积与韧度主导的浮力驱动扩展的极限体积进行比较，足以判定自持浮力驱动水力裂缝是否形成。下文将使用韧度主导的径向有限体积水力裂缝的无量纲浮力$\mathcal{B}_{ks}$ 来量化自持增长的形成（$\mathcal{B}_{ks} > 1$）。同样，也可以使用体积比 $V_o/V_{\widehat{k}}^{\text{head}} = \mathcal{B}_{ks}^{5/3}$ 。

3.3. 有限体积释放的解结构

在前几小节中，我们推导出了浮力裂缝形成的必要且充分条件$\mathcal{B}_{ks} \geqslant 1$（见方程（3.1））。浮力水力裂缝是否形成，仅取决于总释放体积和弹性参数，而与体积如何累积无关，这一事实本质上源自该条件。此外，我们还讨论了，自持浮力裂缝的特征还取决于无量纲黏度$\mathcal{M}_{\widehat{k}}$（见方程（2.6）），因此也取决于释放的具体方式（体积是如何释放的）。这两个参数结合起来，

涵盖了所有可能的配置，从而构成整个问题的参数空间（见图2）。

首先，参数空间可分为上半部分（$B_{ks} \geqslant 1$），其中会发生自持浮力传播；以及下半部分（$B_{ks} < 1$），其中裂缝最终会在深处停滞。我们对这一极限进行了数值研究，图2中的每个符号都对应一次模拟。空心符号表示裂缝最终在深处停滞的模拟，而实心符号表示发生自持浮力扩展的情形。总体而言，图2表明，关于当 $B_{ks} \geqslant 1$ 时会发生自持浮力扩展的标度论证是正确的，且无需任何前置系数。只有在释放结束时由韧度主导的裂缝（$K_{ms} \geqslant 0.8$，其中不会发生注入后径向扩展）有时会在 B_{ks} 略小于 1 时实现自持浮力扩展。我们将 $B_{ks} = 1$ 作为有限体积浮力水力裂缝形成自持扩展的临界值。该临界值与此前研究得出的结果接近：Davis 等人（2020）为 $B_{ks} \approx 0.90$，Salimzadeh 等人（2020）为 $B_{ks} \approx 0.91$。Garagash & Germanovich（2014）根据韧度主导的传播型浮力裂缝的头部体积半解析推导出的 B_{ks} 等效值则显著更高，为 $B_{ks} \approx 1.26$。

图 2 所示的参数空间不仅涵盖了最终停滞的裂缝与自持浮力脉冲之间的界限。我们区分出六个明确的区域，分别对应径向扩展和浮力驱动扩展的若干极限状态：释放结束时韧度主导的停滞裂缝（区域 1；左下方—红色，第 4 节）；释放结束时黏度主导的停滞裂缝（区域 2；右下方—紫色，第 4 节）；释放结束时韧度主导的浮力裂缝（区域 3；左上方—橙色，第 5.1 节）；释放结束时宽度稳定的黏度主导浮力裂缝（区域 4；上方中央—深绿色，第 5.2.2 节）；释放结束时未稳定的黏度主导浮力裂缝（区域 5；上方中央—浅蓝色，第 5.2.1 节）；以及释放结束时黏度主导的径向裂缝（区域 6；右上方—深蓝色，第5.2.3 节）。区域 4 和区域 5 的区别源于在有限韧度和恒定卸载速率条件下，黏度主导的浮力水力裂缝横向扩展出现停滞（Möri &Lecampion 2022）；下文将对此作详细说明。

4. 深度处停滞的裂缝 $\mathcal{B}_{ks} < 1$

在深度处停滞的裂缝不会沿浮力方向发生自持扩展。在不存在任何形式的材料或应力非均质性，并假设处于无限大的不渗透弹性介质中时，只有在释放的体积不足的情况下，裂缝才会停滞：$\mathcal{B}_{ks} < 1$。图2 的下半部分区分了停滞裂缝的两种扩展历程：一种是在释放结束时裂缝处于韧度主导状态的区域（区域1），另一种是在释放结束时处于黏度主导状态的区域（区域2）。如第2.1节所述，径向止裂裂缝的特征与扩展历程无关。在$\mathcal{B}_{ks} \ll 1$的情况下，裂缝沿整个裂缝前缘的应力强度因子（SIF）K_I 均等于断裂韧度 K_{Ic}（参见图3d）至f））。换言之，只要裂缝的最终半径 R_a（2.3）相对于浮力长度尺度l_b（Lister & Kerr 1991）较小，裂缝就会发生径向停滞，并且在无浮力情况下得到的结论仍然适用（Möri& Lecampion 2021）。

对于仍不足以启动自持增长的较大释放体积（$\mathcal{B}_{ks} \lesssim 1$），裂缝会先伸长，最终才停滞。图3a) - c)中的裂缝平面形态表明，当无量纲浮力趋近于1时，会形成这种细长形状。与此相符，裂缝下部的应力强度因子小于材料韧度。

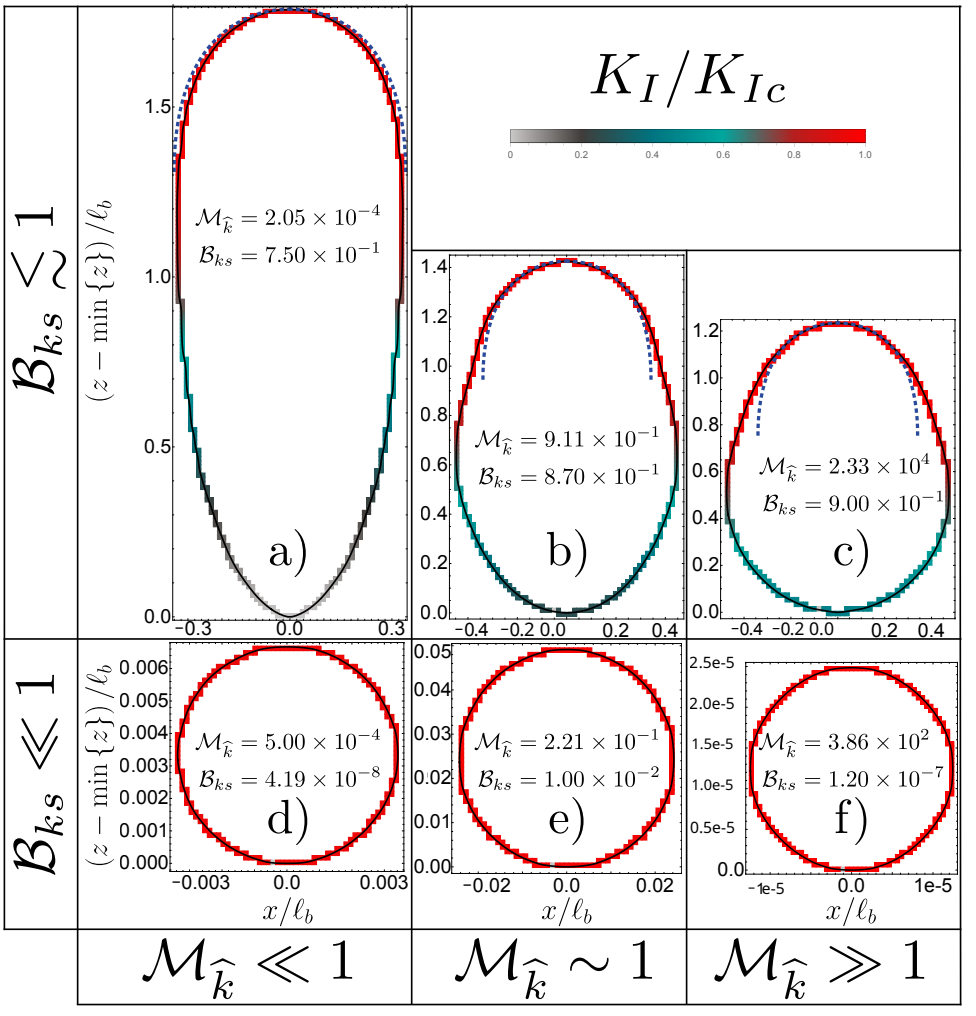

图 3：深度处最终停滞裂缝的形状及沿前缘的应力强度因子（SIF）$C(t)$随$\mathcal{B}_{ks} < 1$变化的情况$\mathcal{B}_{ks}$和$\mathcal{M}_{\widehat{k}}$。颜色表示局部应力强度因子 K_I与材料断裂韧度 K_{Ic}之比，颜色从 0（浅灰色）到 1（红色）。a) 至 c) 中的蓝色虚线表示韧度主导的传播型浮力裂缝扩展前缘的形状（Garagash & Germanovich 2014）。

裂缝最终的伸长在无量纲黏度$\mathcal{M}_{\widehat{k}}$较低时更为明显。连续释放的情形表明，韧度主导转变和黏度主导转变时，裂缝形状的演变各不相同（Möri & Lecampion 2022）。因此，当释放体积趋近于极限值时，停滞裂缝的形状随无量纲黏度而异，并不令人意外。

5. 自持有限体积浮力裂缝：$\mathcal{B}_{ks} > 1$

5.1. 释放结束时的韧度主导浮力裂缝（区域*3*）：$\mathrm{M}_k \ll 1$当释放体积足以形成浮力主导的水力裂缝（$\mathrm{B}_{ks} > 1$）时，无量纲黏度的函数关系决定了多种可能的扩展历程

Rapids 文章篇幅不得超过此页长度

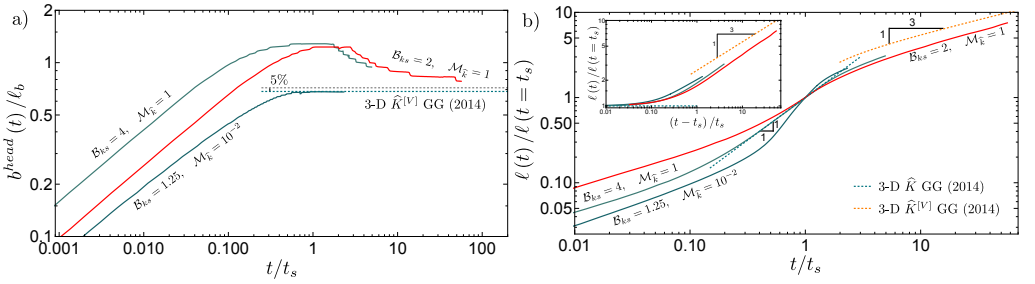

图4：韧度主导的自持浮力裂缝。无量纲裂缝头部宽度 $bh^{ead}(t)/l_b$（a）以及裂缝长度 $l(t)/l(t=t_s)$（b）随无量纲关井时间 t/t_s的演化。绿色点线对应于极限三维 $\widehat{K}$ GG（2014年）解（$bh^{ead}(t\to\infty)=\pi^{-1/3}l_b$，见（a）），橙色虚线为三维 $\widehat{K}^{[V]}$ GG（2014年）解。图（b）的插图显示了纵轴上相同的量，但横轴发生了平移（例如 $(t-t_s)/t_s$）。

$\mathcal{M}_k$。我们首先讨论韧度主导裂缝。根据第 2.1 节和3 节的论述，当释放仍在进行时，这类裂缝必然会从径向扩展转变为浮力主导扩展。释放结束时，这会形成一条形态稳定、呈指状的浮力裂缝，其头部体积恒定且由韧度主导。连续释放情况下的头部特征，是在假设 $l^{\text{head}}(t) \sim b^{\text{head}}(t)$且弹性、韧度和浮力占主导的基础上得出的。如果进一步将总释放体积有限这一条件纳入这些推导，所得的长度、张开度和压力尺度保持不变（见Möri & Lecampion (2021年）的公式4.1），但会出现随时间变化的无量纲黏度

$$\mathcal{M}_{\widehat{k}}^{[V]}(t)=\mu'\frac{V_o E'^3 \Delta\gamma^{2/3}}{K_{Ic}^{14/3}t}=\mathcal{M}_{\widehat{k}}\frac{t_s}{t}. \tag{5.1}$$

$\mathrm{M}_{\widehat{k}}^{[V]}$随时间递减，表明裂缝前缘必然会在后期转为韧度主导。Garagash & Germanovich（2014）同样推导了有限体积极限，并得出结论：与连续释放情形相比，头部和尾部宽度不会发生变化。因此，他们的解同样适用于任何具有有限韧度的有限体积浮力水力裂缝。下文将他们的结果称为三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014）解。对于$\mathrm{M}_{\widehat{k}}\in\left[10^{-2},10^{2}\right]$处于中间范围的情形，我们考察其裂缝头部宽度在后期如何趋近三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014）解（例如 $b^{head}\ (t\to\infty)=\pi^{-1/3}l_b$）。图4a）展示了一个韧度主导模拟以及两条$\mathrm{M}_{\widehat{k}}=1$处于中间值的裂缝的演化情况，其中该韧度主导模拟的M值为$_{\widehat{k}}=10^{-2}$。韧度主导裂缝的裂缝头部宽度在释放期间符合极限解（图4a）中的深绿色线），且释放结束后保持不变。与裂缝头部宽度保持恒定的情形不同，$\mathrm{M}\hat{k}$处于中间值的模拟（图4a）中的浅绿色线和红色线）在释放结束时达到的最大值超过了极限宽度。此后，裂缝头部宽度逐渐减小，并趋近极限三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014）解。在连续释放情形下，对于$\mathrm{M}_{\widehat{k}}\leqslant 10^{-2}$，极限宽度成立；因此，利用方程（5.1），我们可以估算裂缝达到该极限所需的时间为 $t\left(\mathrm{M}_{\widehat{k}}^{[V]}(t)=10^{-2}\right)=10^{2}\mathrm{M}\hat{k}t_s$（Möri & Lecampion 2022）。对于$\mathrm{M}_{\widehat{k}}\in\left[10^{-2},10^{2}\right]$，图4所示的模拟中，三维$\widehat{K}^{[V]}$GG（2014）解将在 $t\sim 100t_s$时达到。从图4a）中观察到的宽度趋近三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014）解的速率来看，这一估算似乎

合理。$\mathrm{M}_{\widehat{k}} = 1$ 且$\mathrm{B}_{ks} = 2$ 的裂缝在 $t \sim 50t_s$时实际上已与极限解相差不到15%。

我们推导了此类晚期解中黏度主导尾部的标度关系，假设裂缝宽度恒定，且其数量级与头部宽度相当 $b \sim l_b = K_{Ic}^{2/3}/\Delta\gamma^{2/3}$ as

$$\ell_{\widehat{k}}^{[V]}(t) = \frac{V_o^{2/3}\Delta\gamma^{7/9}t^{1/3}}{K_{Ic}^{4/9}\mu'^{1/3}}, \quad b_{\widehat{k}}^{[V]} = \frac{K_{Ic}^{2/3}}{\Delta\gamma^{2/3}} \equiv \ell_b \tag{5.2}$$

$$w_{\widehat{k}}^{[V]}(t) = \frac{V_o^{1/3}\mu'^{1/3}}{K_{Ic}^{2/9}\Delta\gamma^{1/9}t^{1/3}}, \quad p_{\widehat{k}}^{[V]}(t) = E'\frac{\Delta\gamma^{5/9}V_o^{1/3}\mu'^{1/3}}{t^{1/3}K_{Ic}^{8/9}}. \tag{5.3}$$

其中，我们用$\widehat{\cdot}$表示浮力标度。这些标度由连续释放标度通过将 Q_o 替换为 V_o/t得到，并表明裂缝高度按幂律形式 $\mathrm{l}(t) \sim t^{1/3}$呈次线性增长。请注意，Garagash & Germanovich（2014）在推导其三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG (2014)解时，已得到了这些标度。图4b)展示了无量纲裂缝长度 $\mathrm{l}(t)/\mathrm{l}(t = t_s)$ 随无量纲时间 t/t_s的演变。斜率为1 : 1的深绿色线表示根据标度关系推导出的时间幂律，该幂律适用于连续流体释放条件下韧度主导的浮力水力裂缝。两个B_{ks} 值较低的数值模拟（深红色和绿色）无法达到这一中间阶段，因为它们在此 K阶段的传播时间不够长（参见Möri & Lecampion (2022)第4.4节的讨论）。$\mathrm{B}_{ks} = 4$ 对应的数值模拟达到这一极限后，持续了约一个数量级的时间，随后减速，趋向于由方程（5.2）的标度关系预测的晚期幂律。另两个数值模拟也观察到了类似的减速，但没有任何一个达到极限 $\mathrm{l}(t) \sim t^{1/3}$ 幂律。橙色虚线表示针对裂缝长度的三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG (2014)解，我们预期该解在后期有效。图4b)的插图根据Garagash & Germanovich（2014）的假设，将释放结束时刻设为零。对数据进行这一修正后，可以看出所有数值模拟中的裂缝长度均呈现出趋近极限解的趋势。预计该解在后期得到验证，因为模拟结束时，预测长度与$\mathrm{B}_{ks} = 2$ 和$\mathrm{M}_{\widehat{k}} = 1$ 对应数值模拟结果之间的相对差异仅为约23%。这些发现表明，具有有限韧度的浮力裂缝在后期的行为将类似于三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG (2014)解。尽管这种晚期行为会保持一致，但结果也表明，裂缝的具体形状取决于参数$\mathrm{M}_{\widehat{k}}$ 和B_{ks}。只有靠近头部的宽度、头部本身以及增长速率与三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG (2014)解相同。为了解整体裂缝形状，我们定义一个称为超越量的形状参数，定义如下

$$O = \frac{\max_{z,t}\{b(z,t)\} - \pi^{-1/3}\ell_b}{\pi^{-1/3}\ell_b}. \tag{5.4}$$

该参数定义了最大横向延伸范围超出后期裂缝头部宽度的程度 $\pi^{-1/3}l_b$。 O 其下限为0，在 $\mathcal{M}_{\widehat{k}} \leqslant 10^{-2}$ 的完全韧度主导裂缝中达到。本文本节报告的 $\mathcal{M}_{\widehat{k}} = 10^{-2}$ 和 $\mathcal{B}_{ks} = 1$ 的数值模拟验证了这一极限。25 此时超越量实际上为 0。 对于介于韧度主导与黏度主导极限之间、具有均匀宽度的连续释放裂缝（例如 $\mathcal{M}_{\widehat{k}} \in [10^{-2}, 10^{2}]$），无法通过标度律预测超越量。根据 Möri& Lecampion (2022) 的图8，我们可以推导出：

随着 $\mathcal{M}_{\widehat{k}}$ 的增大，超越量也会增大。本文报告的两次数值模拟的超越量分别为 0。88 ($\mathcal{M}_{\widehat{k}} = 1$ 和 $\mathcal{B}_{ks} = 4$）以及 0。80 ($\mathcal{M}_{\widehat{k}} = 1$ 和 $\mathcal{B}_{ks} = 2$）。我们在图 2 中展示了数值模拟所得、最终形成浮力水力裂缝的超越量。在浮力末端位于释放结束处的韧度主导裂缝区域（区域1）内，超越量实际上为 0。随着 $\mathcal{M}_{\widehat{k}}$ 增大并趋向黏度主导区域（区域4至6），超越量也会增大，稍后将使用尺度分析进行估算。

5.1.1. 数值限制

未报告能够持续更长时间传播的数值模拟——这类模拟最终会呈现三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG (2014) 解——这一事实值得讨论。这些数值模拟面临多项数值挑战，其中包括总体计算成本，以及对裂缝底部闭合单元的数值处理等。我们以韧度主导的浮力水力裂缝为例说明计算成本。这类裂缝在从径向向浮力主导转变的过程中会加速，随后减速，最终达到恒定速度。Möri & Lecampion (2022) 报告称，在他们的数值模拟中，加速过程在无量纲时间约为 $t/t_{k\widehat{k}} \approx 3$时结束，其中$t_{k\widehat{k}}$ 是从径向向浮力主导转变的过渡时间（见 Möri & Lecampion (2022) 的公式 3.6）。观察图4b)可见，释放结束后还需经过一段时间，才能转变为晚期的浮力脉冲解。该图估算了达到三维$\widehat{K}^{[V]}$ GG (2014) 解所需的时间为 $t \sim 100t_s$。根据此时 $\mathrm{M}_{\widehat{k}} = 10^{-2}$ 的数值模拟，并按公式 (5.2) 的幂律增长估算裂缝延伸范围，可得 $\mathrm{l} \sim 1600\mathrm{l}_b$。现在可以通过以下方式估算计算成本：取约 44 个单元 / l_b 的离散化（见 Möri & Lecampion (2022) 第 4.2 节），并将 $b\,(t)$的恒定宽度近似为$\approx \pi^{-1/3}\mathrm{l}_b$，由此得到裂缝中约有 2×10^6 个单元。我们当前实现的 PyFrac (Zia & Lecampion 2020) 能够处理时间跨度达 20 个数量级、空间跨度达 15 个数量级的浮力主导数值模拟；在配备十二个 Intel®Core i7-8700 CPU 的多线程 Linux 台式机系统上，计算约需 4 周，最多使用 30 GB 内存，裂缝占据范围内的离散化最多达到 2×10^5 个单元。

另一个问题是裂缝底部出现闭合单元。随着张开度持续减小（见 $w_{\widehat{k}}^{[V]}$方程（5.2）），且我们不允许裂缝完全愈合，最小宽度便会起作用（Zia & Lecampion 2020）。由此产生两种影响：第一，弹性接触应力会改变应力分布和整体行为。第二，部分体积会被困住，从而减少可用于裂缝扩展的体积。后者会人为地减慢扩展速度（Pezzulli 2022），并最终导致裂缝停滞。这两种现象都会增加系统的非线性，使收敛变得困难，进而导致模拟在后期 $t \gg t_s$中断。

5.2. 释放结束时黏度主导（区域 *4* 至 *6*）：$\mathcal{M}_k \gg 1$

浮力主导或径向释放结束时的差异已证明取决于释放结束时的无量纲黏度 B_{ms}（见公式（3.2），第 3.2节）。为了准确评估形成的形状，还需进一步区分释放结束时浮力裂缝的两种可能情况。 Möri & Lecampion（2022）表明，只要存在有限的断裂韧度（例如 $K_{Ic} \neq 0$），横向扩展就会在有限时间内稳定，至多达到 $\max_{z,\,t}\{b\,(z,\,t)\} \propto \mathrm{M}_{\widehat{k}}^{2/5}\,l_b$。稳定时间与无量纲横向韧度 $\mathrm{K}_{\widehat{m},\,x}(t)$ 有关（见其公式 6.1），我们可以据此进行评估

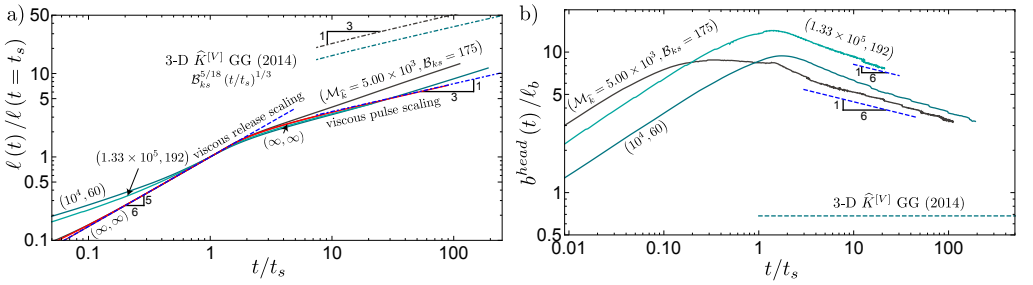

图 5：释放结束时，黏性主导的浮力主导非稳定裂缝的裂缝长度 $l(t)/l(t=t_s)$ (a) 和裂缝头部宽度 $b^{head}(t)/l_b$ 随无量纲关井时间 t/t_s 的演化：$M_{\widehat{k}} \gg 1$, $B_{ks} \geqslant 1$, $K_{\widehat{m}x,s} < 1$。(a) 中的彩色点划线表示对应的晚期三维 $\widehat{K}^{[V]}$ GG (2014年) 解，蓝色虚线表示连续释放浮力标度关系 $\left(l(t)/l(t=t_s) \sim t^{5/6}\right)$，蓝色点划线表示数值零韧性拟合 $l(t)/l(t=t_s) \approx 1.62\,(t/t_s)^{0.33}$ (与 $\widehat{M}^{[V]}$ 标度关系相匹配)。(b) 中的绿色虚线表示对应模拟的三维 $\widehat{K}$ GG (2014年) 解的晚期极限。蓝色虚线表示 $\widehat{M}^{[V]}$ 标度关系中的标度依赖性，$b^{head}(t) \sim t^{-1/6}$。请注意，两种零韧性模拟的 B_{ms} 值不同（深红色模拟为 100，浅红色模拟为 25）。

释放结束时

$$\mathcal{K}_{\widehat{m}s,x} = \mathcal{K}_{\widehat{m},x}(t=t_s) = K_{Ic}\frac{\Delta\gamma^{1/8}\,t_s^{1/3}}{E'^{19/24}V_o^{1/8}\mu'^{1/3}} = \mathcal{M}_{\widehat{k}}^{1/3}\mathcal{B}_{ks}^{25/72}. \tag{5.5}$$

一个$\mathcal{K}_{\widehat{m}s}$的值$_x \geqslant 1$ 表示横向扩展已停止，而小于1的值则意味着裂缝仍在横向扩展，如 $b \sim t^{1/4}$ （见Möri &Lecampion （2022）的方程5.4）。

5.2.1. 释放结束时的黏度主导浮力裂缝，且宽度尚未横向稳定（区域5）：$\mathcal{B}_{ms} \geqslant 1$ 和$\mathcal{K}_{\widehat{m}s,\ x} \ll 1$

我们首先考虑通过尾部标度关系的形成来分析零断裂韧性的情况。主要假设是一阶近似下由浮力、弹性和黏性能量耗散主导，且长宽比的标度关系与横向和水平流体速度分别成比例（$l(t)/b(t) \sim v_z(t)/v_x(t)$）

$$\ell_{\widehat{m}}^{[V]} = \frac{V_o^{1/2}\Delta\gamma^{1/2}\,t^{1/3}}{E'^{1/6}\mu'^{1/3}}, \quad b_{\widehat{m}}^{[V]} = \frac{E'^{1/4}V_o^{1/4}}{\Delta\gamma^{1/4}}$$
$$w_{\widehat{m}}^{[V]} = \frac{V_o^{1/4}\mu'^{1/3}}{E'^{1/12}\Delta\gamma^{1/4}t^{1/3}}, \quad p_{\widehat{m}}^{[V]} = \frac{E'^{2/3}\mu'^{1/3}}{t^{1/3}}. \tag{5.6}$$

注意，Davis 等人(2023年提出了相同的裂缝长度标度关系。有限体积本身会阻止连续释放时观察到的无限横向扩展，并且$b_{\widehat{m}}^{[V]}$与时间无关。图5c) 显示，所有数值模拟中的横向扩展都有限。值得注意的是，该标度关系预测裂缝长度随时间按$l \sim t^{1/3}$幂律演化，这与韧度主导情形下的高度演化相当。图5a) 展示了各种黏度主导数值模拟中的这一演化。当$\mathcal{M}\hat{k}$ 足够大且$\mathcal{K}_{\widehat{m}s} \ll 1$ （换言之，当裂缝距离横向稳定化足够远时），由方程（1 : 3 的标度关系预测的斜率5.6）显现出来。然而，高度增长很快就偏离了 $t^{1/3}$ 幂律。原因在于裂缝头部的流入速率随时间变化（由方程（

5.6的标度关系推导得出）

$$\ell_{\hat{m}}^{head,[V]} = b_{\hat{m}}^{head,[V]} = \frac{E'^{11/24} V_o^{1/8} \mu'^{1/6}}{\Delta\gamma^{5/8} t^{1/6}}, \quad w_{\hat{m}}^{head,[V]} = \frac{V_o^{1/4} \mu'^{1/3}}{E'^{1/12} \Delta\gamma^{1/4} t^{1/3}} \tag{5.7}$$
$$p_{\hat{m}}^{head,[V]} = \frac{E'^{11/24} V_o^{1/8} \mu'^{1/6} \Delta\gamma^{3/8}}{t^{1/6}}, \quad V_{\hat{m}}^{head,[V]} = \frac{E'^{5/6} V_o^{1/2} \mu'^{2/3}}{\Delta\gamma^{3/2} t^{2/3}},$$

揭示了一个不断收缩的黏性头部。

现在考虑有限的断裂韧度，可以在头部得到一个无量纲韧度

$$\mathcal{K}_{\widehat{m}}^{[V]}(t) = K_{Ic} \frac{t^{1/4}}{E'^{11/16} V_o^{3/16} \Delta\gamma^{1/16} \mu'^{1/4}} = \mathcal{B}_{ks}^{5/48} \mathcal{M}_{\widehat{k}}^{[V]}(t)^{-1/4} = \mathcal{B}_{ks}^{5/48} \mathcal{M}_{\widehat{k}}^{-1/4} \left(\frac{t}{t_s}\right)^{1/4}. \tag{5.8}$$

方程（5.8）表明，随着时间推移，头部将转变为韧度主导，因为$\mathcal{K}_{\widehat{m}}^{[V]}(t)$随时间增大。根据这一观察，我们预计，传播头部附近的区域最终将遵循三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014年）头部解（见第 5.1.1节），并推导出这一转变的特征时间尺度

$$t_{\widehat{m}\widehat{k}}^{[V]} = \frac{E'^{11/4} V_o^{3/4} \Delta\gamma^{1/4} \mu'}{K_{Ic}^4}. \tag{5.9}$$

在这一特征时间下计算黏性主导头部标度（见方程（5.7））， 可得到韧度主导头部的尺度（见（5.2））。这一观察表明，即使远离头部的形状有所变化，长度尺度 $l(t)_{\widehat{k}}^{[V]}$仍然适用。关联有限体积释放所形成浮力裂缝的两个长度尺度

$$\ell_{\widehat{k}}^{[V]}(t) = \mathcal{B}_{ks}^{5/18} \ell_{\widehat{m}}^{[V]}(t) \tag{5.10}$$

表明 $l_{\widehat{k}}^{[V]}(t) \geqslant l_{\widehat{m}}^{[V]}(t)$ 对于浮力主导裂缝（当 $\mathcal{B}_{ks} \geqslant 1$）。图 5a) 的观察显示，裂缝偏离了较低的黏度主导解，并趋向较高的韧度主导解（两组数值模拟以点划线表示）。观察到的高度增长加快，源于尾部变窄，使裂缝滞流部分的流体横向流入固定宽度的中心管；这一宽度由三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014年）解预测。由于计算成本过高，我们没有给出完成向韧度主导区间转变的数值模拟（见第 5.1.1节）。

在方程（5.4）中，我们引入了超越量，作为裂缝形状的一个特征。对于具有浮力主导、横向未稳定释放末端的黏性裂缝，可根据黏性标度估算该超越量：

$$O_{\widehat{m}} = \frac{b_{\widehat{m}}^{[V]} - \pi^{-1/3} \ell_b}{\pi^{-1/3} \ell_b} = \pi^{1/3} \frac{E'^{1/4} V_o^{1/4} \Delta\gamma^{5/12}}{K_{Ic}^{2/3}} - 1 = \pi^{1/3} \mathcal{B}_{ks}^{5/12} - 1. \tag{5.11}$$

随着无量纲浮力$\mathcal{B}_{ks}$增大，超越量也随之增加，这一点在图2中清晰可见。

5.2.2. 释放结束时具有横向稳定宽度的黏性主导浮力裂缝（区域4）：$\mathcal{B}_{ms} \geqslant 1$和$\mathcal{K}_{\widehat{m}s,\ x} \geqslant 1$

当裂缝前缘体积达到恒定时，浮力主导的黏度主导裂缝会发生横向稳定，从而形成两个固定点：最大横向稳定宽度$_{z,t}\{b\,(z,t)\} \sim \mathcal{M}_{\widehat{k}}^{2/5}\, l_b$，以及恒定体积、恒定宽度的头部。两者之间扩展中的裂缝宽度部分保持其形状不变，因此形成的裂缝，其延伸集中在横向稳定宽度区域内。从这一观察可以类比韧度主导的浮力裂缝（见第5.1节）。这种等效韧度主导裂缝的尺度之间相差一个$\mathcal{M}_{\widehat{k}}^{2/5}$倍的因子，因此释放结束后的行为将与第5.1节所述相同，区别仅在于起始点不同（为$\mathcal{M}_{\widehat{k}}^{2/5}$而非$\mathcal{M}_{\widehat{k}}$）。

由于释放结束后的过程与韧度主导裂缝并无不同，因此下文不再详细讨论这种情形，仅列出形状参数的差异。

$$O_{\widehat{m}}^{stab} = \frac{\mathcal{M}_{\widehat{k}}^{2/5}\ell_b - \pi^{-1/3}\ell_b}{\pi^{-1/3}\ell_b} = \pi^{1/3}\mathcal{M}_{\widehat{k}}^{2/5} - 1. \tag{5.12}$$

黏度主导裂缝在非稳定情形下的超越量仅取决于无量纲浮力B_{ks}，因此也取决于总释放体积和弹性参数。相比之下，稳定情形的控制参数是无量纲黏度$\mathrm{M}_{\widehat{k}}$，而释放历程（总体积的累积方式）决定了裂缝的超越量。

5.2.3. 释放结束时浮力可忽略的黏度主导裂缝（区域6）：$\mathcal{B}_{ms} \ll 1$

只要该类裂缝的无量纲浮力$\mathcal{B}_{ks}$（见（3.1））大于1，它就会在脉冲传播阶段转变为浮力主导。径向扩展向浮力驱动扩展的这一转变，由黏性脉冲的无量纲浮力$M^{[V]}$标度$\mathcal{B}_m^{[V]}(t)$（见公式（3.4））表征，并具有特征过渡时间

$$t_{m\widehat{m}}^{[V]} = \frac{E'^{5/4}\mu'}{V_o^{3/4}\Delta\gamma^{9/4}} = \mathcal{B}_{ks}^{-5/2} t_{\widehat{m}\widehat{k}}^{[V]}. \tag{5.13}$$

相应的转变长度尺度等于浮力主导的黏度主导裂缝的恒定宽度$l_m^{[V]}\left(t = t_{m\widehat{m}}^{[V]}\right) = l_{m\widehat{m}}^{[V]} = b_{\widehat{m}}^{[V]}$，这表明最大宽度在转变时达到。图6d）显示，随着无量纲浮力$\mathcal{B}_{ks}$（见（3.1））增大，转变后最大宽度仍继续增长（实线），但始终处于标度关系（5.6）预测的数量级范围内。横向扩展最终在约$3l_{m\widehat{m}}^{[V]}$处于$t \approx 10^3 t_{m\widehat{m}}^{[V]}$时逐渐减缓。预期的超越量最终与释放结束时非稳定的浮力黏性主导情形相当（见公式（5.11））。

这些裂缝的标度关系由方程（5.6）和（5.7）给出。尽管扩展历程各不相同，晚期裂缝形态并无显著差异（见图7）。与恒定释放的情况类似，裂缝首先变得略呈椭圆形，压力和张开度峰值出现在裂缝前缘。随后，裂缝扩展偏向浮力方向，前缘不断收缩，最大横向延伸范围与前缘之间不会形成鞍点。对于有限断裂韧度的情况，该区域会形成一个拐点，使朝向前缘的宽度演化

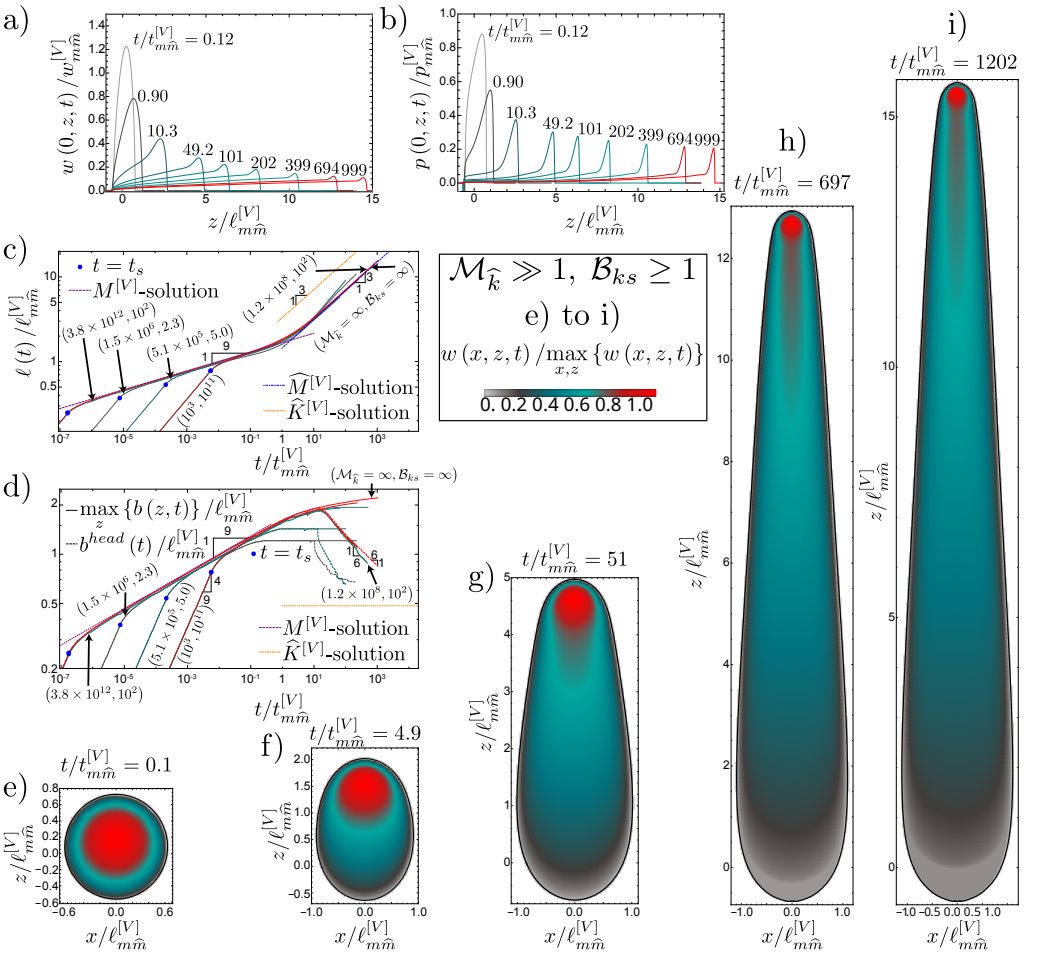

图6：黏度主导、释放结束时浮力可忽略的裂缝：$\mathrm{B}_{ks} \geqslant 1$ 和$\mathrm{B}_{ms} \ll 1$。a）$\mathrm{M}_{\widehat{k}} = \infty$、$\mathrm{B}_{ks} = \infty$和$\mathrm{B}_{ms} = 10^{-3}$（零韧度情形）下，沿中心线 $w(0,z,t)/w^{[V]}_{m\widehat{m}}$的张开度。b）与a）相同情形下，沿中心线 $p(0,z,t)/p^{[V]}_{m\widehat{m}}$的净压力。c）大黏度$\mathrm{M}_{\widehat{k}} \in [5.1\times10^5, \infty]$模拟中的裂缝长度l（$t$）$/l^{[V]}_{m\widehat{m}}$。蓝色虚线为零韧度模拟裂缝长度l（$t$）$\propto t^{0.33}$的拟合曲线。d）相同模拟中的裂缝宽度 $b(t)/l^{[V]}_{m\widehat{m}}$（实线）和裂缝头部宽度 $b\mathrm{h}^{ead}(t)/l^{[V]}_{m\widehat{m}}$（虚线）。紫色虚线表示$M^{[V]}$解（Möri & Lecampion 2021），橙色虚线表示B_{ks}最高时的三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014）解。e - i）零韧度模拟中，裂缝平面轮廓从径向形态e）演化至晚期形态h）和i）。转变尺度$.^{[V]}_{m\widehat{m}}$的定义见表3。

在过渡时间 $t^{[V]}_{\widehat{m}\widehat{k}}$变为凸形（见方程（5.9））。请注意，图 6h)、i) 中裂缝的底端似乎具有均匀的张开度。这是启用了最小宽度后数值格式直接造成的结果。

观察裂缝长度和头部宽度的演化时，可以发现，对于有限韧度的情况，数值模拟趋近于三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014年）解。三维 $\widehat{K}^{[V]}$GG（2014年）在黏性浮力标度下的宽度和长度演化（见方程（5.6）和（5.7））取决于$\mathcal{B}_{ks}$ 的取值，因此我们只展示一种可能的晚期解。我们选择最有可能达到的解，

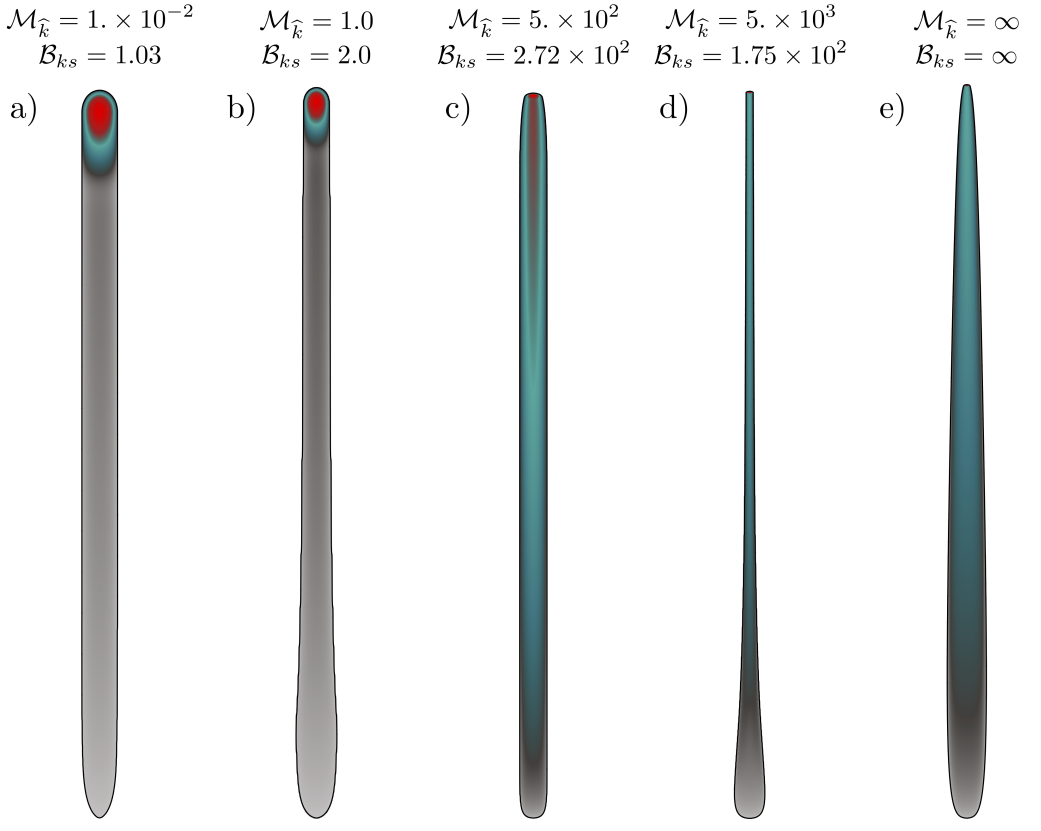

图7：从点源扩展出的有限体积浮力水力裂缝的形态 ($\mathcal{B}_{ks} \geqslant 1$)。a）韧度主导的指状裂缝（图1中的区域3）。b）具有稳定宽度且超越量可忽略的过渡型裂缝。c）释放结束时具有稳定宽度的黏度主导浮力前缘（图1中的区域4）。d）释放结束时宽度未稳定的黏度主导浮力前缘（图1中的区域5）。e）释放结束时具有浮力前缘的零韧度情形 $\left(\mathcal{B}_{ms} = 10^2\right)$。a）和b）按 l_b (Lister & Kerr 1991年) 缩放；c）至e）按 $l_{m\widehat{m}}^{[V]}$ 缩放（见表 3）。

对应于长度的最小$\mathcal{B}_{ks}$ 值和宽度的最大值，并以橙色虚线表示。可以看出解趋向于这些解，但要精确达到它们所需的计算成本过高（见第5.1.1节的讨论）。沿中心线（例如$x = 0$）的裂缝开度和净压力演化见图6a）和 b）。头部离开源点后被识别出来，随后逐渐收缩。经过足够长时间的浮力驱动扩展后，头部体积相较于总流体体积变得可以忽略。达到这一阶段后，裂缝进入黏度主导区扩展（另见补充材料中报告的近似自相似平面轮廓）。我们在补充材料中展示，沿中心线的张开度趋近于 Roper 和 Lister (2005)的二维解。将零韧度头部（参见Möri &Lecampion (2022)的图7）与Roper 和 Lister (2007)的尾部解（见其方程6.7）相结合，或许可以得到近似解，但这留待进一步研究。

5.3. 后期裂缝形状

图2所示参数空间中划分不同区域的控制机制，会产生不同的裂缝形态。图7展示了参数空间不同区域（3–5）中浮力裂缝的后期形状。图7a）展示了释放结束时（区域3）韧度主导的浮力裂缝的典型形状。其平面轮廓呈指状，宽度和头部体积恒定。在扩展早期，释放体积的大部分就已位于头部（由颜色表示）。除源区和扩展前缘外，宽度没有变化，超越量 O （见公式（5.4））为零。对于宽度均匀但不符合韧度解的裂缝（例如区域3与区域4之间的$\mathrm{M}_{\widehat{k}} \in \left[10^{-2}, 10^{2}\right]$和$\mathrm{B}_{ks} \geqslant 1$），流体体积的大部分同样位于头部。不同之处在于，源区附近的宽度会发生变化，这与释放结束有关，因此产生了一个较小但非零的超越量。当裂缝更趋于黏度主导时（见图7c–e）），超越量更加明显，沿裂缝长度方向的开度分布也更加均匀。例如，图7c）展示了一条在释放结束时宽度已稳定的浮力主导黏度裂缝（区域4），其头部几乎不可见（扩展前缘处的浅红色区域）。红色部分向尾部延伸很远，说明与图7a）和b）中的韧度主导情形相比，尾部开度更接近头部开度。这种形态的特点是，由于横向稳定（与有限的断裂韧度值有关），裂缝在有限高度范围内保持宽度均匀。图7d）（区域5）通过展示裂缝宽度沿其长度方向朝头部逐渐变窄，凸显了黏度主导裂缝正趋近于后期三维 $K^{[V]}$GG（2014年）解。该模拟的头部宽度仍约为极限解的4.7倍，裂缝沿长度方向的开度分布也仍然过于均匀。换言之，相当大比例的体积仍留在尾部（比较图7a）中的灰色与图7d）中的绿色）。图7e）中的最后一种形态代表零韧度模拟在浮力末端状态下的情形。将此形状与释放结束时浮力可忽略的零韧度模拟进行比较（参见图6h–i）），可见二者没有显著差异。所有零韧度模拟无论释放结束时处于何种状态，都会呈现这种特定形状。只有存在有限断裂韧度时，裂缝才会趋向于后期三维 $K^{[V]}$GG（2014年）解，其形状也会类似于图7d）（另见Davis 等人（2023年）的图1b））。

6. 讨论

我们将近期的实验室实验与我们的标度关系和数值模拟进行比较。我们采用了由 Smitarello (2019年)开展并发表于Davis 等人(2023年)的实验中的三组参数（见表1）。所得无量纲参数列于表1。这些裂缝似乎要么由韧度主导（实验 1827），要么处于具有均匀宽度的转变状态（实验 1945 和 1967）。图8 展示了裂缝高度随时间的演变（实验数据取自Davis 等人(2023年)的图 5a）。除这三组实验外，我们还展示了与实验 1945 和 1967 最接近的模拟结果，以及Garagash &Germanovich (2014年)推导的极限解。韧度主导实验（实验 1837）中，裂缝高度随时间线性增长，这符合连续释放的标度关系。令人意外的是，释放结束并未显著减缓裂缝高度的增长（参见图$\mathcal{M}_{\widehat{k}} = 10^{-2}$ 中的模拟4b））；裂缝高度仍持续线性增长，直至到达储罐顶部（数据流结束）。我们认为这与吸引裂缝的自由表面效应有关

	Unit	实验 1837	实验 1945	实验 1967
μ_f	Pa · s	1.74×10^{-3}	48×10^{-3}	970×10^{-3}
E	Pa	1345	426	944
ν		0.5	0.5	0.5
K_{Ic}	帕· 米1/2	23.1	7.3	16.2
$\Delta\rho$	$\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	260	160	150
V_o	$\mathrm{m^3}$	$2. \times 10^{-5}$	$1. \times 10^{-5}$	$1. \times 10^{-5}$
Q_o	$\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$	1.23×10^{-7}	8.33×10^{-7}	1.11×10^{-7}
t_s	s	162	12	90
$\mathrm{M}_{\widehat{k}}$		1.20×10^{-3}	1.11	0.76
$\mathcal{B}_{ks}$		2.28	2.93	1.24
$\mathcal{B}_{ms}$		57.7	3.85	1.49

表1：材料参数和释放体积 V_o 取自Davis 等人（2023年）的表3（基于Smitarello （2019年）的工作）。我们从Davis 等人（2023年）的图5a中提取停注时间，并将释放速率计算为 $Q_o = V_o/t_s$。

这一假设得到了另外两组实验观测结果的支持。其他实验中的裂缝不断扩展，却未呈现任何基于尺度关系的幂律。这种行为在许多实验室实验中很常见；遗憾的是，这些实验似乎都处于各种极限流态之间。此外，所形成水力裂缝的延伸范围往往受到样品尺寸有限所带来的不利影响，使得理论和数值预测难以与之比较。实验室实验中的释放速率通常并非恒定，这也带来了额外的不便。尤其是在黏度主导的裂缝扩展区间，释放速率会通过 $\mathrm{M}_{\widehat{k}}$ 对裂缝扩展产生显著影响。

本文所描述的三维有限体积浮力水力裂缝的完整参数空间，有助于更好地设计实验，以探究定义明确的扩展历程。

7. 结论

我们证明，有限体积水力裂缝完全由无量纲浮力 $\mathcal{B}_{ks} = \Delta\gamma E'^{3/5} V_o^{3/5}/K_{Ic}^{8/5}$ 刻画，该参数表示释放的总体积 V_o 与实现自持浮力传播所需的最小体积之比 $V_{\widehat{k}}^{head} = K_{Ic}^{8/3}/\left(E'\Delta\gamma^{3/5}\right)$：$\mathcal{B}_{ks} = \left(V_o/V_{\widehat{k}}^{\mathrm{head}}\right)^{3/5}$ 以及无量纲黏度 $\mathcal{M}_{\widehat{k}} = \mu' Q_o E'^3 \Delta\gamma^{2/3}/K_{Ic}^{14/3}$。自持浮力裂缝是否形成完全取决于 $\mathcal{B}_{ks}$，换言之，取决于释放的总体积以及材料和流体参数；而释放过程的细节（持续时间和注入速率）则通过无量纲黏度 $\mathcal{M}_{\widehat{k}}$对裂缝形态和扩展速率产生首要影响。结合这两个无量纲数 ($\mathcal{B}_{ks}$、$\mathcal{M}_{\widehat{k}}$)，可划分出六个区域，分别对应不同的扩展历程（见图 2）。

对于有限的材料断裂韧度（$K_{Ic} \neq 0$），Garagash & Germanovich(2014年) 的韧度主导脉冲解刻画了晚期浮力裂缝前缘及其附近的裂缝宽度（$b^{head} = \pi^{-1/3} l_b$）。请注意，这种晚期解可能只会在非常晚的时刻出现。在零韧度情形（$K_{Ic} = 0$）下，裂缝前缘

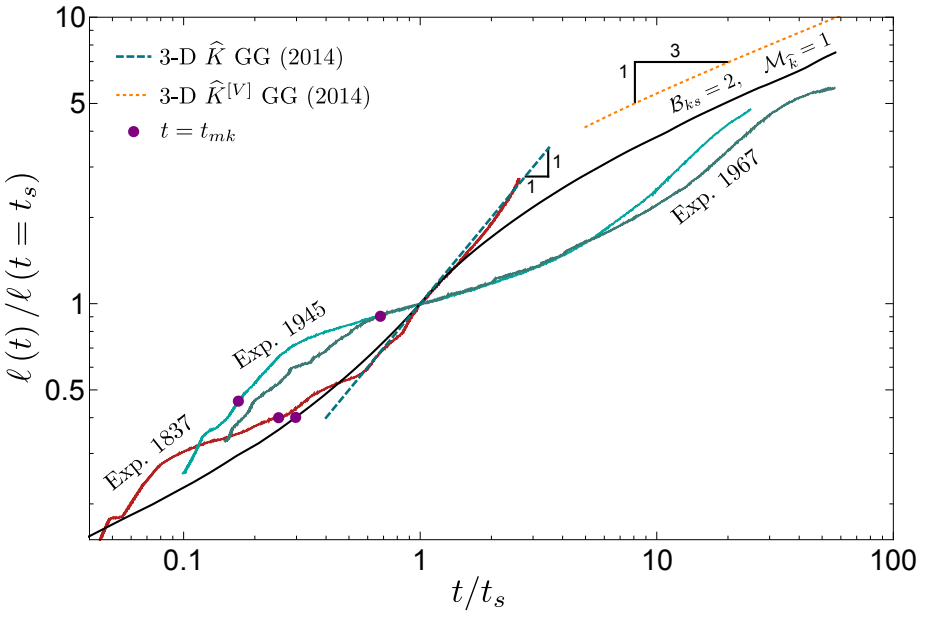

图8：表中所列实验的裂缝高度随无量纲时间的演化1。数据取自Davis 等人(2023年)，基于Smitarello (2019年)报告的实验。黑线表示无量纲参数与实验 1945和实验 1967相近的模拟。紫色圆点标示裂缝转为韧度主导的时刻（例如 $t = t_{mk}$）；虚线表示Garagash & Germanovich (2014年)推导的极限解（绿色表示连续释放，橙色表示有限体积释放）。

会不断收缩，而最大横向宽度则稳定在一个有限值。因此，可以将裂缝前缘附近的极限宽度与稳定后的最大宽度联系起来。我们将这一参数定义为超越量 O，并推导其在参数空间不同区域中的取值。请注意，这一参数只能反映裂缝形状的大致情况：超越量相似并不意味着裂缝整体形状相同。当水力压裂韧度为零时，裂缝头部宽度趋于零（例如$l_b = 0 \rightarrow b^{head} = 0$），导致超越量趋于无穷大。需要注意的是，这并不意味着横向扩展没有上限，因为横向扩展受有限体积而非断裂韧度限制。

所识别出的晚期行为进一步确定了晚期上升速率遵循韧度主导解，即 $\dot{l}^{[V]}_{\widehat{k}}(t) \sim V_o^{2/3}\Delta\gamma^{7/9}/\left(K_{Ic}^{4/9}\mu'^{1/3}t^{2/3}\right) \propto t^{1/3}$。一个重要的观察结果是，黏度主导的浮力裂缝的上升速率与时间的幂律关系等价（例如 $\dot{l}^{[V]}_{\widehat{m}} \sim V_o^{1/2}\Delta\gamma^{1/2}/\left(E'^{1/6}\mu'^{1/3}t^{2/3}\right) \propto t^{1/3}$）。在其演化过程中，浮力水力裂缝可以先以黏度主导的方式上升，速率为$\dot{l}^{[V]}_{\widehat{m}}(t)$，随后转变为由晚期韧度解决定的极限上升速率$\dot{l}^{[V]}_{\widehat{k}}(t)$。韧度极限下的晚期上升速率总是快于（或至少等于）黏度主导极限下的上升速率（$\dot{l}^{[V]}_{\widehat{k}}(t) = \mathrm{B}_{ks}^{5/18}\,\dot{l}^{[V]}_{\widehat{m}}(t)$，其中 $\mathrm{B}_{ks} \geqslant 1$ 表示自持浮力裂缝）。在流体仍在释放时发生转变的裂缝，在扩展历程中甚至可能表现出更高的速度。估算或平均垂向扩展速率时必须格外谨慎，而且必须同时考虑 $\mathrm{M}_{\widehat{k}}$ 和 B_{ks}。换言之，释放历史的细节（速率和持续时间）确实会显著影响上升速率，即使在释放结束很久之后也是如此。这意味着

对于现实情形（以及实验室实验），释放物质的具体特征，例如释放过程比简单的恒定速率／有限持续时间情形更为复杂，必然会影响浮力裂缝的扩展。

值得注意的是，对于自然形成或人为产生的水力裂缝，大多数参数组合都会在2所示参数空间中两个截然不同的区域之间产生自持浮力传播。此外，扩展前缘达到晚期解所需的时间，以及此时裂缝的尺寸，与实验室样品的尺寸或上部岩石圈中的非均质体尺度并不相符。我们强调，尽管理论上会出现浮力裂缝，但据我们所知，几乎没有关于水力压裂作业产生的浮力裂缝扩展至地表的案例报道。我们认为，这种矛盾可能与扩展中的裂缝和非均质体、流体滤失及本文未考虑的其他可能停止机制之间的相互作用有关。我们正在开展相关研究，以纳入这些影响，并阐明为何裂缝最终会停滞于地下，即使$\mathcal{B}_{ks}$大于 1。

致谢。作者谨此感谢与 Dmitry Garagash 进行的深入讨论。**经费资助**。本研究获瑞士国家科学基金会资助，项目编号为 #192237。**利益声明**。作者声明不存在利益冲突。**数据可用性声明**。支持本研究结论的数据已公开，可通过以下地址获取：10.5281/zenodo.7788051。**作者 ORCID**。A. Möri，0000-0002-7951-1238；B. Lecampion，0000-0001-9201-6592**作者贡献**。Andreas Möri：概念构思、方法设计、形式分析、研究、软件、验证、可视化、撰写初稿。Brice Lecam- pion：概念构思、方法设计、形式分析、验证、监督、经费获取、撰写与编辑。

	径向		细长			
	$\mathrm{M}^{[V]}$	$\mathrm{K}^{[V]}$	$\widehat{\mathrm{M}}^{[V]}$ (尾部)	$\widehat{\mathrm{M}}^{[V]}$ (头部)	$\widehat{\mathrm{K}}^{[V]}$ (尾部)	$\widehat{\mathrm{K}}^{[V]}$ (头部)
$\ell_*^{[V]}$	$\frac{E'^{1/9}V_o^{1/9}{}^{3}t^{1/9}}{\mu'^{1/9}}$	$\frac{E'^{2/5}V_o^{2/5}{}^{5}}{K_{Ic}^{2/5}}$	$\frac{V_o^{1/9}{}^{2}\Delta\gamma^{1/2}t^{1/3}}{E'^{1/6}\mu'^{1/3}}$	$\frac{E'^{11/24}V_o^{1/9}{}^{8}\mu'^{1/6}}{\Delta\gamma^{5/8}t^{1/6}}$	$\frac{V_o^{2/9}{}^{3}\Delta\gamma^{7/9}t}{K^{4/9}{}_{Ic}\mu'^{1/3}}$	ℓ_b
$b_*^{[V]}$	$\ell_*^{[V]}$	$\ell_*^{[V]}$	$\frac{E'^{1/4}V_o^{1/9}{}^{4}}{\Delta\gamma^{1/4}}$	$\ell_*^{head,[V]}$	$\ell_b = \frac{K_{Ic}^{2/3}}{\Delta\gamma^{2/3}}$	ℓ_*
$w_*^{[V]}$	$\frac{V_o^{1/9}{}^{3}\mu'^{2/9}}{E'^{2/9}t^{2/9}}$	$\frac{K_{Ic}^{4/5}V_o^{1/5}}{E'^{4/5}}$	$\frac{V_o^{1/9}{}^{4}\mu'^{1/3}}{E'^{1/12}\Delta\gamma^{1/4}t^{1/3}}$	$w_*^{tail,[V]}$	$\frac{V_o^{1/9}{}^{3}\mu'^{1/3}}{K^{2/9}{}_{Ic}\Delta\gamma^{1/9}t^{1/3}}$	$\frac{K_{Ic}^{4/3}}{E'\Delta\gamma^{1/3}}$
$V_*^{[V]}$	V_o	V_o	$V_o - V_*^{head\,[V]}$,	$\frac{E'^{5/6}V_o^{1/9}{}^{2}\mu'^{2/3}}{\Delta\gamma^{3/2}t^{2/3}}$	$V_o - V_*^{head\,[V]}$,	$\frac{K_{Ic}^{8/3}}{E'\Delta\gamma^{5/3}}$
$p_*^{[V]}$	$\frac{E'^{2/3}\mu'^{1/3}}{t^{1/3}}$	$\frac{K_{Ic}^{6/5}}{E'^{1/5}V_o^{1/5}}$	$\frac{E'^{2/3}\mu'^{1/3}}{t^{1/3}}$	$\frac{E'^{11/24}V_o^{1/9}{}^{8}\mu'^{1/6}\Delta\gamma^{3/8}}{t^{1/6}}$	$\frac{E'\Delta\gamma^{5/9}V_o^{1/9}{}^{3}\mu'^{1/3}}{K^{8/9}t^{1/3}}$	$\kappa^{2/}{}_{Ic}{}^{3}\Delta\gamma^{1/3}$
$\mathrm{p}_s^{[V]}$	$\mathrm{K}_m^{[V]} = (t/t_{mk}^{[V]})5/18$	$\mathrm{M}_k^{[V]} = (t/t_{mk}^{[V]})^{-1}$	$\mathrm{K}_{\widehat{m}}^{[V]} = \left(\mathrm{M}_{\widehat{k}}^{[V]}\right)^{-1/4}$		$\mathrm{M}_{\widehat{k}}^{[V]} = \mu'$	$\frac{V_o E'^3 \Delta\gamma^2}{K_{Ic}^{14/3}t}/3$
	$\mathrm{B}_m^{[V]} = (t/t_{m\widehat{m}}^{[V]})4/9$	$\mathcal{B}_k^{[V]} = \Delta\gamma \frac{E'^{3/5}V_o^{3/}{}_{o}{}^{5}}{K_{Ic}^{8/5}}$		$\mathcal{B}_{ks}^{5/48}$		

Ta表 2：不同标度关系中的特征尺度（及控制性无量纲参数） s.

	$t^{[V]}$	$\ell_*^{[V]} = b_*^{[V]}$	$w_*^{[V]}$	$p_*^{[V]}$
$\mathrm{M}^{[V]} \to \mathrm{K}^{[V]}$	$t_{mk}^{[V]} = \frac{E'^{13/5}V_o^{3/5}\mu'}{K_{Ic}^{18/5}}$	$\ell_{mk}^{[V]} = \frac{E'^{2/5}V_o^{2/5}}{K_{Ic}^{2/5}}$	$w_{mk}^{[V]} = \frac{K_{Ic}^{4/5}V_o^{1/5}}{E'^{4/5}}$	$p_{mk}^{[V]} = \frac{K_{Ic}^{6/5}}{E'^{1/5}V_o^{1/5}}$
$\mathrm{M}^{[V]} \to \widehat{\mathrm{M}}^{[V]}$	$t_{m\widehat{m}}^{[V]} = \frac{E'^{5/4}\mu'}{V_o^{3/4}\Delta\gamma^{9/4}}$	$\ell_{m\widehat{m}}^{[V]} = \frac{E'^{1/4}V_o^{1/4}}{\Delta\gamma^{1/4}}$	$w_{m\widehat{m}}^{[V]} = \frac{V_o^{1/2}\Delta\gamma^{1/2}}{E'^{1/2}}$	$p_{m\widehat{m}}^{[V]} = E'^{1/4}V_o^{1/4}\Delta\gamma^{3/4}$
$\widehat{\mathrm{M}}^{[V]} \to \widehat{\mathrm{K}}^{[V]}$ (tail)	$t_{\widehat{m}\widehat{k}}^{[V]} = \frac{E'^{11/4}V_o^{3/4}\Delta\gamma^{1/4}\mu'}{K_{Ic}^4}$	$\ell_{\widehat{m}\widehat{k}}^{[V]} = \frac{E'^{1/4}V_o^{1/4}}{\Delta\gamma^{1/4}}$	$w_{\widehat{m}\widehat{k}}^{[V]} = \frac{K_{Ic}^{4/3}}{E'\Delta\gamma^{1/3}}$	$p_{\widehat{m}\widehat{k}}^{[V]} = \frac{K_{Ic}^{4/3}}{E'^{1/4}V_o^{1/4}\Delta\gamma^{1/12}}$
$\widehat{\mathrm{M}}^{[V]} \to \widehat{\mathrm{K}}^{[V]}$ (head)		$\ell_{\widehat{m}\widehat{k}}^{head,[V]} = \ell_b = \frac{K_{Ic}^{2/3}}{\Delta\gamma^{2/3}}$	$w_{\widehat{m}\widehat{k}}^{head,[V]} = w_{\widehat{m}\widehat{k}}^{[V]}$	$p_{\widehat{m}\widehat{k}}^{head,[V]} = K_{Ic}^{2/3}\Delta\gamma^{1/3}$

表3：流态之间的转变尺度。$\mathrm{M}^{[V]} \to \mathrm{K}^{[V]}$ 转变对应 $\mathrm{K}^{[V]}$尺度，而 $\widehat{}\mathrm{M}^{[V]} \to \widehat{}\mathrm{K}^{[V]}$（头部）到 $\widehat{}\mathrm{K}^{[V]}$的转变尺度分别表示为头部的 $\mathrm{K}^{[V]}$ 和 $\widehat{}\mathrm{K}^{[V]}$（头部），见表 2。

附录 A. 特征尺度表汇总

为求完整起见，我们在下表中列出本文使用的所有特征尺度。此外，还提供了一个 Wolfram Mathematica 笔记本，包含这些尺度的推导过程及不同的标度关系，作为补充材料。

参考文献

Dahm, T. 2000年 关于地球中充液裂缝的形状和速度。《国际地球物理学杂志》 **142** (1), 181–192, arXiv: academic.oup.com。 Davis, T., Rivalta, E. & Dahm, T. 2020年 无控裂缝上升所需的临界流体注入量。《地球物理研究快报》 **47** (14), e2020GL087774。 Davis, T., Rivalta, E., S mittarello, D. & Katz, R. F.2023年 有限批次浮力流体驱动的三维裂缝上升速率。《流体力学杂志》 **954**，A12。 Detournay, E. 2016年 水力裂缝力学。《流体力学年度评论》 **48**，311–339。 Economides, M. J. & Nolte, K. G. 2000 《油藏增产》。约翰·威立父子出版公司。

Garagash, D. I. & Germanovich, L. N. 2014年 有限宽度重力驱动水力裂缝。载于工程科学学会第51届年度技术会议论文集（编者：A. Bajaj, P. Zavattieri, M. Koslowski & T. Siegmund）。西拉斐特：普渡大学图书馆学术出版服务。Garagash, D. I. & Germanovich, L. N. 2022年 三维浮力流体驱动裂缝扩展札记。arXiv:2208.14629。Jeffrey, R. G., Chen, Z., Mills, K. W. & Pegg, S. 2013年 煤矿长壁工作面顶板岩层预处理期间水力压裂扩展的监测与测量。载于ISRM高效可持续水力压裂国际会议，ISRM-ICHF-2013-019 019，第22页。国际岩石力学与岩石工程学会，澳大利亚布里斯班。Lister, J. R. & Kerr, R. C. 1991年 裂缝扩展的流体力学模型及其在岩脉岩浆运移中的应用。《地球物理研究杂志：固体地球》96 (B6), 10049–10077。Möri, A. & Lecampion, B. 2021年 注入关井后径向水力裂缝的停滞。《国际固体与结构杂志》219-220, 151–165。Möri, A. & Lecampion, B. 2022年 三维浮力水力裂缝：点源恒定释放。《流体力学杂志》950, A12。Pezzulli, E. 2022年 地壳过程中的水力裂缝扩展模拟。博士论文，苏黎世联邦理工学院。Rivalta, E., Taisne, B., Bunger, A. P. & Katz, R. F. 2015年 岩脉扩展力学模型综述：学派、研究结果与未来方向。《构造地球物理学》638, 1–42。Roper, S. M. & Lister, J. R. 2005年 超压源中的浮力驱动裂缝扩展。《流体力学杂志》536, 79–98。Roper, S. M. & Lister, J. R. 2007年 浮力驱动裂缝扩展：大断裂韧度极限。《流体力学杂志》580, 359–380。Salimzadeh, S., Zimmerman, R. W. & Khalili, N. 2020年 重力水力压裂：一种创造自驱动裂缝的方法。《地球物理研究快报》47 (20), e2020GL087563。Smitarello, D. 2019年 玄武质侵入体的扩展。博士论文，格勒诺布尔阿尔卑斯大学。Smith, M. B. & Montgomery, C. T. 2015年 水力压裂。CRC出版社。Smittarello, D., Pinel, V., Maccaferri, F., Furst, S., Rivalta, E. & Cayol, V. 2021年 明胶这一脆性弹性地壳经典类比材料物理性质的表征：数值模拟的启示。《构造地球物理学》812, 228901。Spence, D. A., Sharp, P. W. & Turcotte, D. L. 1987年 浮力驱动裂缝扩展：一种岩浆迁移机制。《流体力学杂志》174, 135–153。Tada, H., P.C., Paris & Irwin, G.R. 2000年 《裂纹应力分析手册》，第3版。Vernik, Lev 1994年 烃源岩中烃类生成诱发的微裂纹。《地球物理学》59 (4), 555–563, arXiv: pubs.geoscienceworld.org。Weertman, J. 1971年 冰川中充水冰隙理论及其在大洋中脊下方垂向岩浆运移中的应用。《地球物理研究杂志》76 (5), 1171–1183。Zia, H. & Lecampion, B. 2020年 PyFrac：平面三维水力裂缝模拟器。《计算物理通讯》255, 107368。