arXiv:2304.00911v1 [math.DG] 3 Apr 2023

具有广义对称度量联络的拟佐佐木型流形

S¸enay BULUT、Pınar INSELOZ 埃斯基谢希尔技术大学
数学系，埃斯基谢希尔，土耳其 skarapazar@eskisehir.edu.tr,
pinardeniz136@gmail.com

摘要

本文研究定义在拟佐佐木型流形上的广义对称度量联络。我们推导了所研究流形上的列维-奇维塔联络与广义对称度量联络之间的关系。我们考察了相对于广义对称度量联络的曲率张量、里奇张量和数量曲率张量。我们研究了具有广义对称度量联络的拟佐佐木型流形上的拟佐佐木型孤立子。最后，我们构造了两个具有广义对称度量联络的拟佐佐木型流形实例，并验证了我们的一些结果。

关键词：几乎拟接触几乎拟复黎曼流形、拟佐佐木型流形、para-Ricci-like孤立子、拟爱因斯坦型流形、广义对称度量联络。

2000 年《数学评论》主题分类：53C15、53C25、53C50。

1 引言

Friedmann 和 Schouten [22] 于 1924年 开始研究可微流形上的半对称线性联络。后来，在 [16] 中，人们提出并研究了具有非零挠率的半对称线性联络。这种联络已在具有不同结构的流形上得到研究，例如几乎接触B度量流形、几乎接触流形和 Kenmotsu流形 [14, 15, 19]。Golab [1]提出了可微流形上的四分之一对称线性联络。Rastogi[20, 21] 开始系统研究四分之一对称度量联络。研究人员还考察了具有特殊结构的流形上的半对称度量联络的一些性质 [2, 18, 23, 24]。一种广义对称度量联络，是半对称

度量联络和四分之一对称度量联络在 Kenmotsu 流形、 L_p-Sasakian 流形及 Golden Lorentzian流形上的广义形式，已被定义并研究 [11, 12, 13]。

黎曼Ricci孤立子的研究见 [7]。关于 Ricci 孤立子的研究已推广至接触几何、抛物接触几何和伪黎曼几何 [8, 9, 10]。 [4] 对 Para-Ricci 型孤立子进行了详细研究。

几乎抛物接触几乎抛物复黎曼流形（简称 apapR 流形）的几何性质已在 [6] 中得到研究。此后，作为 apapR 流形中特殊的一类，拟佐佐木型流形在 [4] 中被提出。 [3, 4, 5] 研究了以 Reeb 向量场势、任意势和垂直势为势的 Para-Ricci 型孤立子，并证明了若干额外的几何性质。

受这些研究背景的启发，我们开始研究带有广义对称度量联络的 para-Sasaki-like流形；该联络是半对称度量联络和四分之一对称度量联络的推广。第 2 节介绍 para-Sasaki-like流形的一些基本定义和结果。第 3 节在 apapR 流形上定义广义对称度量联络，并计算 para-Sasaki型黎曼流形关于该联络的曲率张量和里奇张量。此外，我们还研究了与该联络相关的一些算子。第 4 节证明，该联络保留流形的 para-Einstein型情形以及存在 para-Ricci-like孤立子的情形。最后，我们给出两个例子来说明所得结果。

2 类 Sasaki 黎曼流形

设 M是一个维数为 $(2n+1)$ 的可微流形，配备有一个 $(1,1)$ 型张量场 ϕ 、一个向量场 ξ、一个 $1-$形式 η 和一个黎曼度量 g，并满足

$$\begin{aligned} &\eta(\xi)=1, \quad \phi^2 x=x-\eta(x)\xi, \quad \phi\xi=0 \\ &g(\phi x,\phi y)=g(x,y)-\eta(x)\eta(y), \quad tr\phi=0 \end{aligned} \tag{1}$$

对任意 $x,y\in\chi(M)$。这样的流形 (M,ϕ,ξ,η,g) 称为近抛物接触近抛物复黎曼流形（简称 apapR 流形）[6]。此外，利用后面的等式可得:

$$\begin{aligned} &g(x,\xi)=\eta(x), \qquad g(x,\phi y)=g(\phi x,y), \\ &g(\xi,\xi)=1, \qquad \eta(\nabla_x\xi)=0, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 ∇ 表示 g的列维-奇维塔联络。

由等式$\widetilde{g}(x,y)=g(x,\phi y)+\eta(x)\eta(y)$确定的$(M,\phi,\xi,\eta,g)$上的 g的伴随度量 $\widetilde{g}$是一个签名为$(n+1,n)$的伪黎曼度量。

若 apapR 流形 M 满足以下条件，则称其为 para-Sasaki-like流形:

$$\begin{aligned}(\nabla_x\phi)y &= -g(x,y)\xi-\eta(y)x+2\eta(x)\eta(y)\xi,\\ &= -g(\phi x,\phi y)\xi-\eta(y)\phi^2x.\end{aligned}\tag{3}$$

在 [17], 中，已证明对于任意 para-Sasaki-like流形（M， g， ϕ， ξ， η），以下恒等式成立:

$$\begin{array}{ll}\nabla_x\xi=\phi x, & (\nabla_x\eta)y=g(x,\phi y),\\ R(x,y)\xi=-\eta(y)x+\eta(x)y, & \mathrm{Ric}(x,\xi)=-2n\ \eta(x),\\ R(\xi,y)\xi=\phi^2y, & \mathrm{Ric}(x,\xi)(\xi,\xi)=-2n,\end{array}\tag{4}$$

其中， R 和 Ric 分别表示曲率张量和里奇张量。若 M 是类 para-Sasaki 黎曼流形，则有以下恒等式:

$$\phi\nabla_x\xi=\nabla_{\phi x}\xi=x-\eta(x)\xi,\tag{5}$$

3 具有广义对称度量联络的 para-Sasaki型黎曼流形

本节讨论 apapR 流形上的广义对称度量联络。

设（M， ϕ， ξ， η， g）为一个 apapR 流形。我们在 M 上定义广义对称度量联络$\overline{\nabla}$ 如下:

$$\overline{\nabla}_xy=\nabla_xy+\alpha\{g(x,y)\xi-\eta(y)x\}+\beta\{g(\varphi x,y)\xi-\eta(y)\varphi x\},\tag{6}$$

其中， ∇ 是 g的列维-奇维塔联络。由后一个等式，与联络 $\overline{\nabla}$ 相应的 M 的挠率张量 T 为

$$\begin{aligned}T(x,y) &= \overline{\nabla}_xy-\overline{\nabla}_yx-[x,y]\\ &= \alpha\{\eta(x)y-\eta(y)x\}+\beta\{\eta(x)\varphi y-\eta(y)\varphi x\},\end{aligned}\tag{7}$$

对于任意向量场 x,y在 M 上，其中 α和 β为光滑函数。称联络 $\overline{\nabla}$为广义对称联络。若 $(\alpha,\beta)=(1,0)$ 或 $(\alpha,\beta)=(0,1)$，则广义对称联络分别退化为半对称联络和四分之一对称联络。若在 M 上存在黎曼度量 g，使得联络 $\overline{\nabla}$ 满足条件

$$(\overline{\nabla}_xg)(y,z)=0,\tag{8}$$

对所有 $x,y,z\in\chi(M)$ 均成立，则称 $\overline{\nabla}$为广义对称度量联络；否则称为广义对称非度量联络。

现在我们将证明，在 apapR 流形（M,ϕ,ξ,η,g）上存在广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$。

定理 1 在 apapR 流形（M, ϕ, ξ, η, g）上，存在唯一满足 (7) 和 (8) 的线性联络 $\overline{\nabla}$ 。

证明 设 $\overline{\nabla}$ 是由下式确定的线性联络

$$\overline{\nabla}_x y = \nabla_x y + H(x, y), \tag{9}$$

对任意向量场 x 和 y，其中 H 是一个 (1,2) 型 Tensor。现在，我们将确定张量场 H，使得 $\overline{\nabla}$ 满足关系式 (7) 和 (8)。根据挠率张量的定义及 (9)，可得

$$T(x, y) = H(x, y) - H(y, x), \tag{10}$$

对所有 x、$y \in \chi$（M）。由此可得

$$g(T(x, y), z) = g(H(x, y), z) - g(H(y, x), z). \tag{11}$$

由方程 (8) 可得

$$0 = xg(y, z) - g(\overline{\nabla}_x y, z) - g(\overline{\nabla}_x z, y) = g(H(x, y), z) + g(H(x, z), y).$$

于是，由此可得

$$g(H(x, y), z) = -g(H(x, z), y). \tag{12}$$

利用 (11) 和 (12)，容易计算得到:

$$g(T(x, y), z) + g(T(z, x), y) + g(T(z, y), x) = 2g(H(x, y), z). \tag{13}$$

利用 (7) 和 (13)，我们得到

$$\begin{array}{rcl} 2g(H(x, y), z) & = & g(T(x, y), z) + g(T(z, x), y) + g(T(z, y), x) \\ & = & 2g(\alpha(g(x, y)\xi - \eta(y)x) + \beta(g(\varphi x, y)\xi - \eta(y)\varphi x), z). \end{array} \tag{14}$$

因此，(14) 蕴含

$$H(x, y) = \alpha\{g(x, y)\xi - \eta(y)x\} + \beta\{g(\varphi x, y)\xi - \eta(y)\varphi x\}. \tag{15}$$

后一个等式导出方程 (6)。 □

由 (3)、(4) 和 (5)，我们得到以下命题。

命题 2 设 M 为带有广义对称度量联络的类 para-Sasaki 黎曼流形。我们有以下关系:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\nabla}_x \varphi & = & (\beta - 1)\{g(\varphi x, \varphi y)\xi + \eta(y)\varphi^2(x)\} + \alpha\{g(x, \varphi y)\xi + \eta(y)\varphi x\}, \\ \overline{\nabla}_x \xi & = & (1 - \beta)\varphi x - \alpha\varphi^2 x, \\ (\overline{\nabla}_x \eta)y & = & (1 - \beta)g(\varphi x, y) - \alpha g(x, y) + \eta(x)\eta(y), \end{array} \tag{16}$$

对于任意 $x, y \in \chi(M)$。

命题3 设 (M,g,ϕ,ξ,η) 是一个配备广义对称度量联络的 $(2n+1)$–维类 para-Sasaki 黎曼流形。广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 与列维-奇维塔联络 ∇ 的曲率张量之间的关系由以下公式给出:

$$\begin{aligned}\overline{R}(x,y)z &= R(x,y)z+x(\alpha)g(y,z)\xi+(\alpha-\alpha\beta)g(y,z)\varphi x\\ &-x(\alpha)\eta(z)y+x(\beta)g(\varphi y,z)\xi+(2\beta-\beta^2)g(\varphi y,z)\varphi x\\ &-x(\beta)\eta(z)\varphi y+(\alpha^2+\beta)g(y,z)\eta(x)\xi+\alpha\beta g(\varphi y,z)\eta(x)\xi\\ &-\alpha^2 g(y,z)x+(\alpha^2+\beta)\eta(y)\eta(z)x+(\alpha-\alpha\beta)g(\varphi y,z)x\\ &+\alpha\beta\eta(y)\eta(z)\varphi x-y(\alpha)g(x,z)\xi+y(\alpha)\eta(z)x\\ &-y(\beta)g(\varphi x,z)\xi+(\beta^2-2\beta)g(\varphi x,z)\varphi y+y(\beta)\eta(z)\varphi x\\ &-(\alpha^2+\beta)\eta(y)g(x,z)\xi-\alpha\beta g(\varphi x,z)\eta(y)\xi+\alpha^2 g(x,z)y\\ &-(\alpha^2+\beta)\eta(x)\eta(z)y+(\alpha\beta-\alpha)g(\varphi x,z)y\\ &-\alpha\beta\eta(x)\eta(z)\varphi y+(\alpha\beta-\alpha)g(x,z)\varphi y.\end{aligned}\tag{17}$$

证明 广义对称度量联络$\overline{\nabla}$ 在 M 上的曲率张量 $\overline{R}$ 定义为

$$\overline{R}(x,y)z=\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y z-\overline{\nabla}_y\overline{\nabla}_x z-\overline{\nabla}_{[x,y]}z.\tag{18}$$

将 (6) 代入上式，并利用命题 1 以及 (1)、(2)、(3)，通过直接计算即可完成证明。 □

若 α、β 为常值函数，则曲率张量 $\overline{R}$ 为

$$\begin{aligned}\overline{R}(x,y)z &= R(x,y)z+(\alpha-\alpha\beta)g(y,z)\varphi x+(2\beta-\beta^2)g(\varphi y,z)\varphi x\\ &+(\alpha^2+\beta)g(y,z)\eta(x)\xi+\alpha\beta g(\varphi y,z)\eta(x)\xi\\ &-\alpha^2 g(y,z)x+(\alpha^2+\beta)\eta(y)\eta(z)x+(\alpha-\alpha\beta)g(\varphi y,z)x\\ &+\alpha\beta\eta(y)\eta(z)\varphi x+(\beta^2-2\beta)g(\varphi x,z)\varphi y\\ &-(\alpha^2+\beta)\eta(y)g(x,z)\xi-\alpha\beta g(\varphi x,z)\eta(y)\xi+\alpha^2 g(x,z)y\\ &-(\alpha^2+\beta)\eta(x)\eta(z)y+(\alpha\beta-\alpha)g(\varphi x,z)y\\ &+(\alpha\beta-\alpha)g(x,z)\varphi y-\alpha\beta\eta(x)\eta(z)\varphi y.\end{aligned}\tag{19}$$

在上述等式中令 $z=\xi$，并利用 (1)、(2) 和 (4)，得到

$$\overline{R}(x,y)\xi = \alpha\eta(y)\varphi x+(\beta-1)\eta(y)x-(\beta-1)\eta(x)y-\alpha\eta(x)\varphi y.\tag{20}$$

将 $x=\xi$ 代入 (20)，并利用 (1)，得到以下等式:

$$\overline{R}(\xi,y)\xi = (1-\beta)\varphi^2 y-\alpha\varphi(y).\tag{21}$$

设 $\{\xi,e_1,\ldots,e_{2n}\}$ 是流形 M 上每一点处切空间的一组标准正交基。若 $\overline{R}(x,y,z,w)=g(\overline{R}(x,y)z,w)$，则关于广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 的里奇张量 Ric 和数量曲率 scal 分别表示为

$$\overline{\mathrm{Ric}}(x,y)=\sum_{i=0}^{2n}\overline{R}(e_i,x,y,e_i)$$

and

$$\overline{\mathrm{scal}} = \sum_{i=0}^{2n} \overline{\mathrm{Ric}}(e_i, e_i), \tag{22}$$

分别。

定理4 设 (M, g, ϕ, ξ, η) 为一个具有广义对称度量联络的 $(2n+1)-$ 维类 Para-Sasaki 流形。则里奇曲率 Ric 和 Ric 之间存在如下关系：

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ric}}(x,y) &= \mathrm{Ric}(x,y) + [\beta^2 - \beta + (1-2n)\alpha^2]g(x,y) \\ &\quad + [(2n+1)\beta - \beta^2 + (2n-1)\alpha^2]\eta(x)\eta(y) \\ &\quad + [(\alpha\beta - \alpha)(2-2n) + \alpha]g(x, \varphi y) \end{aligned} \tag{23}$$

证明 结合 (3) 和 (19)，立即可得里奇张量 Ric。 □

利用 (22) 和 (23)，可得以下定理。

定理5 设 (M, g, ϕ, ξ, η) 为一个具有广义对称度量联络的 $(2n+1)-$ 维类 Para-Sasaki 流形。数量曲率 scal 和 scal 满足以下关系：

$$\overline{\mathrm{scal}} = \mathrm{scal} + 2n[\beta^2 + (1-2n)\alpha^2]. \tag{24}$$

定理6 关于广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 的赫essian、散度和拉普拉斯算子满足以下关系：

$$\overline{\mathrm{div}}\ (x) = \mathrm{div}\ x - 2n\alpha\ \eta(x) \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Hess}} f(x,y) &= \mathrm{Hess} f(x,y) + \alpha(xf)\eta(y) - \alpha(\xi f)g(x,y) && (26) \\ &\quad + \beta(\varphi x) f\eta(y) - \beta(\xi f) g(\varphi x, y) && (27) \end{aligned}$$

$$\overline{\Delta} f = \Delta f - 2n\alpha\ \xi f \tag{28}$$

证明 设 $\{\xi, e_1, \ldots, e_{2n}\}$ 是 T_pM, $p \in M$ 的标准正交基。对 ∇x取迹，得

$$\overline{\mathrm{div}}\ (x) = \sum_{i=0}^{2n} g(\overline{\nabla}_{e_i} x, e_i).$$

后一个等式结合式（6）完成了证明的第一部分。

根据定义，我们有

$$\overline{\mathrm{Hess}} f(x,y) = g(\overline{\nabla}_x grad\ f, y).$$

我们知道， $g(grad\ f, x) = x(f)$。根据（6），我们证明第二部分。将 $x = grad\ f$ 代入（25）并利用（6），得到拉普拉斯算子 $\overline{\Delta} f$。

□

4 带广义对称度量联络的 Para-Sasaki-like 黎曼流形上的 Para-Ricci 型孤立子

由 [3] 可知，如果 apapR 流形（M, φ, ξ, η, g）的里奇张量 Ric 满足以下公式，则称其为具有常数（a, b, c）的 para-Einstein-like 流形：

$$\mathrm{Ric} = a\ g + b\ \widetilde{g} + c\ \eta \otimes \eta \tag{29}$$

其中，a、b、c为常数。特别地，若 $b = 0$和 $b = c = 0$，则该流形分别称为 η–Einstein流形和Einstein流形。若a、b、c是 M上的函数，则流形 M分别称为近似para-Einstein型、近似 η–Einstein型或近似Einstein流形。

定理 7 若 para-Sasaki-like流形（M、φ、ξ、η、g）是常数为（a、b、c）的 para-Einstein型流形，则带广义对称度量联络的apapR 流形（M、φ、ξ、η、g）也是常数为（λ、μ、ν）的para-Einstein型流形，其中这些常数由下式确定

$$\begin{array}{rcl} \lambda & = & \beta^2 - \beta + (1-2n)\alpha^2 + a, \\ \mu & = & (2-2n)(\alpha\beta - \alpha) + \alpha + b \\ \nu & = & (2n-1)\alpha^2 + (2n-2)\alpha\beta + (1-2n)\alpha + (2n+1)\beta - \beta^2 + c \end{array} \tag{30}$$

证明 由于 para-Sasaki-like流形（M、φ、ξ、η、g）是常数为（a、b、c）的 para-Einstein型流形，式（29）成立。将式（23）代入式（29），经直接计算即可证明该定理。

□

势为 ξ 的 para-Ricci-like孤立子概念在 [3] 中被引入。若以下恒等式成立，则 apapR 流形 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 存在势为 ξ、常数为 (λ, μ, ν) 的 para-Ricci-like孤立子：

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g + \mathrm{Ric} + \lambda g + \mu\widetilde{g} + \nu\eta \otimes \eta = 0, \tag{31}$$

其中，$\mathcal{L}$ 和 Ric 分别表示李导数和里奇张量。g 沿 v 的李导数定义为

$$(\mathcal{L}_v g)(x, y) = g(\nabla_x v, y) + g(x, \nabla_y v). \tag{32}$$

若 $\mu = 0$ 或 $\mu = \nu = 0$，则 M 分别存在一个 η–Ricci孤立子或 Ricci孤立子。若 λ、μ、ν是定义在 M上的函数，则该孤立子称为近似para-Ricci型孤立子、近似 η–Ricci孤立子或近似Ricci孤立子。此外，这一概念可以推广到任意势。若以下条件对常数三元组 (λ, μ, ν) 成立，则称 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 存在一个势向量场为 v 的、具有任意势的 para-Ricci-like孤立子：

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_v g + \mathrm{Ric} + \lambda g + \mu\widetilde{g} + \nu\eta \otimes \eta = 0. \tag{33}$$

对于 para-Sasaki-like流形 (M,φ,ξ,η,g)，我们得到

$$\mathcal{L}_\xi g(x,y)=g(\nabla_x\xi,y)+g(x,\nabla_y\xi)=2g(x,\phi y). \tag{34}$$

利用 (32) 和 (34)，得到

$$\overline{\mathcal{L}}_\xi g(x,y)=\mathcal{L}_\xi g(x,y)-2\alpha g(\varphi x,\varphi y)-2\beta g(\varphi x,y). \tag{35}$$

定理 8 若 para-Sasaki-like流形 (M,φ,ξ,η,g) 存在以 ξ 为势、常数为 (a,b,c) 的 para-Ricci-like孤立子，则配备广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 的 (M,φ,ξ,η,g) 也存在 para-Ricci-like孤立子，其常数 (λ,μ,ν) 由下式确定：

$$\begin{array}{rcl}\lambda &=& (2n-1)\alpha^2-\beta^2+\alpha+\beta+a\\ \mu &=& 2(n-1)\alpha\beta+(1-2n)\alpha+\beta+b\\ \nu &=& \beta^2+(1-2n)\alpha^2+(\alpha-\alpha\beta)(2n-2)-(2n+2)\beta+c\end{array} \tag{36}$$

证明 设 para-Sasaki-like流形 (M,φ,ξ,η,g) 存在以 ξ 为势、常数为 (a,b,c) 的 para-Ricci-like孤立子。则关系式 (31) 成立。将 (35) 和 (23) 代入 (31)，即可得出所述结论。
□

定理 9 设 (M,φ,ξ,η,g) 是维数为 $(2n+1)$ 的类 para-Sasaki 黎曼流形，并且存在常数为 (a,b,c) 的 para-Ricci-like孤立子，其势向量场 v 满足条件 $v=k\xi$，即在每一点都与 Reeb向量场 ξ 共线，其中 k 是定义在 M 上的可微函数。则 M 关于广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 也存在 para-Ricci-like孤立子，其常数 (λ,μ,ν) 由下式确定：

$$\begin{array}{l}\lambda=a+\alpha b-\beta^2+\beta+(2n-1)\alpha^2\\ \mu=b+\beta b+(\alpha-\alpha\beta)(2n-2)\\ \nu=\alpha b-(2n+1)\beta+\beta^2+(1-2n)\alpha^2+c-\beta b+(\alpha\beta-\alpha)(2n-2)\end{array} \tag{37}$$

证明 结合 (6) 和 (32)，我们计算与广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 对应的 g 沿 $v=k\xi$ 的李导数如下

$$\overline{\mathcal{L}}_v g(x,y)=\mathcal{L}_v g(x,y)+2\alpha k\eta(x)\eta(y)-2\alpha k g(x,y)-2\beta g(x,\varphi y). \tag{38}$$

在后一个等式中代入 $\mathcal{L}_v g(x,y)$，并利用 (23) 和 (33)，即可完成证明。 □

注意，如果 (M,φ,ξ,η,g) 存在具有任意势 v 的 para-Ricci-like孤立子，则它不一定存在关于广义对称度量联络的 para-Ricci-like孤立子。

5 个例子

本节将构造两个存在广义对称度量联络的类旁-Sasaki 流形的例子，随后验证我们的结果。

5.1 例1

在 [6], 一个 3–维李群 L 上，考虑其左不变向量场的一组全局基 $\{\xi = e_0、\ e_1、\ e_2\}$，$L$ 使得其对应李代数的对易子如下确定

$$[e_0, e_1] = -e_2, \quad [e_0, e_2] = -e_1, \quad [e_1, e_2] = 0. \tag{39}$$

L 赋予一个 apapR 结构（φ，ξ，η，g）：

$$\begin{array}{l} \varphi(e_0) = 0, \quad \varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = e_1, \quad \eta(e_0) = 1, \\ g(e_0, e_0) = g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1, \\ g(e_i, e_j) = 0 \text{ for } i, j \in \{0, 1, 2\}, \quad i \neq j. \end{array} \tag{40}$$

在同一篇论文中，得到了列维-奇维塔联络 ∇，$R_{ijkl} = R(e_i,\ e_j,\ e_k,\ e_l)$ 以及 $\mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i,\ e_j)$ 的基本分量，其计算公式为：

$$\begin{array}{l} \nabla_{e_1} e_0 = e_2, \quad \nabla_{e_2} e_0 = e_1, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = -e_0; \\ R_{1221} = -R_{1001} = -R_{2002} = 1, \quad \mathrm{Ric}_{00} = -2. \end{array} \tag{41}$$

已证明，所构造的流形 L 是一个常数为（a，b，c）$= (0, 0, -2)$ 的 para-Einstein型 para-Sasaki 型黎曼流形。此外，L 是一个常数为（0，-1，3）的 para-Ricci-like 孤立子。$(\mathcal{L}_\xi g)(e_i, e_j) = (\mathcal{L}_\xi g)_{ij}$ 的唯一非零分量为（$\mathcal{L}_\xi g$）$_{12} = 2$。

现在，考虑 L 上的广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$。根据（6）和（41），我们计算得到 $\overline{\nabla}$ 的非零分量如下：

$$\begin{array}{ll} \overline{\nabla}_{e_1} e_0 = (1-\beta) e_2 - \alpha e_1, & \overline{\nabla}_{e_2} e_0 = (1-\beta) e_1 - \alpha e_2, \\ \overline{\nabla}_{e_1} e_2 = \overline{\nabla}_{e_2} e_1 = (\beta - 1) e_0, & \overline{\nabla}_{e_1} e_1 = \overline{\nabla}_{e_2} e_2 = \alpha e_0. \end{array} \tag{42}$$

根据（19）和（42），除去已知的对称性和反对称性，分量 $\overline{R}_{ijkl} = \overline{R}(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(\overline{R}(e_i, e_j)e_k, e_l)$ 计算如下：

$$\begin{array}{l} \overline{R}_{0110} = -\overline{R}_{0202} = (\beta - 1), \\ \overline{R}_{0102} = -\alpha \\ \overline{R}_{1212} = \alpha^2 - (\beta - 1)^2 \end{array} \tag{43}$$

利用上述关系，我们计算得到里奇张量的非零分量如下：

$$\overline{\mathrm{Ric}}_{00} = 2(\beta - 1), \quad \overline{\mathrm{Ric}}_{11} = \overline{\mathrm{Ric}}_{22} = \beta(\beta - 1) - \alpha^2, \quad \overline{\mathrm{Ric}}_{12} = \alpha. \tag{44}$$

考虑到（44），我们得到标量 $= 2(\beta^2 - \alpha^2 - 1)$。

因此，根据（44），容易看出，流形（L, ϕ, ξ, η, g）关于广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 具有一个拟爱因斯坦型流形，其常数（λ, μ, ν）由下式确定

$$\lambda = \beta(\beta - 1) - \alpha^2, \quad \mu = \alpha, \quad \nu = \alpha(\alpha - 1) - (\beta - 1)(\beta - 2). \tag{45}$$

$\mathcal{L}_\xi g$ 的非零分量由以下等式确定：

$$(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{11} = (\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{22} = -2\alpha, \qquad (\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{12} = 2(1-\beta). \tag{46}$$

因此，利用（44）和（46），我们证明所构造的流形关于广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 存在一个类 para-Ricci 孤子，其常数如下：

$$\lambda = \alpha^2 + \alpha + \beta - \beta^2, \qquad \mu = \beta - \alpha - 1, \qquad \nu = (\beta-1)(\beta+3) - \alpha^2. \tag{47}$$

总之，所构造的 3– 维类 Sasaki 抛黎曼流形（L， ϕ， ξ， η， g）的例子，结合广义对称度量联络以及（45）和（47）中的结果，支持了定理 7 和 8 中已证明的断言。

5.2 示例 2

作为一个具体示例，考虑一个由 [17] 给出的 5– 维类 Para-Sasaki 流形 G。那么，李群 G 有一组左不变向量场基 $\{e_0, \ldots, e_4\}$，其对应的李代数由下式确定：

$$[e_0, e_1] = pe_2 - e_3 + qe_4, \quad [e_0, e_2] = -pe_1 - qe_3 - e_4,$$
$$[e_0, e_3] = -e_1 + qe_2 + pe_4, \quad [e_0, e_4] = -qe_1 - e_2 - pe_3,$$

其中 p， $q \in \mathbb{R}$。李群 G 赋有如下几乎抛接触几乎抛复结构（φ， ξ， η， g）：

$$\begin{aligned} &\xi = e_0, \quad \varphi e_1 = e_3, \quad \varphi e_2 = e_4, \quad \varphi e_3 = e_1, \quad \varphi_4 = e_2, \\ &g(e_i, e_i) = 1, \quad g(e_i, e_j) = 0, \quad i, j \in \{0, 1, \ldots, 4\},\ i \neq j. \end{aligned} \tag{48}$$

列维-奇维塔联络的非零分量如下：

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_0} e_1 = pe_2 + qe_4, \quad \nabla_{e_1} e_0 = e_3, \quad \nabla_{e_0} e_2 = -pe_1 - qe_3, \quad \nabla_{e_2} e_0 = e_4, \\ &\nabla_{e_0} e_3 = qe_2 + pe_4, \quad \nabla_{e_3} e_0 = e_1, \quad \nabla_{e_0} e_4 = -qe_1 - pe_3, \quad \nabla_{e_4} e_0 = e_2, \\ &\nabla_{e_1} e_3 = \nabla_{e_2} e_4 = \nabla_{e_3} e_1 = \nabla_{e_4} e_2 = -e_0. \end{aligned} \tag{49}$$

在 [4], 中证明了 $(G, \varphi, \xi, \eta, g)$ 是一个 para-Sasaki-like流形，并且 η–爱因斯坦，其常数为 $(a, b, c) = (0, 0, -4)$。此外，它存在一个势为 ξ 、常数为 $(0, -1, 5)$ 的 para-里奇类孤子。里奇张量 Ric 的唯一非零分量为 $\mathrm{Ric}_{00} = -4$。分量 $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$ 的非零项由以下等式确定，并满足其众所周知的对称性和反对称性：

$$\begin{aligned} &R_{0110} = R_{0220} = R_{0330} = R_{0440} = -1, \\ &R_{1234} = R_{1432} = R_{1331} = R_{2442} = 1. \end{aligned} \tag{50}$$

$\mathcal{L}_\xi g$ 的非零分量由以下等式确定：

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{13} = (\mathcal{L}_\xi g)_{24} = (\mathcal{L}_\xi g)_{31} = (\mathcal{L}_\xi g)_{42} = 2.$$

广义对称度量联络 $\overline{\nabla}$ 的非零分量如下所示:

$$\begin{array}{ll}
\overline{\nabla}_{e_0}e_1=\nabla_{e_0}e_1=pe_2+qe_4, & \overline{\nabla}_{e_1}e_0=(1-\beta)e_3-\alpha e_1,\\
\overline{\nabla}_{e_0}e_2=\nabla_{e_0}e_2=-pe_1-qe_3, & \overline{\nabla}_{e_2}e_0=(1-\beta)e_4-\alpha e_2,\\
\overline{\nabla}_{e_0}e_3=\nabla_{e_0}e_3=qe_2+pe_4, & \overline{\nabla}_{e_3}e_0=(1-\beta)e_1-\alpha e_3,\\
\overline{\nabla}_{e_0}e_4=\nabla_{e_0}e_4=-qe_1-pe_3, & \overline{\nabla}_{e_4}e_0=(1-\beta)e_2-\alpha e_4,\\
\overline{\nabla}_{e_1}e_3=\overline{\nabla}_{e_3}e_1=\overline{\nabla}_{e_2}e_4=\overline{\nabla}_{e_4}e_2=(\beta-1)e_0, & \\
\overline{\nabla}_{e_i}e_i=\alpha e_0,\quad i\neq 0. &
\end{array}\tag{51}$$

考虑（19）和（50），除去众所周知的对称性和反对称性后，我们计算得到分量 $\overline{R}_{ijkl}=\overline{R}(e_i,e_j,e_k,e_l)=g(\overline{R}(e_i,e_j)e_k,e_l)$，如下所示:

$$\begin{array}{l}
\overline{R}_{0101}=-\overline{R}_{0440}=\overline{R}_{0202}=-\overline{R}_{0330}=1-\beta,\\
\overline{R}_{0103}=\overline{R}_{0402}=-\alpha,\\
\overline{R}_{1412}=-\overline{R}_{3423}=-\overline{R}_{3441}=-\overline{R}_{2312}=\alpha(\beta-1),\\
\overline{R}_{3434}=\overline{R}_{2323}=\overline{R}_{1414}=\overline{R}_{1212}=\alpha^2,\\
\overline{R}_{1313}=\overline{R}_{2424}=\alpha^2-(\beta-1)^2,\\
\overline{R}_{1234}=-\overline{R}_{2314}=(\beta-1)^2.
\end{array}\tag{52}$$

里奇张量 $\overline{Ric}$ 的非零分量计算如下:

$$\begin{array}{l}
\overline{Ric}_{00}=4(\beta-1),\\
\overline{Ric}_{11}=\overline{Ric}_{22}=\overline{Ric}_{33}=\overline{Ric}_{44}=\beta^2-\beta-3\alpha^2,\\
\overline{Ric}_{13}=\overline{Ric}_{24}=3\alpha-2\alpha\beta.
\end{array}\tag{53}$$

因此，利用上述关系可得数量曲率:

$$\overline{scal}=4(\beta^2-3\alpha^2-1).$$

此外，沿着 ξ 、关于联络 $\overline{\nabla}$ 的 g 的李导数，其非零分量为:

$$\begin{array}{l}
(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{11}=(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{22}=(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{33}=(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{44}=-2\alpha,\\
(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{13}=(\overline{\mathcal{L}}_\xi g)_{24}=2(1-\beta)
\end{array}\tag{54}$$

根据（53）和（54），所考虑的流形 (G,φ,ξ,η,g) 是一个具有常数 (λ,μ,ν) 的 para-Einstein 类流形，其中常数为:

$$\begin{array}{l}
\lambda=\beta^2-\beta-3\alpha^2,\\
\mu=-2\alpha\beta+3\alpha,\\
\nu=3\alpha^2+2\alpha\beta-3\alpha+5\beta-\beta^2-4.
\end{array}\tag{55}$$

并且它存在一个以 ξ 为势、常数 (λ,μ,ν) 由下式确定的 para-Ricci-like孤立子:

$$\begin{array}{l}
\lambda=3\alpha^2+\alpha-\beta^2+\beta,\\
\mu=2\alpha\beta+\beta-3\alpha-1,\\
\nu=\beta^2-3\alpha^2-2\alpha\beta-6\beta+2\alpha+5.
\end{array}\tag{56}$$

因此，结合结果（55）和（56）得到的流形（G、ϕ、ξ、η、g）支持定理 7 和 8 中已证明的断言。

致谢 10 第一作者获得了埃斯基,谢希尔技术大学科学研究项目委员会项目 22ADP356 的资助。

参考文献

[1] Golab S.,《关于半对称与四分之一对称线性联络》, Tensor 29 (1975), 249-254。[2] Mondal A. K.; De U.C.,《Sasakian 流形上四分之一对称度量联络的一些性质》,《数学分析与应用通报》, (2009), 99-108。[3] H. Manev, M. Manev,《具有近似抛接触结构和近似抛复结构的黎曼流形上的 Para-Ricci 型孤立子》。《数学》, 9(14) (2021) 1704。[4] H. Manev,《具有垂直势的类 para-Sasaki 黎曼流形上的 Para-Ricci 型孤立子》,《Symmetry》, 13 (2021) 2267。[5]H. Manev, M. Manev,《具有任意势的类 para-Sasaki 黎曼流形上的 Para-Ricci 型孤立子》。《数学》, 10(4) (2022), 651。[6] M. Manev, M. Staikova,《关于类型为（n, n）的近似抛接触黎曼流形》,《J. Geom.》2001, 72, 108-114。[7] H. D. Cao,《Ricci 孤立子的最新进展》,《Adv. Lect. Math.》(ALM) 2009, 11, 1-38。[8] H.G. Nagaraja, C.R. Premalatha,《Kenmotsu 流形中的 Ricci 孤立子》,《J. Math. Anal.》2012, 3, (2), 18-24。[9] A.M. Blaga,《para-Kenmotsu流形上的 Ricci 孤立子》,《Balkan J. Geom. Appl.》2015, 20, 1-13。[10] M. Manev,《几乎接触B度量流形上的类里奇孤子》,《J. Geom. Phys.》2020, 154, 103734。[11] M. D. Siddiqi, O. Bahadır,《具有广义对称度量联络的 Kenmotsu 流形上的 Ricci 孤立子》,《Facta Univ. Ser. Math. Inform.》35 (2) (2020), 295-310。[12] Bahadir, O., Choudhary, M. A., Pandey, S. (2021).《具有广义对称度量联络的 LP-Sasakian 流形》。《Novi Sad J. Math》, 51(2), 75-87。[13] Choudhary, M. A., Khedher, K. M., Bahadır, O., Siddiqi, M. D. (2021).《配备广义对称度量联络的 Golden Lorentzian 流形》。《数学》, 9(19), 2430。

[14] Sharfuddin S.; Husain S.I.《近似接触流形中的半对称度量联络》, Tensor. 30 (1976), 133-139。[15] Tripathi, M.M.《Kenmotsu 流形上的半对称度量联络》, J. Pure Math. 16 (1999), 67-71。[16] Hayden H. A., 《带挠率空间的子空间》, Proc. London Math. Soc. 34(1932), 27-50。[17] S. Ivanov, H. Manev, M. Manev, 《类 para-Sasaki 黎曼流形与新的爱因斯坦度量》, Revista de la Real Academia de Ciencias Exac- tas, F´ısicas y Naturales. Serie A. Matem´aticas , 115 (2021) 112。[18] S.. Bulut, 《几乎接触B度量流形上的四分之一对称度量联络》, Filomat 33 (16), 5181-5190。[19] S.. Bulut, 《几乎接触B度量流形上的半对称度量联络》, Turkish J. Math. 45 (6), 2455-2465。[20] S. C. Rastogi, 《关于四分之一对称度量联络》, C. R. Acad. Sci. Bulgar 31 (1978) 811-814。[21]S. C. Rastogi, 《关于四分之一对称度量联络》, Tensor, 44(2) (1987) 133-141。[22] A. Friedmann, J. A. Schouten, 《关于半对称传递的几何》, Math. Z. 21 (1924), 211-223。[23]Mishra, R. S. and Pandey, S. N., 《关于四分之一对称度量F-联络》, Tensor, N.S., 34(1980), 1-7。[24] Yano, K. and Imai, T., 《四分之一对称度量联络及其曲率张量》, Tensor, N.S. 38(1982), 13-18。