arXiv:2304.00922v2 [math.CO] 1 Nov 2023

L_∞ 斯坦纳三元系的块图和约翰逊图中处处非零整数特征向量的范数最小化

E.A. BESPALOV, I.YU. MOGILNYKH, K.V. VOROB'EV

摘要。我们研究斯坦纳三元系的块图和约翰逊图中的处处非零整数特征向量。对于第一特征值，我们求得了若干无穷级数约翰逊图的 L_∞范数最小值，其中包括所有 $n \geq 63$下的 $J(n,3)$，并给出了通用的上界和下界。对于斯坦纳三元系 S 的块图第二特征值对应的处处非零整数特征向量，最小化 L_∞ 范数等价于求斯坦纳三元系 S的最小处处非零流。我们证明，对于所有阶大于或等于99的 Assmuss-Mattson Steiner三元系，最小流的上界为5。

关键词： 斯坦纳三元系，流，强正则图，约翰逊图，格拉斯曼图，特征值

1. 引言

如果一个向量的所有元素都是非零整数，则称其为处处非零整数向量（简称NZI向量）。向量的无穷范数 $\|v\|_\infty$ 定义为 v 其元素绝对值的最大值。

设 W_S 是斯坦纳三元系 S的点-块关联矩阵。满足 $W_S u = 0$ 的处处非零整数向量 u 称为该斯坦纳三元系 S[1]的无零（$\|u\|_\infty + 1$）-流。不难看出，关联矩阵 W_S 的右零空间与 S 的块图的第二特征空间重合（见下文命题 4）。

关于斯坦纳三元系流的 L_∞ 范数最小值，已有文献 [1], [2]¡4]进行了研究。Akbari、Burgess、Danziger和Mendelsohn [3] 证明，任意阶为 n 的斯坦纳三元系中，流的范数最小值不超过 $O(n^2)$。

另一方面，研究表明，对于某些特定的斯坦纳三元系族，流的范数的实际最小值远小于 $O(n^2)$；这一事实与 Tutte 关于图 [24] 存在 5-流的猜想有相似之处。更具体地说，所有阶为 15 的斯坦纳三元系都具有 3-流 [1]。此外，已有证明表明，某些著名的斯坦纳三元系递归类，例如直积构造、 $2v + 7$-构造，在原斯坦纳三元系 [4] 存在 3-流的条件下，也存在 3-流。至于 $2v+1$-构造，所得斯坦纳三元系具有 3-流、4-流或 5-流 [3]。在第 5 节中，我们证明，由任意阶至少为 49 的斯坦纳三元系 S 得到的 Assmuss-Mattson [6] 斯坦纳三元系，无论原系统中的流如何 S，都存在 5- 流。

可以考虑对任意给定的自然矩阵 W 给出更一般的流定义，例如子集 [1] 或子空间 [23] 的包含矩阵。在这些情形中，流是具有特定特征值的约翰逊图或格拉斯曼图的特征向量之和。例如，设 W 是元素数为 n 的集合的二元子集与 k-子集的包含矩阵。在 [1] 中证明了，对于 $k = 3$，存在处处非零整数向量 v，使得 $Wv = 0$, $\|v\|_\infty = 2$，即一个广义 3-流。注意，对于 $k = 3$，任意满足 $Wv = 0$ 的非零向量 v 都是约翰逊图 $J(n, 3)$ 对应第三个特征值的特征向量。基于高阶包含矩阵的性质， [1] 的作者

Bespalov, E.A., Mogilnykh, I.Yu., Vorob'ev K.V. . © 2023 Bespalov,E.A., Mogilnykh, I.Yu., Vorob'ev K.V.. 本研究由俄罗斯科学基金会资助，资助项目 22-21-00135，https://rscf.ru/project/22-21- 00135/。

扩展了这一结果，并证明对于任意 $k \geq 3$，二元子集与 k-子集的包含矩阵都存在 3-流。

对斯坦纳三元系和结构矩阵的流持续研究所呈现的视角，引出了以下自然问题。

问题 1. 给定一个直径为 d 、具有有理特征值 $\theta_i(\Gamma)$ 的距离正则图 Γ ，$0 \leq i \leq d$，求

$$min\{\|u\|_\infty+1 : u \text{ is a nowhere-zero integer } \theta_i(\Gamma)\text{-eigenvector of } \Gamma\},$$

下文将其记作 $m(i,\Gamma)$。

根据 Akbari 等人的结果，问题 1 总是有解。

定理 1. [1], [2] 设 Γ 是一个具有有理特征值 $\theta_i(\Gamma)$ 的距离正则图，$0 \leq i \leq d$。那么，Γ 存在一个 *NZI* $\theta_i(\Gamma)$ 特征向量。

证明。根据 [2, 定理 3]，任意距离正则图的每个特征值都对应一个处处非零实特征向量。根据 [1, 引理 3，3] 若一个有理矩阵的零空间中存在处处非零实向量，则该零空间中也存在处处非零整数向量。令矩阵为 $A_\Gamma - \theta_i I$，其中 A_Γ 是 Γ的邻接矩阵，即可得到所需结论。□

定义、记号和基础理论见第 2 节。第 3 节的结果在一般背景下阐述：讨论 q-元斯坦纳三元系和格拉斯曼图；经典斯坦纳三元系和约翰逊图则作为特例处理。近期研究表明，q-元斯坦纳三元系渐近地存在，[19], 但目前只有一个阶为 13 的显式例子，[9] 。我们利用 STS的点-区组关联矩阵，描述任意 q-元斯坦纳三元系的块图的特征子空间。特别是，对于前几个特征值，格拉斯曼图 $J_q(n,3)$ 的特征向量与 q-元斯坦纳三元系 S （阶为 n）的块图的特征向量之间存在自然的一一对应：将 $J_q(n, 3)$ 的任意特征向量限制到 S 的区组上，所得向量就是 S的块图的特征向量。斯坦纳三元系的第一特征子空间与 $J_q(n,k)$ 之间的这种关系，体现了 [25], 的思路；该方法建立了约翰逊图的特征向量与 Hamming 图的特征向量之间的扩展关系。尽管存在这种紧密联系，我们在第 4 节证明，对于 $q = 1$, 两类图的处处非零特征向量的 L_∞ 范数最小值并不相同。我们给出了约翰逊图 $J(n,k)$ 的 NZI $\theta_1(J(n, k))$ 特征向量的最优范数上下界，并求得了无穷多个约翰逊图 $J(n,k)$ 的精确最小值。特别地，我们完全解决了 $k = 3$ 以及所有 $n > 63$ 的情形（见定理 5）。第 5 节给出了具有第二特征值的斯坦纳三元系块图的 NZI 特征向量的 L_∞ 范数界；对于较小的 i，这等价于求斯坦纳三元系的 i-流。第 5.1 节回顾了关于射影斯坦纳三元系和博斯斯坦纳三元系的流的已有结果，这些结果利用了这些设计的循环性和可分解性。第 5.2 节证明，通过 Assmuss-Mattson 方法构造的任意斯坦纳三元系，[6] 只要阶至少为 99，就存在 5-流。本节结果以斯坦纳三元系的流来表述，而非以其块图的特征向量来表述。

第 6 节讨论斯坦纳三元系块图中的完全正则码。这些对象属于当前研究的范畴，因为 nowhere-零整数特征向量的 L_∞ 范数所能达到的最小值，是由一个源自特定完全正则码的向量取得的（见命题 2）。从 Cameron-Liebler 直线类的角度来看，覆盖半径为 1 且具有第一特征值的斯坦纳三元系块图中的完全正则码值得关注，因为它们是此类对象的不同变体之一 [13], [17] 。阶为 $2^r - 1$ 的射影（汉明）斯坦纳三元系的块图与格拉斯曼图$J_2(r, 2)$ 同构，而所有此类完全正则码恰好是 $PG(n-1, 2)$ 中的 Cameron-Liebler 直线类。我们猜想，这些码仅包含以下经典的 Cameron-Liebler 直线类例子：一个点、一个超平面以及一个不关联的点-超平面对（见第 6 节的问题 2）；并证明，对于阶为 13 和 15 的斯坦纳三元系，不存在其他此类码。此前在 [18], 中研究过斯坦纳三元系的块图中的这些码，尤其是仿射斯坦纳三元系的块图中的此类码，其中

这些对象及上述猜想，曾从块图的小支撑特征向量角度加以研究。

2. 定义与记号

2.1. **Johnson图、格拉斯曼图、 q元斯坦纳三元系及其块图**。直径为 d 的正则图称为距离正则图，如果存在一个整数数组

$$\{\beta_0,\ldots,\beta_{d-1};\gamma_1,\ldots,\gamma_d\},$$

使得对于距离为 i的任意顶点 x和 y， $i\in\{0,\ldots,d\}$ 恰有 β_i 个邻点与 x 的距离为 $i+1$，且恰有 γ_i 个邻点与 x的距离为 $i-1$。整数数组$\{\beta_0,\ldots,\beta_{d-1}$； γ_1，...， $\gamma_d\}$ 称为距离正则图 Γ的交数组。若非零向量 v 满足 $A_\Gamma v=\theta(\Gamma)v$，其中 A_Γ 是图 Γ的邻接矩阵，则称 v 为 $\theta(\Gamma)$-特征向量。此时， θ 称为 Γ的一个特征值。众所周知，直径为 d 的任意距离正则图恰有 $d+1$ 个互不相同的特征值，按降序编号为： $\theta_0(\Gamma)>\theta_1(\Gamma)>\ldots>\theta_d(\Gamma)$。注意， $\theta_0(\Gamma)$是图 Γ的度。

格拉斯曼图 格拉斯曼图 $J_q(n,k)$ 的顶点是有限向量空间 $\mathbb{F}_q^n$ 上域 $\mathbb{F}_q$ 上的 k 维子空间，边则是交于一个 $(k-1)$ 维子空间的子空间对。我们还将 $q=1$ 作为一个极限情形纳入定义：约翰逊图 约翰逊图 $J(n,k)$（也记作 $J_1(n,k)$）是以 $\{1,\ldots,n\}$ 的 k 元子集为顶点集、以交于一个 $(k-1)$ 元集合的子集对为边的图。令 $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$ 表示高斯二项式系数， $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_1$ 表示普通二项式系数。 $J_q(n,k)$ 的 $k+1$ 个特征值 $q\geq 1$ 如下：

$$\theta_i(J_q(n,k))=q^{k+1}\begin{bmatrix}k-i\\1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n-k-i\\1\end{bmatrix}_q-\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}_q,0\leq i\leq k.$$

所谓 q 元 斯坦纳三元系 （简称 STS） S，是指由 $\mathbb{F}_q^n$ 中的 3 维子空间（称为区组）构成的集合，其中 $\mathbb{F}_q^n$ 的任意 2 维子空间恰好包含在 S 中的一个子空间内。令 $q=1$，即可将传统意义上的斯坦纳三元系纳入上述定义，即由 $\{1,\ldots,n\}$ 的 3 元子集（称为区组或三元组）构成的集合，其中任意 2 元子集恰好包含在一个区组内。 $\mathbb{F}_q^n$ 的 1 维子空间（ $\{1,\ldots,n\}$ 的 1 元子集）称为 S 的点 。 S 的阶 是指环境空间 F_q^n 的维数 n（对于 $q=1$，即点的数量）。阶为 n 的斯坦纳三元系（经典意义上）若其区组可划分为平行类（即由两两不相交的区组组成的集合，且每类的大小均为 $\frac{n}{3}$），则称为可分解的 。

关联矩阵 是一个 q-元斯坦纳三元系 S 的矩阵 W_S，其行以 S 的点为索引，列以其区组为索引，定义如下：

$$(W_S)_{i,T}=\begin{cases}1, & i\subseteq T\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}.$$

类似地，我们定义 $J_q(n,k)$ 的点-块关联矩阵 W，其行以点（一维子空间）为索引，列以 $\mathbb{F}_q^n$ 的 k 子空间为索引。 q- 元、 $q\geq 1$ 斯坦纳三元系 S 的区组交图记为 Γ_S，其顶点为 S 的区组，两两不同且交集非空的区组构成其边。众所周知，该图是强正则的 [5] ，其特征值如下：

$$\theta_1(\Gamma_S)=\frac{\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_q-1}{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}_q-1}-\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}_q-1,$$

$$\theta_2(\Gamma_S)=-\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}_q.$$

任意一个阶为 n 的 q 元斯坦纳三元系 STS $q\geq 1$ 的区组，都可以视为 $J_q(n,3)$ 的顶点集合。因此，区组交图可以看作是 $J_q(n,3)$ 的距离二图中由该斯坦纳三元系 STS 的区组诱导出的子图。

2.2. **完全正则码**。给定 $C \subseteq V(\Gamma)$，相对于 C 的距离划分为 $C_0 = C, \ldots, C_\rho$，使得

$$C_i = \{x : d(x, C) = i\}.$$

所有 i 的最大值记作 ρ，称为 C 的覆盖半径。若存在数 $\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho, \beta_0, \ldots, \beta_{\rho-1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_\rho$，使得 C_i 中任意顶点都恰与 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 个分别属于 C_i, C_{i+1} 和 C_{i-1} 的顶点相邻（其中 $i = 0, \ldots \rho$ 且 $\gamma_0 = \beta_{\rho+1} = 0.$），则称子集 $C \subseteq V(\Gamma)$ 为完全正则码。数组 $\{\beta_0, \ldots, \beta_{\rho-1}; \gamma_1, \ldots, \gamma_\rho\}$ 称为完全正则码 C 的交数组。以下三对角 $(\rho+1) \times (\rho+1)$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \gamma_{\rho-1} & \alpha_{\rho-1} & \beta_{\rho-1} \\ 0 & . & 0 & 0 & \gamma_\rho & \alpha_\rho \end{pmatrix},$$

称为完全正则码 C的交矩阵。

该矩阵的特征值就是完全正则码 C的特征值。众所周知，正则图中任意完全正则码的特征值必然也是该图的特征值，这称为 Lloyd 定理。

给定图 Γ 中的顶点集合 C，我们用 χ_C 表示其在该图顶点集上的示性向量。

命题 1.（众所周知）设 C 是距离正则图 Γ中的完全正则码，满足 $\rho = 1$，特征值为 $\theta_i(\Gamma)$，$i \neq 0$，交数组为 $\{\beta_0; \gamma_1\}$。则向量 $\beta_0\chi_C - \gamma_1\chi_{V(\Gamma)\setminus C}$ 是 Γ的$\theta_i(\Gamma)$-特征向量。此外，任何仅取两个值的 $\theta_i(\Gamma)$-特征向量（不计重数）都可以通过这种方式得到。

从问题 1 的角度研究完全正则码，受到以下陈述的启发。

命题 2。设 Γ 为一个距离正则图。则有 $m(i, \Gamma) \geq 2$。此外，当且仅当存在一个 $\rho = 1$、交数组为 $\{\beta_0; \beta_0\}$且特征值为 $\theta_i(\Gamma)$ 的完全正则码于 Γ中时，等式$m(i, \Gamma) = 2$ 成立。

证明。显然有 $m(i,\Gamma) \geq 2$，并且 $m(i,\Gamma)$ 当且仅当存在一个$\theta_i(\Gamma)$-特征向量，其取值仅为 $+1$ 和 -1 时，达到下界 2。由命题 1 可得所需结论。□

对于具有 $\rho = 1$ 和第二特征值的完全正则码，我们看到它们等价于所讨论的斯坦纳三元系的 1-子设计。

命题 3。设 S 为一个阶为 n的斯坦纳三元系。集合 $S' \subset S$ 是一个具有 $\rho = 1$ 且特征值为 $\theta_2(\Gamma_S)$ 的完全正则码，当且仅当 S' 是一个 *1*-设计。

证明。设 S' 是 S 的区组子集。当且仅当向量$W_S((\frac{n-1}{2} - \lambda)\chi_{S'} - \lambda\chi_{S\setminus S'})$ 全为零时，集合 S' 是一个 1-$(n, 3, \lambda)$-设计，其中 W_S 是斯坦纳三元系 S 的点-块关联矩阵。这是因为 S 的任意一点都属于 $\frac{n-1}{2}$ 个 S 区组和 λ 个 S'区组。由下文的命题 4.1 可知，这等价于向量 $(\frac{n-1}{2} - \lambda)\chi_{S'} - \lambda\chi_{S\setminus S'}$ 是一个 $\theta_2(\Gamma_S)$-特征向量。由于图的任意二值特征向量都对应一个具有 $\rho = 1$ 的完全正则码，见命题 1，因此得到所需结论。

□

3. 斯坦纳三元系块图的特征子空间描述，以及 $J_q(n, k)$ 的第一特征子空间

首先，我们考虑以下辅助事实。

定理 2。 [7, 定理 1] 设 $\overline{\Gamma}$ 是一个度数分别为 c 和 c'的双正则二分图，其半图为 Γ 和 Γ'，并设 I 表示 $|V(\Gamma)| \times |V(\Gamma')|$ 的两个部分的关联矩阵。设 $V(\Gamma)$ 中任意一对距离为 2 的顶点在 $\overline{\Gamma}$ 中恰有 m 个公共邻点，且 $V(\Gamma')$ 中任意一对距离为 2 的顶点在 $\overline{\Gamma}$ 中恰有 m' 个公共邻点。则有如下结论

1. 设 u 是 θ-特征值对应的特征向量， Γ'， $\theta \neq -\frac{c'}{m'}$。那么向量 Iu 是 Γ 的 $\frac{c'-c+m'\theta}{m}$-特征向量。*2.* 给定一个非零向量 u， Iu 是全零向量，当且仅当 u 是 Γ' 的 $-\frac{c'}{m'}$-特征向量。

例 *1*。考虑一个双正则图，其两部分分别由某个 q-元斯坦纳三元系 S 的点和区组构成，邻接关系为点块包含关系。半图分别是 S 的点集上的完全图 $K_{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q}$ （如定理 2 中的 Γ ）以及 S 的块图 Γ_S （如定理 2 中的 Γ' ）； I 是该设计 S 的点-块关联矩阵 W_S。不难看出，定理 2 中的参数为 $m = m' = 1$、 $c = \frac{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q - 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q - 1}$、 $c' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q$。

我们得到斯坦纳三元系关联矩阵的零空间与其块图第二特征空间之间的如下关系。

命题 **命题 4.** 设 S 是一个 q元斯坦纳三元系 S， $q \geq 1$ 为其点块交矩阵 W_S。 n *1.* 非零向量 u 满足 $W_S u = 0$当且仅当 u 是 $\theta_2(\Gamma_S)$-特征向量，属于 Γ_S。*2.* 向量 v 是 S 的一个 $(\|v\|_\infty + 1)$-流，当且仅当 v 是斯坦纳三元系 S的块图 Γ_S 的一个处处非零整数 $\theta_2(\Gamma_S)$-特征向量。

证明。 我们将定理 2.2 应用于例 1 中的图。 □

3.1. 斯坦纳三元系、格拉斯曼图和约翰逊图的块图的第一特征空间。在下文的定理中，我们用 W 表示 $\mathbb{F}_q^n$ 的所有一维子空间（当 $q = 1$时为 $\{1, \ldots, n\}$ 的单元素子集）与 k维子空间 $\mathbb{F}_q^n$（当 $q = 1$时为 $\{1, \ldots, n\}$ 的单元素子集）的关联矩阵。若向量是将向量 v 中指标 S 以外的所有元素删除后得到的，则称该向量为向量 v 在其指标集合 S 上的限制。在编码理论中，这一操作也称为删余。相反，若向量是通过向 v追加一些额外元素得到的，则称向量 v被扩展为该向量。

下文中，用 $U(n, q)$ 表示以图 $J_q(n, 1)$ 的顶点为索引、各分量之和为零的所有实值非零向量的集合， $q \geq 1$。当 q 为 1 时，我们也用简写 $U(n)$ 表示 $U(n, q)$。

定理 3. *1.* 集合 $U(n, q)$ 是 $J_q(n, 1)$ 的所有 $\theta_1(J_q(n, 1))$-特征向量组成的集合。

2. [14][20] $W^T(U(n, q))$ 是 $J_q(n, k)$ 的所有 $\theta_1(J_q(n, k))$-特征向量组成的集合。

3. 若 S 是一个阶为 n 的 q 元斯坦纳三元系，则 W $S^T(U(n, q))$ 是所有 $\theta_1(\Gamma_S)$-其块图 Γ_S 的特征向量。

4. 设 S 是一个阶为 n 的 q元斯坦纳三元系， Γ_S 是其块图。 $J_q(n, 3)$ 的任意 $\theta_1(J_q(n,3))$特征向量在 S的区组上的限制，是 Γ_S的一个 $\theta_1(\Gamma_S)$特征向量；而 Γ_S 的每个$\theta_1(\Gamma_S)$特征向量都唯一扩展为 $J_q(n,3)$的一个 $\theta_1(J_q(n,3))$特征向量。

5. 若 S是一个阶为 n的 q元斯坦纳三元系，则 $m(1, \Gamma_S) \leq m(1, J_q(n, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q))$.

证明。 1. 图 $J_q(n, 1)$是完全图 $K_{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q}$。由于 $\theta_1(J_q(n, 1)) = -1$，我们可知， $K_{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q}$ 的一个(-1)-特征向量 u 满足 $\sum_{x \in K_{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q}} u_x = 0$ ，反之亦然。

2. 对于约翰逊图 $J(n, k)$， Delsarte [14] 已证明这一性质。关于格拉斯曼图，证明可见 [20]。我们注意到，对于 $i = 0, \ldots, k-1$，依次将定理 2.1 应用于图 $J_q(n, i)$ 和 $J_q(n, i+1)$，即可得到这一结果。这些图是该二部图的半图，其邻接关系由 i-子空间包含于 $\mathbb{F}_q^n$ 的 $i+1$-子空间中定义（在定理 2 中， $\mathbb{F}_q^n$ 即 $\overline{\Gamma}$ ）。

3. 根据定理 2，考虑二部图 $\overline{\Gamma}$ ，其顶点（ $q = 1$ 的子空间和子集）之间的邻接关系为包含关系，涉及 $J_q(n, 1)$ 和 $J_q(n, k)$。该图与例 1 中的图相同，但与例 1 相反， S 的区组交图记作 Γ ，完全图 $K_{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q}$ 记作 Γ'。定理 2 中提到的值为 $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q$, $c' = \frac{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q - 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q - 1}$,

$m = m' = 1$。根据定理 2.1，我们看到，$W_S^T(U(n,q))$ 中的任意向量都是 Γ_S 的特征向量，其特征值为 $c' - c + \theta_1(J_q(n,1)) = \frac{[n]_q - 1}{[1]_q - 1} - [3]_q - 1 = \theta_1(\Gamma_S)$。

另一方面，我们将定理 2.1 应用于 $\overline{\Gamma}$，并交换 Γ 和 Γ' 的角色。由此可见，Γ_S 的任意 $\theta_1(\Gamma_S)$-特征向量 v 都意味着 $W_S v$ 是图 $J_q(n,1)$ 的一个 $\theta_1(J_q(n,1))$-特征向量。因此，W_S^T 建立了 $J_q(n,1)$ 与 Γ_S 的第一特征子空间之间的同构。

4. 从该定理的第二和第三个结论可知，W_S^T（$W_{J_q(n,3)}^T$ 分别）建立了完全图与块图（分别为图 $J_q(n,k)$）的第一特征子空间之间的同构。每个斯坦纳三元系 S 的区组都可以视为 $J_q(n,3)$ 的顶点，而 q 元斯坦纳三元系 S 的区组-点关联矩阵 W_S^T 的行构成了 $J_q(n,3)$ 的区组-点关联矩阵 $W_{J_q(n,3)}^T$ 的行的一个子集，由此便得到所需结论。

5. 根据当前定理的第四个结论可知，将 $\theta_1(J_q(n,3))$-特征向量 v of $J_q(n,3)$ 限制到 S 的区组上，得到一个 $\theta_1(\Gamma_S)$-特征向量 v' of S。显然，限制操作不会增大范数，因此我们有 $\|v\|_\infty \geq \|v'\|_\infty$。

□

注 1. 当 q 为 1 时（即对于传统意义上的斯坦纳三元系和约翰逊图），定理 3.5 中的界并不紧，因为我们将在下一节证明，对于任意阶为 n 、参数为 $(1,\Gamma_S)$ 的斯坦纳三元系 S，≤ 5，而 $m(1,J(n,3)) \geq 6$ 对所有 $n \geq 64$ 均成立。

4. 斯坦纳三元系的块图和约翰逊图的处处非零整数特征向量的 L_∞ 范数最小值

在本文余下部分，我们令 $q = 1$，并考虑经典意义上的斯坦纳三元系。

4.1. **约翰逊图中具有第一特征值的处处非零整数特征向量的 L_∞ 范数的最小值**。在本小节中，我们用 (n,k) 表示 n 和 k的最大公约数。

引理*1*. *$J(n,k)$ 的任意 $\theta_1(J(n,k))$ 特征向量都等于 $W^T u$，其中 $u \in U(n)$。如果 $W^T u$ 是 $J(n,k)$ 的一个整数 $\theta_1(n,k)$ 特征向量，那么对于所有 $1 \leq i,j \leq n$，u_i 和 u_j 的小数部分相同。此外，这些小数部分等于 $\frac{r}{s}$，其中 r 和 s 是满足 $0 \leq r < s$ 的某些非负整数，$(r,s) = 1$，且 s 是 (n,k) 的因数。*

证明. 根据定理 3，$J(n,k)$ 的任意 $\theta_1(J(n,k))$ 特征向量都等于 $W^T u$，其中 u 满足 $u \in U(n)$。下面证明对于任意 $i \neq j$，u_i 和 u_j 的小数部分相同。取一组两两不同且不同于 j 的位置 $i_1 = i, i_2 \ldots, i_k$。根据定理的假设，$u_i + u_{i_2} + \ldots + u_{i_k}$ 和 $u_j + u_{i_2} + \ldots + u_{i_k}$ 是整数。因此，$u_i - u_j$ 是整数，且 u_i 和 u_j 的小数部分相同。将这个小数部分记为 α。取 u 中的若干个元素：$u_{i_1} \ldots, u_{i_k}$。我们知道它们的和 $u_{i_1} + \ldots + u_{i_k}$ 是整数（因为 $W^T u$ 是整数向量）。另一方面，该和与 $k\alpha$ 的小数部分相同。因此，α 是有理数，可表示为 $\frac{r}{s}$，其中 r 和 s 是满足 $0 \leq r < s$ 的非负整数，$(r,s) = 1$。此外，我们有 $\frac{kr}{s}$ 是 n 一个整数，因此 s 是 k 的因数。由于 $\sum u_i = 0$, $\frac{nr}{s}$ 是整数，因此 s 是 n 的因数。$i=1$因此，s 是 (n,k) 的因数。

□

命题 5。 如果 $n \geq 2k$，则有 $m(1,\ J(n,\ k)) \leq \frac{n-k}{(n,\ k)} + 1$。

证明。 对于这一陈述，我们取向量

$$u^T = (\frac{1}{(n,k)}, \ldots, \frac{1}{(n,k)}, -\frac{n-1}{(n,k)}),$$

长度为 n，其中 $^{1}{}_{(n,k)}$ 重复 $n-1$ 次。向量 $W^T u$ 有两个不同的值 $^{k}{}_{(n,k)}$ 和 $n\_\frac{n-k}{(n,k)}$。由于 $n - \geq 2k$, 我们有 $\|W^T u\|_\infty = \frac{n-k}{n\ k}{}_{(,)}$。我们看到 $\sum_{i=1} u_i = 0$，并且根据引理1，向量$W^T u$是图 $J(n,k)$ 的 $\theta_1(J(n,k))$-特征向量，且为处处非零整数向量。

□

请注意，在命题 5 中，当 n 增大且作为 k 的函数变化时，界趋于无穷大。不过，对于较小的 n（例如 $n = 2k$），该界可能是紧的。以下陈述针对 k 的奇数情形和偶数情形给出了进一步的上界。

命题6. 设 k 为奇数。则

1. 若 n 为偶数，则 $m(1, J(n,k)) \le k+1$。

2. 若 n 为奇数，则 $m(1, J(n,k)) \le 2k+1$。

证明。 根据引理1，当 $u \in U(n)$时，向量 $W^T u$ 是 $J(n,k)$的 $\theta_1(J(n,k))$-特征向量。1）
对于第一个结论，我们取向量

$$u^T = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1),$$

长度为 n ，其中 $\frac{n}{2}$ 个位置的值为1， $\frac{n}{2}$ 个位置的值为 -1。

2）对于第二个结论，我们取向量

$$u^T = (k+1, -1, \dots, -1, 1, \dots, 1),$$

长度为 n ，其中有 $\frac{n-k-2}{2}$ 个位置的值为 1， $\frac{n+k}{2}$ 个位置的值为 -1，其中 $u_1 = k+1$。□

命题 7. 设 k 为偶数，且 γ 是不能整除 k 的最小正整数。我们有如下结论。

1. 如果 n 能被 γ 整除，那么 $m(1, J(n,k)) \le (\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)k + 1$。

2. 如果 n 不能被 γ 整除，那么 $m(1, J(n,k)) \le (\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(2k + \beta - 1) + 1$，其中 β 是 $n - (k+1)$ 除以 γ 所得的余数。

证明。 根据命题的假设， $n - (\beta + k + 1) = q\gamma$ ，其中 q 和 β 是某些正整数。现在定义向量 $u \in U(n)$。将前 $n - (\beta + k + 1)$ 个位置划分为 q 个大小相同的区组，每个区组的大小为 γ。如果 γ 是奇数，则每个区组由 $\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor$ 个值为 $\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1$ 的位置和 $\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1$ 个值为 $-\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor$的位置组成。如果 γ 是偶数，则每个区组由 $\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor - 1$ 个值为$\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1$ 的位置和 $\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1$ 个值为 $-\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1$ 的位置组成。注意，我们已描述每个区组中全部 γ 个位置的值，且每个区组中各值之和等于 0。现在定义 u 中剩余 $k + \beta + 1$ 个位置的值。我们令一个元素等于 $-(k+\beta)(\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)$，其余 $(k+\beta)$ 个元素均为 $(\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)$。$u$ 所有位置上的值之和等于 0，即 $u \in U(n)$；任意 k 个位置上的值之和都是整数，即 $W^T u$ 是一个只取整数值的特征向量。

下面证明，任意 k 个不同位置上的数值之和都不为 0。如果这些位置中的某个元素为 $-(\beta + k)(\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)$，那么由于 u 中任何其他元素的绝对值都不大于 $\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1$，这些数值之和小于 0。

考虑 γ 为偶数的情形，即 $\gamma = 2l$。取 x 个值为 $l+1$ 的位置，以及 $x \in \{0, 1, \dots, k\}$ 个值为 $-l+1$ 的位置。这些位置上的数值之和为 $lx + x - kl + k + lx - x = 2lx - k(l-1)$，当且仅当

$$2lx = k(l-1).$$

设 l 为奇数。由上面的等式可知， k 能被奇数 l 整除；根据命题条件， k 也能被 2 整除，因此 k 能被 $\gamma = 2l$ 整除，这与 γ 的定义矛盾。若 l 为偶数，则 $l-1$ 为奇数。因此，由上面的等式再次可知， k 应能被 $\gamma = 2l$ 整除，矛盾。

考虑 γ 为奇数的情况，即 $\gamma = 2l+1$。取 x 个位置，其中 $x \in \{0, 1, \dots, k\}$ 的值为 $l+1$，另有 $k - x$ 个位置的值为 $-l$。这些位置上的值之和等于 $lx + x - kl + lx$。若此和等于 0，则 $x(2l+1) = kl$。由于 k 不能被 $\gamma = 2l+1$ 整除，因此此等式不成立。

因此， $W^T u$ 是一个 NZI向量。如果 n 能被 γ 整除，则 $\|W^T u\|_\infty \le (\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)k$。如果 n 不能被 γ 整除，则 $\|W^T u\|_\infty \le (\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(2k + \beta - 1)$。□

在接下来的几个引理中，我们研究 NZI 向量的结构性质，以推导 $m(1, J(n,k))$的下界。

引理 *2.* 设向量 $u \in U(n)$ 至少有 k 个位置取值为 $a+\frac{r}{s}$，且至少有 k 个位置取值为 $-b+\frac{r}{s}$，其中 a、b、r 和 s 为非负整数，且 $b \neq 0$、$0 \leq r < s$、$(r, s) = 1$，s 是 (n, k) 的因数。若 $W^T u$ 是一个 *NZI*向量，则数 $\frac{k(bs-r)}{s(a+b)}$ 不是整数。

证明。取 x 个 u 中取值为 $a+\frac{r}{s}$ 的位置，以及 $k-x$ 个取值为 $-b+\frac{r}{s}$ 的位置。这些值的和等于 $x(a+b)+\frac{kr}{s}-bk$。当且仅当 $x=\frac{(bs-r)k}{s(a+b)}$ 是整数时，这个和才等于 0。□

引理 3. 设 u 是 $U(n)$ 中的一个向量，满足 $W^T u$ 为 *NZI*，且 $\|W^T u\|_\infty + 1 = m(1, J(n,k))$。令 $n > j^2 + 2kj + 3k - j - \frac{j^2}{k}$，其中若 k 为奇数，则 $j = 2k$；若 k 为偶数，则 $j = (\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(2k+\gamma)$。$\gamma$ 是 k的最小非因数正整数。则 u 至少有 k 个位置取相同的正值，且至少有 k 个位置取相同的负值。

证明。若向量 u 有 k 个位置上的值为 0，则 $W^T u$ 中的一个元素为零。因此，u 至少有$n-k+1$ 个位置上的值非零。由命题 6 和 7 可得 $\|W^T u\|_\infty \leq j$，其中若 k 为奇数，则 $j = 2k$；若 k 为偶数，则 $j = (\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(2k+\gamma)$。这里，$\gamma$ 是不能整除 k的最小正整数。另记 x 为取正值的位置数，y 为取负值的位置数。根据证明开头关于u 中非零元素数量的说明，我们有

$$x + y \geq n - k + 1. \tag{1}$$

记 $\frac{j}{k}$ 为 m。根据引理1，向量 u 在所有位置上的小数部分都相同。如果 u 没有 k 个具有相同值的位置，那么对于任意非负的 i，整数部分为 i 的位置数不超过 $k-1$个。因此，整数部分不超过 $\lfloor m \rfloor$的位置数不超过（$\lfloor m \rfloor + 1$）（$k-1$）个。所以，如果 $x >$（$m+2$）（$k-1$）$\geq$（$\lfloor m \rfloor + 2$）（$k-1$），那么至少有 k 个位置具有相同的正值，或者有 k 个位置上的值大于 $\lfloor m \rfloor + 1 > m$。在后一种情况下，我们有 $\|W^T u\|_\infty > mk = j$，这与假设矛盾。类似地，如果 $y >$（$m+2$）（$k-1$），那么至少有 k 个位置具有相同的负值，或者这与范数的极小性矛盾。

我们证明 $n - k + 1 > 2(m+2)(k-1)$。根据引理的条件，我们有:

$$n - k + 1 - 2(m+2)(k-1) = n - k + 1 - 2(\frac{j}{k} + 2)(k-1) >$$

$$j^2 + 2kj + 3k - j - \frac{j^2}{k} - k + 1 - 2j - 4k + \frac{2j}{k} + 4 =$$

$$j^2 - 3j - 2k + 5 + 2kj - \frac{j^2}{k} + \frac{2j}{k} =$$

$$j(j(1 - \frac{1}{k}) - 3 + 2k + \frac{2}{k}) + 5 - 2k$$

注意到 $j \geq 2k \geq 4$，因此

$$j(j(1 - \frac{1}{k}) - 3 + 2k + \frac{2}{k}) + 5 - 2k \geq$$

$$j(2k - 2 - 3 + 2k + \frac{2}{k}) + 5 - 2k \geq j - 2k + 5 > 0.$$

因为 $n - k + 1 > 2(m+2)(k-1)$，所以 x 或 y 大于 $(m+2)(k-1)$。不失一般性，我们假设 $x > (m+2)(k-1)$。如果 y 也大于 $(m+2)(k-1)$，那么引理成立，因此我们考虑以下情形

$$y \leq (m+2)(k-1) \tag{2}$$

详见下文。

鉴于引理1，我们有， u 的正值不小于 $\frac{1}{k}$。结合不等式（1）和（2），可知 u 中所有正元素之和满足

$$\sum_{i=1,\dots,n,u_i>0} u_i \geq \frac{x}{k} \geq \frac{n-k+1-y}{k} \geq \frac{n-k+1-(m+2)(k-1)}{k}. \tag{3}$$

情形1. 若 $y < k$ 我们考虑向量 u中值为负的 y 个位置以及值最小的 $k-y$ 个正值位置。由于 $\sum u_i = 0$ 该和的绝对值等于 $x-k+y$ 个最大正值位置之和。又由于 u 中的每个正值都至少为 $\frac{1}{k}$，因此该和不小于 $\frac{x-k+y}{k} \geq \frac{(n-k+1-y)}{k} = \frac{n-2k+1}{k}$。因此，由于 $n > j^2+2kj+3k-j-\frac{j^2}{k} > jk+2k+1$，而这是根据引理的假设得到的，我们得到

$$\|W^T u\|_\infty > \frac{n-2k+1}{k} > \frac{jk+2k+1-2k+1}{k} = \frac{jk+2}{k} > j,$$

这与结论矛盾。

情形2. 若 $y \geq k$ 我们考虑 u中最小的 k 个负值。这些值的和不大于负值平均值的 k 倍。由于 $\sum_{i=1,\dots,k} u_i = 0$，负值之和的绝对值正数之和也相同。因此，由 (3) 可知，所有负数的平均值小于或等于 $-\frac{(n-k+1-y)}{ky}$，且存在两两不同的 i_1，……，i_k：

$$\sum_{l=1,\dots,k} u_{i_l} \leq -\frac{(n-k+1-y)}{y}. \tag{4}$$

我们证明 $n > (j+1)y + k - 1$。根据引理的假设

$$n > j^2 + 2kj + 3k - j - \frac{j^2}{k} = j(j+2k-1-\frac{j}{k}) + 3k = j(mk+2k-1-m) + 3k = j(mk+2k-2-m) + mk + 3k > j(mk+2k-2-m) + (mk+2k-2-m) + k = (j+1)(m+2)(k-1) + k$$

由 (2) 可知

$$(j+1)(m+2)(k-1) + k \geq (j+1)y + k > y(j+1) + k - 1 \geq \sum_{l=1,\dots,k} u_{i_l} + j \leq -\frac{(n-k+1-y)}{y} + j < 1 + j$$

因此，我们有 $n > (j+1)y + k - 1$，从而由 可知，这与 $\|W^T u\|_\infty \leq j$ 矛盾。

□

我们引入额外记号。令 γ 为不是 k 的因数的最小正整数。用 $T(k)$ 表示数 $j^2 + 2kj + 3k - j - \frac{j^2}{k}$，其中当 γ 为偶数时， $j = (\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(2k+\gamma)$；当 γ 为奇数时，$j = 2k$。

我们还引入几个额外集合和一个数：

$B(n,k) = \{(a,b,r,s) : \frac{(bs-r\ k)}{s\ a+b}$ ( ) 不是整数' 其中 $a,b,r,s \geq 0$ 是整数，$b \neq 0$，$0 \leq r < s, (s,r) = 1, s$ 是 $(n,k)\}$ 的因数，

$$N(n,k) = \min\{\max\{k(a+\frac{r}{s}), k(b-\frac{r}{s})\} : (a,b,r,s) \in B(n,k)\},$$

$$M(n,k) = \{(a,b,r,s) \in B(n,k) : \max\{k(a+\frac{r}{s}), k(b-\frac{r}{s})\} = N(n,k)\}.$$

定理4. 若 $n > T(k)$，则 $m(1, J(n,k)) \geq N(n,k) + 1$。

证明. 根据定理 3，考虑向量 u, $u \in U(n)$，使得 $W^T u$ 是 $J(n,k)$ 的 NZI $\theta_1(J(n,k))$- 特征向量，且 $\|W^T u\|_\infty + 1 = m(1, J(n,k))$。由引理 3 可知，$u$ 有 k 个位置的值为 $a + \frac{r}{s}$，并有 k 个位置的值为 $-b + \frac{r}{s}$，其中 $b \neq 0$，(r,s) =1，$0 \leq r < s, s$ 是 (n,k) 的因数。由引理 2 可知，$\frac{(bs-r\ k}{s\ a+b})$ ( ) 不是整数。因此，$(a,b,r,s) \in B(n,k)$。另一方面，$\|W^T u\|_\infty$ 不小于 $\max\{k(a+\frac{r}{s})\ k(b-\frac{r}{s})\}$，因此，$\|W^T u\|_\infty \geq N(n,k)$。□

推论 *1.* 设 (a,b,r,s) 属于 $M(n,k)$。若 $n > T(k)$ 且 $\frac{(bs-r)\ n}{s\ a+b}$ ( ) 是整数，则 $m(1, J(n,k))$ $=N(n,k)$ $+1$。

证明。 取向量 u，使其有 $\frac{(bs-r)\ n}{s\ a+b}$ () 个位置的值为 $(a+\frac{r}{s})$，以及 $\frac{(as+r)\ n}{s\ a+b}$ () 个位置的值为 ($-b+\frac{r}{s}$)。

向量 $W^T u$ 的范数等于 $\max\{k(a+\frac{r}{s})\ k(b-\frac{r}{s})\} = N(n,k)$。另一方面，由定理4可得 $m(1, J(n,k)) \geq N(n,k)$ $+1$，因此，$m(1, J(n,k))$ $= N(n,k)$ $+1$ □

推论 2. 令 γ 为不整除 k、$n > T(k)$、$(n,\ k) = 1$ 的最小正整数，且 n 能被 γ 整除。我们有

1. *If* $\gamma = 2$ *then* $m(1, J(n,k)) = k+1$.
2. *If* $\gamma > 2$ *then* $m(1, J(n,k)) = (\lfloor\frac{\gamma}{2}\rfloor + 1)k + 1$.

证明。令 u 为 $U(n)$ 中的一个向量，使得 $\|W^T u\|_\infty + 1 = m(1, J(n,k))$。若 $\gamma > 2$，则由于 (n,k) $= 1$，k 为偶数而 n 为奇数，根据命题 7，我们有 $m(1, J(n,k))$ $\leq (\lfloor\frac{\gamma}{2}\rfloor + 1)k + 1$。若 $\gamma = 2$，则 k 为奇数，根据推论的条件，n 为偶数，因此由命题6可得 $m(1, J(n,k))$ $\leq k+1$。由于 (n,k) $= 1$，u 在任意位置上的值的小数部分均为 0，且 $M(n,k)$ 中的任意 (a,b,r,s) 都有 $r = 0, s = 1$。设 (a,b,r,s) 为 $M(n,k)$ 中的一个四元组。我们有 $\frac{bk}{a+b}$ 不是整数，且 $(a+b)$ 不是 k 的因数。因此我们有 $a+b \geq \gamma$。注意，若 $a+b = \gamma$，则 (a,b) $= 1$。事实上，否则有 $\frac{a+b}{(a,b)}$ $< \gamma$，因此 $\frac{bk}{a+b}$ 是整数。由此得到 $(a,b,0,1)$ $\notin B(n,k)$，这与假设矛盾。

另一方面，如果 $a+b = \gamma$，那么 $\max\{a,b\} \geq \lfloor\frac{\gamma}{2}\rfloor + 1$（若 $\gamma = 2$，则 $\max\{a,b\} = 1$）。若 $a+b > \gamma$，则 $\max\{a,b\}$ 也不小于 $\lfloor\frac{\gamma}{2}\rfloor + 1$（在 $\gamma = 2$ 的情况下为 1）。这些下界对任意 $(a,b,0,1)$ $\in M(n,k)$ 都成立，因此 $N(n,k)$ $\geq (\lfloor\frac{\gamma}{2}\rfloor + 1)k$（若 $\gamma = 2$）并且，因此，$m(1, J(n,k))$ $= (\lfloor\frac{\gamma}{2}\rfloor + 1)k + 1$（若 $\gamma = 2$）。□

推论3。若 $n > T(k)$ 则 $m(1,\ J(n,\ k)\ )$ $\geq k+1$。

证明。 假设 $m(1, J(n,k))$ $< k+1$。那么根据定理4，我们有

$$N(n,k) \leq m(1, J(n,k)) - 1 < k,$$

也就是说，存在整数 $a \geq 0$、$b \geq 1$、$r \geq 0$ 以及 (n,k) 的一个因数 s，使得

$$\frac{(bs-r)k}{s(a+b)} \text{ is not an integer,}$$

$$max\{k(a+\frac{r}{s}), k(b-\frac{r}{s})\} < k.$$

后一个不等式意味着 $a = 0$ 和 $b = 1$，结合 s 是 k 的因数这一事实可知，$\frac{(bs-r\ k}{s\ a+b})()$ $= \frac{(bs-r)\ k}{s}$ 是一个整数，矛盾。 □

命题8。 如果 n 是偶数，k 是奇数，且 $n > T(k)$，那么 $m(1, J(n,k))$ $= k+1$。

证明。 由命题6可得 $m(1, J(n,k))$ $\leq k+1$，由推论3可得 $m(1, J(n,k))$ $\geq k+1$。□

定理 5。 若 $n > T(3) = 63$，则有

$$m(1, J(n,3)) = \begin{cases} 4, n \ is \ even \\ 6, n \ is \ odd \ and \ n = 0, 6 \ mod \ 9 \\ 7, otherwise. \end{cases}$$

证明。 设 u 是 $U(n)$ 中的一个向量，使得 $\|W^T u\|_\infty + 1 = m(1, J(n,k))$。

n 为偶数的情形是命题8的一个特例。下文假设 n 为奇数。由命题6可得 $\|W^T u\|_\infty \leq 6$。

1. 假设 u 的元素都是整数。由引理 3 可知， u 中至少有 3 个元素等于 a，且至少有 3 个元素等于 $-b$。若 $a \geq 2$ 或 $b \geq 2$，则可得所需的不等式 $\|W^T u\|_\infty \geq 6$。因此，我们有 $a = 1$ 和 $b = 1$。由于 n 是奇数且 $\sum u_i = 0$， u 中存在一个取偶数值 c 的元素。此值不能是 0、2、-2，否则 u 中会有三个元素之和为零，且向量 $W^T u$ 的元素均为零。因此， $c \geq 4$ 或 $c \leq -4$。这两种情形下，界 $\|W^T u\|_\infty \geq 6$ 均成立。

2. 假设 u 的元素都具有非零小数部分。由引理1可知，该小数部分为 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$，因此 n 必须能被 3 整除。不失一般性，我们可以假设该小数部分等于 $\frac{2}{3}$（否则取向量 $-u$）。由引理 3，向量 u 有 3 个元素取某个正值 $a + \frac{2}{3}$，另有 3 个元素取某个负值 $-b + \frac{2}{3}$。若 $a = 0$，则 b 不能是 1 或 2，否则 u 中有三个元素的和为 0。若 $b \geq 3$，则 $\|W^T u\|_\infty \geq 7$。若 $a \geq 2$，则 $\|W^T u\|_\infty \geq 8$。这两种情况都与 $\|W^T u\|_\infty \leq 6$ 矛盾。因此我们有 $a = 1$，从而有 $\|W^T u\|_\infty \geq 5$。此外，我们有 $b = 1$ 或 $b = 2$，否则 $\|W^T u\|_\infty \geq 7$。

2a. 设 n 被 9 除余 3。我们还回顾一下， n 是奇数，并且 u 中至少有 3 个元素等于 $\frac{5}{3}$，至少有 3 个元素等于 $-b + \frac{2}{3}$，其中 b 为 1 或 2。我们证明 $\|W^T u\|_\infty \geq 6$。

考虑情形 $b = 1$。由于 $\sum u_i = 0$ 和 n 是奇数，存在元素 $\frac{c}{3}$ 属于 u，其中某个偶数 c。若 $c \geq 8$ 或 $c \leq -16$，则 $\|W^T u\|_\infty \geq 6$。若 $c = 2$、-4、-10，则 u 中有三个元素的和为零，矛盾。

考虑情形 $b = 2$。若 u 的所有元素都为 $\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{4}{3}$，则 n 能被 9 整除，但事实并非如此。因此，u 中至少有一个元素不同于 $\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{4}{3}$。若存在一个不小于 $\frac{8}{3}$ 的元素，或一个不大于 $-\frac{10}{3}$ 的元素，或有两个元素等于 $-\frac{7}{3}$，则 $\|W^T u\|_\infty \geq 6$。若向量 u 中有一个元素 $-\frac{1}{3}$，或有两个元素等于 $\frac{2}{3}$，或有两个元素的值分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{7}{3}$，则 u 中有三个元素的和为零。剩下的情形是： u 中的一个元素等于 $\frac{c}{3}$，其中 c 为 2 或 -7，且其他任一元素为 $\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{4}{3}$。记 x 为等于 $\frac{5}{3}$ 的元素个数，记 y 为 u 中等于 $-\frac{4}{3}$ 的元素个数。于是所有元素之和为 $\frac{5x-4y+c}{3}$，其中 $nx + y = n - 1$。由于 $\sum u_i = 0$，我们有 $x = \frac{4n-4-c}{9}$，即 $x = \frac{4n-6}{9}$ 或 $x = \frac{4n+3}{9}$。两种情形下都有 $m = 6$ 模 9，矛盾。由此可知，在 $n = 3$ 模 9 的情形下， $\|W^T u\|_\infty \geq 6$。

2b. 若 $n = 0 \bmod 9$，则取向量

$$u^T = (\frac{5}{3}, \ldots, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots, -\frac{4}{3}),$$

长度为 n，其中 $\frac{5}{3}$ 重复 $\frac{4n}{9}$ 次。因此， $\|W^T u\|_\infty = 5$。

2c. 若 $n = 6 \bmod 9$，则取向量

$$u^T = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots, -\frac{4}{3}),$$

长度为 n，其中 $\frac{5}{3}$ 重复 $\frac{4n-6}{9}$ 次， $-\frac{4}{3}$ 重复 $\frac{5n-3}{9}$ 次，且 $u_1 = \frac{2}{3}$。因此， $\|W^T u\|_\infty = 5$。

□

4.2. 斯坦纳三元系的块图中，具有第一特征值的处处非零整数特征向量的最小 L_∞ 范数。

定理 6. 设 S 是一个阶为 n 的斯坦纳三元系， $n > 7$。若 $n = 1$ 模 4 ，则 $m(1, \Gamma_S) \leq 4$；若 $n = 3$ 模 4 ，则 $m(1, \Gamma_S) \leq 5$。

证明。设 n 满足 $n = 1$模 4。假设 S 是一个斯坦纳三元系，其中所有包含点 1 的三元组为 $\{1, 2, 3\}, \ldots, \{1, n-1, n\}$。我们如下定义向量 u： $u_1 = 0$， $u_i = 1$ （当 $2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ 时），以及$u_i = -1$ （当 $\frac{n+3}{2} \leq i \leq n$ 时）。根据定理 3.3，向量 $W_S^T u$ 是 Γ_S 的一个 $\theta_1(\Gamma_S)$ 特征向量。若 $\{i, j, k\}$ 是 S 的一个三元组，则 $W_S^T u$ 的元素为 $u_i + u_j + u_k$。若 $\{i, j, k\}$ 包含 1，则根据 u 的选取可知，$(W_S^T u)_{\{i,j,k\}}$ 要么为 2，要么为 -2。否则， $u_i + u_j + u_k$ 是三个绝对值为 1 的数之和，因此 $\|W_S^T u\|_\infty \leq 3$。

设 n 使得 $n = 3$ 模 4。不失一般性， $\{1, 2, 3\}$ 是 S 中的一个三元组。向量 u 定义如下： $u_1 = -1$、 $u_2 = 2$、 $u_3 = -3$。我们将根据 S 的结构，在 u 剩余的 n 个位置上安排剩余的 $\frac{n-5}{2}$ 个值 -1 和 $\frac{n-1}{2}$ 个值 1。

我们考虑一个定义在这些顶点上的辅助图，其顶点为点集 $\{4, \ldots, n\}$。边由 S 中包含 2 或 3 的所有三元组（不包括 $\{1, 2, 3\}$）删去点 2 和 3 后得到的点对构成。边标记为“2”或“3”，表示将该点加入这条边（即点对）后构成 S 中一个三元组的点。根据斯坦纳三元系的定义可知，该图是若干偶长度环的并，这些环将 $\{4, \ldots, n\}$ 划分开来；任意两条相邻边的标记（即 2 和 3）均不同。

对于向量 u ，我们将其其余元素（对应辅助图顶点的指标）设为 1，并按如下方式定义 -1。我们选取一个环 $i_1, \ldots, i_{2l}$。在该环中选取一条路径 i_1, i_2, i_3，并设定数值 $u_{i_1} = u_{i_2} = u_{i_3} = 1$。该环中 u 的其余数值交替取 -1 和 1：$u_{i_4} = -1$, $u_{i_5} = 1$, $u_{i_6} = -1$,..., $u_{i_{2l}} = -1$。对于其他任意环 $j_1, \ldots, j_{2m}$，我们将 u 的数值按交替方式设为： $u_{j_{2s+1}} = -u_{j_{2(s+1)}} = 1$，其中 $s = 0, \ldots, m-1$。根据点 $\{4, \ldots, n\}$ 上 u 的取值方式，对于辅助图中任意两个相邻顶点 a, b，都有 $u_a + u_b = 0$ 或 2。

由于 $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$, u 是 K_n的一个（-1）特征向量。现在考虑向量 $W^T u$，根据定理 3.3，它是 Γ_S的 $\theta_1(\Gamma_S)$特征向量。对于 S的一个三元组 $\{i, j, k\}$，满足 $\{i, j, k\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$，我们看到 $u_i + u_j + u_k$ 是若干绝对值为 1 的元素之和（注意， $u_1 = 1$ 和$|u_i| = 1, i = 4 \ldots, n$）。因此， $u_i + u_j + u_k$非零，且其绝对值不超过 3。设 $\{i, j, k\}$是 S的一个三元组，满足 $k = 2$ 或 3，且 $i, j \geq 4$。由于 $u_2 = 2$, $u_3 = -3$ 且 $u_i + u_j$ 为 0 或 2，和 $u_k + u_i + u_j$ 非零，且其绝对值不超过 4。对于 S中剩下的最后一种三元组 $\{1, 2, 3\}$，我们有 $u_1 + u_2 + u_3 = -2$。我们看到 $\|W_S^T u\|_\infty \leq 4$。

□

5. 经典斯坦纳三元系族的处处非零流

本节中，我们采用文献 [1]中的斯坦纳三元系流的术语，而非特征向量的术语。

5.1. 一些经典斯坦纳三元系的流。

引理 4. [3, 引理1.4] 设 S 为一个阶为 n的可分解斯坦纳三元系。若 $n = 1$模4，则它有一个2-流；否则，它有一个3-流。

命题 9. *1.* 设 S 为由长度为 $2^r - 1$的汉明码的重量为三的码字的支撑构成的斯坦纳三元系 $r \geq 4$。那么 S 存在一个3-流，但不存在2-流。

2. 设 S 为由Z_p的拉丁方构造的原始博斯斯坦纳三元系，其阶为 $3p$，其中 p 是奇素数。那么 S 存在2-流或3-流。

证明。 1. 如果 r 为偶数，则已知阶为 $2^r - 1$ 的 Hamming Steiner三元系是可分解的，即其区组被划分为 $\frac{2^r-2}{2}$ 个平行类 [8]。在这种情况下，根据引理 4，可知存在一个 3-流。

当 r 为奇数时，容易看出 2^r 模 6 同余于 2。任意 Hamming Steiner三元系都是循环的，即它具有一个阶等于 S的阶的自同构。根据 [4, 定理 3，6] 如果某个斯坦纳三元系的阶 S模 6 同余于 1，且 S 是循环的，那么存在一个适用于 S 的 3-流。

假设存在一个适用于 Hamming Steiner三元系 S 的 2-流 v，因此 $W_S v = 0$，且 v 的元素为 $+1$ 和 -1。这与 W_S 的任一行恰有 $\frac{n-1}{2} = \frac{2^r-1-1}{2}$ 个 1 这一事实矛盾，因为该数量是奇数。

2. 最近，Colbourn 和 Lusi [11] 证明了通过 Bose方法构造的阶为 $9p$ 的斯坦纳三元系是可分解的。结论由引理 4 得出。□

5.2. **Assmuss-Mattson 构造的流**。我们来考虑 Assmuss-Mattson 构造[6]。给定一个阶为 n、点集为 $\{1,\dots,n\}$ 的斯坦纳三元系 S，以及一个点 i，我们用 i 表示 $\bar{}$ 的数量 $i+n$。对于函数 $\tau\colon S \to \{0,1\}$，我们定义点集为 $\{1,2,\dots,n,\bar{1},\bar{2},\dots,\bar{n},2n+1\}$、阶为 $2n+1$ 的 Assmuss-Mattson Steiner 三元系：

$$\bar{S} = \bigcup_{\{i,j,k\}\in S} P(\{i,j,k\}) \cup \bigcup_{i=1,\dots,n} \{i,\bar{i},2n+1\},$$

其中

$$P(\{i,j,k\}) = \{\{i,j,k\},\{i,\bar{j},\bar{k}\},\{\bar{i},j,\bar{k}\},\{\bar{i},\bar{j},k\}\},$$

if $\tau(\{i,j,k\}) = 0$ and

$$P(\{i,j,k\}) = \{\{\bar{i},j,k\},\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\},\{i,j,\bar{k}\},\{i,\bar{j},k\}\}$$

否则。 $\bar{}$我们的目标是为 S 构造一个零和 5-流，即找到一个 NZI向量 v，使得 $\sum_{T\in\bar{S},\ i\in T} v_T = 0$

对于任意 $i \in \{1,2,\dots,n,\bar{1},\bar{2},\dots,\bar{n},2n+1\}$ 和 $\|v\|_\infty = 4$。

在接下来的论证中，我们需要若干辅助命题。

设 a_1、a_2、a_3 是 $\{1,\dots,n\}$ 中两两不同的元素。我们定义一个实值向量 g，其指标为 $P(\{a_1,a_2,a_3\})$ 中的三元组，并取决于 $\tau(\{a_1,a_2,a_3\})$。若 $\tau(\{a_1,a_2,a_3\}) = 0$，则按如下方式定义 g（其指标为 P 中的三元组）：

$$g_{\{a_1,a_2,a_3\}} = g_{\{a_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}} = 1, g_{\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,a_3\}} = g_{\{\bar{a}_1,a_2,\bar{a}_3\}} = -1.$$

如果 $\tau(\{a_1,a_2,a_3\}) = 1$ 定义

$$g_{\{\bar{a}_1,a_2,a_3\}} = g_{\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}} = -1, g_{\{a_1,a_2,\bar{a}_3\}} = g_{\{a_1,\bar{a}_2,a_3\}} = 1.$$

考察所引入向量的性质。

命题 10。 以下结论对向量 g成立：

$$\sum_{T'\in P(\{a_1,a_2,a_3\}),a_1\in T'} g_{T'} = 2, \tag{5}$$

$$\sum_{T'\in P(\{a_1,a_2,a_3\}),\bar{a}_1\in T'} g_{T'} = -2, \tag{6}$$

$$\sum_{T'\in P(\{a_1,a_2,a_3\}),s\in T'} g_{T'} = 0 \ \textit{for}\ s \in \{a_2,a_3,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}. \tag{7}$$

证明。 该证明可通过直接计算得到。 □

显然，通过直接置换点 a_1、 a_2 和 a_3，可以将命题 10 应用于 a_2 或 a_3，而不是 a_1。

引理 5. 设 S为 $STS(n)$，其中 $n \geq 49$。则存在一个函数 h： $S \to \{1,\dots,n\}$，使得(1) 对于任意 $\{i,j,k\} \in S$， $h(\{i,j,k\}) \in \{i,j,k\}$，

(2) *for any* $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\{T \in S : h(T) = i\}| \geq 4$.

证明。考虑满足引理第一项条件的所有函数组成的集合 A。每个函数都将任意三元组 $T \in S$映射到 T 中的一个点。因此，我们有 $|A| = 3^{\frac{n(n-1)}{6}}$。接下来，计算对于固定点 i_0，不满足引理第二项条件的 A 到函数的数量。显然，对于任意这样的函数 f，$|\{T \in S\colon\ h(T) = i_0\}|$ 等于 0、1、2 或 3。由此可知，这类函数的数量等于

$$R = 2^{\frac{n-1}{2}} 3^{\frac{n(n-1)}{6} - \frac{n-1}{2}} + \binom{\frac{n-1}{2}}{1} 2^{\frac{n-1}{2}-1} 3^{\frac{n(n-1)}{6} - \frac{n-1}{2}} +$$

$$\binom{\frac{n-1}{2}}{2} 2^{\frac{n-1}{2}-2} 3^{\frac{n(n-1)}{6} - \frac{n-1}{2}} + \binom{\frac{n-1}{2}}{3} 2^{\frac{n-1}{2}-3} 3^{\frac{n(n-1)}{6} - \frac{n-1}{2}}.$$

因此，A 中不满足引理第二个条件（至少在一个点上）的函数数量不超过 nR。由此可知，A中同时满足两个条件的函数数量至少为 $3^{\frac{n(n-1)}{6}} - nR$，其值等于

$$2^{\frac{n-1}{2}} 3^{\frac{n(n-1)}{6} - \frac{n-1}{2}} \big((\frac{3}{2})^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{384} n^4 - \frac{1}{128} n^3 - \frac{71}{384} n^2 - \frac{103}{128} n \big).$$

当 $n \geq 49$ 时，该表达式严格为正，证明至此完成。 □

定理 7. 任意阶为 N, $N \geq 99$ 的 *Assmuss-Mattson Steiner* 三元系都存在一个零和5-流。

证明。设阶为 $N = 2n + 1$ 的 $\overline{S}$ 是由阶为 n, $n \geq 49$ 的斯坦纳三元系 S 通过 Assmuss-Mattson 构造得到的，其所用函数为 $\tau\colon S \to \{0, 1\}$。

我们从全零向量 v 开始，该向量以 S 的三元组为索引，并在证明过程中逐步更新。证明结束时，v 将成为斯坦纳三元系 S 的 5-流。考虑集合 $B = \{T \in S\colon\ 1 \in T\}$ 和 $T_0 \in S \backslash B$。不失一般性，设 $B = \{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \dots, \{1,n-1,n\}\}$ 且 $T_0 = \{2,4,6\}$。S 的三元组被划分为以下三个三元组集合：$P(T_0) \cup \bigcup_{T' \in B} P(T')$，$\bigcup_{T' \in S \backslash (T_0 \cup B)} nP(T')$以及 $\bigcup_{i=1}^{n} \{i, \bar{i}, 2n+1\}$。因此，我们在这些集合上定义向量 v。

考虑一个由 $\{T_0\} \cup B$中的三元组索引的辅助向量 w。对于 i、$1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$，甚至对于 $\frac{n-1}{2}$，我们定义 $w_{\{2,4,6\}} = -2$ 和

$$w_{\{1,2i,2i+1\}} = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq \frac{n-1}{4} + 1 \\ -1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 i、$1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ 以及奇数 $\frac{n-1}{2}$，我们定义 $w_{\{2,4,6\}} = -2$ 和

$$w_{\{1,2i,2i+1\}} = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{4} \\ -1, & \frac{n+1}{4} \leq i \leq \frac{n-3}{2} \\ 2, & i = \frac{n-1}{2}. \end{cases}$$

选择 w 意味着，对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{T' \in \{T_0\} \cup B, i \in T'} w(T') \in \{\pm 1, \pm 2\}, \tag{8}$$

$$\sum_{T \in \{T_0\} \cup B} w_T = 0. \tag{9}$$

现在定义 v 在 Assmuss-Mattson递归方法中由 $\{T_0\} \cup B$ 产生的三元组上的元素。对于 $T \in \{T_0\} \cup B$，令 $v_{T'} = w_T$ 对所有 $T' \in P(T)$ 成立。

定义数值 $\alpha_s = \sum_{s\in T' T\in B} v_{T'}$ 对于 $s \in \{1,\dots,n,\bar{1},\dots,\bar{n}\}$。根据定义$T'\in P(T_0)\cup \bigcup_{T\in B} P(T)$ 由 $P(T)$ 可知，对于任意 $i \in T$，点 i 和 $\bar{i}$ 恰好出现在 $P(T)$ 的两个三元组中。由于对于 $T' \in P(T)$， $v(T')$ 相同，因此对于 $i \in \{1,\dots,n\}$，我们有

$$\alpha_i = \alpha_{\bar{i}} = \sum_{T'\in P(T_0)\cup \bigcup_{T\in B} P(T), i\in T'} v_{T'}.$$

由于对于任意 $T' \in S$、 $i \in T'$， $w_{T'}$ 的值在 α_i 中加倍，在 $\alpha_{\bar{i}}$ 中也加倍，利用 (8) 可得：

$$\alpha_i \in \{\pm 2, \pm 4\}. \tag{10}$$

等式 (9) 给出如下结果（注意，到目前为止， v 的一些值仍为零）：

$$\sum_{i\in\{1,\dots,n\}} \alpha_i = 0. \tag{11}$$

根据引理 5，存在一个定义在 S 上的函数 h，使得对于任意 $\{i,j,k\} \in S$、 $h(\{i,j,k\}) \in \{i,j,k\}$，且对于任意 $i \in \{1,\dots,n\}$、 $|\{T \in S\colon\ h(T) = i\}| \geq 4$。任取一个点 $j \in \{2,\dots,n\}$。显然， $\{T_0\} \cup B$ 至多覆盖每个点两次。因此，

$$|M_j| \geq 2,$$

其中 $M_j = \{T \in S \setminus (\{T_0\} \cup B)\colon\ h(T) = j\}$。下一步是应用命题 10，以便在 $T \in M_j$ 的条件下定义 v在 $P(T)$ 和 $P'(T)$ 上的取值。如果 M_j的大小为偶数，则将 M_j分成两个基数相等的集合 M_j^1和 M_j^2。之后，我们按如下方式定义 v 的取值。对于 M_j^1 中的三元组 T，根据 τ 的取值，将 $v_{T'}$ 的取值设为 $+1$；对于 $T' \in P(T)$ 中的所有三元组，将其取值设为 -1，这与命题 10 中向量 g在 $a_1 = j$条件下的取值相同。对于 M_j^2中的三元组 T，将 $v_{T'}$的取值设为 $+1$；对于 $T' \in P(T)$ 中的所有三元组，将其取值设为 -1，这与命题 10 中向量 $-g$在 $a_1 = j$条件下的取值相同。

根据 $g(T')$ 中 $v_{T'}$ 的定义，我们有：

$$\sum_{T'\in P(T): j\in T', T\in M_j} v_{T'} = \sum_{T'\in P(T): j\in T', T\in M_j^1} g_{T'} - \sum_{T'\in P(T): j\in T, T\in M_j^2} g_{T'} =$$

$$\sum_{T\in M_j^1} \sum_{T'\in P(T): j\in T'} g(T') - \sum_{T\in M_j^2,\ T'\in P(T): j\in T'} g(T');$$

考虑到等式（5），且由于 $|M_j^1| = |M_j^2|$，我们可知

$$\sum_{T\in M_j^1} \sum_{T'\in P(T): j\in T'} g(T') - \sum_{T\in M_j^2,\ T'\in P(T): j\in T'} g(T') = \sum_{T\in M_j^1} 2 - \sum_{T\in M_j^2} 2 = 0.$$

对于点 $\bar{j}$，情况也相同，因为我们利用（6）得到如下结果：

$$\sum_{T'\in P(T): \bar{j}\in T', T\in M_j} v_{T'} = \sum_{T\in M_j^1} \sum_{T'\in P(T): \bar{j}\in T'} g(T') - \sum_{T\in M_j^2,\ T'\in P(T): \bar{j}\in T'} g(T') =$$

$$\sum_{T\in M_j^1} -2 + \sum_{T\in M_j^2} 2 = 0.$$

因此，我们有：

$$\sum_{T': T'\in P(T), T\in M_j, j\in T'} v_{T'} = \sum_{T': T'\in P(T), T\in M_j, \bar{j}\in T'} v_{T'} = 0. \tag{12}$$

此外，根据（7），我们看到，任何不同于 j 的点的"投影"均为零。对于任意 $s \in T \cup \{\bar{i} : i \in T\} \setminus \{j, \bar{j}\}$，我们有：

$$\sum_{T':T'\in P(T),T\in M_j,\bar{s}\in T'} v_{T'} = \sum_{T':T'\in P(T),T\in M_j,\bar{s}\in T'} g_{T'} = 0. \tag{13}$$

当集合 M_j 的大小为奇数时，我们将 M_j 分为三个互不相交的子集 M_j^1、M_j^2 和 M_j^3，其大小分别为 $\frac{|M_j|+1}{2}$、$\frac{|M_j|-3}{2}$ 和 1。对于前两个集合，我们分别使用向量 g 和 $-g$ 重复这一过程（如同 M_j 的大小为偶数时的情形）。对于最后那个仅含一个元素的集合，我们使用向量 $-2g$ 做同样的处理。与 M_j 大小为偶数时的情形类似，我们得到等式 (12) 和 (13)。对于集合 M_t，我们对所有其余的 $t \in \{1, \dots, n\} \setminus \{1, j\}$ 重复上述论证。

至此，我们已定义了 v 中由 $\bar{S} \setminus \{\{i, \bar{i}, 2n+1\}, i = 1, \dots, n\}$ 的所有三元组索引的元素，且这些元素均非零。此外，由 (12)、(13) 和 (10)，对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{T'\in\bar{S}\setminus\{\{i,\bar{i},2n+1\},i=1,\dots,n\},i\in\bar{S}} v_{T'} = \sum_{T'\in\bar{S}\setminus\{\{i,\bar{i},2n+1\},i=1,\dots,n\},\bar{i}\in\bar{S}} v_{T'} = \alpha_i \in \{\pm 2, \pm 4\}. \tag{14}$$

完成证明的最后一步是定义 v 在三元组集合上

$$\bigcup_{i=1,2,\dots,n} \{i, \bar{i}, 2n+1\}$$

如下：

$$v_{\{i,\bar{i},2n+1\}} = -\alpha_i \text{ for } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{15}$$

由 (11) 可知

$$\sum_{\{i,\bar{i},2n+1\},l=1,\dots,n} v_{\{i,\bar{i},2n+1\}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0. \tag{16}$$

综上所述，我们得到以下结论。1. v 的所有取值均非零，且绝对值不大于 4。2. 由 (14) 和 (15)，对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$ $\sum_{T'\in\bar{S},\ i\in T'} v_{T'} = \sum_{T'\in\bar{S},\ \bar{i}\in T'} v_{T'} = 0$。3. 由 (16)，等式 $\sum_{T'\in\bar{S},\ 2n+1\in T'} v_{T'} = 0$ 成立。

换言之，v 是 S的一个 5-流。 □

6. Completely regular codes in the block graphs of STSs

设 S 是经典意义下阶为 n 的斯坦纳三元系。以下是 S 的块图中的完全正则码示例。

覆盖半径 $\rho = 1$ 和特征值 $\theta_1(\Gamma)$：构造1。$\{B \in S : i \in B\}$，其中 i 是 $\{1, \dots, n\}$ 中任意一个固定点。构造2。S 的任意一个阶为 $\frac{n-1}{2}$ 的斯坦纳子系统。

构造3。$\{B \in S : i \in B\} \cup S'$，其中 S' 是 S 的任意一个阶为 $\frac{n-1}{2}$ 的斯坦纳子系统，且 i 是 S 中的一个点，但不是 S' 中的点。

覆盖半径 $\rho = 1$ 和特征值 $\theta_2(\Gamma)$：构造4（见命题3）。S 的任意一个1-子设计。覆盖半径 $\rho = 2$：构造5。S 中阶小于 $\frac{n-1}{2}$ 的任意一个斯坦纳子系统。

注2. 实际上，构造5列出了带有$\rho = 2$的块图中的所有完全正则码。例如，可以利用定理4和引理 2] 中的方法证明这一点；该方法运用了这样一个事实：所有这类码都自然地来源于块图的团图顶点子集。这超出了本研究的范围，因此此处不再赘述。

阶为 2^r-1 的射影（汉明）斯坦纳三元系的块图同构于格拉斯曼图 $J_2(r,2)$。这些图中具有 $\rho=1$ 和第一特征值的完全正则码称为Cameron-Liebler 直线类。 [16]对这些对象作了如下刻画：它们是构造1–3或其对偶码。鉴于这一事实适用于最“对称”的斯坦纳三元系，我们提出如下结论：

问题 2. 在阶为 n、 $n\geq 13$ 的斯坦纳三元系块图中，寻找任何其他具有 $\rho=1$ 和第一特征值的完全正则码，或证明不存在此类码。

阶为 13 和 15 的所有斯坦纳三元系均已完成枚举，分别有 2 个和 80 个同构类 [12]。

定理 8. 设 S 是阶为13或15的斯坦纳三元系。那么，在 Γ_S 中具有$\rho=1$ 且特征值为 $\theta_1(\Gamma_S)$ 的所有完全正则码，都是由构造*1–3*得到的码。

证明。 对于给定的阶为 n的斯坦纳三元系，由构造2得到的码的数量等于阶为 $\frac{n-1}{2}$ 的斯坦纳子系的数量。根据 [15] 的一个著名结果，此类子系的数量等于 $2^{n-r}-1$，其中 r 是该斯坦纳三元系的二元秩。回顾一下，秩是由点集上三元组的示性向量张成的子空间的维数。我们看到，由构造2和构造3分别得到的码恰有$(2^{n-r}-1)$和$(2^{n-r}-1)\frac{n+1}{2}$ 个。

我们得出，对于给定的斯坦纳三元系，由构造1、2、3得到的码的数量如下：

$$n+(2^{n-r}-1)(\frac{n+3}{2}). \tag{17}$$

我们使用文献 [21]中介绍的基于整数的计算机搜索，来搜索具有 $\rho=1$的完全正则码。给定交数组，计算机线性规划求解器会输出具有该交数组的完全正则码的数量。对于所有考察的阶为 $n=13$以及15的斯坦纳三元系，无论其秩 r为何，求解器输出的具有特征值$\theta_1(\Gamma_S)$的完全正则码的数量均等于(17)，因此所需结论成立。□

致谢。 作者感谢审稿人认真审阅稿件并提出有益意见，这些意见改进了论文的表述。

参考文献

[1] S. Akbari、G.B. Khosrovshahi、A. Mofidi，设计中的零和流，Jour. of Comb. Designs，**19**:5 (2011)，355–364。[2] S. Akbari、E. Ghorbani、A. Mahmoodi，图的处处非零特征向量，线性与多重线性代数，**61**:2 (2013)，273–279。[3] S. Akbari、A.C. Burgess、P. Danziger、E. Mendelsohn，三元系的零和流，Disc. Math.，**340**:3 (2017)，416–425。[4] S. Akbari、H.R. Maimani、L.P. Majd、I.M. Wanless，斯坦纳三元系的零和流，Disc. Math.，**343**:11 (2020)，112074。[5] I.S.o. Aliev、E. Seiden，斯坦纳三元系与强正则图，组合理论杂志，**6**:1 (1969)，33–39。[6] E.F. Assmuss, Jr.、H.F. Mattson，非等价斯坦纳三元系的数量，J. of Combin. Th.，**1**:3 (1966)，301–305。[7] S.V. Avgustinovich、I.Yu. Mogilnykh，诱导完美着色，Siberian Electronic Mathematical Reports，**8**:1 (2011)，310–316。[8] R. Baker，将 *AG2m(2)* 的平面划分为 *2*-设计，Disc. Math.，**15**:3 (1976)，205–211。[9] M. Braun、T. Etzion、P.R.J. Ostergard、A. Vardy、A. Wassermann，斯坦纳系 *q*-类比的存在性，Forum of Mathematics Pi，**4** (2016)，E7。[10] P.J. Cameron、R.A. Liebler，射影群的战术分解与轨道，Linear Algebra Appl.，**46** (1982)，91–102。[11] C. Colbourn、D. Lusi，构造一个无限博斯三元系族的分解，东南国际组合学、图论与计算会议摘要，3月8–12日，(2021)，http://www.math.fau.edu/combinatorics2021/lusid020921.pdf。[12] F.N. Cole、L.D. Cummings 和 H.S. White，对含*15*个元素的三元系进行完整枚举，《美国国家科学院院刊》，**3** (1917)，197–199。

[13] J. D'haeseleer、F. Ihringer、J. Mannaert、L. Storme，*AG(n,q)* 中的 *Cameron-Liebler k*-集，组合电子期刊，**28**:4 (2021)，P4.11。[14] P. Delsarte，编码理论关联方案的代数方法，飞利浦研究报告增刊，**10** (1973)，1–97。[15] J. Doyen、X. Hubaut、M. Vandensavel，斯坦纳三元系关联矩阵的秩，数学杂志，**163** (1978)，251–259。[16] K. Drudge，射影空间与极空间中的极值集，博士论文，西安大略大学 (1998)。[17] Y. Filmus、F. Ihringer，若干经典关联方案上的布尔一次函数，组合理论杂志A辑，**162** (2019)，241–270。[18] S. Goryainov、D. Panasenko，基于 *AG(n,3)* 的斯坦纳系块图的特征函数，第七届代数图论及其应用会议摘要 (2022)，17。[19] P. Keevash、A. Sah、M. Sawhney，子空间设计的存在性，(2022)，arXiv:2212.00870。[20] C. Maldonado、D. Penazzi，约翰逊图、格拉斯曼图和 *Hamming* 图的格与 *Norton* 代数，arxiv.org:1204.1947 (2012)。[21] I.Yu. Mogilnykh，覆盖半径较小的约翰逊图和格拉斯曼图上的完全正则码，组合电子期刊，**29**:2, 22 (2022)，P2.57。[22] I.Yu. Mogilnykh、K.V. Vorob'ev，几何图中具有最小特征值的完全正则码，Disc. Math.，**346**:7 (2023)，113357。[23] G. Sarkis、S. Shahriari，线性格的零和流，有限域及其应用，**31** (2015)，108–120。[24] W.T. Tutte，对色多项式理论的贡献，加拿大数学杂志，**6** (1954)，80–91。[25] K.V. Vorob'ev，将约翰逊图的特征函数嵌入 *Hamming* 图的特征函数，应用与工业数学杂志，**8** (2014)，136–142。

Evgeny Andreevich Bespalov So
bolev数学研究所，Koptyuga大街4号，
630090，新西伯利亚，俄罗斯电子邮箱：
bespalovpes@mail.ru

Ivan Yurevich Mogilnykh Sobolev数学
研究所，Koptyuga大街4号，630090，
新西伯利亚，俄罗斯电子邮箱：
ivmog84@gmail.com

Konstantin Vasil'evichVorob'ev Sobolev数学研
究所，Koptyuga大街4号，630090，新西伯利亚，
俄罗斯电子邮箱：
konstantin.vorobev@gmail.com