arXiv:2304.00936v1 [math.AT] 3 Apr 2023

复杂度一的等变形式2-环面作用

Vladimir Gorchakov

Abstract. 本文研究流形上的一类特定的 2-环面$\mathbb{Z}_2^k$ 作用，即一般位置的复杂度一作用。我们描述一般位置下等变形式的复杂度一 2-环面作用以及小覆盖情形下受限复杂度一作用的轨道空间。我们观察到，这类作用的轨道空间是拓扑流形。如果该作用是等变形式的，我们证明其轨道空间是一个 $\mathbb{Z}_2$-同调球面。我们研究这类 2-环面作用的一个特定子类：一般位置下，将小覆盖的作用限制到一个指数为 2 的子群上。这样的子群存在当且仅当小覆盖可定向；在这种情况下，我们证明受限 2-环面作用的轨道空间与球面同胚。

1. 引言

设紧环面 $T^k = (S^1)^k$ 有效地作用于一个闭流形 X^{2n}，且不动点集非空且有限。数值 $n-k$ 称为作用的复杂度。复杂度为零的轨道空间研究是托里克拓扑中一个广为人知的课题（见 [**7**]）。在 [**2**], A. Ayzenberg 证明了一般位置下复杂度一作用的轨道空间是拓扑流形。在 [**4**], A. Ayzenberg 和 M. Masuda 描述了一般位置下等变形式的复杂度一环面作用的轨道空间。在 [**3**],A. Ayzenberg 和 V. Cherepanov 描述了非一般位置下的复杂度一环面作用。

类似地，我们可以研究$\mathbb{Z}_2^k$ 作用在流形 X^n上的轨道空间。群$\mathbb{Z}_2^k$ 是 T^k的实数类比，称为2-环面。与环面情形类似，数值$n-k$ 称为作用的复杂度。在 [**20**], ，L. Yu 研究了复杂度为零的等变形式的 2-环面作用的轨道空间。在 [**8**], ，V. Buchstaber 和 S. Terzic 证明了$Gr_{4,2}(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2^3 \cong S^4$ 以及 $Fl_3(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2^2 \cong S^3$ 对于实格拉斯曼流形$G_{4,2}(\mathbb{R})$中的二维平面和 R^3中的完全旗实流形 $Fl_3(\mathbb{R})$ 成立。在 [**15**], ，D. Gugnin 证明了 $T^n/\mathbb{Z}_2^{n-1} \cong S^n$ 对于一种具有孤立不动点的特定作用成立。这些都是复杂度一作用的例子。

2020年 数学主题分类。 主要分类 57S12、57S17、57S25、57N65、57R91；次要分类 57R18、55M35、55R20。本文是在 HSE大学基础研究计划框架下完成的。

本文旨在描述一般位置下复杂度为一的等变形式的 2-环面作用的轨道空间。我们还将描述小覆盖情形下的受限复杂度一作用。

我们先给出预备定义，并陈述主要结果。

设 2-环面 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$有效作用于连通闭光滑流形 $X = X^n$，且不动点集非空。对于该作用的一个不动点 $x \in X^{\mathbb{Z}_2^{n-1}}$，我们有 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 x处的切表示。考虑 $\alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,n} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2^{n-1}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$，它们是 x处切表示的权。若对于任意不动点 x，权 $\alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,n}$中的任意 $n-1$ 个在 $\mathbb{Z}_2$上线性无关，则称该作用处于一般位置。现在我们给出 $\mathbb{R}^n$情形下一般位置作用的坐标描述。

设 G 为 $\mathbb{Z}_2^n$ 的一个子群，由下列形式的元素组成：

$$G = \{(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}_2^n : \Pi_{i=1}^n g_i = 1\}, \tag{1.1}$$

其中 $g_i \in \{-1, 1\}$。由于 $\mathbb{Z}_2^n$ 在 $\mathbb{R}^n$上逐坐标作用，我们在 $\mathbb{R}^n$上得到 G的诱导作用，称为标准复杂度一作用。

Remark 1.1. 若 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用处于一般位置，则它弱等价于标准复杂度一作用，见命题 3.3。

C. Lange 和 M. Mikhailova 在 [12], [17] 中研究了有限群一般表示的轨道空间。根据他们的结果，对于处于一般位置的复杂度一表示，$\mathbb{R}^n/G \cong \mathbb{R}^n$。利用这一结果以及等变形式作用所满足的一个附加条件，我们证明，对于处于一般位置的 X 上的 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$作用，其轨道空间 $Q = X/\mathbb{Z}_2^{n-1}$是拓扑流形。如果 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$作用不处于一般位置，则 Q 是带边界的拓扑流形，这与 V. Cherepanov 在 [10] 中研究的环面情形类似。

$\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 X 上的作用称为等变形式的，如果

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} H^*(X^{\mathbb{Z}_2^{n-1}}; \mathbb{Z}_2) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H^*(X; \mathbb{Z}_2), \tag{1.2}$$

其中，$X^{\mathbb{Z}_2^{n-1}}$ 是 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$作用的不动点集。

Remark 1.2. 如果 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$作用处于一般位置，那么不动点集是有限的，并且该作用是等变形式的，当且仅当 $|X^{\mathbb{Z}_2^{n-1}}| = \dim_{\mathbb{Z}_2} H^*(X;\ \mathbb{Z}_2)$。

Theorem 1. 设 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$作用在 $X = X^n$ 上，且该作用是等变形式的并处于一般位置。那么轨道空间 $Q = X/\mathbb{Z}_2^{n-1}$是一个拓扑流形，并且 $H^*(Q;\ \mathbb{Z}_2) \cong H^*(S^n;\ \mathbb{Z}_2)$。

设 X 是一个小覆盖，$G \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$是$\mathbb{Z}_2^n$ 的一个指数为 2 的子群。那么我们得到 X上复杂度一的受限 G作用。若子群 G 是一个一般位置的二维子环面，则称之为二维子环面；如果该 G作用处于一般位置。在小覆盖的情形下，我们注意到，存在一般位置的二维子环面这一条件等价于小覆盖的可定向性；这一点由 H. Nakayama 和 Y. Nishimura 在 [18]中证明。

Theorem 2. 设 X 是一个小覆盖。当且仅当 X 可定向时，存在一个一般位置的二维子环面。若这样的二维子环面存在，则它是唯一的。

如果一般位置的二维子环面存在，那么轨道空间与球面同胚。

THEOREM 3. 设 $X = X^n$ 是一个可定向小覆盖，且 G 是一般位置的2维子环面。那么，轨道空间 X/G 与 n维球面 S^n同胚。

下面给出一般位置的二维子环面的坐标描述。

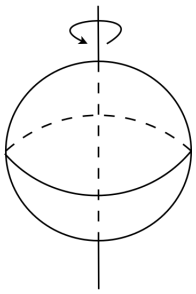
REMARK 1.3. 设 $X = X^n$ 是简单多面体 P上的一个可定向小覆盖，$p = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$是 P的一个顶点，且 $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$是相应的特征向量。将这些特征向量作为 $\mathbb{Z}_2^n$的标准生成元，考虑以下子群:

$$G = \{(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}_2^n : \Pi_{i=1}^n g_i = 1\}.$$

那么， G 就是一般位置的二维子环面。

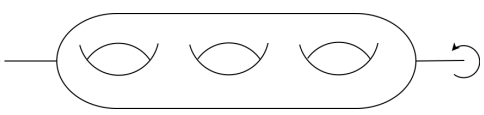
现在我们给出一些复杂度一作用的例子。以下所有例子中的作用都是等变形式的，且处于一般位置。在例 1.5 和 1.6 中，我们得到小覆盖上的限制作用。

EXAMPLE 1.4. 令 $\mathbb{Z}_2$ 通过绕某一轴旋转角度 180° 作用于 S^2 。则$S^2/\mathbb{Z}_2 \cong S^2$。

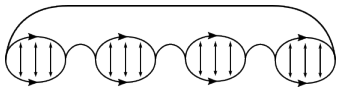


$\mathbb{Z}_2$ 在 S^2上的作用

EXAMPLE 1.5. 更一般地，令 $\mathbb{Z}_2$ 通过绕轴旋转角度为 180° 的方式作用于亏格为 g 的闭可定向曲面 M_g 。那么 $M_g/\mathbb{Z}_2 \cong S^2$。如果 $g = 1$，则这是下一个例子的特例。注意，如果 $g = 0$，那么 $M_0 = S^2$ 不是小覆盖。



$\mathbb{Z}_2$ 在 M_3上的作用



$\mathbb{Z}_2$作用于 M_3的轨道空间

EXAMPLE 1.6. 考虑由映射 $(x,\ y) \to (x,\ -y)$ 在 S^1 上定义的 $\mathbb{Z}_2$-作用。取 n 重直积，便得到在 T^n 上的 $\mathbb{Z}_2^n$-作用。令

$$G = \{(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}_2^n : \Pi_{i=1}^n g_i = 1\}$$

是保向元素构成的指数为 2 的子群。在 [**15**]中，已证明$T^n/G \cong S^n$。

下面的两个例子不是小覆盖。

EXAMPLE 1.7. 令 $\mathbb{Z}_2^4$ 通过标准作用作用于 $\mathbb{R}^4$ 。由此得到 $\mathbb{Z}_2^3$ 在实格拉斯曼流形$G_{4,\ 2}(\mathbb{R})$ 上的有效作用，该流形由 $\mathbb{R}^4$中的二维平面构成。在 [**8**] 中，已证明$G_{4,\ 2}(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2^3 \cong S^4$。

EXAMPLE 1.8. 令 $\mathbb{Z}_2^3$ 通过标准作用作用于 $\mathbb{R}^3$ 。由此得到 $\mathbb{Z}_2^2$ 在实完全旗流形 $Fl_3(\mathbb{R})$上的有效作用。在 [**8**] 中，已证明 $Fl_3(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2^2 \cong S^3$。

现在我们给出定理 3 与***n***值群理论之间一种可能的联系。关于 n值群的定义及其他细节，见 [**6**] 。以下构造可用于生成 n值群。

设 G 为一个群，设 A 为一个有限群，且 $|A| = n$ 与 $\phi :\ A \to Aut(G)$ 是到 G的自同构群的群同态。那么，我们在轨道空间 $X = G/\phi(A)$, 上得到一个取值于 n的群结构，见 [**6**, 定理 1]。

在例子 1。6 中，对于 $n \geqslant 2$，我们在 n-球面 S^n 上得到一个取值于 2^{n-1}的拓扑群结构。V. M. Buchstaber 提出了以下问题。

PROBLEM 1. 定理 3 能否应用于其他小覆盖，从而在 S^n上构造新的取值于 2^{n-1}的群结构例子?

为此，我们需要一个小覆盖 X ，它本身是一个群，并且 $\mathbb{Z}_2^n$ 通过群自同构作用。

NON-EXAMPLE 1.9. 我们知道， $\mathbb{R}P^3$ 与 $SO(3,\mathbb{R})$微分同胚，因此小覆盖 $\mathbb{R}P^3$上存在李群结构。然而， $\mathbb{Z}_2^3$ 并不通过李群自同构作用。事实上，由于 $SO(3,\mathbb{R})$ 的所有自同构都是内自同构，我们有 $Aut(SO(3,\mathbb{R})) \cong SO(3,\mathbb{R})$。 $SO(3,\mathbb{R})$ 中不存在与 $\mathbb{Z}_2^3$同构的有限子群。因此， $\mathbb{Z}_2^3$ 并不通过群自同构作用。

2. 预备知识

本节回顾流形上的群作用和二维环面作用的一些一般事实。关于群作用的主要参考文献是 [**5**]。关于等变形式的二维环面作用的主要参考文献是 [**20**]。

设群 G 有效作用于闭光滑流形 X。本文仅考虑光滑作用。对于点 $x \in X$ ，令 $Stab(x)$ 表示 G 的稳定子子群，Gx 表示 x的轨道。我们按轨道类型定义这一划分

$$X = \bigsqcup_{H \subset G} X^{(H)}. \tag{2.1}$$

这里 $X^{(H)}=\{x\in X:\ Stab(x)=H\}$。

我们将子群 H 的不动点记作 $X^H=\{x\in X:\ Stab(x)\subset H\}$。

设 $x\in X^{(H)}$ 是稳定子子群为 H的一个点。我们可以定义 H 在 x处的 切表示：

$$H\to GL(T_xX/T_xGx).$$

令 V_x 表示 T_xX/T_xGx。关于 G-等变管状邻域，有如下定理。

THEOREM 2.1（切片定理）。 存在一个 G-等变微分同胚，将 $G\times_{Stab(x)}V_x$ 映到轨道 Gx 在 X中的一个 G-不变邻域，并将零截面 $G/Stab(x)$ 映到轨道 Gx。

现在我们回顾 2-环面 $\mathbb{Z}_2^k$的等变形式作用的记号，详情见 [**20**] 。

E. Floyd 有一个经典结果。

THEOREM 2.2 ([**14**]). 对于任意具有有限上同调维数的仿紧 $\mathbb{Z}_2^k$-空间 X ，不动点集 $X^{\mathbb{Z}_2^k}$ 总是满足

$$\dim_{\mathbb{Z}_2}H^*(X^{\mathbb{Z}_2^k};\mathbb{Z}_2)\leqslant\dim_{\mathbb{Z}_2}H^*(X;\mathbb{Z}_2). \tag{2.2}$$

下一个定理说明了何时等式 (2.2) 成立。

THEOREM 2.3 ([**16**]). 等式 (2.2) 成立，当且仅当纤维化 $X\to E\mathbb{Z}_2^k\times_{\mathbb{Z}_2^k}X\to B\mathbb{Z}_2^k$ 的 *Serre*谱序列的 $E_2=E_\infty$ 。

DEFINITION 2.4. 若 2-环面 $\mathbb{Z}_2^k$ 作用于闭光滑流形 X 上，则称该作用关于 $\mathbb{Z}_2$ 是等变形式的，如果等式 (2.2) 成立。

有时也将 Serre谱序列在 E_2 处退化作为等变形式性的定义。根据定理 2.3，这一定义与定义 2.4 等价。等变形式性的记号与环面作用理论中的相应概念类似。

REMARK 2.5. 若不动点集 $X^{\mathbb{Z}_2^k}$ 为有限集，则 2-环面作用是等变形式的，当且仅当

$$|X^{\mathbb{Z}_2^k}|=\dim_{\mathbb{Z}_2}H^*(X;\mathbb{Z}_2). \tag{2.3}$$

这一评注有助于刻画特定 2-环面作用的等变形式性。

DEFINITION 2.6. 设 $\mathbb{Z}_2^n$ 在闭连通光滑流形 X^n 上诱导一个非自由的有效作用。具有此类作用的流形称为 2-环面流形。

L.Yu 根据轨道空间证明了关于 2-环面流形等变形式性的以下判据。

THEOREM 2.7 ([**20**]). 设 X 是一个二维环面流形，其轨道空间为 Q。

(i) X 是等变形式的，当且仅当 X 是局部标准的，且 Q 是模2面无环的。
(ii) X 是等变形式的，且 $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ 由其一次部分生成，当且仅当 X 是局部标准的，且 Q 是一个模2同调多胞体。

3. 一般位置下的复杂度一 2-环面作用

本节证明，某些复杂度一 2-环面作用的轨道空间是拓扑流形。本节将 [2] 推广到 2-环面作用。

设 2-环面 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$有效地作用于连通闭光滑流形 $X = X^n$，且其不动点集非空。

对于该作用的不动点 $x \in X^{\mathbb{Z}_2^{n-1}}$，我们有 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 x处的切表示。考虑 $\alpha_{x,\ 1}, \ldots, \alpha_{x,\ n} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2^{n-1},\ \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$，即 x处切表示的权:

$$T_xX \cong V(\alpha_{x,1}) \oplus \ldots \oplus V(\alpha_{x,1})$$

其中 $V(\alpha_{x,\ 1})$ 是由 $t \cdot y = \alpha_{x,\ 1}(t)y$ 给出的一个一维实表示，其中 $t \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$和 $y \in \mathbb{R}$。

Definition 3.1. 若对于任意不动点 x，权 $\alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,n}$ 中的任意 $n-1$ 个在 $\mathbb{Z}_2$ 上线性无关，则称该作用处于一般位置。

Remark 3.2. 由切片定理可知，一个作用的所有权均非零，当且仅当其不动点集是离散的。因此，若 X 是紧的，则不动点集是有限的。

设一个作用处于一般位置。由于权 $\alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,n} \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$中的任意 $n-1$个线性无关，我们有 $\alpha_{x,1} + \ldots + \alpha_{x,n} = 0$。因此，对于任意 $t \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$，我们有

$$\Pi_{i=1}^n \alpha(t)_{x,i} = 1. \tag{3.1}$$

此外，一般位置条件意味着任意不动点处的切表示都是忠实的。这启发了如下构造。

设 G 是 $\mathbb{Z}_2^n$ 的一个子群，由如下形式的元素组成:

$$G = \{(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}_2^n : \Pi_{i=1}^n g_i = 1\}, \tag{3.2}$$

其中 $g_i \in \{-1,\ 1\}$。由于 $\mathbb{Z}_2^n$ 在 $\mathbb{R}^n$上逐坐标作用，我们在 $\mathbb{R}^n$上得到 G的诱导作用，将其称为标准复杂度一作用。

下面我们将证明，标准复杂度一作用的轨道空间与 $\mathbb{R}^n$同胚。此外，G 是 $\mathbb{Z}_2^n$ 中满足 $\mathbb{R}^n/G \cong \mathbb{R}^n$的唯一指数 2 子群。

设 $\chi\colon \mathbb{Z}_2^{n-1} \to GL_n(\mathbb{R})$ 是一个具有权 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$的一般位置作用。根据以下公式定义 ϕ: $\mathbb{Z}_2^{n-1} \to G\colon\ \phi(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$。由于该一般位置作用是忠实表示，且 (3.1) 成立，因此我们有 ϕ 是一个同构

并且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2^{n-1} & \xrightarrow{\chi} & GL_n(\mathbb{R}) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & \nearrow_{\psi} & \\ G & & \end{array} \tag{3.3}$$

其中， χ 是一般位置作用， ψ 是G 在 $\mathbb{R}^n$ 上的标准复杂度一作用，其作用由坐标给出，即 $g \cdot x = (g_1 x_1, \ldots, g_n x_n)$。因此，我们得到如下结论:

Proposition 3.3. 设$\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用处于一般位置。考虑(3.2)中的 G 。那么，此作用与 G 在$\mathbb{R}^n$上的标准复杂度一作用弱等价，即图式(3.3)可交换。

在下面的命题中，我们证明，一般位置的 2-环面作用的所有稳定子都由旋转生成，也就是说，它们由不动点子空间余维为二的正交变换生成。

Proposition 3.4.考虑 G 在 $\mathbb{R}^n$上的标准复杂度一作用。设$H = Stab(x)$ 是任意 $x \in \mathbb{R}^n$的稳定子子群。那么，轨道空间 $\mathbb{R}^n/H$ 与 $\mathbb{R}^n$同胚。此外， G 是 $\mathbb{Z}_2^n$ 中唯一一个指数为2 且满足$\mathbb{R}^n/G \cong \mathbb{R}^n$的子群。

Proof. 我们来描述点 $x \in \mathbb{R}^n$ 的稳定子 H。对于 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$， 令

$$I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : i \in I \text{ if } x_i = 0\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$$

它表示 x 中零坐标的指标集合。若 $|I| < 2$，则稳定子子群是平凡的，因此我们可以假设 $|I| \geqslant 2$。考虑 $\mathbb{Z}_2^n$ 的以下子群:

$$\mathbb{Z}_2^I = (\mathbb{Z}_2, 1)^I = \{(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}_2^n : g_i \in \mathbb{Z}_2 \text{ if } i \in I, \text{ otherwise } g_i = 1\}. \tag{3.4}$$

我们有 $H = \mathbb{Z}_2^I \cap G$。取 $g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}$ 作为 $\mathbb{Z}_2^I$ 的生成元，我们有$H = \{(g_1, \ldots, g_k) \in \mathbb{Z}_2^I : \prod_1^k g_i = 1\}$。这意味着 H 由旋转生成。由 [**17**, **Thm. A**] 可知，该作用的轨道空间与 $\mathbb{R}^n$同胚。由此定理还可得， $\mathbb{Z}_2^n$ 的任意子群 H ，只要满足 $\mathbb{R}^n/H$ 与 $\mathbb{R}^n$ 同胚，就必须由旋转生成；然而， $G = \{(g_1, \ldots, g_n) : \Pi_{i=1}^n g_i = 1\}$ 是唯一由旋转生成的二阶指数子群。□

Corollary 3.5. 假设 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用处于一般位置。那么，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 的稳定子子群 $Stab(x)$ ，有 $\mathbb{R}^n/Stab(x) \cong \mathbb{R}^n$ 。

Proof. 由于作用处于一般位置，图 (3.3) 可交换。因此，该作用与命题 3.4 中的作用弱等价。□

Remark 3.6. 根据前面的推论，一般位置作用的稳定子子群不可能是任意的。例如，它不可能是 $H = \{(1,1,1,1), (-1,-1,-1,-1)\}$，并且事实上， $\mathbb{R}^4/H$ 同胚于$\mathbb{R}P^3$上的开锥。这个例子说明了子群由旋转生成这一条件的重要性

旋转。所有轨道空间同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的有限群的线性表示的描述可见 [**17**]。

为使前一个推论的全局结论成立，我们需要作用满足以下条件:

(3.5) X^H 的每个连通分支都有一个全局不动点,

其中 $X^H = \{x \in X : H \subset Stab(x)\}$。

下面的引理表明，对于 2-环面的等变形式作用，这一条件成立。

LEMMA 3.7 ([**20**,引理 3。2]). 设紧流形 X 上的 $\mathbb{Z}_2^k$-作用是等变形式的。那么，对于 $\mathbb{Z}_2^k$ 的任意子群 H， X^H 的每个连通分支 N 上由 $\mathbb{Z}_2^k$（或 $\mathbb{Z}_2^k/H$）诱导的作用都是等变形式的，因此 N 有一个 $\mathbb{Z}_2^k$-不动点。

现在我们可以证明以下关于一般位置下复杂度一作用的轨道空间的定理。这是引言中定理 1 的第一部分。

THEOREM 3.8. 设 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$作用于连通闭光滑流形 $X = X^n$。假设该作用处于一般位置，且条件 (3.5) 成立。那么轨道空间$Q = X/\mathbb{Z}_2^{n-1}$是一个拓扑流形。

PROOF. 记 $G = \mathbb{Z}_2^{n-1}$。设 $H = Stab(x)$ 是 X中任意x 的稳定子子群，或等价地，$x \in X^{(H)}$。因此， $x \in N$，其中 N 是 X^H的一个连通分支。由条件 (3.5) 可知， N 有一个全局不动点 x'。根据切片定理，存在一个 G -等变邻域 $U(x')$ ，它是 x' 的邻域，并且 $U(x')$ 与 $T_{x'}X$是G-微分同胚的。由于 H 在 x 处的切表示仅取决于 X^H的一个连通分支，我们可以假设 x靠近 x'，即 $x \in U(x')$。因此，H 是 $\mathbb{R}^n$ 上一个处于一般位置的作用 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$的稳定子子群。根据切片定理，每个轨道都有一个 G-等变邻域 U ，使得 U 与 $G \times_H V_x$是 G-等变同胚的，其中 $V_x = T_xX/T_xGx$。由于轨道 Gx 是离散集，因此 $V_x = T_xX$。因此，由推论 3.5 可得 $U/G \cong T_xX/H \cong \mathbb{R}^n$ 。□

4. 复杂度一的等变形式作用

本节将证明，一般位置下等变形式作用的轨道空间是一个 $\mathbb{Z}_2$-同调球面。首先，我们引入面的概念。

对于 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 X 上的作用，考虑等变滤过

$$\varnothing = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} = X,$$

其中 X_i 是大小至多为 2^i 和 $X_{-1} = \varnothing$的轨道的并集。注意,

$$X_i = \{x \in X : rk(Stab(x)) \geqslant n-1-i\} = \bigsqcup_{rkH \geqslant n-1-i} X^{(H)}$$

且每个 $X^{(H)}$ 都是 X 中若干子流形的不交并。轨道空间 $Q = X/\mathbb{Z}_2^{n-1}$ 上存在一个轨道类型滤过:

$$\varnothing = Q_{-1} \subset Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{n-1} = Q,$$

其中 $Q_i = X_i/\mathbb{Z}_2^{n-1}$且 $Q_{-1} = \varnothing$。

Definition 4.1. 任意一个连通分支的闭包 $Q_i \backslash Q_{i-1}$ 称为秩为 i 的面。对于秩为 i 的面 F，我们定义 $F_{-1} = F \cap Q_{i-1}$。

设 F 是 Q的一个面，考虑商映射 $p : X \to Q$，并将F的原像记为 $X_F = p^{-1}(F)$。设 $G_F \subset \mathbb{Z}_2^{n-1}$是 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$作用在 X_F上的非有效核。那么 X_F 是 X^{G_F}的一个连通分支，因此 X_F 是 X的一个子流形。

Definition 4.2. 设 F 是 Q的一个面。 F 的原像 $X_F = p^{-1}(F)$ 称为对应于 F的面子流形。对于面子流形 X_F，我们定义 $X_{F_{-1}} = X_F \cap X_i$。

在下一个命题中，我们将证明每个 X_F 都是等变形式的 2-环面流形。

Proposition 4.3. 设 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$以等变形式且处于一般位置的方式作用于 X。设 X_F是与秩为 $i < n-1$ 的面 F 对应的面子流形。那么 维数 $X_F = i$，因此 X_F 是具有作用 $\mathbb{Z}_2^{n-1}/G_F$ 的等变形式的 2- 环面流形。

Proof. 设 G_F 是 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 X_F上的作用的非有效核，我们有

$$|G_F| = 2^{n-1-i}, \tag{4.1}$$

因为 $\mathrm{rk}\ F = i$。考虑 $p^{-1}(F^\circ) = \{x \in X_F\colon\ Stab(x) = G_F\}$是 X_F的开子集。设 $x' \in X_F$ 是作用 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 X上的全局不动点。设 $U(x')$ 是 x'的一个 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$-等变邻域，使得 $U(x')$与 T'_xX是 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$-等变微分同胚的。我们有 $p^{-1}(F^\circ) \cap U(x') \cong V$，其中 $V = \{x \in T_{x'}X\colon\ Stab(x) = G_F\}$ 是一个线性子空间，使得对于任意 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$，都有 $x_i = 0$，其中 $i \in I \subset \{1, \ldots, n\}$，也就是说， x 的一些坐标为零。设 $|I| = k$ 为零坐标的数量。 G_F 由旋转生成，因为它是标准复杂度一作用的稳定子子群。因此， G_F包含所有满足以下条件的 $(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}_2^n$：对于所有 $j \in J$， $g_j = -1$，其中 $J \subset I$，且 $|J|$ 为偶数。因此，我们有

$$|G_F| = \binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = 2^{k-1}. \tag{4.2}$$

另一方面，我们有 $|G_F| = 2^{n-1-i}$，因此 $k = n - i$。于是，$\dim X_F = n - k = i$ and $\mathrm{rk}\,\mathbb{Z}_2^{n-1}/G_F = i$。根据引理 3.7，该作用是等变形式的。□

本文中所有上同调群的系数均取为 $\mathbb{Z}_2$。

Corollary 4.4. 对于任意秩为 $i < n-1$ 的面 F，我们有 $H^*(F, F_{-1}) = H^*(D^i, \partial D^i)$.

Proof. 由定理 2.7 可知， F 是模 2 面无环的。因此，

$$H^*(F, F_{-1}) = H^*(D^i, \partial D^i)$$

根据勒夫谢茨对偶。 □

现在我们引 引入用于等变上同调的Atiyah–Bredon–Franz–Puppe序列

$$0 \to H^*_{\mathbb{Z}_2^k}(X) \xrightarrow{i^*} H^*_{\mathbb{Z}_2^k}(X_0) \xrightarrow{\delta_0} H^{*+1}_{\mathbb{Z}_2^k}(X_1, X_0) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \tag{4.3}$$
$$\cdots \xrightarrow{\delta_{k-2}} H^{*+k-1}_{\mathbb{Z}_2^k}(X_{k-1}, X_{k-2}) \xrightarrow{\delta_{k-1}} H^{*+k}_{\mathbb{Z}_2^k}(X, X_{k-1}) \to 0,$$

其中， δ_i 是三元组 $(X_{i+1},\ X_i,\ X_{i-1})$ 的等变上同调长正合序列中的连接同态，而 X_i 是大小至多为 2^i的轨道之并。若 $\mathbb{Z}_2^k$在 X 上的作用是等变形式的，则此序列是正合的。证明见[**1**],[**9**]。环面情形另见 [**13**]。

Theorem 4.5 ([**1**, 定理 **10.2**])。 设 $\mathbb{Z}_2^k$ 在 X 上的作用是等变形式的，则序列(4.3)是正合的。

由此序列的正合性及前一个推论，我们立即得到以下结果:

Proposition 4.6。 设 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$在 X 上的作用是等变形式的且处于一般位置。则对于轨道空间 Q ，有 $H^i(Q、\ Q_{n-2}) = 0$ ，其中 $i < n-1$。

Proof. 简记为 $G = \mathbb{Z}_2^{n-1}$。考虑 **(4.3)** 中的第 i 项，其中 $i \leqslant n-2$:

$$H_G^{*+i}(X_i, X_{i-1}) \cong \bigoplus_{F:\ \dim F = i} H_G^{*+i}(X_F, X_F \cap X_{i-1}) \cong \bigoplus_{F:\ \dim F = i} H^i(F, F_{-1}) \otimes H^*(BG_F).$$

第一个同构由 Mayer–Vietoris序列的等变版本得出，第二个同构则由以下两个事实得出：群 G/G_F 在$X_F \backslash (X_F \cap X_{i-1})$ 上的作用是自由的，以及推论**4.4**。因此， $H_G^{*+i}(X_i,$ $X_{i-1}) = 0$ 对于 $* < 0$ 和 $i \leqslant n-2$。考虑 $* < 0$。由序列 **(4.3)** 的正合性可得$H_G^i(X,$ $X_{n-2}) = 0$ 对于 $i < n-1$。另一方面，由于 G在 $X \backslash X_{n-2}$上的作用是自由的，我们有 $H_G^i(X,\ X_{n-2}) \cong H^i(Q,\ Q_{n-2})$。因此，我们有 $H^i(Q,\ Q_{n-2}) = 0$对于 $i < n-1$。 □

现在我们可以证明引言中的定理 **1**。

Theorem 4.7. 设 $\mathbb{Z}_2^{n-1}$作用于 $X = X^n$ ，且该作用是等变形式的并处于一般位置。那么轨道空间 $Q = X/\mathbb{Z}_2^{n-1}$是一个 $\mathbb{Z}_2$-同调 n-球面，即 $H^*(Q; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(S^n; \mathbb{Z}_2)$。

Proof. 考虑与以下滤过相关联的上同调谱序列

$$\varnothing = Q_{-1} \subset Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{n-1} = Q,$$

其中 $Q_i = X_i/\mathbb{Z}_2^{n-1}$和 $Q_{-1} = \varnothing$:

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(Q_p, Q_{p-1}) \Rightarrow H^{p+q}(Q). \tag{4.4}$$

我们得到

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(Q_p, Q_{p-1}) = \bigoplus_{F: rkF = p} H^{p+q}(F, F_{-1}). \tag{4.5}$$

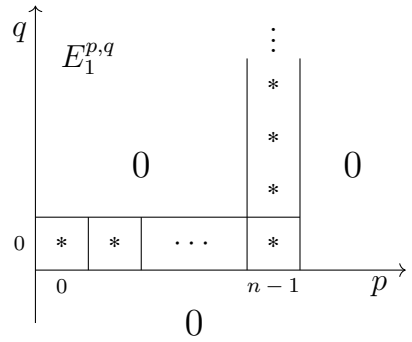


FIGURE 1. 谱序列 (4.4) 的第一页

由推论4.4和命题4.6可知，谱序列第一页中唯一非零的项是第0行 $(E^{p,\ 0\ 1},\ d^1)$ 以及第 $n-1$列$(E^{n-1,\ 1\quad q},\ d^1)$。谱序列 (4.4) 的第一页如图1所示。

我们断言，第 0 行中的微分复形 $(E^{p,0\ 1}, d^1)$ 与 Atiyah-Bredon-Franz-Puppe 序列 (4.3) 的非增广版本的 0 次部分同构

$$0 \to H^0_{\mathbb{Z}_2^{n-1}}(X_0) \xrightarrow{\delta_0} H^1_{\mathbb{Z}_2^{n-1}}(X_1, X_0) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \xrightarrow{\delta_{n-3}} H^{n-2}_{\mathbb{Z}_2^{n-1}}(X_{n-2}, X_{n-3}) \xrightarrow{\delta_{n-2}} H^{n-1}_{\mathbb{Z}_2^{n-1}}(X, X_{n-2}) \to 0.$$

事实上，我们有自然投影映射 $\pi\colon X_G \to X/G$，使得 $\pi((X_i)_G) \subset Q_i$ 对任意 i均成立。因此，π 在 $(X_{i+1}, X_i, X_{i-1})_G$ 和(Q_{i+1}, Q_i, Q_{i-1})的长正合序列之间诱导出一个映射，因此对于任意 i，π^* 与 δ_i 可交换。我们断言，所诱导的上同调映射

$$\pi^* : H^i(Q_i, Q_{i-1}) \to H^i_G(X_i, X_{i-1})$$

是同构。

我们有

$$H^i_G(X_i, X_{i-1}) = \bigoplus_{F\colon rkF=i} H^i_G(X_F, X_{F_{-1}}),$$

$$H^i(Q_i, Q_{i-1}) = \bigoplus_{F\colon rkF=i} H^i(F, F_{-1}).$$

由于 $(X_F,\ X_{F_{-1}})$被 G_F和 $EG = E(G_F)\times E(G/G_F)$,固定，因此我们有 $H^i_G(X_F,\ X_{F_{-1}}) = H^i_{G/G_F}(X_F, X_{F_{-1}}) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^0(BG_F)$。因此，只需证明映射

$$\pi^* : H^i(F, F_{-1}) \to H^i_{G/G_F}(X_F, X_{F_{-1}})$$

是一个同构。我们知道，G/G_F在 $X_F\backslash X_{F_{-1}}$上的作用是自由的，因此对于任意 $x \in F\backslash F_{-1}$，都有 $\pi^{-1}(x) = E(G/G_F)$。于是，根据 Vietoris–Begle 定理的相对版本（见 [19]），可得诱导映射

$$\pi^* : H^i(F, F_{-1}) \to H^i_{G/G_F}(X_F, X_{F_{-1}})$$

是一个同构。由于该作用是等变形式的，Atiyah-Bredon-Franz-Puppe 序列 (4.3) 是正合的。因此，第 0 行中的微分复形 $(E^{p,\ 0\ 1},\ d^1)$是正合的。

因此，我们有 谱序列 (4.4) 的第二页如图 2 所示 .

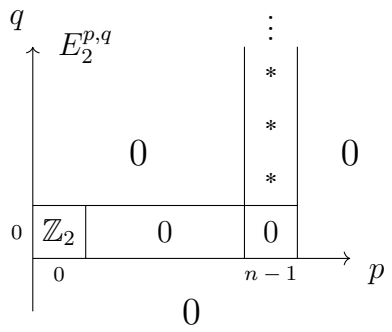


FIGURE 2. 谱序列 (4.4) 的第二页

我们有 $E^{p,q}_{\infty} = 0$ 对于 $0 < p + q \leqslant n - 1$，因此对于 $i \leqslant n - 1$ 有 $H^i(Q) = 0$。另一方面， Q 是一个拓扑流形，因此 $H^i(Q) \cong H^i(S^n)$。□

5. 小覆盖情形下的复杂度一作用

本节回顾小覆盖的定义，并证明引言中的定理 2、定理 3。有关小覆盖的详细内容，请参见 [**11**]。

DEFINITION 5.1. 设 $P = P^n$ 是一个维数为 n 的单纯多面体。P 上的小覆盖是一个光滑流形 $X = X^n$，带有局部标准的 $\mathbb{Z}_2^n$-作用，使得轨道空间 $X/\mathbb{Z}_2^n$ 作为带角流形与单纯多面体 P 微分同胚。

设 $\pi\colon X \to P$ 是 P 上的一个小覆盖。对于 P 的每个面 F，以及每个 $x,\ y \in \pi^{-1}(F^\circ)$，$x$ 和 y 的稳定子群相同，即 $Stab(x) = Stab(y)$。将这个稳定子群记为 G_F。特别地，若 F 是一个面，则 G_F 是秩一子群，因此对于某个 $\lambda(F) \in \mathbb{Z}_2^n$，有 $G_F = \langle \lambda(F) \rangle$。由此我们得到 特征函数

$$\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_2^n,$$

它定义在 P 的所有面的集合 $\mathcal{F}$ 上。我们将 $\lambda(F_i)$ 记为 λ_i。对于余维为 k 的面 F，有 $F = F_1 \cap \cdots \cap F_k$，其中 $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ 是一些面；那么 G_F 是一个秩为 k、由 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 生成的子群。因此，我们得到以下 $(*)$-条件

$(*)$ 设 $F = F_1 \cap \cdots \cap F_k$ 是 P 的任意一个余维为 k 的面。那么， $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 在 $\mathbb{Z}_2^n$ 中线性无关。

反过来，单纯多面体 P 和满足 $(*)$-条件的映射 $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_2^n$ 确定了一个以 P 为底空间的小覆盖 $X(P, \lambda)$。关于 $X(P, \lambda)$ 的构造及其他细节，参见 [**11**]。

THEOREM 5.2 ([**11**, 命题 1.8]). 设 X 是 P 上的一个小覆盖，其特征函数为 $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_2^n$。那么 X 与 $X(P, \lambda)$ 等变同胚。

设 X 是一个小覆盖，设 $G \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$是 $\mathbb{Z}_2^n$ 的一个指数 2 子群，则我们在 X上得到一个受限的 G复杂度一作用。若此 G作用处于一般位置，则称子群 G 为处于一般位置的 2-环面。

REMARK 5.3. 注意，一般位置的二维子环面可能不存在。例如，对于小覆盖 $\mathbb{R}P^2$ over Δ^2 ，不存在一般位置的二维子环面。

然而，我们将看到，如果 X 是可定向小覆盖，那么这样的二维子环面就存在。每个秩为 $n-1$ 的子群 $G \subset \mathbb{Z}_2^n$都由某个非零线性泛函$\xi \in (\mathbb{Z}_2^n)^*$ 通过下式确定： $G = \mathrm{Ker}(\xi)$。关于 G 处于一般位置的判据如下。

PROPOSITION 5.4. 设 $X = X^n$ 为一个小覆盖， $\lambda_i = \lambda(F_i)$ 为特征向量。2-环面 $G = \mathrm{Ker}(\xi : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2)$ 处于一般位置，当且仅当$\xi(\lambda_i) = 1$；换言之，对每个面 $F_i \in \mathcal{F}$，都有 $\lambda_i \notin G$。

PROOF. 如果$p = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$是 P的一个顶点，那么对偶基$\lambda_{i_1}^*, \ldots, \lambda_{i_n}^*$ 中的元素就是对应不动点处 $\mathbb{Z}_2^n$的切表示的权。因此，当且仅当任意$n-1$ 个权 $\lambda_{i_1}^*, \ldots, \lambda_{i_n}^*$ 在 $(\mathbb{Z}_2^n)^*/\langle\xi\rangle$.中线性无关时， $G = \mathrm{Ker}(\xi)$ 在该不动点处处于一般位置。

由于 $\lambda_{i_1}^*, \ldots, \lambda_{i_n}^*$ 是一个基，因此对于 $a_i \in \mathbb{Z}_2$，我们有 $\xi = a_1\lambda_{i_1}^* + \cdots + a_n\lambda_{i_n}^*$ 属于 $\mathbb{Z}_2^n$。因此，对于 $a_i \in \mathbb{Z}_2$，我们有 $a_1\lambda_{i_1}^* + \cdots + a_n\lambda_{i_n}^* = 0$ 属于 $(\mathbb{Z}_2^n)^*/\langle\xi\rangle$。任意$n-1$ 个权 $\lambda_{i_1}^*, \ldots, \lambda_{i_n}^*$ 在 $(\mathbb{Z}_2^n)^*/\langle\xi\rangle$ 中线性无关，当且仅当所有 a_i都非零，也就是说，对于每个 i， $a_i = 1$ 。最后一个陈述等价于对所有 i_k， $\xi(\lambda_{i_k}) = 1$ 。□

COROLLARY 5.5. 如果 $G \subset \mathbb{Z}_2^n$ 处于一般位置，那么对于每个 $x \in X$，都有 $Stab(x) \nsubseteq G$.

PROOF. 事实上，Stab(x) 由某个 λ_i 生成，其中 i。 □

REMARK 5.6. 从证明中可以看出，只存在一个一般位置的二维子环面。若选取一个顶点 $p = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$，则相应的特征向量$\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$是 $\mathbb{Z}_2^n$ 的一组基。将这些向量作为 $\mathbb{Z}_2^n$ 的生成元，可得

$$G = \{(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}_2^n : \Pi_{i=1}^n g_i = 1\}$$

采用乘法记号。

命题 5.4 中的条件与 H.Nakayama 和 Y. Nishimura 的以下结果有关。

THEOREM 5.7 ([**18**, Thm.1.7]). 小覆盖 $X = X^n$ 可定向，当且仅当存在 $\xi \in (\mathbb{Z}_2^n)^*$，使得对于每个面 $F_i \in \mathcal{F}$，都有 $\xi(\lambda_i) = 1$。

由此结果可得引言中的定理 2。

COROLLARY 5.8. 设 X 是一个小覆盖。当且仅当 X 可定向时，存在一个处于一般位置的2维子环面。

现在我们可以证明引言中的定理 3。

THEOREM 5.9. 设 $X = X^n$ 是一个上的可定向小覆盖，设 G 是处于一般位置的 2-子环面。那么，轨道空间 X/G 同胚于 n 维球面 S^n。

PROOF. 设 $Q = X/G$ 是 G 作用的轨道空间，设 $P = X/\mathbb{Z}_2^n$ 是 $\mathbb{Z}_2^n$ 作用的轨道空间。根据小覆盖的定义， P 是一个单纯多面体，且 $\dim P = n$。注意到 $P = Q/(\mathbb{Z}_2^n/G)$，我们有商映射

$$p : Q \to Q/(\mathbb{Z}_2^n/G).$$

若 $x \in P$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}_2^n$ 轨道，即 x 位于 P 的内部，则 $p^{-1}(x) = \mathbb{Z}_2$。否则，根据推论 5.5，存在 $t \in Stab(x)$ 使得 $t \notin G$。因此，若 x 的 $\mathbb{Z}_2^n$ 稳定子群非平凡，即 x 位于 P 的边界上，则它是 $\mathbb{Z}_2^n/G$ 作用的不动点。因此，对于 $x \in \partial P$，我们有 $p^{-1}(x)$ 是一个单点。由于 P 是可缩的，映射p: $Q \to Q/(\mathbb{Z}_2^n/G)$ 在 $Q/(\mathbb{Z}_2^n/G) = P$ 的内部上有截面。因此，我们有

$$Q \cong P \times \mathbb{Z}_2/\sim$$

其中 $(x, 1) \sim (x, -1)$ 若 $x \in \partial P$。由于 P与 n圆盘 D^n同胚，因此我们有

$$Q \cong D^n \sqcup D^n/\sim \cong S^n,$$

这就证明了该结论。 □

致谢

作者谨向导师 A. A. Ayzenberg 致谢，感谢他引领作者进入托里克拓扑领域，并在本研究期间给予帮助和指导；感谢 T. E. Panov 就小覆盖问题进行有益的讨论。作者还要感谢 Eva Vlasova 的支持以及为本文绘制插图。

参考文献

[1] C. Allday, M. Franz, V. Puppe, 正特征下等变上同调中的合冲, Forum Math. 33 (2021), 547-567[2] A. Ayzenberg, 复杂度一环面作用及其局部性质, Proc. of the Steklov Institute of Mathematics 302:1 (2018), 16–32.[3] A. Ayzenberg, V. Cherepanov, 非一般位置下的复杂度一环面作用, Osaka J. Math. 58(4): 839-853 (2021).[4] A. Ayzenberg, M. Masuda, 等变形式的环面作用的轨道空间, 预印本: arXiv:1912.11696.[5] G. E. Bredon, 紧变换群导论, Pure and Applied Mathematics V.46 (1972).[6] V. M. Buchstaber, *n*值群：理论与应用, Mosc. Math. J., 6:1 (2006), 57–84[7] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, 托里克拓扑, Amer. Math. Soc., 2015.[8] V. M. Buchstaber, S. Terzic, 在……上的典范作用的拓扑与几何 T^4 在复格拉斯曼流形 $G(4,\ 2)$ 以及复射影空间 CP^5, Mosc. Math. J., 2016, volume 16.[9] S. Chaves “二维环面作用及具有相容对合的环面作用的等变上同调” (2020). 电子学位论文库. 7049. 网址: https://ir.lib.uwo.ca/etd/7049

[10] V. Cherepanov, *Hessenberg*簇上环面作用的轨道空间, Sb. Math. 212:12 (2021), 115–136[11] M. Davis, T. Januszkiewicz, 凸多面体、*Coxeter*轨形与环面作用，Duke Math. J. 62:2 (1991), 417–451. [12] M. A. Mikhailova, “关于由伪反射生成的有限群作用下的商空间”, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 48:1 (1984), 104–126; Math. USSR-Izv., 24:1 (1985), 99–119[13] M. Franz, V. Puppe, 等变形式化空间的正合列。, 加拿大皇家学会数学科学院会刊 33 (2011), 1-10[14] E. Floyd, 关于周期映射及相关空间的欧拉示性数, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 138–147.[15] D. Gugnin, 流形与*nH*空间的分歧覆盖。Funct. Anal. Appl. 53(2), 68–71 (2019)[16] W. Y. Hsiang, 拓扑变换群的上同调理论. 数学及其边界领域成果 85 (Springer, New York, 1975).[17] C. Lange, 何时轨形的底层空间是流形？, Trans. Amer. Math. Soc. **372**(2019), no. 4, 2799–2828.[18] H. Nakayama, Y. Nishimura, 小覆盖的可定向性与单多面体的着色, Osaka J. Math. 42(1): 243-256.[19] E. Sklyarenko, 层论在一般拓扑学中的若干应用, Uspekhi Mat. Nauk, 19:6(120) (1964), 47–70; Russian Math. Surveys, 19:6 (1964), 41–62.[20] L. Yu, 关于等变形式的*2*-环面流形, 预印本：arXiv:2202.06347。

Faculty of computer science, Higher School of Economics电子邮件地址: vyugorchakov@gmail.com