arXiv:2304.00937v1 [math.CO] 3 Apr 2023

关于路因子临界可避免图的一些存在性定理

Sizhong Zhou[1*]、Hongxia Liu[2]1. 江苏科技大学科学学院，江苏镇江 212100，中国 2. 烟台大学数学与信息科学学院，山东烟台 264005，中国

摘要

若生成子图 F of G 的每个连通分支都是阶至少为 2 的路，则称其为路因子。设 $k \geq 2$ 为一个整数。$P_{\geq k}$-因子是指 G 的一个路因子，其中每个连通分支至少有 k 个顶点。若对于任意 $e \in E(G)$，G都有一个避开 e的 $P_{\geq k}$-因子，则称图 G 为 $P_{\geq k}$-因子可避免图。若对于任意满足 $|W| = n$的 $W \subseteq V(G)$，$G-W$都是 $P_{\geq k}$-因子可避免图，则称图 G 为 $(P_{\geq k}, n)$-因子临界可避免图。换言之，若对于任意满足 $|W| = n$ 的 $W \subseteq V(G)$ 以及任意 $e \in E(G-W)$，$G-W-e$ 都含有一个 $P_{\geq k}$-因子，则称 G 为 $(P_{\geq k}, n)$-因子临界可避免图。本文证明：(i) 若一个 $(n+r+2)$-连通图 G 满足 $I(G) > \frac{n+r+3}{2}$ ( )，则它是 $(P_{\geq 2}, n)$-因子临界可避免图；(ii) 若一个 $(n+r+2)$-连通图 G 满足 $t(G) > \frac{n+r+2}{2}$ ( )，则它是 $(P_{\geq 3}, n)$-因子临界可避免图；(iii) 若一个 $(n+r+2)$-连通图 G 满足 $I(G) > \frac{n+3}{(r+2)}$ $2(r+2)$，则它是 $(P_{\geq 3}, n)$-因子临界可避免图；其中 n 和 r 是两个非负整数。

Keywords: 图；坚韧度；孤立坚韧度；连通度；$(P_{\geq k}, n)$-因子临界可避免图。

(2020年) 数学主题分类：05C70, 05C38, 90B10

1 引言

本文仅讨论有限、无向简单图。我们用 $G = (V(G) E(G))$ 表示一个图，其中 $V(G)$ 表示 G 的顶点集，$E(G)$ 表示 G 的边集。对于 G 的顶点 x，x 在 G 中的度记为 $d_G(x)$，即与 x 在 G 中相邻的顶点数。对于 G 的顶点子集 X，$G[X]$ 表示由 X 在 G 中导出的诱导子图，$G-X$ 表示从 G 中删除 X 中所有顶点后得到的子图。对于 G 的边子集 E'，$G-E'$ 表示从 G 中删除 E' 中所有边后得到的子图。对于顶点（或边）子集 Q，若 $Q = \{u\}$，为方便起见，我们用 $G-u$ 表示 $G-Q$。令 $i(G)$、$\omega(G)$ 和 $\kappa(G)$ 分别表示 G 的孤立顶点数、连通分支数和点连通度。我们分别用 K_n 和 P_n 表示完全图和具有 n 个顶点的路。设 G_1 和 G_2 是两个图。那么，联图 $G_1 + G_2$ 表示顶点集为 $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$、边集为

$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}.$$

*通讯作者。电子邮件地址：zsz cumt@163.com (S. Zhou)

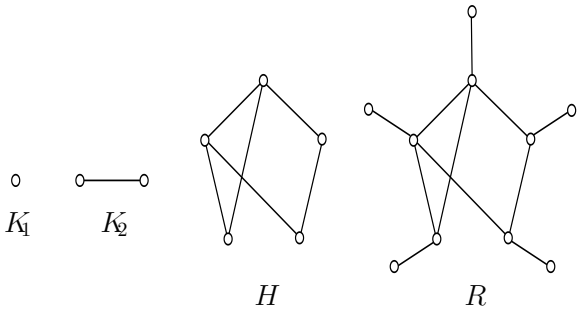


图 1：因子临界图 H 及由 H得到的太阳图 R 。

图 G 的坚韧度记为 $t(G)$，最早由 Chv´atal [3] 引入。若 G 不是完全图，则

$$t(G) = \min\left\{\frac{|X|}{\omega(G-X)} : X \subseteq V(G), \omega(G-X) \geq 2\right\};$$

否则， $t(G) = +\infty$。

图 G的孤立坚韧度，记作 $I(G)$，最早由 Yang、Ma 和 Liu [19]引入。若 G 不是完全图，则

$$I(G) = \min\left\{\frac{|X|}{i(G-X)} : X \subseteq V(G), i(G-X) \geq 2\right\};$$

否则， $I(G) = +\infty$。

G 的生成子图 F 称为路因子，如果 F 的每个连通分支都是阶至少为 2 的路。设 $k \geq 2$ 为整数。 G 的 $P_{\geq k}$-因子是指一种路因子，其中每个连通分支至少有 k 个顶点。

Las Vergnas [14] 给出了图存在 $P_{\geq 2}$-因子的充要条件。

定理 1 ([14])。图 G 存在 $P_{\geq 2}$-因子，当且仅当 G 满足

$$i(G-X) \leq 2|X|$$

对于 G 的每个顶点子集 X 。

若图 H 的任意一个具有 $|V(H)|-1$ 个顶点的导出子图都存在完美匹配，则称 R 为因子临界图。若 $R = K_1$、 $R = K_2$ 或 R 是一个至少含有三个顶点的因子临界图 H 的冠积，则称图 R 为太阳图；具体而言， R 由 H 添加一个新顶点 $z = z(y)$，并对任意 $y \in V(H)$ 添加一条连接该新顶点与 H 的新边 yz 而得到（图 1，由 Kano、Lu 和 Yu [12]给出）。容易看出， $d_R(z) = 1$。特别地，顶点数至少为六的太阳图称为大太阳图。令 $sun(G)$表示 G的太阳分支数。事实上， $i(G) \leq sun(G) \leq \omega(G)$。

Kaneko [9] 给出了图存在 $P_{\geq 3}$-因子的充要条件。Kano、Katona 和 Kir´aly [10]给出了一个简洁的证明。

定理 2 （ [9,10]）。图 G 含有一个 $P_{\geq 3}$-因子，当且仅当 G 满足

$$sun(G-X) \leq 2|X|$$

对于 G 的每个顶点子集 X 。

近年来，关于路径因子的许多结果陆续得出。Kelmans [13] 提出了一些关于无爪图中路径因子存在性的结果。Ando 等人 [1]推导出了无爪图具有路径因子的一个最小度条件。Kano、Lee 和 Suzuki [11] 证实，每个至少有八个顶点的连通三次二部图都含有一个 $P_{\geq 8}$-因子。Egawa 和 Furuya [4] 给出了图具有路径因子的若干充分条件。Kano、Lu 和 Yu [12] 提出了一个关于 $P_{\geq 3}$-因子存在性的充分条件。Wu [15], Zhou 等人 [25, 28, 31–33] 推导出了图具有满足给定性质的 $P_{\geq 3}$-因子的若干充分条件。Gao、Wang 和 Chen [8] 提出了图中 $P_{\geq 3}$-因子存在性的若干紧界。Dauer、Katona、Kratsch 和 Veldman [2], Gao、Guirao 和 Chen [5], Liu 和 Zhang [16] 建立了坚韧度与图因子之间的一些关系。Gao 和 Wang [7], Gao、Liang 和 Chen [6] 建立了孤立坚韧度与图因子之间的一些关系。Zhou [21–24, 26], 、Zhou 和 Liu [29], 、Zhou、Xu 和 Sun [30], 、Wang 和 Zhang [17, 18], 以及 Yuan 和 Hao [20]得出了更多关于图因子的结果。

如果对于任意 $e \in E(G)$， G 都有一个避开e的 $P_{\geq k}$-因子，则称图 G 为 $P_{\geq k}$-因子可避免图。如果对于任意满足 $|W| = n$的 $W \subseteq V(G)$，$G - W$是一个 $P_{\geq k}$-因子可避免图，则称图 G为 $(P_{\geq k}, n)$-因子临界可避免图。换言之，如果对于任意满足 $|W| = n$的$W \subseteq V(G)$以及任意 $e \in E(G - W)$， $G - W - e$包含一个 $P_{\geq k}$-因子，则称 G 是 $(P_{\geq k}, n)$-因子临界可避免的。

Zhou [27] 获得了图成为 $(P_{\geq k}, n)$-因子临界可避免图的一些坚韧度或孤立坚韧度条件，其中 $k = 2$, 3。

定理 3 ([27])。一个 $(n + 2)$-连通图 G 是 $(P_{\geq 2}, n)$-因子临界可避免的，当且仅当其孤立坚韧度 $I(G) > \frac{n+2}{3}$，其中 $n \geq 0$ 为整数。

定理 4 ([27])。若图 G 是 $(n + 2)$-连通图，且其坚韧度$t(G) > \frac{n+1}{2}$，其中 $n \geq 0$ 为整数，则它是 $(P_{\geq 3}, n)$-因子临界可避免图。

定理 5 ([27])。若图 G 是 $(n + 2)$-连通图，且其孤立坚韧度 $I(G) > \frac{n+3}{2}$，其中 $n \geq 0$ 为整数，则它是 $(P_{\geq 3}, n)$- 因子临界可避免图。

本文将继续研究 $(P_{\geq k}, n)$-因子临界可避免图，并根据坚韧度和孤立坚韧度，推导出关于 $(P_{\geq k}, n)$-因子临界可避免图的另外三个更一般的结果，详见第 2 节和第 3 节。

2 $(P_{\geq 2}, n)$-因子临界可避免图

本节提出利用孤立坚韧度作为图成为 $(P_{\geq 2}, n)$-因子临界可避免图的充分条件，这是对 $n \geq 1$的定理 3 的改进。

定理 6. 设 n 和 r 为两个非负整数，且 G 是一个 $(n + r + 2)$-连通图。若其孤立坚韧度 $I(G) > \frac{n+r+3}{2}$ $_{r+2}$ $()$，则 G 是 $(P_{\geq 2}, n)$-因子临界可避图。

证明。 显然，定理 6 对完全图成立。接下来，假设 G 不是完全图。令 $H = G - W - e$为任意 $W \subseteq V(G)$，其中 $|W| = n$，且 $e \in E(G - W)$。只需证明 H 有一个 $P_{\geq 2}$-因子。假设 H 没有 $P_{\geq 2}$-因子。由定理 1 可得

$$i(H - X) \geq 2|X| + 1 \tag{1}$$

对于某个 $X \subseteq V(H)$。

由于 G 是 $(n + r + 2)$-连通的，因此 H 是 $(r + 1)$-连通的。

断言 1. $|X| \geq r+2$.

证明。 如果 $|X|=0$，那么由 (1) 可得 $i(H) \geq 1$，这与 H 是 $(r+1)$-连通的矛盾。接下来，我们讨论 $1 \leq |X| \leq r+1$。

根据 (1)，我们得到 $i(H-X) \geq 2|X|+1 \geq 3$。因此，我们有

$$i(G-W-X) \geq i(G-W-X-e)-2 = i(H-X)-2 \geq 3-2 = 1,$$

这意味着 $G-W-X$ 中存在一个孤立顶点 v，即 $d_{G-W-X}(v)=0$。结合 $1 \leq |X| \leq r+1$，我们得到

$$d_G(v) \leq d_{G-W-X}(v)+|W|+|X| = 0+n+|X| \leq n+r+1,$$

这与 G 是 $(n+r+2)$-连通的矛盾。因此， $|X| \geq r+2$。命题1得证。 □

事实上， $i(G-W-X-e) \geq i(G-W-X) \geq i(G-W-X-e)-2$。下面的证明分为三种情况。

情形 1. $i(G-W-X) = i(G-W-X-e)-2$.

在这种情况下，显然存在一个 K_2 分支位于 $G-W-X$ 中，且满足 $e \in E(K_2)$。令$u \in V(K_2)$。由 (1) 和断言 1 可推得

$$\begin{aligned} i(G-W-X-u) &= i(G-W-X)+1 = i(G-W-X-e)-2+1 \\ &= i(H-X)-1 \geq 2|X|+1-1 = 2|X| \\ &\geq 2(r+2) \geq 4, \end{aligned}$$

因此

$$I(G) \leq \frac{|W \cup X \cup \{u\}|}{i(G-W-X-u)} \leq \frac{n+|X|+1}{2|X|} = \frac{1}{2}+\frac{n+1}{2|X|} \leq \frac{1}{2}+\frac{n+1}{2(r+2)} = \frac{n+r+3}{2(r+2)},$$

这与 $I(G) > \frac{n+r+3}{2(r+2)}$() 矛盾。——

情形2. $i(G-W-X) = i(G-W-X-e)-1$.

在这种情况下，存在一个顶点 u，使得 $d_{G-W-X}(u)=1$。令 v 为 $G-W-X$ 中与 u 相邻的唯一顶点，并且 $e=uv$。类似于情形 1 的讨论，我们容易推得

$$i(G-W-X-v) \geq 2|X|+1 = 2(r+2)+1 \geq 5,$$

因此

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|W \cup X \cup \{v\}|}{i(G-W-X-v)} \leq \frac{n+|X|+1}{2|X|+1} = \frac{1}{2}+\frac{n+\frac{1}{2}}{2|X|+1} \\ &< \frac{1}{2}+\frac{n+1}{2|X|} \leq \frac{1}{2}+\frac{n+1}{2(r+2)} = \frac{n+r+3}{2(r+2)}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) > \frac{n+r+3}{2(r+2)}$() 矛盾。——

情况 3. $i(G-W-X) = i(G-W-X-e)$.

根据 (1)，我们得到

$$I(G) \leq \frac{|W \cup X|}{i(G-W-X)} = \frac{n+|X|}{i(G-W-X-e)} = \frac{n+|X|}{i(H-X)} \leq \frac{n+|X|}{2|X|+1}. \tag{2}$$

若 $n=0$，则由 (2) 可得

$$I(G) \leq \frac{|X|}{2|X|+1} < \frac{1}{2},$$

这与 $I(G) > \frac{r+3}{2\,r+2()} > \frac{1}{2}$ 矛盾。 –

若 $n \geq 1$，则由 (2) 和断言 1 可得

$$I(G) \leq \frac{n+|X|}{2|X|+1} = \frac{1}{2} + \frac{n-\frac{1}{2}}{2|X|+1} < \frac{1}{2} + \frac{n}{2|X|} \leq \frac{1}{2} + \frac{n}{2(r+2)} = \frac{n+r+2}{2(r+2)},$$

这与 $I(G) > \frac{n+r+3}{2\,r+2\,()}$ 矛盾。定理 6 的证明至此完成。 □

注 1. 接下来，我们证明定理 6 中关于 $I(G)$ 的条件是尖锐的。

设 $G = K_{n+r+2} + ((2r+3)K_1 \cup K_2)$，其中 n 和 r 是两个满足 $n \geq r+1$ 的非负整数。显然，G 是 $(n+r+2)$-连通的，且 $I(G) = \frac{n+r+3}{2\,r+2\,()}$。令 $W \subseteq V(K_{n+r+2}) \subseteq V(G)$，其中 $|W| = n$，且 $e \in E(K_2)$。于是 $G - W - e = K_{r+2} + ((2r+5)K_1)$。令 $X = V(K_{r+2}) \subseteq V(G-W-e)$。则有

$$i(G-W-e-X) = 2r+5 > 2(r+2) = 2|X|.$$

根据定理 1，$G-W-e$ 没有 $P_{\geq 2}$-因子。因此，G 不是$(P_{\geq 2}, n)$-因子临界可避图。

注 2. 接下来，我们说明定理 6 中关于$(n+r+2)$-连通的条件是最佳的。

设 $G = K_{n+r+1} +((2r+1)K_1 \cup K_2)$，其中 n 和 r 是两个非负整数，且满足 $n \geq r$。显然，G 是$(n+r+1)$-连通的，并且 $I(G) = \frac{n+r+2}{2r+2} = \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2\,r+1\,()} > \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2\,r+2\,()} = \frac{n+r+3}{2\,r+2\,()}$。设$W \subseteq V(K_{n+r+1}) \subseteq V(G)$，其中 $|W| = n$ 且 $e \in E(K_2)$。那么 $G - W - e = K_{r+1} + ((2r+3)K_1)$。设$X = V(K_{r+1}) \subseteq V(G-W-e)$。于是我们得到

$$i(G-W-e-X) = 2r+3 > 2(r+1) = 2|X|.$$

根据定理 1，$G-W-e$ 没有 $P_{\geq 2}$-因子。因此，G 不是（$P_{\geq 2}, n$）-因子临界可避免图。

3 $(P_{\geq 3}, n)$-因子临界可避免图

我们首先验证以下引理。

引理 1. 设 n 和 r 为两个非负整数，G 为一个$(n+r+2)$-连通图，并且对于任意 $W \subseteq V(G)$，其中 $|W| = n$，以及任意 $e \in E(G-W)$，都有$H = G-W-e$。如果 $sun(H-X) \geq 2|X|+1$，对于$X \subseteq V(H)$，则 $|X| \geq r+2$。

证明. 如果 $|X| = 0$，则 $sun(H) \geq 1$。

另一方面，由于 G是$(n+r+2)$-连通的，H是$(r+1)$-连通的。因此，我们有 $sun(H) \leq \omega(H) = 1$。

因此，我们得到 $sun(H) = 1$。结合 H 为 $(r+1)$-连通，H 是一个太阳图。

注意到 G 是 $(n+r+2)$-连通的，因此 $|V(G)| \geq n+r+3$。于是，$|V(H)| = |V(G)| - n \geq (n+r+3) - n = r+3 \geq 3$，这意味着 H 是一个大太阳图。因此，H中至少存在三个度为1的顶点，所以至少存在一个顶点 v，使得 $d_{G-W}(v) = 1$。由此，我们得到

$$d_G(v) \leq d_{G-W} + |W| = n+1 \leq n+r+1,$$

这与 G 是$(n+r+2)$-连通的矛盾。下文中，我们考虑 $1 \leq |X| \leq r+1$。根据 $sun(H-X) \geq 2|X|+1$，我们假设

$$\omega(H-X) \geq sun(H-X) \geq 2|X|+1 \geq 3.$$

因此，我们得到

$$\omega(G-W-X)\geq\omega(G-W-X-e)-1=\omega(H-X)-1\geq 3-1=2,$$

结合 $|W|=n$ 和 $1\leq|X|\leq r+1$，可知 G 至多是 $(n+r+1)$-连通的，这与 G 是 $(n+r+2)$-连通的矛盾。因此，$|X|\geq r+2$。引理 1 的证明至此完成。□

接下来，我们提出两个关于坚韧度和孤立坚韧度的充分条件，以刻画图成为 $(P_{\geq 3},\ n)$-因子临界可避图；这些条件改进了定理 4 和定理 5。

定理 7. 设 n 和 r 是两个非负整数，且 G 是一个 $(n+r+2)$-连通图。若其坚韧度 $t(G)>\frac{n+r+2}{2\ r+2}$（），则 G 是 $(P_{\geq 3},\ n)$-因子临界可避图。

证明。对于完全图 G，定理 7 成立。下文中，我们假设 G 不是完全图。令 $H=G-W-e$ 为任意满足 $|W|=n$ 的 $W\subseteq V(G)$，以及任意 $e\in E(G-W)$。只需证明 H 存在一个 $P_{\geq 3}$-因子。反之，假设 H 没有 $P_{\geq 3}$-因子。根据定理 2，我们得到

$$sun(H-X)\geq 2|X|+1 \tag{1}$$

X 的某个子集，其中 V属于H。

根据（1）和引理 1，我们推得

$$\begin{aligned}\omega(G-W-X) &\geq \omega(G-W-X-e)-1=\omega(H-X)-1\\ &\geq sun(H-X)-1\geq 2|X|+1-1=2|X|\\ &\geq 2(r+2)\geq 4.\end{aligned}$$

结合 $t(G)$的定义，我们得到

$$t(G)\leq\frac{|W\cup X|}{\omega(G-W-X)}\leq\frac{n+|X|}{2|X|}=\frac{1}{2}+\frac{n}{2|X|}\leq\frac{1}{2}+\frac{n}{2(r+2)}=\frac{n+r+2}{2(r+2)},$$

这与 $t(G)>\frac{n+r+2}{2\ r+2}$（）矛盾。定理 7 的证明至此完成。□

注 3. 接下来，我们证明定理 7 中关于 $t(G)$的条件是紧的。

设 $G=K_{n+r+2}+((2r+3)K_1\cup K_2)$，其中 n 和 r 是两个非负整数。显然，G 是$(n+r+2)$-连通的，且 $t(G)=\frac{n+r+2}{2\ r+2}$（）。设 $W\subseteq V(K_{n+r+2})\subseteq V(G)$，其中 $|W|=n$ 且 $e\in E(K_2)$。那么 $G-W-e=K_{r+2}+((2r+5)K_1)$。在 $G-W-e$中选取 $X=V(K_{r+2})$。于是，我们得到

$$sun(G-W-e-X)=2r+5>2(r+2)=2|X|.$$

根据定理 2，$G-W-e$ 没有 $P_{\geq 3}$-因子。因此，G 不是 $(P_{\geq 3},\ n)$-因子临界可避图。

注 4. 接下来，我们说明定理 7 中关于 $(n+r+2)$-连通的条件不能替换为 $(n+r+1)$-连通。

设 $G=K_{n+r+1}+((2r+1)K_1\cup K_2)$，其中 $n\geq 1$ 和 $r\geq 0$ 是两个整数。我们看到，G 是 $(n+r+1)$-连通的，并且 $t(G)=\frac{n+r+1}{2r+2}=\frac{1}{2}+\frac{n}{2\ (r+1)}>\frac{1}{2}+\frac{n}{2\ (r+2)}=\frac{n+r+2}{2\ r+2}$（）。设 $W\subseteq V(K_{n+r+1})\subseteq V(G)$，其中 $|W|=n$ 且 $e\in E(K_2)$。那么 $G-W-e=K_{r+1}+((2r+3)K_1)$。在 $G-W-e$ 中选取 $X=V(K_{r+1})$。因此，我们有

$$sun(G-W-e-X)=2r+3>2(r+1)=2|X|.$$

根据该　　定理 2，$G-W-e$ 没有 $P_{\geq 3}$-因子。因此，G 不是 $(P_{\geq 3}, n)$-因子临界可避免的　　le.

定理 8. 设 n 和 r 为两个非负整数，且 G 为一个 $(n+r+2)$-连通图。若其孤立坚韧度 $I(G) > {}^{n+3}($ $_{r+2)\ 2(r+2)}$，则 G 是 $(P_{\geq 3}, n)$-因子临界可避的。

证明. 显然，定理 8 对完全图成立。下文假设 G 不是完全图。对于任意满足 $|W| = n$ 的 $W \subseteq V(G)$ 以及任意 $e = uv \in E(G-W)$，令 $H = G - W - e$。只需验证 H 包含一个 $P_{\geq 3}$-因子。用反证法，假设 H 不含 $P_{\geq 3}$-因子。则由定理 2 可得

$$sun(H-X) \geq 2|X| + 1 \tag{1}$$

其中，X 为 H 的某个顶点子集。

假设 $H-X$ 中存在 a 个孤立顶点、若干个 b K_2 以及 c 个大太阳分支 $H_1, H_2, \cdots, H_c$，其中 $|V($ $H_i)| \geq 6$。设 R_i 为 H_i 的因子临界子图。从 $H-X$ 的每个 K_2 分支中选取一个顶点，并将这些顶点组成的集合记为 Y。于是可得

$$sun(H-X) = a + b + c. \tag{2}$$

根据 (1)、(2)、引理 1 和 $|V(R_i)| \geq 3$，我们推得

$$a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)| \geq a+b+3c \geq a+b+c = sun(H-X) \geq 2|X|+1 \geq 2(r+2)+1 \geq 5. \tag{3}$$

事实上，$sun(G-W-X-e)+1 \geq sun(G-W-X) \geq sun(G-W-X-e) - 2$。下面的证明分为四种情形。

情形 1. $sun(G-W-X) = sun(G-W-X-e) - 2$.

在这种情形下，$u \in V(aK_1)$ 和 $v \in V(bK_2)$，或 $u \in V(aK_1)$ 和 $v \in V(H_i)$，或 u, v 属于两个不同的 K_2 分量，或 $u \in V(H_i)$ 和 $v \in V(bK_2)$，或 $v \in V(H_i)$ 和 $u \in V(H_j)$ $(i \neq j)$。

$\leq$ $\frac{cn+|X|+\frac{b}{2}+\sum |V(R_i)|}{a+b+\sum^{c} |V\ (R_i)|}$ **断言 1.** $I(G)$ $_{\cdot i=1}$

证明。我们考虑以下两个子情形。

子情形 1.1。　$u \in V(aK_1)$ 和 $v \in V(bK_2)$，或 $u \in V(H_i)$ 和 $v \in V(bK_2)$，或 u, v 属于两个不同的 K_2 分支。

我们选取这样的 Y，使得 $v \in Y$。于是可推出

$$\begin{aligned} i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i)) &= i(G-W-X-e-Y-\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i)) \\ &= i(H-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i)) \\ &= a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|. \end{aligned}$$

根据式 (3) 和 $I(G)$ 的定义，我们得到

$$I(G) \leq \frac{|W \cup X \cup Y \cup (\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i))|}{i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i))} = \frac{n+|X|+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}.$$

子情形 1.2. $u \in V(aK_1)$ 和 $v \in V(H_i)$，或 $v \in V(H_i)$ 和 $u \in V(H_j)$（$i \neq j$）。

$_c$若 $v \in V(R_i)$，则记作 $Z = \bigcup V(R_i)$。若 $v \in V(H_i) \setminus V(R_i)$，则 $d_{H_i}(v) = 1$，这意味着$_{i=1c}$存在 $w \in V(R_i)$ 使得 $vw \in E(H_i)$。现在记 $Z = ((\bigcup V(R_i)) \cup \{v\}) \setminus \{w\}$。因此，$_{i=1}$我们称

$$\begin{aligned} i(G-W-X-Y-Z) &= i(G-W-X-e-Y-Z) \\ &= i(H-X-Y-Z) \\ &= a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|. \end{aligned}$$

利用 (3) 和 $I(G)$ 的定义，我们推得

$$I(G) \leq \frac{|W \cup X \cup Y \cup Z|}{i(G-W-X-Y-Z)} = \frac{n+|X|+b+\sum\limits_{i=1}^{c}|V(R_i)|}{a+b+\sum\limits_{i=1}^{c}|V(R_i)|}.$$

断言 1 的证明至此完成。 □

根据 (3)、断言 1 和引理 1，我们得到

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{n+|X|+b+\sum\limits_{i=1}^{c}|V(R_i)|}{a+b+\sum\limits_{i=1}^{c}|V(R_i)|} \\ &\leq \frac{n+|X|+a+b+\sum\limits_{i=1}^{c}|V(R_i)|}{a+b+\sum\limits_{i=1}^{c}|V(R_i)|} \\ &= 1+\frac{n+|X|}{a+b+\sum\limits_{i=1}^{c}|V(R_i)|} \\ &\leq 1+\frac{n+|X|}{2|X|+1} \\ &< 1+\frac{n+|X|+\frac{1}{2}}{2|X|+1} \\ &= \frac{3}{2}+\frac{n}{2|X|+1} \\ &< \frac{3}{2}+\frac{n}{2|X|} \\ &\leq \frac{3}{2}+\frac{n}{2(r+2)} \\ &= \frac{n+3(r+2)}{2(r+2)}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) > {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2(r+2)}$ ~~矛盾。~~

情形2。 $sun(G-W-X) = sun(G-W-X-e) - 1$。

在此情形下， $u,\ v \in V(aK_1)$，或 $u \in V(M)$ 和 $v \in V(Q)$，其中 M 是 $H-X$ 的太阳分支， Q 是 $H-X$ 的非太阳分支，且 $M \cup Q \cup \{e\}$ 是 $(H-X) \cup \{e\}$ 的非太阳分支。**子情形 2.1**。 $u,\ v \in V(aK_1)$。

在此子情形中， $a \geq 2$。因此，我们承认

$$\begin{aligned} i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)-v) &= i(G-W-X-e-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)-v) \\ &= i(H-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)-v) \\ &= a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|-1. \end{aligned}$$

结合式 (3)、 $a \geq 2$、引理 1 以及 $I(G)$ 的定义，可得

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|W \cup X \cup Y \cup (\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)) \cup \{v\}|}{i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)-v)} \\ &= \frac{n+|X|+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|+1}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|-1} \\ &= 1+\frac{n+|X|+2-a}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|-1} \\ &\leq 1+\frac{n+|X|}{2|X|} \\ &= \frac{3}{2}+\frac{n}{2|X|} \\ &\leq \frac{3}{2}+\frac{n}{2(r+2)} \\ &= \frac{n+3(r+2)}{2(r+2)}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) > \frac{n+3}{(r+2)\ 2(r+2)}$ ~~矛盾~~。

子情形 2.2. $u \in V(M)$ 和 $v \in V(Q)$，其中 M 是 $H-X$ 的太阳分支， Q 是 $H-X$ 的非太阳分支，而 $M \cup Q \cup \{e\}$ 是 $(H-X) \cup \{e\}$ 的非太阳分支。

若 $M = K_1$，则 $a \geq 1$。因此，我们有

$$\begin{aligned} i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)-v) &= i(G-W-X-e-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)-v) \\ &= i(H-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)-v) \\ &= a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|. \end{aligned}$$

然后利用 (3)、 $a \geq 1$、引理 1、 $I(G)$ 和 $I(G) > {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2(r+2)}$ 的定义，我们推得 r

$$\begin{aligned}
\frac{n+3(r+2)}{2(r+2)} &< I(G) \leq \frac{|W \cup X \cup Y \cup (\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)) \cup \{v\}|}{i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i)-v)} \\
&= \frac{n+|X|+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|+1}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|} \\
&= 1+\frac{n+|X|+1-a}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|} \\
&\leq 1+\frac{n+|X|}{2|X|+1} \\
&< 1+\frac{n+|X|}{2|X|} \\
&= \frac{3}{2}+\frac{n}{2|X|} \\
&\leq \frac{3}{2}+\frac{n}{2(r+2)} \\
&= \frac{n+3(r+2)}{2(r+2)},
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。

$_c$若 $M = K_2$，则我们选取满足 $u \in Y$ 的 Y，并选择 $Z = \bigcup V(R_i)$。若 $M = H_i$，则 $u \in V(R_i)$ $_{i=1c}$或 $u \in V(H_i) \setminus V(R_i)$。若 $u \in V(R_i)$，则我们选取 $Z = \bigcup V(R_i)$。若 $u \in V(H_i) \setminus V(R_i)$，则存在$_{i=1c}$满足 $uw \in E(H_i)$ 的 $w \in V(R_i)$。因此，我们选择 $Z = ((\bigcup V(R_i)) \cup \{u\}) \setminus \{w\}$.$_{i=1}$

因此，我们推得

$$\begin{aligned}
i(G-W-X-Y-Z) &= i(G-W-X-e-Y-Z) \\
&= i(H-X-Y-Z) \\
&= a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|.
\end{aligned}$$

将此结果与 (3)、引理 1 以及 $I(G)$ 的定义结合起来，可得

$$\begin{aligned}
I(G) &\leq \frac{|W \cup X \cup Y \cup Z|}{i(G-W-X-Y-Z)} \\
&= \frac{n+|X|+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|} \\
&\leq \frac{n+|X|+a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{n+|X|}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}\\
&\le 1+\frac{n+|X|}{2|X|+1}\\
&< 1+\frac{n+|X|}{2|X|}\\
&= \frac{3}{2}+\frac{n}{2|X|}\\
&\le \frac{3}{2}+\frac{n}{2(r+2)}\\
&= \frac{n+3(r+2)}{2(r+2)},
\end{aligned}
$$

这与 $I(G) > {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2\ (r+2)}$ 矛盾。

情况 3. $sun(G-W-X) = sun(G-W-X-e)$.

在这种情况下， $u \in V(R_i)$ 和 $v \in V(H_i) \setminus V(R_i)$，或 $u, v \in V(M)$，或 $u \in V(M)$ 和 $v \in V(Q)$，其中M是 $H-X$的一个非太阳分支， $M \cup \{e\}$ 是$(H-X)\cup\{e\}$的一个非太阳分支， Q 是 $H-X$的一个非太阳分支，而 $M \cup Q \cup \{e\}$ 是$(H-X) \cup \{e\}$的一个非太阳分支。于是我们推得

$$
\begin{aligned}
i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i)) &= i(G-W-X-e-Y-\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i))\\
&= i(H-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i))\\
&= a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|.
\end{aligned}
$$

由式 (3)、引理 1、 $I(G)$ 和 $I(G) > {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2(r+2)}$ 的定义可得

$$
\begin{aligned}
\frac{n+3(r+2)}{2(r+2)} < I(G) &\le \frac{|W\cup X\cup Y\cup(\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i))|}{i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c}V(R_i))}\\
&= \frac{n+|X|+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}\\
&\le 1+\frac{n+|X|}{a+b+\sum_{i=1}^{c}|V(R_i)|}\\
&\le 1+\frac{n+|X|}{2|X|+1}\\
&< 1+\frac{n+|X|}{2|X|}\\
&= \frac{3}{2}+\frac{n}{2|X|}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\leq \quad \frac{3}{2}+\frac{n}{2(r+2)} \\ &= \quad \frac{n+3(r+2)}{2(r+2)}, \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。

情形4。 $sun(G-W-X) = sun(G-W-X-e)+1$。

在这种情况下， u， $v \in V(R_i)$。接下来的证明与情况 3 的证明类似，我们容易得到

$$I(G) \leq \frac{|W \cup X \cup Y \cup (\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i))|}{i(G-W-X-Y-\bigcup_{i=1}^{c} V(R_i))} < \frac{n+3(r+2)}{2(r+2)},$$

这与 $I(G) > {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2(r+2)}$ ~~矛盾。~~ 定理 8 的证明至此完成。 □

注5。 现在，我们说明定理 8 中的条件 $I(G) > {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2(r+2)}$ ~~不能替换为~~$I(G) \geq {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2(r+2)}$。

设 $G = K_{n+r+2} + ((2r+4)K_2)$，其中 n 和 r 是两个非负整数。显然， G 是 $(n+r+2)$-连通的，且 $I(G) = {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2(r+2)}$。令 $W \subseteq V(K_{n+r+2}) \subseteq V(G)$，其中 $|W| = n$ 且 $e \in E(K_2)$。于是 $G-W-e = K_{r+2} + ((2r+3)K_2 \cup (2K_1))$。设 $X = V(K_{r+2})$ 属于 $G-W-e$。因此，我们得到

$$sun(G-W-e-X) = 2r+5 > 2(r+2) = 2|X|.$$

根据定理 2， $G-W-e$ 没有 $P_{\geq 3}$-因子。因此， G 不是$(P_{\geq 3},\ n)$-因子临界可避图。

注 6. 现在，我们断言，定理 8 中$(n+r+2)$-连通这一条件是尖锐的。 .

设 $G = K_{n+r+1} + ((2r+2)K_2)$，其中 $n \geq 1$ 和 $r \geq 0$ 是两个整数。显然， G 是$(n+r+1)$-连通的，并且 $I(G) = {}^{n+3}{}_{(r+1)\ 2(r+1)} = {}^{3}_{2} + {}^{n}_{2(r+1)} > {}^{3}_{2} + {}^{n}_{2(r+2)} = {}^{n+3}{}_{(r+2)\ 2(r+2)}$。设 $W \subseteq V(K_{n+r+1}) \subseteq V(G)$，其中 $|W| = n$ 和 $e \in E(K_2)$。那么 $G-W-e = K_{r+1} + ((2r+1)K_1 \cup (2K_1))$。设 $X = V(K_{r+1})$ 属于 $G-W-e$。因此，我们指

$$sun(G-W-e-X) = 2r+3 > 2(r+1) = 2|X|.$$

由定理 2， $G-W-e$ 没有 $P_{\geq 3}$-因子。因此， G 不是（$P_{\geq 3}$， n）-因子临界可避图。

参考文献

[1] K. Ando、Y. Egawa、A. Kaneko、K. Kawarabayashi、H. Matsuda，无爪图中的路径因子，《离散数学》243（2002）195–200。[2] D.Bauer、G. Katona、D. Kratsch、H. Veldman，强韧图的弦性与2-因子，Discrete Applied Mathematics 99（2000）323–329。[3] V. Chv´atal，强韧图与哈密顿回路，《离散数学》5（1973）215–228。[4] Y. Egawa、M. Furuya，不含小奇数阶路的路径因子的存在性，组合学电子期刊25(1（2018）#P1.40。

[5] W. Gao、J. Guirao、Y. Chen，分数（k，m）-删除图的坚韧度条件再探，《数学学报（英文版）》35（2019）1227–1237。[6] W. Gao、L. Liang、Y. Chen，图成为分数（k，m）-删除图的孤立坚韧度条件，《数学实用》105（2017）303–316。[7] W. Gao、W. Wang，分数（g，f，n）-临界图的新孤立坚韧度条件，Colloquium Mathematicum 147（2017）55–66。[8] W. Gao、W. Wang、Y. Chen，网络脆弱性参数设定下路径因子存在性的紧界，《国际智能系统杂志》36（2021）1133–1158。[9] A. Kaneko，每个分支均为长度至少为二的路的路径因子存在的充要条件，《组合理论杂志 B辑》88（2003）195–218。[10] M. Kano、G. Y. Katona、Z. Kir´aly，长度至少为二的路的装箱，《离散数学》283（2004）129–135。[11] M. Kano、C. Lee、K. Suzuki，三次二部图的路因子与圈因子，Discussiones Mathematicae Graph Theory 28(3)（2008）551–556。[12] M. Kano、H. Lu、Q. Yu，图中的大分支分支因子，《应用数学快报》23（2010）385–389。[13] A. Kelmans，无爪图中的3顶点路径装箱及相关问题，Discrete Applied Mathematics 159（2011）112–127。[14] M. Las Vergnas，Tutte 的 1-因子定理的推广，《离散数学》23（1978）241–255。[15] J. Wu，路径因子临界覆盖图与路径因子均匀图，《RAIRO 运筹学》56(6)（2022）4317–4325。[16] G. Liu、L. Zhang，图的坚韧度与分数 k-因子的存在性，Discrete Mathematics 308（2008）1741–1748。[17] S. Wang、W. Zhang，网络中的 k-正交因子分解，《RAIRO 运筹学》55(2)（2021）969–977。[18] S. Wang、W. Zhang，分数临界覆盖图研究，《信息传输问题》56（2020）270–277。[19] J. Yang、Y. Ma、G. Liu，图中的分数（g，f）-因子，《应用数学：中国高校学报 A辑》16（2001）385–390。[20] Y. Yuan、R. Hao，分数 ID-$[a,b]$-因子临界图的邻域并条件，《应用数学学报（英文版）》34(4)（2018）775–781。[21] S. Zhou，分数（a，b，k）-临界覆盖图的邻域并条件，Discrete Applied Mathematics 323（2022）343–348。

[22] S. Zhou，关于分数（a，b，k）临界覆盖图的一个结果，《应用数学学报（英文版）》37(4)(2021年)657–664。[23] S. Zhou，图中分数（g，f）因子的绑定数与限制，Discrete Applied Mathematics 305(2021年)350–356。[24] S. Zhou，具有包含或排除性质的度条件与路因子，Bulletin Math- ematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie 66(1)(2023年)3–14。[25] S. Zhou，图中的路因子与独立集的邻域，Acta Mathematicae Ap- plicatae Sinica-English Series 39(2)(2023年)232–238。[26] S. Zhou，关于图中限制分数（g，f）因子的评注，Discrete Applied Mathematics，DOI: 10.1016/j.dam.2022.07.020[27] S. Zhou，关于路因子临界可避免图的一些结果，Discussiones Mathematicae Graph Theory 43(1)(2023年)233–244。[28] S. Zhou，Q. Bian，Q. Pan，子图中的路因子，Discrete Applied Mathematics 319(2022年)183–191。[29] S. Zhou，H. Liu，图中奇数 $[1, b]$因子的两个充分条件，Linear Algebra and its Applications 661(2023年)149–162。[30] S. Zhou，Y. Xu，Z. Sun，图中星因子的一些结果，Contributions to Discrete Mathematics，已接收。[31] S. Zhou，Z. Sun，H. Liu，路因子均匀图的一些充分条件，Aequationes mathematicae，DOI: 10.1007/s00010-023-00944-3[32] S. Zhou，J. Wu，Q. Bian，关于路因子临界删除（或覆盖）图，Aequationes Math- ematicae 96(4)(2022年)795–802。[33] S. Zhou，J. Wu，Y. Xu，图中的坚韧度、孤立坚韧度与路因子，Bulletin of the Australian Mathematical Society 106(2)(2022年)195–202。