arXiv:2304.00938v2 [math.AG] 6 Jun 2024

非阿贝尔基变换定理与 étale 同伦论

Peter J.Haine TimHolzschuh SebastianWolf

2024年6月7日

摘要

本文有两个主要目标。首先，我们证明 étale 上同调中基变换定理的非阿贝尔精化（即证明这些经典命题对于空间层的类比）。其次，我们应用这些定理，证明若干关于 étale 同伦型的结果。具体而言，我们证明光滑基变换定理、Huber–Gabber 适当基变换定理的仿射类比，以及 Fujiwara–Gabber 刚性定理的非阿贝尔精化。我们的方法还重新得到了 Chough 对适当基变换定理的非阿贝尔精化。我们将 Bhatt–Mathew 的一个论证推广到非阿贝尔情形，并应用非阿贝尔适当基变换，证明前有限 étale 同伦型满足弧下降。利用非阿贝尔光滑与适当基变换及下降，我们为 étale 同伦型的若干 Künneth 公式给出了相当简洁的证明。

目录

0 引言 1 1 背景 5 2 从经典基变换到非阿贝尔基变换 12 3 应用：弧下降 27 4 应用：Künneth 公式 32

参考文献 **39**

0 引言

本文有两个核心主题。首先，我们证明了几乎所有 étale 上同调基变换定理的非阿贝尔精化。更准确地说，étale 上同调中的基变换定理通常是针对集合层或阿贝尔群证明的；我们将说明如何把这些结果推广到取值于 ∞-范畴空间的层。

其次，我们应用这些非阿贝尔基变换定理，为 étale 同伦论中的若干结果给出相当简明的证明（见 §§0.2 和 0.3）。通常，从技术上说，可以分两步证明 étale 同伦论中的结果：先分别证明关于 étale 基本群的结果，再利用阿贝尔层的 étale 上同调基变换定理。不过，我们认为，直接从

基变换定理的非阿贝尔精化出发，实际上更容易证明这些结果。此外，我们往往能够去除当前文献中已有陈述的限制性假设，并证明新的结果。

我们首先解释所证明的非阿贝尔基变换定理。

0.1 代数几何中的非阿贝尔基变换定理

为展示我们的方法，我们聚焦于 étale 上同调中光滑基变换定理的非阿贝尔推广 [SGA 4_{III}, 第 XII 讲，推论 1。2]关于其表述，回顾一下，概形态射 $f : X \to Z$ 是 拟光滑的，如果 X 它可以写成由带有仿射过渡映射的光滑 Z概形构成的余滤极限。

0.1 定理 （非阿贝尔光滑基变换；推论 2.30）。设

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Z \end{array} \tag{0.2}$$

这是一个拟紧拟分离概形的拉回方块，并假设态射 f 是拟光滑的。记 Σ 为在 Z上可逆的素数集合。那么对于每个 Σ-挠 *étale* 层 空间 F 在 Y 上的（见定义 *1.9*），交换变换

$$f^* g_*(F) \to \bar{g}_* \bar{f}^*(F)$$

是 ∞-范畴中 X上的空间的 *étale* 层之间的一个等价。

假设 F 是 Σ-挠的，这尤其保证存在一个整数 $n \geq 0$，使得 F 的非零同伦层仅出现在次数 $\leq n$。因此，人们或许希望通过按截断次数 定理 0.1 进行归纳的“Postnikov 塔论证”来证明 n。其思路是考虑映射 $F \to \tau_{\leq n-1} F$ 到 $(n-1)$-截断的纤维 F；这些纤维的同伦层集中在单独的次数 n。关于 $\tau_{\leq n-1} F$ 的基变换就是归纳假设，而纤维的基变换则由经典上同调基变换推出。人们或许会希望由此得到 F的基变换。

遗憾的是，这种朴素方法至少存在两个问题。首先，层$\tau_{\leq n-1} F$ 可能没有整体截面，因此甚至不清楚如何开始归纳步骤。也就是说，讨论映射 $F \to \tau_{\leq n-1} F$的纤维可能根本没有意义。其次，即使F 有整体截面，交换变换$f^* g_*(F) \to \bar{g}_* f^*(F)$ 中出现的推前函子也不与截断函子交换。

证明概述。 本文的一个关键点是，通过采用不同的论证方式， 可以 将 定理 0.1 归结为关于层的基变换的一项断言，即 1-群胚（即 群胚中的层叠）的基变换，以及阿贝尔群层的基变换。论证大致如下。首先注意，要证明交换态射 $f^* g_*(F) \to \bar{g}_* \bar{f}^*(F)$ 是等价，只需在每个几何点 $x \to X$处检验茎上的断言。接着，我们将 X 上的 étale层的茎重新表示为其拉回到严格局部化 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x})$后的整体截面。应用一个关于沿态射作拉回的无条件基变换结果 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}) \to X$ [5, 命题 7.5。1], 于是，我们只需证明以下结论：若 X

且 Z 是严格亨泽尔局部环的谱， f 是由局部环同态诱导的 pro光滑态射，那么自然映射

$$\Gamma_{\text{ét}}(Y;F) \to \Gamma_{\text{ét}}(W;\tilde{f}^*(F))$$

是一个等价（见 推论 2.14）。利用 n-gerbe 理论，我们说明，对于这个关于整体截面的命题，可以通过“Postnikov 塔论证”将其归结为以下情形：其中 F 是一个 1-群胚层，以及其中 F 是一个 Eilenberg–MacLane 对象（见 命题 2.15 和 推论 2.25）。第一种情形由 Giraud 在 [19, 第七章，定理 2.12], 中证明；第二种情形则等价于阿贝尔层上同调群的经典结论。

将这一问题归结为关于严格亨泽尔局部环谱上概形的整体截面的命题，这种做法完全普遍适用。因此，采用同样的方法，我们重新证明 Chough 的非阿贝尔适当基变换定理 [11, 定理 1。2], ，并证明 Gabber–Huber 适当基变换定理仿射类比的非阿贝尔强化版本 [18； 27] 以及 Fujiwara–Gabber 刚性定理 [17, 推论 6.6。4]。见第 2.4 节。我们还应用非阿贝尔光滑与适当基变换定理证明：在对剩余特征取补后的完备化下，概形的光滑真态射的几何纤维的 étale 同伦型在特化下保持不变（见第 2.5 节）。

在引言的其余部分，我们将说明这些非阿贝尔基变换定理的一些应用。

0.2 应用：弧下降

Bhatt 和 Mathew 最近在概形上引入了 弧拓扑 [7]。弧拓扑比 v-拓扑更细，且弧下降带来了一些无法从 v-下降推出的有用结论。例如，弧层满足 *Milnor* 切除 ，并满足 Beauville–Laszlo 形式粘合 定理的一个版本 [6]。参见 [7, 推论 4.25 和 6.7]。Bhatt–Mathew 还证明，许多熟悉的 étale 层都满足弧下降，例如具有挠系数的 étale 上同调[7, 定理 5.4]。他们证明中的关键工具是适当基变换定理。

一旦可以使用非阿贝尔适当基变换定理，调整 Bhatt 和 Mathew 的论证以证明这一结果的非阿贝尔版本并不困难。记 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\pi)$ 为前有限空间的 ∞-范畴。给定一个概形 X，记 $\widehat{\Pi}^{\text{ét}}_\infty(X) \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\pi)$ 为 X 的前有限 étale 同伦类型。

0.3 定理 （étale 同伦型的弧下降；定理 3.17）。 该函子

$$\widehat{\Pi}^{\text{ét}}_\infty(-) : \mathbf{Sch}^{\text{qcqs}} \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\pi)$$

是超完备弧余层。换言之，对于任意弧超覆盖 $U_\bullet \to X$ ，诱导态射

$$\operatorname*{colim}_{[n]\in\mathbf{\Delta}^{\text{op}}} \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_\infty(U_n) \to \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_\infty(X)$$

是 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\pi)$中的等价。

在本小节余下部分，我们将说明在 étale 同伦理论的语境下，Milnor 切除和形式粘合的含义。回顾一下，概形的交换方块

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z' & \xhookrightarrow[i]{} & X' \end{array} \tag{0.4}$$

是一个 *Milnor* 方块 当且仅当它是一个拉回方块， f 是仿射的， i 是一个闭浸入，且诱导态射 $Z' \sqcup_Z X \to X'$ 是一个同构。[1] 由弧下降可知：

0.5 推论 (Milnor 切除)。 给定一个米尔诺方形 (0.5)，诱导出的方块

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(Z) & \longrightarrow & \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(Z') & \longrightarrow & \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X') \end{array}$$

是 Pro($\mathbf{Spc}_{\pi}$)中的推出方块。

回顾一下，形式粘合数据 是由环同态 $A \to B$与有限生成理想 $I \subset A$ 组成的一对 $(A \to B, I)$，满足对于每个 $n \geq 0$，都有 $A/I^n \cong B/I^n B$[7, 定义 1.14]。再次由弧下降，我们有：

0.6 推论 (形式粘合)。 给定形式粘合数据 $(A \to B, I)$，诱导出的方块

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\mathrm{Spec}(B) \smallsetminus \mathrm{V}(IB)) & \longrightarrow & \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\mathrm{Spec}(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\mathrm{Spec}(A) \smallsetminus \mathrm{V}(I)) & \longrightarrow & \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\mathrm{Spec}(A)) \end{array}$$

是 Pro($\mathbf{Spc}_{\pi}$)中的推出方块。

0.3 应用：Künneth 公式

设 k 为可分闭域，且设 X 和 Y 为拟紧拟分离的 k-概形。Chough 观察到，如果 Y是适当的，那么非阿贝尔适当基变换定理很容易推出自然映射

$$\hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y) \longrightarrow \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X) \times \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(Y) \tag{0.7}$$

是一个等价 [11, 定理 5。3]（关于 π_1，这恢复了 étale 基本群的经典 Künneth 公式 [SGA 1，Exposé X，推论 1.7；33，推论 4.1。23]。）类似地，如果 X是光滑的，那么非阿贝尔光滑基变换定理立即推出，映射（0.7）在远离 $\mathrm{char}(k)$ 的完备化之后变为等价。

我们对这些结果作出两点加强。首先，利用 étale 同伦型的基本纤维序列 [22, 推论 3.21]，，我们将 Chough 的结果推广到任意基域：

0.8 命题 （相对 Künneth 公式，适当情形；推论 4.26）。设 k 为一个绝对伽罗瓦群为 G_k 的域，并设 X 和 Y 为拟紧拟分离的 k概形。如果 Y 在 k上是适当的，那么自然映射

$$\hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y) \longrightarrow \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X) \underset{\mathrm{BG}_k}{\times} \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(Y)$$

是 Pro($\mathbf{Spc}_{\pi}$) 中的等价。

令 p 为素数或 0。给定概形 X，记 $\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{p'}$ 为 X 在不同于 p的素数集合上的 étale 同伦型完备化。利用 v-下降、alteration 理论[28；29，第 IX 篇；32； 43],以及基本纤维序列，我们证明：

[1]根据 [15, 定理 7.1]，，前述条件保证概形的推出 $Z' \sqcup_Z X$ 存在。

0.9 命题 （素于 p 的相对 Künneth 公式；推论 4.27）。设 k 是特征为 $p \geq 0$ 且绝对伽罗瓦群为 G_k的域，并设 X 和 Y 是拟紧拟分离 k-概形。如果素有限群 G_k 素于 p，则自然映射

$$\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y)^{\wedge}_{p'} \longrightarrow \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{p'} \underset{\mathrm{BG}_k}{\times} \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y)^{\wedge}_{p'}$$

在 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_{\pi})$ 中是一个等价。

对于 k 可分闭的，命题 0.9恢复了 Orgogozo 的一个结果 [37, 推论 4。9]。此外，命题 0.8 和 0.9 推出了关于对称幂的 Künneth 公式（见 备注 4.29和 4.30）。

线性概述

第 1 节 回顾了有关 n-gerbe 在 ∞-topoi 和 étale 同伦型的一些背景知识；熟悉相关内容的读者可以放心跳过本节。在第 2 节，我们证明以下定理的非阿贝尔精化：光滑基变换定理、适当基变换定理、Gabber–Huber 适当基变换定理的仿射类比，以及 Fujiwara–Gabber 刚性定理。特别参见 第 2.4 节。我们还解释了为何在避开剩余特征后进行完备化时，概形的光滑真态射的几何纤维的 étale 同伦型在特化下保持不变，见 第 2.5 节。在 第 3 节 中，我们应用非阿贝尔适当基变换定理，证明前有限 étale 同伦型满足弧下降。 第 4 节 运用前几节发展出的诸多工具，证明 étale 同伦型的 Künneth 公式。

致谢。 我们感谢 Clark Barwick、Bhargav Bhatt、Chang-Yeon Chough、Denis- Charles Cisinski、Elden Elmanto 和 Bogdan Zavyalov，就本文内容与我们进行了富有启发性的讨论。

我们感谢 SFB 1085「高阶不变量」和雷根斯堡大学的热情接待。第一作者谨此感谢加州大学校长博士后奖学金、美国国家科学基金会数学科学博士后研究奖学金（资助编号 # DMS-2102957）以及西蒙斯基金会的资助（816048，LC）。第二作者感谢德国研究联合会（DFG）通过协同研究中心 TRR 326「一致化结构的几何与算术」项目（编号 444845124）提供的资助。第三作者获得雷根斯堡的 SFB 1085「高阶不变量」项目资助，该项目由 DFG 资助。

1 背景

本节简要回顾关于空间的可构造 étale 层与挠 étale 层的背景（§1.1）、 ∞-topoi 中的 gerbe（§1.2）、étale 同伦型（§1.3）以及交换变换（§1.4）。

1.1 记号与术语

1.1 记号。 给定一个概形 X，我们将 $X_{\text{ét}}$ 记作 X 上 ∞-topos of étale 层的空间 。

1.2 记号。 设 $\boldsymbol{X}$ 为一个 ∞-topos，且 $n \geq -2$ 为一个整数。我们将由 n-截断对象张成的全子范畴记为 $\boldsymbol{X}_{\leq n} \subset \boldsymbol{X}$ 。该包含映射有一个左伴随，记作 $\tau_{\leq n} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}_{\leq n}$。

1.3. 对于一个概形 X，子范畴 $X_{\text{ét},\ \leq 0} \subset X_{\text{ét}}$ 是由 X 上的 étale 集合层张成的全子范畴。

1.4 回顾。由于在一个 ∞-topos 中，滤过余极限与有限极限可交换，因此对任意 ∞-topos $\boldsymbol{X}$ 和整数 $n \geq -1$，包含映射 $\boldsymbol{X}_{\leq n} \subset \boldsymbol{X}$ 保持滤过余极限。因此，自函子 $\tau_{\leq n} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ 保持滤过余极限。

现在我们来回顾挠 étale 层的非阿贝尔精化，其中的挠由一组素数所限定。

1.5 记号。用 **Spc** 表示由（小）空间构成的 ∞-范畴，并用 $\mathbf{Cat}_\infty$ 表示由（小）∞-范畴构成的 ∞-范畴。

1.6 定义。设 Σ 是一组素数。

(1.6.1) 若有限群 G 的阶属于 Σ 的乘法闭包，则称 G 为 Σ-群 。

(1.6.2) 若空间 K 是 π-有限 的，则称其为 π-有限 空间；这意味着 K 是截断的，$\pi_0(K)$ 是有限的，且 K 的所有同伦群都是有限的。我们用 $\mathbf{Spc}_\pi \subset \mathbf{Spc}$ 表示由 π-有限空间张成的全子范畴。

(1.6.3) 我们称空间 K 是 Σ-有限的，如果 K 是 π-有限的，并且 K 的所有同伦群都是 Σ-群。我们将由 Σ-有限空间张成的全子范畴记作 $\mathbf{Spc}_\Sigma \subset \mathbf{Spc}_\pi$ 。

1.7 记号。设 $\boldsymbol{X}$ 是一个 ∞-拓扑斯。我们将 $\Gamma_{\boldsymbol{X},\ *}$ 或 $\Gamma(\boldsymbol{X}; -)$ 记作全局截面函子 $\boldsymbol{X} \to \mathbf{Spc}$。我们将 $\Gamma_{\boldsymbol{X}}^* : \mathbf{Spc} \to \boldsymbol{X}$ 记作 $\Gamma_{\boldsymbol{X},\ *}$ 的左伴随，即常值层函子。给定一个概形 X，我们还将 $\Gamma_{\text{ét}}(X; -)$ 记作 $\Gamma(X_{\text{ét}}; -)$。

1.8 定义（挠 lisse 层）。设 $\boldsymbol{X}$ 是一个 ∞-拓扑斯，$F \in \boldsymbol{X}$ 是一个 Σ 素数的集合 s.

(1.8.1) 如果存在终对象 $\boldsymbol{X}$ 的一个覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$、一个相应的空间族 $\{K_i\}_{i \in I}$，并且对每个 $i \in I$ 都存在一个等价

$$F \times U_i \simeq \Gamma_{\boldsymbol{X}}^*(K_i) \times U_i$$

在 $\boldsymbol{X}_{/U_i}$ 中。

(1.8.2) 我们称 F 为 Σ-挠光滑 ，如果 F 局部常值；此外，集合 I 可以取为有限集，空间 K_i 可以取为 Σ- 有限。在 Σ 为所有素数的集合时，我们简称 F 为光滑。我们用 $\boldsymbol{X}^{\text{lis}} \subset \boldsymbol{X}$ 表示由光滑对象张成的全子范畴。

1.9 定义 (挠 étale 层)。设 X 为一个拟紧拟分离概形，$F \in X_{\text{ét}}$ 为一个 étale 层，Σ 为一个素数集合。

(1.9.1) 我们称 F 为 Σ-挠可构造 ，如果存在一个有限偏序集 P 和 X 的一个分层 $\{X_p\}_{p \in P}$ ，其分层部分为拟紧拟分离的局部闭子概形，并且对每个 $p \in P$，层 $F|_{X_p}$ 都是 Σ-挠光滑的。在 Σ 为所有素数的集合时，我们简称 F 为可构造。

(1.9.2) 若 F 满足以下条件，我们称其为 Σ-挠：F 是截断的，且 F 可以写成 X 上的 Σ-挠可构造 étale 层的一个滤过图表的余极限。若 Σ 是所有素数构成的集合，则我们简称 F 为挠。

1.10 备注。对于拟紧拟分离概形 X，由 Σ-挠层构成的 $X_{\text{ét}}$ 子范畴在有限极限和截断下封闭。

1.2 ∞中的 gerbe

在本小节中，我们简要回顾 ∞-topos 中 gerbe 的理论，内容取自 [HTT，§7.2。2]。

1.11 记号。 设 $\boldsymbol{X}$ 是一个 ∞-topos，$F \in \boldsymbol{X}$，且 $n \geq 0$ 是一个整数。记 $\pi_n(F) \in (\boldsymbol{X}_{/F})_{\leq 0}$ 为 n阶同伦对象 F，参见 [HTT，定义 6.5.1。1]。若 $n \geq 1$，则 $\pi_n(F)$ 自然是 $(\boldsymbol{X}_{/F})_{\leq 0}$的一个群对象；若 $n \geq 2$，则它是阿贝尔的。

给定一个整体截面 $\gamma : * \to F$，记 $\pi_n(F,\gamma) \coloneqq \gamma^* \pi_n(F)$ 为 $\pi_n(F)$ 沿 γ 的拉回。于是对于 $n \geq 1$，对象 $\pi_n(F,\gamma)$ 是 $\boldsymbol{X}_{\leq 0}$ 的一个群对象；若 $n \geq 2$，则它是阿贝尔的。

1.12 回顾 (n-gerbe)。 设 $\boldsymbol{X}$ 是一个 ∞-topos，$F \in \boldsymbol{X}$，且 $n \geq 2$ 是一个整数。若 F 是一个 n上的 *-gerbe* $\boldsymbol{X}$，且它是 n-截断且 $(n-1)$-连通的。[2] 若 F 是一个 n-gerbe，则函子

$$F \times (-) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}_{/F}$$

限制在 $(n-1)$截断对象 [HTT、引理 7.2.1。13]；特别是在0-截断对象上。特别地，存在唯一的阿贝尔群对象 $A \in \mathrm{Ab}(\boldsymbol{X}_{\leq 0})$ 使得

$$\pi_n(F) \simeq F \times A$$

在 $\boldsymbol{X}_{/F}$ 中。在这种情况下，我们称 F 由 带有带结构 A。记 $p_!^F : \boldsymbol{X}_{/F} \to \boldsymbol{X}$ 为遗忘函子；[HTT，引理 7.2.113] 表明存在一个等价

$$A \simeq \tau_{\leq 0}\, p_!^F(\pi_n(F))\,.$$

1.13 回顾 (Eilenberg–MacLane 对象)。 设 $\boldsymbol{X}$ 是一个 ∞-topos，且 $n \geq 1$。$\boldsymbol{X}$中的一个度数 n *Eilenberg–MacLane* 对象是一个带基点对象 $* \to F$，它是 n-截断的且 $(n-1)$-连通。记作

$$\mathrm{EM}_n(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{X}_*$$

表示由度数为 n 的 Eilenberg–MacLane 对象构成的全子范畴。对于 $n \geq 2$，给定一个度数为 n 的 Eilenberg–MacLane 对象 $\gamma : * \to F$，n-gerbe F 带有同伦群层 $\pi_n(F,\gamma) \in \boldsymbol{X}_{\leq 0}$所给的带结构。特别地，我们有一个同构

$$\tau_{\leq 0}\, p_!^F(\pi_n(F)) \cong \pi_n(F,\gamma)\,.$$

函子

$$\begin{aligned} \mathrm{EM}_1(\boldsymbol{X}) &\longrightarrow \mathrm{Grp}(\boldsymbol{X}_{\leq 0}) \\ [\gamma : * \to F] &\longmapsto \pi_1(F,\gamma) \end{aligned}$$

在以下两者之间定义了一个等价： ∞-范畴，其中包含次数为1 的 Eilenberg–MacLane 对象；以及1-范畴，其中包含 $\boldsymbol{X}_{\leq 0}$的群对象，参见 [HTT，命题 7.2.2。12]。对于 $n \geq 2$，该函子

$$\begin{aligned} \mathrm{EM}_n(\boldsymbol{X}) &\longrightarrow \mathrm{Ab}(\boldsymbol{X}_{\leq 0}) \\ [\gamma : * \to F] &\longmapsto \pi_n(F,\gamma) \end{aligned}$$

在 ∞-范畴中，次数为 n 的 Eilenberg–MacLane 对象与 $\boldsymbol{X}_{\leq 0}$的阿贝尔群对象构成的 1-范畴之间定义了一个等价。我们记

$$\mathrm{K}(-,1) : \mathrm{Grp}(\boldsymbol{X}_{\leq 0}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{EM}_1(\boldsymbol{X}) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{K}(-,n) : \mathrm{Ab}(\boldsymbol{X}_{\leq 0}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{EM}_n(\boldsymbol{X})$$

对于逆等价。

[2] 我们采用 [3, §3.313，§41]中阐述的连通性术语。

1.14 回顾（∞-topos 中的上同调）**.** 设 $\boldsymbol{X}$ 是一个 ∞-topos，且 A 是 $\boldsymbol{X}_{\leq 0}$ 的一个阿贝尔群对象。对于每个整数 $n \geq 0$，我们记

$$\mathrm{H}^n(\boldsymbol{X}; A) \coloneqq \pi_0 \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathrm{K}(A, n))$$

第 n上同调群，其系数取自 $\boldsymbol{X}$ A。

我们回顾一下关于 ∞-topos 中 gerbe 的以下分类结果 $\boldsymbol{X}$。这是 [HTT，定理 7.2.2.26] 的直接推论。

1.15 定理。设 $\boldsymbol{X}$ 是一个 ∞-*topos*，A 是 $\boldsymbol{X}_{\leq 0}$ 中的阿贝尔群对象，$n \geq 2$ 是一个整数。设 $\gamma : * \to \mathrm{K}(A, n+1)$ 是 $\boldsymbol{X}$ 中的一个 $n+1$ 次 *Eilenberg–MacLane* 对象。给定一个定义在 $\boldsymbol{X}$ 上、带有 A 带结构的 *n-gerbe* F，存在一个映射 $\alpha_F : * \to \mathrm{K}(A, n+1)$，它在等价意义下由 F 唯一确定，以及一个拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ * & \xrightarrow[\alpha_F]{} & \mathrm{K}(A, n+1)\,. \end{array}$$

特别地，将映射 $\alpha : * \to \mathrm{K}(A, n+1)$ 送到上述拉回方块，定义了一个双射

$$\mathrm{H}^{n+1}(\boldsymbol{X}; A) \xrightarrow{\sim} \{n\text{-gerbes on } \boldsymbol{X} \text{ banded by } A\}/\simeq\ .$$

作为直接推论，我们得到如下结论（参见 [HTT，备注 7.2.2。28]）：

1.16 推论。设 $\boldsymbol{X}$ 为一个 ∞-*topos*，A 为 $\boldsymbol{X}_{\leq 0}$中的一个阿贝尔群对象，$n \geq 2$为一个整数。一个由 A 带化的 *n-gerbe* F 存在整体截面，当且仅当相应的上同调类 $\alpha_F \in \mathrm{H}^{n+1}(\boldsymbol{X}; A)$ 消失。

稍后我们需要用到这样一个事实：Σ-挠空间的 étale 层的带化是一个 Σ-挠阿贝尔群的 étale 层。证明这一点需要下面这个简单的观察。

1.17 引理。设 $\boldsymbol{X}$ 为一个 ∞-*topos*，$n \geq 1$ 为一个整数。

(1.17.1) 函子

$$\begin{aligned} \tau_{\geq n} : \boldsymbol{X}_* &\to \boldsymbol{X}_* \\ F &\mapsto \mathrm{fib}(F \to \tau_{\leq n-1}(F)) \end{aligned}$$

保留滤过余极限。

(1.17.2) 对于所有 $F \in \boldsymbol{X}_*$，对象 $\tau_{\geq n}(F)$ 是 $(n-1)$-连通的。

(1.17.3) 如果 $F \in \boldsymbol{X}_*$ 是 n-截断的，那么 $\tau_{\geq n}(F)$是一个 n 阶 *Eilenberg–MacLane* 对象。

(1.17.4) 如果 $F \in \boldsymbol{X}_*$ 是 $(n-1)$-连通的，那么自然态射 $\tau_{\geq n}(F) \to F$ 是一个等价。

证明。对于 (1.17.1)，首先注意到 $(n-1)$-截断函子 $\tau_{\leq n-1} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ 保持滤过余极限（回顾 1.4），并且在一个 ∞-拓扑斯中，滤过余极限与有限极限可交换。因此，由遗忘函子 $\boldsymbol{X}_* \to \boldsymbol{X}$ 创建极限和弱可缩余极限这一事实，即可得出结论。

对于 (1.17.2)，注意到单位 $F \to \tau_{\leq n}(F)$ 是 $(n-1)$-连通的。由于 $(n-1)$-连通态射在拉回下稳定 [HTT，命题 6.5.1。16], 投影 $\tau_{\geq n}(F) \to *$ 是$(n-1)$-连通的，证毕。

对于（1.17.3），根据定义，我们需要验证带基点对象 $\tau_{\geq n}(F)$ 是 $(n-1)$-连通且 n-截断的。其 $(n-1)$-连通性由（1.17.2）可知。 n-截断性则由以下事实得出： $\tau_{\geq n}(F)$是 F, $\tau_{\leq n-1}(F)$和 $*$ 都是 n-截断的，并且全子范畴 $\boldsymbol{X}_{\leq n} \subset \boldsymbol{X}$对极限封闭。

对于（1.17.4），注意到由于 F 是 $(n-1)$-连通的， $\tau_{\leq n-1}(F) \simeq *$。因此，由等价在拉回下保持稳定这一事实即可得出结论。 □

1.18 命题。 设 X 是一个拟紧拟分离概形， Σ 是一个素数集合。设 $F \in X_{\text{ét}}$ 是 X上的空间的 Σ-挠层。若 F 是一个 *n-gerbe*，则 F 的带化 $A_F \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét},\leq 0})$ 是 X 上的阿贝尔群的 Σ-挠 *étale* 层（即其茎是 Σ-挠群）。

证明。由于带化构造中涉及的所有函子 $A_F \coloneqq \tau_{\leq 0}\, p_!^F(\pi_n F)$ 都与沿 étale态射 $U \to X$的限制相容，因此该断言在 X上是 étale 局部的。因此，我们可以假设 gerbe F 有一个整体截面 $\gamma : * \to F$，从而是一个次数为 n 的 Eilenberg– MacLane 对象。现在可以将 F 写成图表 $F_\bullet : \mathcal{I} \to X_{\text{ét}}$ 的滤过余极限，其中图表由 n-截断的 Σ-挠可构造层组成。由于 étale ∞-topos $X_{\text{ét}}$ 是相干的 [5, 命题 3.7，3], 终对象 $* \in X_{\text{ét}}$是紧致的$_{\leq n}$ SAG，命题 A.2.3。 [因此，存在某个$i_0 \in \mathcal{I}$，使得 γ 经由 F_{i_0}分解。由于遗忘函子 $\mathcal{I}_{i_0/} \to \mathcal{I}$ 是余极限共终的 [HTT，例 5.4.5.9 和引理 5.4.5。12], 将 $\mathcal{I}$ 替换为 $\mathcal{I}_{i_0/}$ 后，可知我们可以将带基点对象 (F, γ) 写成带基点对象 (F_i, γ_i) 的滤过余极限，其中每个 F_i 都是 n-截断的且Σ-挠可构造的。

引理 1.17表明，通过将 F_i 替换为

$$\tau_{\geq n}(F_i) = \mathrm{fib}(F_i \to \tau_{\leq n-1} F_i)$$

我们可以假设所有 (F_i, γ_i) 也都是次数为 n 的 Eilenberg–MacLane 对象。由于函子

$$\pi_n(-) : \mathrm{EM}_n(X_{\text{ét}}) \to X_{\text{ét},\leq 0}$$

保持滤过余极限，因此我们可以假设 F 是 Σ-挠可构造的，且为次数 n的 Eilenberg–MacLane 对象。现在取一个几何点 $x \to X$。由于同伦群与取茎运算相容，群 $(A_F)_x = \pi_n(F, \gamma)_x$ 同构于 $\pi_n(F_x, \gamma_x)$。但由于 F 是Σ-挠可构造的， F_x 是一个 Σ-有限空间，因此 $\pi_n(F_x, \gamma_x)$ 是 Σ-有限的，证毕。

□

1.3 étale 同伦型

本文采用 Artin–Mazur– Friedlander 对 étale 同伦型的描述 [4, §9； 16， §4] 借助 Lurie 的形状理论来描述 ∞-topoi。在本小节中，我们回顾所需的理论内容。关于形状理论的更多背景，请参阅 [5, 第 4 章和第 11 章； 8， §2； 9， §2] ；关于形状理论的更多背景，请参阅 [24, §5] ，此处讨论其与 étale 同伦型经典定义之间的关系。

我们首先介绍关于 pro-对象和 pro 空间完备化的记号。

1.19 记号。 给定一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们记 $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ 为 ∞ 中 pro-对象的 $\mathcal{C}$-范畴，它是通过形式地向 $\mathcal{C}$ 添加余滤极限而得到的。 $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ 存在性是（对偶的） [HTT，命题 5.3.62] 的特例。

我们广泛使用以下对 pro-对象的 ∞-范畴的显式呈现。

1.20 回顾 [SAG，定义 A.8.1.1 & 命题 A.8.1.6]。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限的可达 ∞- 范畴（例如，$\mathcal{C} = \mathbf{Spc}$）。那么存在一个自然的识别

$$\mathrm{Pro}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{lex,acc}}(\mathcal{C}, \mathbf{Spc})^{\mathrm{op}}$$

以及左正合可达函子构成的 ∞-范畴的对偶 $\mathcal{C} \to \mathbf{Spc}$。

1.21 备注 [HTT，推论 5.4.3。6]。设 $\mathcal{C}$ 是一个小的 ∞-范畴。那么 $\mathcal{C}$ 可达，当且仅当 $\mathcal{C}$ 幂等完备。此外，若 $\mathcal{C}$ 可达，则对于给定的一个可达 ∞-范畴 $\mathcal{D}$，每个函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 都是可达的。

1.22. 特别地，对于任意素数集合 Σ，小的 ∞-范畴 $\mathbf{Spc}_\Sigma$ 是可达的，并且每个函子 $\mathbf{Spc}_\Sigma \to \mathbf{Spc}$ 都是可达的。

1.23 回顾 （Σ-完备化）。设 Σ 是一个素数集合。包含函子 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\Sigma) \subset \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc})$ 有一个左伴随

$$(-)^\wedge_\Sigma : \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}) \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\Sigma)$$

call称为 Σ-完备化。若 Σ 是所有素数构成的集合，我们就简称 Σ-完备化为 *profinit e com*完备化。

在这些识别下

$$\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{lex,acc}}(\mathbf{Spc}, \mathbf{Spc})^{\mathrm{op}} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\Sigma) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{lex}}(\mathbf{Spc}_\Sigma, \mathbf{Spc})^{\mathrm{op}}$$

函子 $(-)^\wedge_\Sigma$ 有一个非常方便的描述：它由与包含映射 $\mathbf{Spc}_\Sigma \subset \mathbf{Spc}$ 的前复合给出。

现在我们回顾形状理论的基础知识。

1.24 回顾 （∞-topos 的形状）。记 $\mathbf{RTop}_\infty$ 为 ∞-范畴，其对象是 ∞-topoi，态射是几何态射（取右伴随）。形状是一个左伴随函子

$$\Pi_\infty : \mathbf{RTop}_\infty \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc})$$

它有如下显式描述。

(1.24.1) 给定一个 ∞-topos $\boldsymbol{X}$，其形状 $\Pi_\infty(\boldsymbol{X})$ 是左正合可达函子 $\mathbf{Spc} \to \mathbf{Spc}$，由以下复合给出

$$\Gamma_{\boldsymbol{X},*}\Gamma^*_{\boldsymbol{X}} : \mathbf{Spc} \to \mathbf{Spc}\,.$$

也就是说，对于每个空间 K，$\Pi_\infty(\boldsymbol{X})$ 在 K 上的取值是 $\boldsymbol{X}$ 中取值为 K 的常值对象的整体截面。

(1.24.2) 给定一个带有单位 $u : \mathrm{id}_{\boldsymbol{Y}} \to f_* f^*$ 的几何态射 $f_* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$，相应的 pro 空间态射 $\Pi_\infty(\boldsymbol{X}) \to \Pi_\infty(\boldsymbol{Y})$ 对应于态射

$$\Gamma_{\boldsymbol{Y},*} u \Gamma^*_{\boldsymbol{Y}} : \Gamma_{\boldsymbol{Y},*}\Gamma^*_{\boldsymbol{Y}} \longrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{Y},*} f_* f^* \Gamma^*_{\boldsymbol{Y}} \simeq \Gamma_{\boldsymbol{X},*}\Gamma^*_{\boldsymbol{X}}$$

在 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc})^{\mathrm{op}} \subset \mathrm{Fun}(\mathbf{Spc}, \mathbf{Spc})$。

更多详情请参阅 [HTT，§7.1.6；24，§2]。

1.25 记号。给定一个 ∞-拓扑斯 $\boldsymbol{X}$，我们用 $\widehat{\Pi}_\infty(\boldsymbol{X})$ 表示 $\Pi_\infty(\boldsymbol{X})$ 的有限生成完备化。我们称 $\boldsymbol{X}$ 的前有限形状为 $\widehat{\Pi}_\infty(\boldsymbol{X})$。

1.26 记号。 给定一个概形 X，我们用 $\Pi_\infty^{\text{ét}}(X) \coloneqq \Pi_\infty(X_{\text{ét}})$表示 X的 étale ∞-拓扑斯的形状。我们称 X的 étale 同伦型为 $\Pi_\infty^{\text{ét}}(X)$。我们用 $\widehat{\Pi}_\infty^{\text{ét}}(X)$表示 $X_{\text{ét}}$的前有限形状，并称 X的前有限 étale 同伦型为 $\widehat{\Pi}_\infty^{\text{ét}}(X)$。

我们经常使用以下改述，来说明几何态射何时在形状上诱导等价。

1.27 观察。 设 $f_* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ 是一个 ∞-topoi 之间的几何态射，且 Σ 是一个素数集合。那么，诱导映射 $\Pi_\infty(\boldsymbol{X}) \to \Pi_\infty(\boldsymbol{Y})$ 是等价，当且仅当对每个空间 K，整体截面上的诱导映射 $\Gamma(\boldsymbol{Y}; K) \to \Gamma(\boldsymbol{X}; K)$ 是等价。类似地，诱导映射

$$\Pi_\infty(\boldsymbol{X})^\wedge_\Sigma \to \Pi_\infty(\boldsymbol{Y})^\wedge_\Sigma$$

在 Σ-完备形状上是等价，当且仅当对每个 Σ-有限空间 K，整体截面上的诱导映射 $\Gamma(\boldsymbol{Y}; K) \to \Gamma(\boldsymbol{X}; K)$ 是等价。

关于一个 ∞-topos 的前有限形状，最重要的结果之一是，它由其分类局部常值对象这一性质刻画。

1.28 记号。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴。我们记

$$\mathrm{Fun}(-, \mathcal{C}) : \mathrm{Pro}(\mathbf{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}_\infty$$

对于唯一的函子，它扩张 $\mathrm{Fun}(-, \mathcal{C}) : \mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}_\infty$，并将 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Cat}_\infty)$ 中的余滤极限变换为 $\mathbf{Cat}_\infty$ 中的滤过余极限。

1.29 定理 (光滑对象的单值化 [5, 命题 4.4.18])。 设 $\boldsymbol{X}$ 为一个 ∞-*topos*。那么存在如下 ∞-范畴的自然等价

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{lis}} \simeq \mathrm{Fun}(\widehat{\Pi}_\infty(\boldsymbol{X}), \mathbf{Spc}_\pi) .$$

1.30 定理 [SAG，推论 E.2.3.3]。 设 $f_* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ 是 ∞-*topoi* 的一个几何态射。以下条件等价：

(1.30.1) 拉回函子 f^* 限制为一个等价 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{lis}} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{X}^{\mathrm{lis}}$。

(1.30.2) 所诱导的丛有限空间映射 $\widehat{\Pi}_\infty(\boldsymbol{X}) \to \widehat{\Pi}_\infty(\boldsymbol{Y})$ 是一个等价。

1.4 交换变换

现在我们回顾交换变换的一项关键相容性；在证明非阿贝尔基变换定理时，我们需要利用它将问题约化到严格亨泽尔局部环的情形。

1.31 定义。设

(1.32)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{\bar{f}_*} & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle \bar{g}_*}\downarrow & \sigma & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow[f_*]{} & \mathcal{Z} \end{array}$$

是一个由 ∞-范畴和函子构成的方块，且各图通过自然变换 σ 交换。假设 f_* 和 $\bar{f}_*$ 分别存在左伴随 f^* 和 $\bar{f}^*$。记作 $c_f : f^* f_* \to \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$

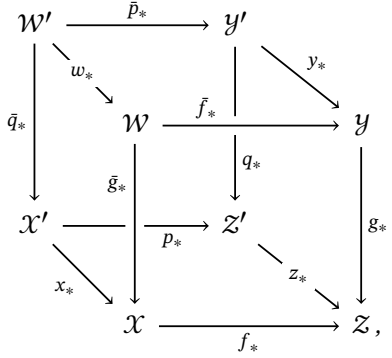
$\bar{\ }$ $\bar{\ }$表示余单位，$u_{\bar{f}}\colon \mathrm{id}_y \to f_* f^*$ 表示单位。与定向方块（相关联的交换变换 1.32）是以下复合自然变换：

$$\mathrm{Ex}\colon f^* g_* \xrightarrow{f^* g_* u_{\bar{f}}} f^* g_* \bar{f}_* \bar{f}^* \xrightarrow{f^* \sigma \bar{f}^*} f^* f_* \bar{g}_* \bar{f}^* \xrightarrow{c_f \bar{g}_* \bar{f}^*} \bar{g}_* \bar{f}^* .$$

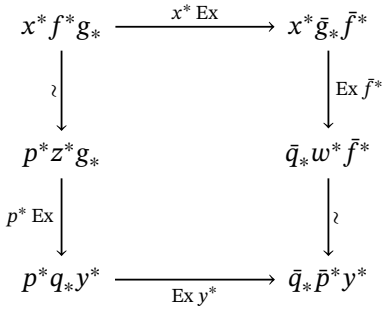
注意，如果 σ 是一个等价（因此（1.32）交换），那么定义 Ex 中的中间态射是一个等价。

下述结论可由“伴随对应”的函子性立即得到；参见 [23, 定理 B 和推论 F；34，§2.2；38，定理 B.3。6]。

1.33 命题。设



这是一个由 ∞-范畴和右伴随函子组成的交换立方体。那么这个方块



自然交换。这里所示的等价是伴随的自然识别。

2 从经典基变换到非阿贝尔基变换 e

本节的目标是证明以下定理的非阿贝尔精化：光滑基变换定理（推论 2.30）、适当基变换定理（推论 2.31）、Gabber–Huber 适当基变换的仿射类比（推论 2.34），以及 Fujiwara–Gabber 刚性定理（推论 2.36）。

在§2.1 中，我们回顾如何用整体截面来描述严格亨泽尔局部环上 étale 层的茎。在§2.2中，我们给出交换变换的茎的一种简单描述

（引理 2.13）。利用这一描述，§2.3 证明了若干关键技术结果，使我们能够将证明非阿贝尔基变换定理化归为证明经典基变换结果（命题 2.15 和推论 2.22 及2.25）。小节 2.4推导出上一段提及的所有基变换定理的非阿贝尔精化。在§2.5中，我们应用非阿贝尔光滑与适当基变换定理，证明在远离剩余特征处完备化后，概形的光滑真态射的几何纤维的 étale 同伦型在特化下保持不变（见命题 2.49）。

2.1 关于严格亨泽尔局部环的一般性质

我们先介绍严格亨泽尔局部环的一些一般事实，特别是整体截面可以计算为闭点处的茎。

2.1 记号。 设 A 和 B 是严格亨泽尔局部环，$\phi\colon B\to A$ 是局部环同态。记 $f\colon \mathrm{Spec}(A)\to\mathrm{Spec}(B)$ 为诱导的谱之间的映射。记 $x\to\mathrm{Spec}(A)$ 和 $z\to\mathrm{Spec}(B)$ 分别为由 A 和 B 的剩余域所确定的几何点。

2.2 命题 (通过整体截面得到茎)。 在记号 *2.1* 的设定下：

(2.2.1) 存在一个自然等价

$$x^*\simeq\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(A);-)$$

函子 $\mathrm{Spec}(A)_{\text{ét}}\to\mathbf{Spc}$。因此 $x_*\colon\mathbf{Spc}\to\mathrm{Spec}(A)_{\text{ét}}$ 是全局截面函子的右伴随。

(2.2.2) 存在自然等价

$$\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(A);f^*(-))\simeq x^*f^*\simeq z^*\simeq\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(B);-)$$

函子 $\mathrm{Spec}(B)_{\text{ét}}\to\mathbf{Spc}$。

证明。 (2.2.1) 在 1-拓扑斯的情形下的证明见 [SGA 4_{II}，专题 VIII，命题 4。6]其中给出的证明原封不动地 适用于 ∞-拓扑斯的情形。对于 (2.2.2)，注意到由于ϕ 是一个局部环同态，我们有概形的交换方块

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(A) & \xrightarrow[f]{} & \mathrm{Spec}(B)\,. \end{array}$$

转到 étale ∞-拓扑斯后，我们得到一个 ∞-拓扑斯的交换方块

$$\begin{array}{ccc} x_{\text{ét}} & \longrightarrow & z_{\text{ét}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(A)_{\text{ét}} & \xrightarrow[f_*]{} & \mathrm{Spec}(B)_{\text{ét}}\,. \end{array} \tag{2.3}$$

由于 x和 z是几何点，$x_{\text{ét}}\simeq\mathbf{Spc}$和 $z_{\text{ét}}\simeq\mathbf{Spc}$。由于 **Spc** 是终端的 ∞-拓扑斯，我们推得，式（2.3）中的上方水平几何态射是恒等态射。这表明

$x_* f_* \simeq z_*$；等价地， $f^* x^* \simeq z^*$。将式（2.2.1）应用于这两个严格亨泽尔局部环A 和 B，我们推得

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(A); f^*(-)) &\simeq f^* x^* \\ &\simeq z^* \simeq \Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(B); -)\,.\end{aligned}$$

□

在这种情形下，常值层函子也是全忠实的：

2.4 引理。设 $\boldsymbol{X}$ 是一个 ∞-*topos*。若全局截面函子 $\Gamma_* : \boldsymbol{X} \to \mathbf{Spc}$ 有一个右伴随 $\Gamma^\sharp : \mathbf{Spc} \to \boldsymbol{X}$，则 $\Gamma^\sharp$ 和 Γ^* 都是全忠实的。

证明。为说明 $\Gamma^\sharp$ 是全忠实的，先注意到 $\Gamma^\sharp$ 是一个几何态射。由于**Spc** 是终端 ∞-topos [HTT，命题 6.3.4。1], 复合几何态射

$$\Gamma_* \Gamma^\sharp : \mathbf{Spc} \to \mathbf{Spc}$$

等价于 $\mathrm{id}_{\mathbf{Spc}}$。由于 $\Gamma^\sharp$ 是 Γ_*的右伴随，这意味着 $\Gamma^\sharp$ 是全忠实的 [10,引理 3.3。1]。

现在，由如下普遍事实可知 Γ^* 是全忠实的：给定一个伴随三元组 $f^* \dashv f_* \dashv f^\sharp$，函子 f^* 全忠实当且仅当 $f^\sharp$ 全忠实。 □

2.5 例。 对于严格亨泽尔局部环 A，常值层函子 $\mathbf{Spc} \to \mathrm{Spec}(A)_{\text{ét}}$是完全忠实的。

2.6 引理。 沿用 记号 *2.1*，并设

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathrm{Spec}(A) & \xrightarrow[f]{} & \mathrm{Spec}(B) \end{array}$$

是概形的交换方块。那么存在一个自然的交换方块

$$\begin{array}{ccc} x^* f^* g_* & \xrightarrow{x^*\,\mathrm{Ex}} & x^* \bar{g}_* \bar{f}^* \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ \Gamma_{\text{ét}}(Y; -) & \longrightarrow & \Gamma_{\text{ét}}(W; \bar{f}^*(-)) \end{array}$$

其对象为函子 $Y_{\text{ét}} \to \mathbf{Spc}$。其中竖直映射是等价，底部水平映射由单位 $\mathrm{id} \to f_* f^*$诱导$^{-}$ $^{-}$。

证明。 为简化记号，记 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 和 $Z = \mathrm{Spec}(B)$。由于 $x^* \simeq \Gamma_{\text{ét}}(X; -)$，等价地，我们需要证明存在一个将 x^* 替换为 $\Gamma_{\text{ét}}(X; -)$的交换方形。为此，考虑由 ∞ 给出的拓扑范畴交换图

(2.7)

$$\begin{array}{ccc} W_{\text{ét}} & \xrightarrow{\bar{f}_*} & Y_{\text{ét}} \\ {\scriptstyle \bar{g}_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ X_{\text{ét}} & \xrightarrow[f_*]{} & Z_{\text{ét}} \\ {\scriptstyle \Gamma_{\text{ét}}(X;-)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_{\text{ét}}(Z;-)} \\ \mathbf{Spc} & = & \mathbf{Spc}\,. \end{array}$$

由交换变换的函子性可知，存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_{\text{ét}}(Z; g_*(-)) & \xrightarrow{\mathrm{Ex}\, g_*} & \Gamma_{\text{ét}}(X; f^* g_*(-)) & \xrightarrow{\Gamma_{\text{ét}}(X;-)\,\mathrm{Ex}} & \Gamma_{\text{ét}}(X; \bar{g}_* \bar{f}^*(-)) \\
\downarrow\wr & & & & \downarrow\wr \\
\Gamma_{\text{ét}}(Y; -) & & \xrightarrow[\mathrm{Ex}]{} & & \Gamma_{\text{ét}}(W; \bar{f}^*(-)) .
\end{array}$$

这里的纵向等价是伴随的同一认定，左上方的水平态射由与（2.7）底部方块相关联的交换变换诱导，右上方的水平态射由与（2.7）顶部方块相关联的交换变换诱导，而底部的水平态射则是与（2.7）中最外层矩形相关联的交换变换。

为完成证明，注意到根据 命题 2.2 以及整体截面函子的唯一性，交换变换 $\Gamma_{\text{ét}}(Z; -) \to \Gamma_{\text{ét}}(X; f^*(-))$ 是一个等价。此外，由于图表（2.7）中的底部水平函子是恒等函子，展开定义可知，与（2.7）中最外层矩形相关联的交换变换由此给出¯ ¯: 将 $\Gamma(Y; -)$ 作用于单位 $\mathrm{id} \to f_* f^*$。 □

2.2 交换变换的茎

Let

$$\begin{array}{ccc}
W & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\
{\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
X & \xrightarrow[f]{} & Z
\end{array} \tag{2.8}$$

是拟紧拟分离概形的一个交换方形（我们在本小节中始终固定此方形）。给定一个几何点 $x \to X$，本小节的目标是利用 引理 2.6 将¯交换变换 $f^* g_* \to \bar{g}_* f^*$ 在 x 处的茎表示为整体截面。为了解释这一点，我们固定以下记号。

2.9 记号 （严格局部化）。令 S 为一个拟紧拟分离概形， $s \to S$ 为一个几何点。记

$$S_{(s)} \coloneqq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{S,s})$$

为 S 在 s 处的严格局部化。记 $\ell_s \colon S_{(s)} \to S$ 为投影。给定拟紧拟分离概形的一个态射 $X \to S$，记 X_s 和 $X_{(s)}$ 为概形的拉回

$$\begin{array}{ccccc}
X_s & \longrightarrow & X_{(s)} & \xrightarrow{\bar{\ell}_s} & X \\
\downarrow & \lrcorner & {\scriptstyle f_{(s)}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\
s & \longrightarrow & S_{(s)} & \xrightarrow[\ell_s]{} & S .
\end{array}$$

我们需要的关键事实是，右侧方形满足截断层的基变换 s:

2.10 命题。 保持 记号 *2.9*。那么，对于每个截断 *étale* 层 $F \in X_{\text{ét}, <\infty}$，交换变换

$$\ell_s^* f_*(F) \to f_{(s),*} \bar{\ell}_s^*(F)$$

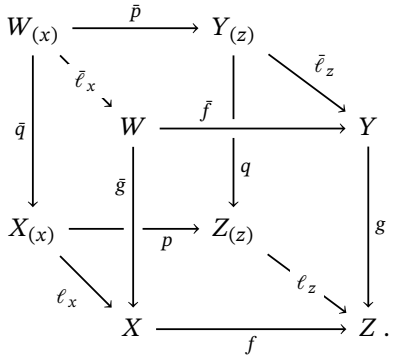
是一个等价。

证明。 结合 [5,例 6.7.4 和命题 7.5.1]与 [22,命题 2.3]。 □

在本节余下部分，我们将使用以下记号：

2.11记号。 考虑拟紧拟分离概形的一个交换方形（2.8）。设 $x \to X$ 是一个几何点，其像为 $z \to Z$，位于 Z中。我们将由拉回的函子性所诱导的这些概形之间的自然态射记为如下交换立方体所示：

(2.12)



根据定义，（2.12）的侧面竖直面是拉回方块。因此，如果前面竖直面是拉回方块，那么后面竖直面也同样是拉回方块。

现在我们可以将交换变换的茎改写为整体截面的形式：

2.13 引理。 设有一个交换方形 (2.8) 由拟紧拟分离概形组成，并令 $x \to X$ 为一个几何点，其像为 $z \to Z$。则：

(2.13.1) 存在一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} \ell_x^* f^* g_* & \xrightarrow{\ell_x^* \,\mathrm{Ex}} & \ell_x^* \bar{g}_* \bar{f}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ p^* q_* \bar{\ell}_z^* & \xrightarrow[\mathrm{Ex}\, \bar{\ell}_z^*]{} & \bar{q}_* \bar{p}^* \bar{\ell}_z^* \end{array}$$

函子 $Y_{\text{ét}} \to X_{(x),\text{ét}}$之间。此外，两个垂直自然变换在截断 *étale* 层上的取值为等价。

(2.13.2) 存在一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} x^* f^* g_* & \xrightarrow{x^* \,\mathrm{Ex}} & x^* \bar{g}_* \bar{f}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{\text{ét}}(Y_{(z)}; \bar{\ell}_z^*(-)) & \longrightarrow & \Gamma_{\text{ét}}(W_{(z)}; \bar{p}^* \bar{\ell}_z^*(-)) \end{array}$$

到函子范畴 $Y_{\text{ét}} \to x_{\text{ét}} \simeq \mathbf{Spc}$ 的函子。此外，当作用于截断 *étale* 层时，竖直自然变换是等价。

证明。 断言（2.13.1）是命题 2.10 与交换变换的函子性（命题 1.33）应用于与概形立方体（ ∞相关联的 étale -topoi 图表后立即得到的结论。取几何点 $x \to X_{(x)}$处的茎后，断言（2.13.2）由（2.13.1）结合引理 2.6即可推出。 □

下面给出了交换变换何时为等价的另一种表述 e.

2.14 推论。 设有一个拟紧拟分离概形的交换方形 (2.8)，并设 $F \in Y_{\text{ét},<\infty}$ 是 Y 上的一个截断 *étale* 层。以下条件等价：

(2.14.1) 交换变换 $f^* g_*(F) \to \bar{g}_* f^*(F)$ 是等价。

(2.14.2) 对于每个几何点 $x \to X$，交换变换的茎

$$x^* f^* g_*(F) \to x^* \bar{g}_* \bar{f}^*(F)$$

是一个等价。

(2.14.3) 对于每个几何点 $x \to X$ （其像为 $z \to Z$），自然映射

$$\Gamma_{\text{ét}}(Y_{(z)}; \bar{\ell}_z^* F) \to \Gamma_{\text{ét}}(W_{(z)}; \bar{p}^* \bar{\ell}_z^* F)$$

是一个等价。

证明。 由 引理 2.13 以及拟紧拟分离概形上的截断空间 étale 层之间的等价可在茎上检验这一事实可立即得出 [SAG，命题2.3.4.2&A.4.0。5]。 □

2.3 归约到局部情形

鉴于推论2.14，下面的拓扑斯论命题给出了一个判据：利用层的基变换1-群胚的基变换以及阿贝尔群层的上同调基变换，可推出交换变换的茎是一个等价。我们最关注的是由概形态射诱导的 étale ∞-拓扑斯上的推前情形。

2.15 命题。设 $\pi_* : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ 是一个 ∞-拓扑斯之间的几何态射，并设 $\boldsymbol{V}' \subset \boldsymbol{V}_{<\infty}$ 是一个对有限极限和截断封闭的全子范畴。考虑以下陈述：

(2.15.1) 对于每个1-截断对象 $F \in \boldsymbol{V}'$，自然映射 $\Gamma(\boldsymbol{V}; F) \to \Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^* F)$ 是一个等价。

(2.15.2) 对于每个整数 $n \geq 2$ 和每个次数为 n 的 *Eilenberg–MacLane* 对象 $G \in \boldsymbol{V}'$，自然映射 $\Gamma(\boldsymbol{V}; G) \to \Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^* G)$ 是一个等价。

(2.15.3) 对于每个整数 $n \geq 2$ 和 *n-gerbe* $G \in \boldsymbol{V}'$，G 的带化属于 $\boldsymbol{V}'$。

(2.15.4) 对于每个整数 $n \geq 2$ 和 *n-gerbe* $G \in \boldsymbol{V}'$，自然映射 $\Gamma(\boldsymbol{V}; G) \to \Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^* G)$ 是等价。

(2.15.5) 对于每个 $F \in \boldsymbol{V}'$，自然映射 $\Gamma(\boldsymbol{V}; F) \to \Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^* F)$ 是一个等价。

于是，(2.15.2) 和 (2.15.3) 一起推出 (2.15.4)。此外，(2.15.1) 和 (2.15.4) 一起推出 (2.15.5)。因此，(2.15.1)、(2.15.2) 和 (2.15.3) 一起推出 (2.15.5)。

2.16 备注。 条件（2.15.2）等价于以下条件：对于每个阿贝尔群对象 A 的 $(\boldsymbol{V}')_{\leq 0}$ 以及整数 $i \geq 0$，其在上同调群上诱导的映射

$$\mathrm{H}^i(\boldsymbol{V}; A) \to \mathrm{H}^i(\boldsymbol{U}; \pi^* A)$$

是一个同构。

2.17 备注。 命题 2.15 对于专家来说想必是熟知的。例如，在更具体的情形中，我们给出的论证实质上已经出现在 [8, 命题 5。11] 和 [11, §4] 中。由于我们找不到以完整一般性陈述这一结果的参考文献，因此决定将其记录下来，以传之后世。

证明 （2.15.2） +（2.15.3） ⇒ （2.15.4）。 令 $n \geq 2$，并令 $G \in \boldsymbol{V}'$ 为一个 n-gerbe。根据假设（2.15.2），剩下要证明的是：如果 $\Gamma(\boldsymbol{V}; G) = \varnothing$，那么 $\Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^* G) = \varnothing$。

记 $A \in \boldsymbol{V}$ 为 G的带化；根据假设（2.15.3），我们有 $A \in \boldsymbol{V}'$。令

$$\alpha_G \in \mathrm{H}^{n+1}(\boldsymbol{V}; A) \qquad \text{and} \qquad \alpha_{\pi^* G} \in \mathrm{H}^{n+1}(\boldsymbol{U}; \pi^* A)$$

表示通过 G 和 $\pi^* G$ 由定理 1.15所对应的上同调类。由于 $\Gamma(\boldsymbol{V}; G)$为空，推论 1.16 表明 α_G 非零。再次由推论 1.16可知，$\Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^* G) = \varnothing$ 这一断言等价于上同调类 $\alpha_{\pi^* G}$ 非零这一断言。为证明 $\alpha_{\pi^* G} \neq 0$，将假设（2.15.2）应用于 $(n+1)$-gerbe $\mathrm{K}(A, n+1)$，可知阿贝尔群的自然拉回映射

$$\mathrm{H}^{n+1}(\boldsymbol{V}; A) \to \mathrm{H}^{n+1}(\boldsymbol{U}; \pi^* A) \tag{2.18}$$

是一个同构。由于同构（2.18）将 α_G 映射到 $\alpha_{\pi^* G}$，并将 $\alpha_G \neq 0$映射到 $\alpha_{\pi^* G} \neq 0$，故我们得到所需结论。 □

证明 (2.15.1) +(2.15.4) ⇒ (2.15.5)。 利用 $\boldsymbol{V}'$ 中的每个对象都是截断的这一事实，我们对整数 $n \geq 1$ 进行归纳，其中 F 是 n-截断的。基例 $n = 1$由假设（2.15.1）成立。对于归纳步骤，假设我们已知该结论对 n中的 $\boldsymbol{V}'$-截断对象成立，并令 $F \in \boldsymbol{V}'$ 为一个 $(n+1)$-截断对象。由于拉回函子与 n-截断相交换，我们得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\boldsymbol{V}; F) & \xrightarrow{c_F} & \Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^*(F)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\boldsymbol{V}; \tau_{\leq n} F) & \xrightarrow[c_{\tau_{\leq n} F}]{} & \Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^*(\tau_{\leq n} F)) \,. \end{array} \tag{2.19}$$

根据归纳假设，态射 $c_{\tau_{\leq n} F}$ 是一个等价。因此，只需证明方块（2.19）是一个拉回方块。若 $\Gamma(\boldsymbol{V}; \tau_{\leq n} F) = \varnothing$，则根据归纳假设，（2.19）中出现的所有空间都是空的，因此结论显然成立。于是设 $\Gamma(\boldsymbol{V}; \tau_{\leq n} F) \neq \varnothing$；那么我们需要证明，对于 $\Gamma(\boldsymbol{V}; \tau_{\leq n} F)$中的每个点，纤维上的诱导映射

$$\mathrm{fib}\left(\Gamma(\boldsymbol{V}; F) \to \Gamma(\boldsymbol{V}; \tau_{\leq n} F)\right) \xrightarrow{\theta_{F,n}} \mathrm{fib}\left(\Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^* F) \to \Gamma(\boldsymbol{U}; \pi^* \tau_{\leq n} F)\right)$$

是一个等价。

给定 $\Gamma(\boldsymbol{V};\tau_{\leq n}F)$ 的这样一个点 $*\to\tau_{\leq n}F$，记作

$$\tau_{\geq n+1}F\coloneqq \mathrm{fib}(F\to\tau_{\leq n}F)\,.$$

由于 F 是 $(n+1)$-截断的，$\tau_{\geq n+1}F$ 是 $(n+1)$-截断且 n-连通。也就是说，$\tau_{\geq n+1}F$ 是一个 $(n+1)$-gerbe。由于整体截面函子和拉回函子与有限极限交换，我们得到如下交换方形

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(\boldsymbol{V};\tau_{\geq n+1}F) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{fib}\left(\Gamma(\boldsymbol{V};F)\to\Gamma(\boldsymbol{V};\tau_{\leq n}F)\right)\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{F,n}}\\ \Gamma(\boldsymbol{U};\pi^*\tau_{\geq n+1}F) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{fib}\left(\Gamma(\boldsymbol{U};\pi^*(F))\to\Gamma(\boldsymbol{U};\pi^*\tau_{\leq n}F)\right)\end{array}\,,$$

其中水平映射均为等价，左侧垂直映射为自然映射。由于 $\tau_{\geq n+1}F$ 是一个 $(n+1)$-gerbe，假设（2.15.4）蕴含左侧垂直映射是等价。因此，$\theta_{F,\,n}$ 也为等价，正如所需。

□

为了应用 命题 2.15，我们首先将 Σ-挠层所满足的性质公理化。

2.20 定义。设 X 是一个拟紧拟分离概形。一个 ***étale*** 系数子范畴 是一个全子范畴$\mathcal{S}(X)\subset X_{\text{ét}}$，满足以下性质：

(2.20.1) 子范畴 $\mathcal{S}(X)\subset X_{\text{ét}}$ 对有限极限封闭。

(2.20.2) $\mathcal{S}(X)$ 的每个对象都是截断的。

(2.20.3) 对每个整数 $n\geq 0$ 和对象 $F\in\mathcal{S}(X)$，都有 $\tau_{\leq n}(F)\in\mathcal{S}(X)$。

(2.20.4) 对每个整数 $n\geq 2$ 和 n-gerbe $G\in\mathcal{S}(X)$，G 的带化属于 $\mathcal{S}(X)$。

一个 ***étale*** 系数系统 $\mathcal{S}\colon \mathbf{Sch}^{\mathrm{qcqs},\ \mathrm{op}}\to\mathbf{Cat}_\infty$ 是函子

$$(-)_{\text{ét}}\colon \mathbf{Sch}^{\mathrm{qcqs,op}}\to\mathbf{Cat}_\infty$$

使得对每个拟紧拟分离概形 X，子范畴 $\mathcal{S}(X)\subset X_{\text{ét}}$ 都是一个 étale 系数子范畴。

2.21 例。鉴于 命题 1.18，以下是 étale 系数系统：

(2.21.1) $\mathcal{S}(X)\coloneqq X_{\text{ét},\ <\infty}$ 是 X 上截断 étale 层的 ∞-范畴。

(2.21.2) Σ 是一个素数集合，且 $\mathcal{S}(X)$ 是 X上 Σ-挠 étale 层的 ∞-范畴。

以下是 命题 2.15 的关键推论：

2.22 推论。设 $\pi\colon U\to V$ 是拟紧拟分离概形之间的一个态射。设 $\mathcal{S}(V)\subset V_{\text{ét}}$是一个 ***étale*** 系数子范畴。假设满足以下条件：

(2.22.1) 若 $G\in\mathcal{S}(V)$ 是1-截断的，则自然映射 $\Gamma_{\text{ét}}(V;G)\to\Gamma_{\text{ét}}(U;\pi^*G)$ 是一个等价。

(2.22.2) 对于 $\mathcal{S}(V)_{\leq 0}$ 的每个阿贝尔群对象 A 以及每个整数 $i\geq 0$，自然映射

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(V;A)\to\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(U;\pi^*A)$$

是一个同构。

那么对于每个 $F \in \mathcal{S}(V)$，自然映射 $\Gamma_{\text{ét}}(V;F) \to \Gamma_{\text{ét}}(U;\pi^*F)$ 是一个等价。

证明。 该断言由命题 2.15推出；鉴于注记 2.16，假设（2.15.1）–（2.15.3）由我们的假设和系数子范畴的定义满足。 □

2.23 定义。 设 $\mathcal{S} : \mathbf{Sch}^{\text{qcqs},\ \text{op}} \to \mathbf{Cat}_\infty$ 是一个 étale 系数系统。称拟紧拟分离概形之间的交换方形

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Z \end{array} \tag{2.24}$$

对 $\mathcal{S}$-系数满足基变换，若对每个 $F \in \mathcal{S}(Y)$，交换变换

$$f^* g_*(F) \to \bar{g}_* \bar{f}^*(F)$$

是一个等价。

2.25 推论 （化归到严格亨泽尔局部环）。 设 $\mathcal{S} : \mathbf{Sch}^{\text{qcqs},\ \text{op}} \to \mathbf{Cat}_\infty$ 是一个 *étale* 系数系统，并考虑拟紧拟分离概形的交换方形（2.24）。假设对每个几何点 $x \to X$ （其像为 $z \to Z$），以下条件均成立：

（2.25.1）若 $G \in \mathcal{S}(Y_{(z)})$ 是1-截断的，则自然映射 $\Gamma_{\text{ét}}(Y_{(z)};G) \to \Gamma_{\text{ét}}(W_{(x)};\bar{p}^*G)$ 是一个等价。

(2.25.2) 对于每个阿贝尔群对象 A *of* $\mathcal{S}(Y_{(z)})_{\leq 0}$ 及整数 $i \geq 0$，自然映射

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(Y_{(z)};A) \to \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(W_{(x)};\bar{p}^*A)$$

是一个同构。

那么，方形 (2.24)满足关于 $\mathcal{S}$-系数的基变换。

证明。 结合推论 2.14和2.22。 □

2.26 备注。 §§2.1 至 2.3 中关于以 étale 为基础的 ∞-概形拓扑的结果，在将这些概形拓扑替换为任意∞-拓扑后仍然成立。要在这一更一般的情形下表述这些结果，可将“几何点”替换为“一个 ∞-拓扑的点”，将“严格亨泽尔局部环谱的 étale ∞-拓扑”替换为“局部 ∞-拓扑”（见 [SGA 4_{II}, 专题 VI，8.4.6；5，§6.2；30，§C.3.6； 31]），并将“拟紧拟分离”假设替换为该 ∞-拓扑是“有界相干”的假设（见 [SAG，定义A.2.0.12 &A.7.1。2]）。我们特意撰写了证明，使其在这一更一般的情形下也能逐字适用。不过，为了让代数几何读者更容易熟悉这些论证，我们决定将本节的结果表述为适用于以 étale 为基础的 ∞-概形拓扑。

2.4 非阿贝尔基变换定理

现在，我们利用 第 2.3 节 的结果，从文献中已有的结果推导出若干非阿贝尔基变换定理。前两个是光滑基变换定理和适当基变换定理的非阿贝尔精化。

2.27 回顾。 概形的一个态射 $f : X \to Z$ 称为原光滑的，如果存在一个余滤图 $X_\bullet : I \to \mathbf{Sch}_Z$，其对象为光滑的 Z-概形且过渡映射为仿射映射，并且 $X \cong \lim_{i\in I} X_i$，而 f 是投影。

2.28 例。 设 $f : X \to Z$ 是概形的一个pro光滑态射，$x \to X$ 是一个几何点，其像为 $z \to Z$。那么在严格局部概形的谱上诱导的态射 $X_{(x)} \to Z_{(z)}$ 是pro光滑的。

对于接下来的两个结果，设

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Z \end{array} \tag{2.29}$$

是拟紧拟分离概形的一个拉回方块。

2.30 推论 (非阿贝尔光滑基变换)。 记 Σ 为在 Z上可逆的素数集合。f 若是*pro*光滑的，则拉回方块 (2.29)满足以 Σ-挠系数的基变换。

证明。 只需证明 Σ-挠层的étale 系数系统满足 推论 2.25的假设。假设 (2.25.1) 由 Giraud 关于群胚层的光滑基变换定理 [19,第七章，定理 2.1。2]。假设 (2.25.2) 是经典的光滑基变换定理 [SGA 4_{III}，第 XII 讲义，推论 1。2]。 □

2.31 推论 （非阿贝尔适当基变换）。 若 g 是适当的，则拉回方块 （2.29）满足带挠系数的基变换。

证明。 同样，只需证明挠层的 étale 系数系统满足推论 2.25的假设。假设（2.25.1）由 Giraud 关于群胚层的适当基变换定理推出 [19, 第七章，定理 2.2.2； 29，Exposé XX，定理 2.1。2],[3] 而假设（2.25.2）则是经典结果 [SGA 4_{III}，Exposé XII，定理 5。1]。 □

2.32 备注。 尽管具体化简到更简单情形的方式有所不同，我们证明非阿贝尔适当基变换的核心思想与 Chough 的证明相同 [11,定理 1。2]。Chough 的工作与有界相干 ∞-topoi [5,定向纤维积基变换定理的证明相结合 7.1.7； 29，Exposé XI，定理 2。4] 启发了我们对命题 2.15以及推论 2.30和2.31的证明。

现在我们来说明 Gabber–Huber 适当基变换定理仿射类比 [18 的非阿贝尔扩展，以及 27] Fujiwara–Gabber 刚性定理 [17，推论 6.6.4]。[4] 为陈述这些结果，我们固定以下记号。

2.33 记号。 设 (A, I) 是一个亨泽尔对，$f : X \to \mathrm{Spec}(A)$ 是一个真态射。记

$$Z \coloneqq \mathrm{Spec}(A/I) \underset{\mathrm{Spec}(A)}{\times} X ,$$

[3]Giraud 的结果对诺特性作了假设； [29,Exposé XX，定理 2.1.2] 解释了为什么这些假设是不必要的。[4] Fujiwara–Gabber 定理推广了 Elkik 的一个结果 [14, 第 579] 页。

并记 $i\colon Z \hookrightarrow X$ 为包含映射。设 $U \subset \operatorname{Spec}(A)$ 是一个包含 $\operatorname{Spec}(A) \smallsetminus \mathrm{V}(I)$ 的开集。记 $A^\wedge$ 为 A 的 I-进完备化，并记

$$U^\wedge \coloneqq U \underset{\operatorname{Spec}(A)}{\times} \operatorname{Spec}(A^\wedge)\,.$$

记 $\pi\colon U^\wedge \to U$ 为投影。

2.34 推论 （适当基变换的非阿贝尔仿射类比）。设 (A, I) 是一个亨泽尔对，并沿用 记号 *2.33*。那么：

(2.34.1) 对于任意空间的挠层 $F \in X_{\text{ét}}$，自然映射 $\Gamma_{\text{ét}}(X; F) \to \Gamma_{\text{ét}}(Z; i^* F)$ 是一个等价。

(2.34.2) 丛有限空间之间诱导的映射 $\hat{\Pi}^{\text{ét}}_\infty(Z) \to \hat{\Pi}^{\text{ét}}_\infty(X)$ 是一个等价。

证明。 首先注意，(2.34.2) 可由将 (2.34.1) 限制到常值层得到。对于 (2.34.1)，根据 推论 2.22 应用于态射 i，只需证明当 F 是 1-截断的情形，以及带挠系数的阿贝尔上同调情形。这些结果见 [18, §5，推论 1]。 □

2.35 备注。 适当基变换的仿射类比最典型的表述假设 $X = \operatorname{Spec}(A)$ 和 $Z = \operatorname{Spec}(A/I)$。

以下结果去除了 [1, 定理 4.2.2]中的诺特性和特征零假设。另见 [2,§§6.2 和 6.3]。

2.36 推论 (非阿贝尔藤原–加伯刚性)。 设 (A, I) 是一个亨泽尔对，且 $I \subset A$有限生成，并沿用 记号 *2.33*。那么：

(2.36.1) 对于每个空间的挠层 $F \in U_{\text{ét}}$，自然映射 $\Gamma_{\text{ét}}(U; F) \to \Gamma_{\text{ét}}(U^\wedge; \pi^* F)$ 是一个等价。

(2.36.2) 诱导出的丛有限空间映射 $\hat{\Pi}^{\text{ét}}_\infty(U^\wedge) \to \hat{\Pi}^{\text{ét}}_\infty(U)$ 是一个等价。

证明。 同样，(2.36.2) 可由 (2.36.1) 通过限制到常值层得到。对于 (2.36.1)，将推论 2.22 应用于态射 π，只需在 F 为 1-截断的情形下证明该断言；对于带挠系数的阿贝尔上同调也同样如此。 1-截断的情形即[29, Exposé XX，定理 2.1。2]。阿贝尔上同调的陈述是众所周知的；例如，参见 [7,定理 6。11]。 □

2.37 备注。 Fujiwara–Gabber定理最常见的表述假设

$$U = \operatorname{Spec}(A) \smallsetminus \mathrm{V}(I) \qquad \text{and} \qquad U^\wedge = \operatorname{Spec}(A^\wedge) \smallsetminus \mathrm{V}(IA^\wedge)\,.$$

2.38 备注（谱的挠层的基变换）。推论 2.30、2.31、2.34 和 2.36 对（Σ-）挠谱层也得出相同的结果。下面简要说明原因。设 Σ 是一组素数。若对每个 $n \in \mathbf{Z}$，空间 $\Omega^\infty E[n]$ 都是 Σ-有限空间，则称谱 E 为 Σ-有限。（注意， Σ-有限谱必定有上界。）据此，若 X 是拟紧拟分离概形，我们可以修改定义 1.8 和 1.9，使其适用于谱的 étale 层。设 F 是 X 上的谱的 étale 层。若存在 X 的一个 étale 覆盖 $\{U_1, \dots, U_n\}$，使得对每个 i，限制 $F|_{U_i}$ 都是常值层，且其取值为一个 Σ- 有限谱，则称 F 为 Σ-挠局部常值层。若存在有限偏序集 P，以及一个

分层 $\{X_p\}_{p\in P}$，其由拟紧拟分离的局部闭子概形 X 构成，并且对每个 $p\in P$，谱的 étale 层 $F|_{X_p}$ 都是 Σ-挠局部常值层，则称 F 为 Σ-挠，如果 F 是截断的，且 F 可写成由 Σ-挠可构造谱 étale 层组成的滤过图表的余极限。

记 $\mathrm{Sp}(X_{\text{ét}})$ 为 X上的谱的 étale 层所构成的稳定 ∞-范畴。 ∞-范畴$\mathrm{Sp}(X_{\text{ét}})$与 ∞-topos $X_{\text{ét}}$的稳定化相同。由稳定化在左正合函子下的函子性可知，沿概形态射的拉回与移位及底层空间函子 $\Omega^\infty_X:\mathrm{Sp}(X_{\text{ét}})\to X_{\text{ét}}$相交换。此外，函子 Ω^∞_X保筛余极限[HTT，推论 5.2.6.18]。因此，若 $F\in\mathrm{Sp}(X_{\text{ét}})$ 是 Σ-挠局部常值、 Σ-挠可构造，或 Σ-挠谱的 étale 层，则对每个 $n\in\mathbf{Z}$，空间的 étale 层 $\Omega^\infty_X F[n]$ 都具有相同性质。因此，直接应用 [20, 命题 4.7] 可知，推论 2.30、2.31、2.34 和 2.36 对（Σ-）挠谱层也成立。

2.5 应用：特化下的不变性

作为§2.4结果的直接应用，我们可以看到，对于真态射 $X\to S$，几何纤维 X_s 与“米尔诺球” $X_{(s)}$ 的前有限 étale 同伦型相同：

2.39 推论。设 $f:X\to S$ 是拟紧拟分离概形之间的真态射， $s\to S$ 是一个几何点。那么闭浸入 $i:X_s\hookrightarrow X_{(s)}$ 诱导一个等价

$$\hat\Pi^{\text{ét}}_\infty(X_s)\xrightarrow{\sim}\hat\Pi^{\text{ét}}_\infty(X_{(s)})\,.$$

Pro（证明见应用推论 2.34于亨泽尔对$(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{S,s},\mathfrak{m}_s)$ 及态射 $X_{(s)}\to S_{(s)}$。） □

2.40 备注。推论 2.39从 [16, 命题 86]中去除了诺特性假设。

对于前光滑态射，也有推论 2.39的对偶版本。为此，我们需要几个引理。

2.41 引理。设 T 是一个不可约拓扑空间，其泛点为 η。并记 $\eta:\{\eta\}\hookrightarrow T$为泛点的包含映射。则：

(2.41.1) 存在函子范畴的自然识别 $\eta_*=\Gamma^*_{\mathrm{Sh}(T)}\,\mathbf{Spc}\to\mathrm{Sh}(T)$。

(2.41.2) 若 $F\in\mathrm{Sh}(T)$是常值层，则单位 $F\to\eta_*\eta^*(F)$是等价。

证明。 首先注意到（2.41.2）是（2.41.1）的直接推论。对于（2.41.1），注意到由于 T 是不可约的，且 η 是泛点， T 的每个非空开集都包含 η。因此，根据推前的定义可知，对每个 $K\in\mathbf{Spc}$ 以及开集 $U\subset T$，我们有

$$\eta_*(K)(U)=\begin{cases}K, & U\neq\varnothing\\ *, & U=\varnothing\,.\end{cases}$$

由于 $\eta_*(K)$ 是一个层，其在 T 的非空开集上的限制是常值预层，因此我们推得 $\eta_*(K)$ 是 K处的常值层。 □

2.42 回顾 （具有严格亨泽尔局部环的概形）。 概形 X 是处处严格局部的，如果对每个点 $x\in X$，局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 都是严格亨泽尔的。在此情况下， X 的所有剩余域都是可分闭的。此外，自然的 ∞-拓扑斯几何态射

$$X_{\text{ét}}\to X_{\text{zar}}$$

是一个等价 [42,推论 2.5]。

以下结果可视为命题 2.2的对偶。

2.43 引理。 设 S 是一个处处严格局部不可约概形，其泛点为 η。注意， η 是一个几何点，并将 $\eta\colon \operatorname{Spec}(\kappa(\eta)) \to S$ 也记作泛点的包含映射。则：

(2.43.1) 函子 $\eta_*\colon \operatorname{Spec}(\kappa(\eta))_{\text{ét}} \to S_{\text{ét}}$ 与常值层函子等价。

(2.43.2) 若 $F \in S_{\text{ét}}$ 是常值层，则单位 $F \to \eta_*\eta^*(F)$ 是一个等价。

证明。 由于 S 处处严格局部，自然几何态射 $S_{\text{ét}} \to S_{\text{zar}}$ 是一个等价。因此，只需在将 étale ∞-topoi 替换为 Zariski ∞- topoi 的情形下证明该断言。根据假设， S 的底层拓扑空间不可约。因此，该断言由引理 2.41立即得出。 □

下面给出所承诺的推论 2.39的对偶：

2.44 命题。 设 S 是一个处处严格局部不可约概形，记 Σ 为在 S上可逆的素数集合，并以 $\eta\colon \operatorname{Spec}(\kappa(\eta)) \to S$表示泛点的包含映射。设 $f\colon X \to S$ 是一个 *pro*光滑态射，并以 $i\colon X_\eta \to X$ 表示 f的泛（几何）纤维的包含映射。那么：

(2.44.1) 对于每个定义在 X 上的常值 Σ-挠 *étale* 层 F， 单位映射 $F \to i_*i^*(F)$ 是一个等价。

(2.44.2) 对于每个定义在 X上的常值 Σ-挠 *étale* 层 F， 自然映射

$$\Gamma_{\text{ét}}(X_\eta; F) \to \Gamma_{\text{ét}}(X; i^*F)$$

是一个等价。

(2.44.3) 态射 i 诱导出一个等价 $\Pi^{\text{ét}}_\infty(X_\eta)^\wedge_\Sigma \xrightarrow{\sim} \Pi^{\text{ét}}_\infty(X)^\wedge_\Sigma$。

证明。 首先注意到（2.44.1）立即推出（2.44.2）和（2.44.3）。由于 上的每个常值 étale 层都拉回自 S，记 $F \simeq f^*(G)$ 为 S 上的一个常值 étale 层 G。我们需要证明单位映射

$$f^*(G) \to i_*i^*f^*(G) \simeq i_*f_\eta^*\eta^*(G)$$

是一个等价。由于 $\eta^*(G)$ 是一个 Σ-挠层，而 f 是概光滑的，对拉回方块应用非阿贝尔光滑基变换（推论 2.30）

$$\begin{array}{ccc} X_\eta & \xrightarrow{f_\eta} & \operatorname{Spec}(\kappa(\eta)) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ X & \xrightarrow[f]{} & S \end{array}$$

表明

$$i_*f_\eta^*\eta^*(G) \simeq f^*\eta_*\eta^*(G)\,.$$

我们推得映射

$$f^*(G) \to i_*i^*f^*(G) \simeq f^*\eta_*\eta^*(G)$$

所讨论的对象可以通过应用 f^* 到单位映射 $G \to \eta_*\eta^*(G)$来识别。由于 S 处处都是严格局部的，引理 2.43 表明后一个映射是等价；因此结论得证。 □

我们借助 推论 2.39 和 命题 2.44 来结束本小节，并证明对于光滑真态射 $f : X \to S$，Milnor 球 $X_{(s)}$ 和几何纤维 X_s 的 étale 同伦型在特化下保持不变。首先回顾一下 étale 特化的相关内容，并定义特化态射。

2.45 回顾 (étale 特化)。设 S 是一个概形，且 $s \to S$ 和 $t \to S$ 是几何点。一个 ***étale*** 特化 $s \rightsquigarrow t$ 是一个 S-概形的态射 $S_{(t)} \to S_{(s)}$。更多背景请参见 [STK，标签 0GJ2]。

为简化表述，我们说“设 $\alpha : S_{(t)} \to S_{(s)}$ 是一个 étale 特化”，意即几何点 $s \to S$ 和 $t \to S$ 以及态射 α 均已指定。

2.46 记号。设 $f : X \to S$ 是概形之间的一个态射，且设 $\alpha : S_{(t)} \to S_{(s)}$ 是一个 étale 特化。我们用 $\bar{\alpha} : X_{(t)} \to X_{(s)}$ 表示沿 f 对 α 作的基变换。

2.47 定义 (特化态射)。设 S 是一个概形，设 $\alpha : S_{(t)} \to S_{(s)}$ 是一个 étale 特化，且设 $f : X \to S$ 是概形之间的一个态射。态射 $\bar{\alpha} : X_{(t)} \to X_{(s)}$ 诱导出一个特化映射

$$\hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_{(t)}) \to \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_{(s)})$$

关于 f 的 Milnor 球的 étale 同伦型。如果 f 适当，则 特化映 p

$$\mathrm{sp}_{\alpha} : \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_t) \to \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_s)$$

是使下图成立的唯一映射

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_t) & \xrightarrow{\sim} & \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_{(t)}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{sp}_{\alpha}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\bar{\alpha})} \\ \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_s) & \xrightarrow{\sim} & \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_{(s)}) \,. \end{array}$$

交换。这里，水平映射由包含映射诱导：$X_t \hookrightarrow X_{(t)}$ 以及 $X_s \hookrightarrow X_{(s)}$；由于 f 是适当的，推论 2.39 表明它们是等价。

为了证明特化不变性，我们需要以下技术性观察：

2.48 引理。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个局部环，其剩余域 $R/\mathfrak{m}$ 是可分闭的。设 K 是一个域，并设 $x : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(R)$ 是一个像为 $x \in \mathrm{Spec}(R)$ 的态射，使得剩余域之间诱导的域扩张 $\kappa(x) \subset K$ 是一个可分闭包。则存在一个分解，将 x 写成复合映射

$$\mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{j} \mathrm{Spec}(V) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Spec}(R)$$

满足以下性质：

(2.48.1) 环 V 处处都是严格局部的局部整环，其极大理想为 $\mathfrak{p}$.

*(2.48.2) </style>*映射 ϕ 由局部同态 $R \to V$ 诱导，且诱导的域扩张 $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow V/\mathfrak{p}$ 是一个同构。

(2.48.3) </style} j 的像是 $\mathrm{Spec}(V)$ 的泛点，且诱导的映射 $\mathrm{Frac}(V) \to K$ 是一个同构。

证明。令 $\mathfrak{q} \subset R$ 表示对应于 x的像的素理想。将 R 替换为$R/\mathfrak{q}$后，不妨设 R 是一个整环，且 x 的像是 $\mathrm{Spec}(R)$的泛点。因此，扩张 $\mathrm{Frac}(R) \to K$ 是一个可分闭包。令 R' 为 R 在 K 中的整闭包。则 R'是正规的，且诱导的域扩张 $\mathrm{Frac}(R') \hookrightarrow K$ 是一个同构。现在取一个素理想 $\mathfrak{a} \subset R'$，它位于 R的极大理想之上。由于 $R/\mathfrak{m}$ 是可分闭的，[42, 命题 2。6]表明，局部环 $V = R'_{\mathfrak{a}}$ 处处都是严格局部的。因此，分解

$$R \to V \to K$$

满足所需的条件。 □

2.49 命题（特化不变性）。设 $f : X \to S$ 是概形的光滑真态射，并设 Σ 是 S上可逆的素数集合。则对于任意 *étale* 特化$\alpha : S_{(t)} \to S_{(s)}$，特化映射

$$\widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\bar{\alpha}) : \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_{(t)}) \to \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_{(s)}) \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{sp}_{\alpha} : \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_t) \to \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X_s)$$

在 Σ-完备化后成为等价。

证明。记 $\alpha_t : t \to S_{(s)}$ 为复合映射

$$t \hookrightarrow S_{(t)} \xrightarrow{\alpha} S_{(s)} .$$

根据特化映射的定义，只需证明态射

$$X_t \hookrightarrow X_{(t)} \xrightarrow{\bar{\alpha}} X_{(s)}$$

通过沿 α_t 拉回 $f : X \to S$ 而得到的映射在 Σ-完备 étale 同伦类型上诱导等价。利用引理 2.48 将 α_t 分解，从而得到交换图表

$$\begin{array}{ccccc} t & \xrightarrow{j} & \mathrm{Spec}(V) & \xleftarrow{i_1} & \mathrm{Spec}(V/\mathfrak{m}) \\ & \searrow^{\alpha_t} & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \wr} \\ & & S_{(s)} & \xleftarrow[i_2]{} & s\,, \end{array}$$

其中 V、j 和 ϕ 满足性质 (2.48.1)–(2.48.3)，i_1 和 i_2 表示闭点的包含映射。现在将函子 $\widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(- \times_S X)^{\wedge}_{\Sigma}$ 应用于上述图表。由于 X 在 S 上适当，根据推论 2.39，该函子将 i_1 和 i_2 映为等价。因此，它也将 ϕ 映为等价。此外，由于 $\mathrm{Spec}(V)$ 不可约且处处严格局部，t 是泛点，并且 X 在 S 上光滑，命题 2.44 表明该函子将 j 映为等价。由此可知，它也将 α_t 映为等价，证毕。 □

2.50 备注。命题 2.49 从 [4, 推论 12。13]。

3 应用：弧下降

Bhatt 和 Mathew 在 [7], 中引入的 弧拓扑 是拟紧拟分离概形范畴上的一种非常精细的格罗滕迪克拓扑（比 v-拓扑更精细）。在实践中，许多先验上仅满足 étale 下降的不变量，都可以证明满足弧下降（见 [7, §5]）。例如，带挠系数的 étale 上同调满足弧下降。本节证明了这一结果的非阿贝尔版本：我们将说明，pro有限 étale 同伦型

$$\widehat{\Pi}_{\infty}^{\text{ét}} : \mathbf{Sch}^{\text{qcqs}} \to \text{Pro}(\mathbf{Spc}_{\pi})$$

是弧拓扑上的超完备余层（参见 定理 3.17）。

我们在 §3.1 中简述回顾相关定义。在 §3.2 中，我们证明了 $\widehat{\Pi}_{\infty}^{\text{ét}}$ 是一个超完备弧余层。除了在 [7, 中发展的通用工具外，我们证明的关键要素是非阿贝尔适当基变换定理。

3.1 关于 v-拓扑和弧拓扑的回顾

我们首先回顾 v-拓扑和弧拓扑的定义。

3.1 定义（余层）。设 $(\mathcal{S}, \tau)$ 是一个 ∞-位点，$\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴。若函子$F : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ 使函子 $F^{\text{op}} : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathcal{C}^{\text{op}}$ 成为一个 τ-层，我们称之为 τ-余层。等价地，若 F 将 $\mathcal{S}$ 中的 τ-覆盖筛映为 $\mathcal{C}$ 中的余极限图表，则称 F 是一个 τ-余层。若 F^{op} 是一个超完备的 τ-层，则称 F 是一个超完备 τ-余层。

3.2 记号。对于一个概形 S，记 $\mathbf{Sch}_S^{\text{qcqs}} \subset \mathbf{Sch}_S$ 为由那些在 $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ 上拟紧拟分离的 S 概形所张成的 S-概形全子范畴。

3.3 回顾。拟紧拟分离概形之间的态射 $f : Y \to X$ 是一个弧覆盖，如果对于任意秩为 ≤ 1 的赋值环 V 以及任意态射 $\text{Spec}(V) \to X$，都存在一个秩为 ≤ 1 的赋值环之间的忠实平坦映射 $V \to W$，以及一个态射 $\text{Spec}(W) \to Y$，使其构成一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(W) & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(V) & \longrightarrow & X\,. \end{array}$$

对于拟紧拟分离概形 S，弧覆盖在范畴 $\mathbf{Sch}_S^{\text{qcqs}}$ 上生成一个拓扑，我们称之为弧拓扑。

类似地，如果对于每个赋值环 V（其秩不一定为≤ 1）以及态射 $\text{Spec}(V) \to X$，都存在一个赋值环的忠实平坦映射 $V \to W$ 和如上所述的交换方形，则称 $f : Y \to X$ 为一个v-覆盖。由此在 $\mathbf{Sch}_S^{\text{qcqs}}$ 上得到的拓扑称为v-拓扑。

3.4. 每个 v-覆盖都是弧覆盖 [7, 命题 2.1]。另请注意，根据适当性的赋值判据，拟紧拟分离概形之间的每个适当满射都是 v-覆盖。

3.5. 一般而言，弧拓扑严格细于 v-拓扑 [7,推论 2.9]。如果 X 是诺特的，那么每个弧覆盖 $f : Y \to X$ 也是一个 v-覆盖 [7, 命题 2.6]。此外，在这种情况下，f 也是 Voevodsky 的 h 拓扑 [44的一个覆盖；45]。参见 [39, 定理 2.8]。

Bhatt 和 Mathew 给出了一个便捷判据，可通过切除验证 v-层是否为 arc-层（参见定理 3.16）。在本小节余下部分，我们回顾相关术语，以陈述这一判据。在 §3.2 中，我们利用这一结果推导出前有限 étale 同伦型满足弧下降。

首先，该判据要求这个 v-层是有限性保持的：

3.6 回顾。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有滤过余极限的 ∞-范畴，且 S 是一个概形。一个函子

$$F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs,op}} \to \mathcal{C}$$

若将 S-概形的余滤过图表的极限映射为 $\mathcal{C}$ 中的滤过余极限，则称其为有限性保持的。

若 $\mathcal{C}$ 是一个具有余滤极限的 ∞-范畴，则当相应的函子 $F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs}} \to \mathcal{C}$ 是有限性保持的时，我们称函子 $F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs\ op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，是有限性保持的。

3.7 命题。 截断阶数以下的和前有限 *étale* 同伦型

$$\Pi^{\text{ét}}_{<\infty} : \mathbf{Sch}^{\mathrm{qcqs}} \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_{<\infty}) \qquad \textit{and} \qquad \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty} : \mathbf{Sch}^{\mathrm{qcqs}} \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_{\pi})$$

都是有限性保持的函子。

证明。 首先注意到，有限生成完备化保持余滤极限，因此只需证明截断有限 étale 同伦类型的情形。为此，注意到根据 [SGA 4_{II}，专题 VII，引理 5.6；12，引理 3。3], 函子

$$(-)_{\text{ét}} : \mathbf{Sch}^{\mathrm{qcqs}} \to \mathbf{RTop}_{\infty}$$

是有限性保持的。根据 [5, 推论 4.3。7] 以及 [SAG，推论 A.8.3。3],截断形状保持有界相干 ∞-topoi 及凝聚几何态射的余滤图表的极限。由以下事实即可得出结论：拟紧拟分离概形的 étale ∞-topos 是有界相干的[5, 命题 3.7。3], 且对于拟紧拟分离概形之间的任意态射 $f : X \to Y$，诱导的几何态射 $f_* : X_{\text{ét}} \to Y_{\text{ét}}$ 是凝聚的 [5, 例 3.7。5]。 □

有限型函子有一个有用的性质：它们由其在有限表示概形上的取值决定：

3.8 回顾 [STK，标签 09MV]。设 S 为一个准分离概形。那么$\mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs}}$ 中的每个对象都可以写成一个由有限表示 S概形构成的余滤图的极限，且转移映射为仿射映射。

3.9 观察 （有限型函子的等价）。设 $\mathcal{C}$为一个具有滤过余极限的 ∞-范畴，并设 S 为一个准分离概形。根据回顾 3.8，对于有限型函子

$$F, G : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs,op}} \to \mathcal{C},$$

自然变换 $\alpha : F \to G$ 是等价，当且仅当将 α 限制到由有限表示 S-概形张成的全子范畴后仍为等价。

其次，弧层自动满足对米尔诺方块的切除：

3.10 回顾（Milnor 切除）。概形的交换方块

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z' & \xrightarrow[i]{} & X' \end{array}$$

若其为双笛卡尔的， f 为米尔诺方形仿射的，且 i 为闭浸入。给定概形 S，一个函子

$$F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs,op}} \to \mathcal{C}$$

若 F 将米尔诺方块映为 $\mathcal{C}$中的拉回方块，则满足*Milnor* 切除。

我们还回顾 Milnor 切除的以下弱化形式：

3.11 回顾（aic-v 切除）。设 $\mathcal{C}$为一个 ∞-范畴， S 为一个概形。一个函子

$$F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs,op}} \to \mathcal{C}$$

若对于任意绝对整闭赋值环 V 和 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(V)$，方块满足*aic-v* 切除

$$\begin{array}{ccc} F(\mathrm{Spec}(V)) & \longrightarrow & F(\mathrm{Spec}(V_{\mathfrak{p}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\mathrm{Spec}(V/\mathfrak{p})) & \longrightarrow & F(\mathrm{Spec}(\kappa(\mathfrak{p})) \end{array}$$

是 $\mathcal{C}$中的一个拉回。

3.12. 如果函子 $F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs}} \to \mathcal{C}$ 满足*Milnor* 切除 （分别地，满足*aic-v* 切除），我们就称其满足 Milnor 切除（分别地，满足 aic-v 切除）。

第三，我们需要目标 ∞-范畴足够良好。

3.13 定义。若 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 是由余截断对象紧生成的，则 $\mathcal{C}$ 是紧生成的，且 $\mathcal{C}$ 的每个紧对象都是余截断的（即，在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$中截断的）。

3.14 例。 ∞-范畴 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\pi)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Ind}(\mathbf{Spc}_\pi^{\mathrm{op}})$ 是由余截断对象紧生成的。

3.15 例。如果 $\mathcal{C}$ 是一个紧生成的 ∞-范畴，那么对每个 $n \geq 0$，子范畴$\mathcal{C}_{\leq n} \subset \mathcal{C}$ 都是由余截断对象紧生成的。

最后，给出所承诺的刻画：用 v-下降和切除来刻画弧下降 ：

3.16 定理 [7, 定理 4.1]**.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个由余截断对象紧生成的 ∞-范畴，且 S 是一个拟紧拟分离概形。设 $F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs\ op}} \to \mathcal{C}$, 是一个有限型 v-层。那么以下条件等价：

(3.16.1) F 是一个 *arc*-层。

(3.16.2) F 满足 *Milnor* 切除。

(3.16.3) F 满足 *aic-v* 切除。

3.2 étale 同伦型的弧下降

在本小节中，我们使用定理 3.16来证明：

3.17 定理。该函子

$$\hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(-)\colon \mathbf{Sch}^{\text{qcqs}} \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_{\pi})$$

是有限性保持的超完备弧余层。换言之，对于任意半单纯弧超覆盖$p_{\bullet}\colon U_{\bullet} \to X$，所诱导的图表 $\hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(U_{\bullet}) \to \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X)$ 是 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_{\pi})$中的余极限图表。

我们首先验证前有限 étale 同伦型满足 aic-v 切除。这源于这样一个事实： ∞-范畴中由空间构成的可构造 étale 层满足 aic-v 切除。

3.18 回顾。若 V 是绝对整闭赋值环，那么V 的每个局部环都是严格亨泽尔的 [7,引理 5。3]。也就是说， $\mathrm{Spec}(V)$ 按照回顾 2.42的含义，处处严格局部。

3.19 记号。 给定一个拟紧拟分离概形 X，记 $X^{\text{cons}}_{\text{ét}} \subset X_{\text{ét}}$ 为由符合 定义 1.9 意义下的可构造 étale 空间层张成的全子范畴。

3.20 回顾 （有限偏序集上的层）。 设 P 为一个偏序集。回忆一下，集合 P 上的亚历山德罗夫拓扑是指这样一种拓扑：其中的开子集是在偏序下向上封闭的子集。如果 P 是有限的，则存在自然等价

$$\mathrm{Sh}(P) \simeq \mathrm{Fun}(P, \mathbf{Spc})\,.$$

见 [5, 8.1.1]。

3.21 引理。 设 V 是一个有限秩 n的绝对整闭赋值环。则存在一个自然的 ∞-*topoi* 等价

$$\mathrm{Spec}(V)_{\text{ét}} \simeq \mathrm{Fun}(\{0 < \cdots < n\}, \mathbf{Spc})\,.$$

此外，该等价限制为一个等价

$$\mathrm{Spec}(V)^{\text{cons}}_{\text{ét}} \simeq \mathrm{Fun}(\{0 < \cdots < n\}, \mathbf{Spc}_{\pi})\,.$$

证明。 由于自然几何态射 $\mathrm{Spec}(V)_{\text{ét}} \to \mathrm{Spec}(V)_{\text{zar}}$ 是一个等价，因而只需证明 Zariski ∞-topoi 的情形。该结论现在由以下事实得出： $\mathrm{Spec}(V)$ 的 Zariski 拓扑空间同构于赋予亚历山德罗夫拓扑的偏序集 $\{0 < \cdots < n\}$ 以及回顾 3.20。 □

3.22 推论。 函子 $(-)^{\text{cons}}_{\text{ét}}\colon \mathbf{Sch}^{\text{qcqs op}}_{S} \to$, $\mathbf{Cat}_{\infty}$ 满足 *aic-v* 切除。

证明。 由于 $(-)^{\text{cons}}_{\text{ét}}$ 是有限型函子，根据 [7, 引理 2。22]只需验证有限秩绝对整闭赋值环上的 aic-v 切除。因此，设 V 是一个有限秩为 n 的绝对整闭赋值环，设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(V)$，并记 i 为赋值环 $V/\mathfrak{p}$的秩。根据 引理 3.21，该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(V)^{\text{cons}}_{\text{ét}} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(V_{\mathfrak{p}})^{\text{cons}}_{\text{ét}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(V/\mathfrak{p})^{\text{cons}}_{\text{ét}} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\kappa(\mathfrak{p}))^{\text{cons}}_{\text{ét}} \end{array}$$

由对推出方块应用 $\mathrm{Fun}(-,\mathbf{Spc}_\pi)$ 得到

$$\begin{array}{ccc} \{i\} & \hookrightarrow & \{i<\cdots<n\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{0<\cdots<i\} & \hookrightarrow & \{0<\cdots<n\} \end{array}$$

在$\mathbf{Cat}_\infty$中。因此，它是一个拉回，正如所需。 □

3.23 命题。 设 S 是一个拟紧拟分离概形， $F \in S_{\text{ét}}$ 是一个可构造层。那么该函 *r*

$$\Gamma_{\text{ét}}(-;F)\colon \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{qcqs,op}} \to \mathbf{Spc}, \quad [f: X \to S] \mapsto \Gamma_{\text{ét}}(X; f^*F)$$

子范畴是一个有限型弧超层。

证明。 由于存在一个整数 $n \geq 0$ 使得 F 是 n-截断的， $\Gamma_{\text{ét}}(-;F)$ 取值于$\mathbf{Spc}^{\leq n}$；因此，只需证明 $\Gamma_{\text{ét}}(-;F)$ 是一个弧-层。函子 $\Gamma_{\text{ét}}(-;F)$ 具有有限性保持性，因此根据 定理 3.16 只需证明 $\Gamma_{\text{ét}}(-;F)$ 满足 aic-v 切除和 v-下降。由于

$$\Gamma_{\text{ét}}(X; f^*F) = \mathrm{Map}_{X_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}}(*, f^*F)$$

在拉回的 ∞-范畴中，映射空间可由映射空间的拉回计算，因此 aic-v 切除可直接由推论 3.22得出。对于 v-下降，我们注意到 [7, 命题 5。2]的证明 可原样应用于当前情形。该证明中唯一使用的非几何性输入是适当基变换定理；在当前的非阿贝尔情形下，我们诉诸推论 2.31。 □

定理命题 *3.17*的证明。由于余极限是在

$$\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_\pi) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{lex}}(\mathbf{Spc}_\pi, \mathbf{Spc})^{\mathrm{op}}$$

中按逐点极限计算， $\mathrm{Fun}^{\mathrm{lex}}(\mathbf{Spc}_\pi、\ \mathbf{Spc})$，因此，要证明的结论等价于证明：若 $F \in X_{\text{ét}}$ 是一个取值于 π-有限空间的常值层，则自然映射

$$\Gamma_{\text{ét}}(X;F) \to \lim_{[n]\in \mathbf{\Delta}_{\mathrm{inj}}} \Gamma_{\text{ét}}(U_n; p_n^*F)$$

是一个等价。这由命题 3.23得出。 □

3.24 备注 (弧下降 ∞-层的函子范畴)。 设 Λ 是一个有限环。Bhatt–Mathew 证明了，将拟紧拟分离概形映到其可构造导出 ∞-范畴的函子是一个弧超层 [7,定理 5.13]。证明的关键要素包括：aic-v 切除、适当基变换、适当推前保持可构造性，以及 Lurie 关于基变换与下降的一般结果 [《高阶代数》， 推论 4.7.5.3]。在非阿贝尔情形中，目前无法获得的唯一环节是沿真态射的推前保持可构造性。证明这一点后，还可推出函子 $X \mapsto X_{\text{ét}}^{\mathrm{cons}}$ 满足弧超下降。

4 应用：Künneth 公式

设 k 是一个特征为 $p \geq 0$的域。本节中，我们证明 étale 同伦型的 Künneth 公式（可能是在远离 p 处完成的）。例如，若 k 可分闭，我们首先证明，对于拟紧拟分离 k-概形 X 和 Y，素数异于p 的 étale 同伦型之间的自然映射

$$\Pi_\infty^{\text{ét}}(X \times_k Y)^\wedge_{p'} \longrightarrow \Pi_\infty^{\text{ét}}(X)^\wedge_{p'} \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y)^\wedge_{p'}$$

是一个等价（定理 4.12）。至少在 X 和 Y 为有限型时，Orgogozo 已在 2003 [37, 推论 4。9] 中证明了这一结果。Orgogozo 的结果似乎并未广为人知（见 [35]）；本节的目标之一就是让更多人了解这一结果。由此，我们推导出适用于更一般域的若干相对 Künneth 公式（推论 4.26 和 4.27）。这些结果还蕴含了关于对称幂的 Künneth 公式（见 备注 4.29 和 4.30）。

在 §4.1 中，我们首先证明一个一般性结果，揭示非阿贝尔基变换定理与可分闭域上的 Künneth 公式之间的关系。 第 4.2 小节 利用这一结果，证明可分闭域上素数到 p étale 同伦型的 Künneth 公式，并推导出若干推论（例如 $\mathbf{A}^1$ 不变性）。在 §4.3 中，我们证明非可分闭域上的相对 Künneth 公式。

4.1 通过基变换得到的 Künneth 公式

本小节旨在证明以下命题。我们尤其关注 $W = X \times_k Y$ 的情形。

4.1 命题 （基变换给出的 Künneth 公式）。 设 Σ 是一组素数， k 是一个可分闭域，并且

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & \mathrm{Spec}(k) \end{array} \tag{4.2}$$

有一个拟紧拟分离概形之间的交换方形。假设对于每个在 $\_Y$ 上的常值 Σ-挠 *étale* 层 F，交换变换 $f^* g_*(F) \to \bar{g}_* f^*(F)$ 都是等价。那么，Σ-完备 *étale* 同伦型之间的自然映射

$$\Pi_\infty^{\text{ét}}(W)^\wedge_\Sigma \longrightarrow \Pi_\infty^{\text{ét}}(X)^\wedge_\Sigma \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y)^\wedge_\Sigma$$

是等价。

命题 命题 4.1 的证明是对 Chough 在适当态射情形下的 Künneth 公式证明的一种公理化处理 [11, 定理 5。3]；参见 例 4.9。为了给出证明，我们先回顾 pro 空间复合积的基础知识及其与乘积的关系。为此，我们关键地利用了将 pro 空间识别为左正合可达函子 $\mathbf{Spc} \to \mathbf{Spc}$（回顾 1.20）。

4.3 回顾 [SAG，备注 E.2.1。2]。 函子的复合定义了一个幺半结构$(A, B) \mapsto A \circ B$ 在 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\mathbf{Spc}, \mathbf{Spc})^{\mathrm{op}}$。我们称此幺半结构为复合幺半结构。由于两个左正合可达函子 $\mathbf{Spc} \to \mathbf{Spc}$

再次是左正合且可达的，因此复合幺半结构限制为全子范畴上的一个幺半结构

$$\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}) \subset \mathrm{Fun}(\mathbf{Spc}, \mathbf{Spc})^{\mathrm{op}} .$$

4.4 观察。 恒等函子既是 $\circ$ 的单位，也是 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc})$ 的终对象。因此，给定 pro 空间 A 和 B，乘积的泛性质给出一个自然比较映射

$$c : A \circ B \to A \times B .$$

这个映射通常不是等价。然而，在 étale 同伦论的情形下，它接近于等价：

4.5 例。 设 Σ 为一组素数，并设 X 和 Y 为拟紧拟分离概形。根据 [5,推论 2.8。5],证明的一种变体，pro 空间之间的自然映射

$$\Pi_\infty^{\text{ét}}(X) \circ \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y) \longrightarrow \Pi_\infty^{\text{ét}}(X) \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y)$$

经 pro 截断后成为等价，因此经 Σ-完备化后也成为等价。

接下来的两个观察将复合积与交换变换联系起来 s.

4.6 观察。设

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{W} & \xrightarrow{\bar{f}_*} & \boldsymbol{Y} \\ {\scriptstyle \bar{g}_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_{\boldsymbol{Y},*}} \\ \boldsymbol{X} & \xrightarrow[\Gamma_{\boldsymbol{X},*}]{} & \mathbf{Spc} \end{array} \tag{4.7}$$

是一个由 ∞-拓扑及几何态射组成的交换方块。注意，与该方块（4.7）相关联的交换变换定义了一个自然变换

$$\Gamma_{\boldsymbol{X},*}\Gamma_{\boldsymbol{X}}^*\Gamma_{\boldsymbol{Y},*}\Gamma_{\boldsymbol{Y}}^* \xrightarrow{\Gamma_{\boldsymbol{X},*}\,\mathrm{Ex}\,\Gamma_{\boldsymbol{Y}}^*} \Gamma_{\boldsymbol{X},*}\bar{g}_*\bar{f}^*\Gamma_{\boldsymbol{Y}}^* \simeq \Gamma_{\boldsymbol{W},*}\Gamma_{\boldsymbol{W}}^*$$

左正合可达函子 $\mathbf{Spc} \to \mathbf{Spc}$。记

$$\varepsilon : \Pi_\infty(\boldsymbol{W}) \longrightarrow \Pi_\infty(\boldsymbol{X}) \circ \Pi_\infty(\boldsymbol{Y})$$

为 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc})$ 中相应的映射。

4.8 观察。自然映射 $\Pi_\infty(\boldsymbol{W}) \to \Pi_\infty(\boldsymbol{X}) \times \Pi_\infty(\boldsymbol{Y})$ 可分解为如下复合

$$\Pi_\infty(\boldsymbol{W}) \xrightarrow{\varepsilon} \Pi_\infty(\boldsymbol{X}) \circ \Pi_\infty(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{c} \Pi_\infty(\boldsymbol{X}) \times \Pi_\infty(\boldsymbol{Y}) .$$

命题命题 *4.1*的证明。 由于 k 是可分闭的， $\mathrm{Spec}(k)_{\text{ét}} \simeq \mathbf{Spc}$。根据观察 4.8， pro 空间之间的自然映射$\Pi_\infty^{\text{ét}}(W) \to \Pi_\infty^{\text{ét}}(X) \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y)$可分解为如下复合

$$\Pi_\infty^{\text{ét}}(W) \xrightarrow{\varepsilon} \Pi_\infty^{\text{ét}}(X) \circ \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y) \xrightarrow{c} \Pi_\infty^{\text{ét}}(X) \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y) .$$

由于 ε 是由方形（4.2）关联的交换变换所诱导的，假设意味着映射 ε 在 Σ-完备化后成为等价。根据 例 4.5，映射 c 也

在 Σ-完备化后成为等价。因此 $c\varepsilon$ 在 Σ-完备化后成为等价。最后请注意， [21, 例 2.17] 表明， Σ-丛有限空间之间的自然映射

$$(\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X) \times \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y))^{\wedge}_{\Sigma} \longrightarrow \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{\Sigma} \times \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y)^{\wedge}_{\Sigma}$$

是一个等价。 □

我们以两个例子结束本小节。第一个例子出自 Chough [11, 定理 5.3]；为求完整起见，我们在此重述。

4.9 例 （Künneth 公式，适当情形）。 设 k 是一个可分闭域，且设 X 和 Y 是拟紧拟分离的 k-概形。若 Y 是适当的，则非阿贝尔适当基变换定理（推论 2.31）和 命题 4.1 推出丛有限空间之间的自然映射

$$\hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y) \longrightarrow \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X) \times \hat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(Y)$$

是一个等价。

4.10 记号。 设 p 为一个素数或 0。我们用 p' 表示与 p不同的素数集合。

4.11 例 （素数互异于 p 的 Künneth 公式，光滑情形）。 设 k 是一个特征为 $p \geq 0$的可分闭域，且设 X 和 Y 是拟紧拟分离的 k-概形。若 X 是光滑的，则非阿贝尔光滑基变换定理（推论 2.30）和 命题 4.1 推出p'-丛有限空间之间的自然映射

$$\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y)^{\wedge}_{p'} \longrightarrow \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{p'} \times \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y)^{\wedge}_{p'}$$

是一个等价。

4.2 与 p 互素的 Künneth 公式（据 Orgogozo）

在本小节中，我们证明以下 Künneth 公式，从而去除 例 4.11中的光滑性假设。然后我们推导出一些推论。

4.12 定理 （与 p 互素的 Künneth 公式）。 设 k 是特征为 $p \geq 0$ 的可分闭域，且 X 和 Y 是拟紧拟分离的 k-概形。那么， p'-丛有限空间之间的自然映射

$$\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y)^{\wedge}_{p'} \longrightarrow \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{p'} \times \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y)^{\wedge}_{p'}$$

是一个等价。

为证明这一点，我们利用如下事实：每个有限型 k-概形都存在一个由正则 k-概形构成的 v-超覆盖：

4.13 观察 (变更与 v-超覆盖)。 设 k 是一个域，且 X 是一个有限型 k-概形。根据变更理论 [28, 定理 1.1； 29， Exposé IX， 定理 1.1； 26， 定理 4.4； 43， 定理 1.2。5]， X 可由一个正则 k-概形通过适当满射覆盖，特别地也可由 v-覆盖覆盖。对迭代拉回反复应用此结果可知，存在一个半单纯 v-超覆盖 $U_{\bullet} \to X$ ，其中每个 U_n 都是一个正则 k-概形。

4.14. 设 $K \supset k$ 是域扩张，且 X 和 Y 是 k-概形。那么， K-概形之间的自然态射 $(X \times_k Y)_K \to X_K \times_K Y_K$ 是一个同构。

证明 定理 *4.12*。 设 $k^{\mathrm{alg}} \supset k$ 是 k的一个代数闭包。由于概形态射$\mathrm{Spec}(k^{\mathrm{alg}}) \to \mathrm{Spec}(k)$ 是一个泛同胚，且 étale 同伦型在拓扑意义下具有不变性，通过基变换到 k^{alg} 并应用（4.14），不失一般性，我们可以假设 k 是代数闭的。此外，由于这些赋值

$$X \mapsto \Pi_\infty^{\text{ét}}(X \times_k Y)^\wedge_{p'} \qquad \text{and} \qquad X \mapsto \Pi_\infty^{\text{ét}}(X)^\wedge_{p'} \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y)^\wedge_{p'}$$

定义有限型函子 $\mathbf{Sch}_k^{\mathrm{qcqs}} \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_{p'})$，只需证明以下情形中的结论： X 是 k (观察 3.9)。

在此情形下，由于代数闭域上的正则概形是光滑的，观察 4.13 表明 X 存在一个由光滑概形构成的半单纯 v-超覆盖 $U_\bullet$。利用以下事实： p'-完备 étale 同伦型是超完备 v-余层（定理 3.17），且半单纯对象的几何实现是 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Spc}_{p'})$ [21, 中的万有对象，18],我们计算得

$$\begin{aligned}
\Pi_\infty^{\text{ét}}(X \times_k Y)^\wedge_{p'} &\simeq \operatorname*{colim}_{[n]\in\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{inj}}} \Pi_\infty^{\text{ét}}(U_n \times_k Y)^\wedge_{p'} && \text{(v-hyperdescent)} \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{[n]\in\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{inj}}} \left(\Pi_\infty^{\text{ét}}(U_n)^\wedge_{p'} \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y)^\wedge_{p'}\right) && \text{(Example 4.11)} \\
&\simeq \left(\operatorname*{colim}_{[n]\in\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{inj}}} \Pi_\infty^{\text{ét}}(U_n)^\wedge_{p'}\right) \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y)^\wedge_{p'} && \text{(geometric realizations are universal)} \\
&\simeq \Pi_\infty^{\text{ét}}(X)^\wedge_{p'} \times \Pi_\infty^{\text{ét}}(Y)\,. && \text{(v-hyperdescent)}
\end{aligned}$$

□

现在我们推导 定理 4.12 的一些推论。首先是关于非 p 部分 étale 基本群的类似 Künneth 公式。

4.15 记号。 设 Σ 为一个素数集合。给定一个 pro 群 G，记 G^Σ 为 G的最大 pro-Σ商群。

4.16 回顾（完备化的基本群）。 令 Σ 为一个素数集合。令 U 为一个可写成连通 pro 空间的有限 余积的 pro 空间。根据 [4, 推论 3.7],, 对于任意基点 $u \in U$，自然映射

$$\pi_1(U,u)^\Sigma \to \pi_1(U^\wedge_\Sigma, u)$$

是同构。

因此，如果 U 是一个有限 空间，那么对于任意基点 $u \in U$，自然映射 $\pi_1(U,u)^\Sigma \to \pi_1(U^\wedge_\Sigma, u)$ 也是同构。

4.17 推论。 令 k 为一个特征为 $p \geq 0$ 的可分闭域，令 X 和 Y 为 *qcqs* k-概形。令 $z \to X \times_k Y$ 为一个几何点，其像为 $x \to X$ 和 $y \to Y$。则自然连续同态

$$\pi_1^{\text{ét}}(X \times_k Y, z)^{p'} \longrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{p'} \times \pi_1^{\text{ét}}(Y,y)^{p'}$$

是同构。

证明。 直接由 定理 4.12和 回顾 4.16得到。 □

定理 4.12还给出了关于除p étale 同伦型的不变性结果。

4.18 例 (在可分闭域扩张下的不变性)。 设 k 是特征为 $p \geq 0$ 的可分闭域， X 是一个拟紧拟分离的 k-概形。那么对于任意可分闭域扩张 $K \supset k$:

(4.18.1) 自然映射 $\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X_K)^{\wedge}_{p'} \to \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{p'}$ 是等价。

(4.18.2) 自然连续同态 $\pi^{\text{ét}}_1(X_K)^{p'} \to \pi^{\text{ét}}_1(X)^{p'}$ 是同构。

4.19 备注。 条目 (4.18.2) 得到了 Landesman 最近的不变性结果 [36, 定理 1。1]。另见 [SGA 1, 第十三讲，命题 4。6]。

4.20 推论 ($\mathbf{A}^1$-不变性)。 设 k 是一个特征为 $p \geq 0$的可分闭域。则函子

$$\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(-)^{\wedge}_{p'} : \mathbf{Sch}^{\text{qcqs}}_{k} \to \text{Pro}(\mathbf{Spc}_{p'})$$

是 $\mathbf{A}^1$-不变的。

证明。 根据 Künneth 公式（定理 4.12），只需证明 $\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(\mathbf{A}^1_k)^{\wedge}_{p'} \simeq *$。若 $p > 0$，则由于 $\mathbf{A}^1_k$ 是光滑、连通且仿射的， [40, 命题 15；41，引理 2.7(a)] 表明

$$\Pi^{\text{ét}}_{<\infty}(\mathbf{A}^1_k) \simeq \text{K}(\pi^{\text{ét}}_1(\mathbf{A}^1_k), 1)\,.$$

现在由以下事实即可得出该断言： $\pi^{\text{ét}}_1(\mathbf{A}^1_k)$ 是一个 Pro-p 群。如果 $p = 0$，则由 例4.18、黎曼存在定理，以及拓扑空间 $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ 是可缩的这一事实可得。 □

4.3 相对 Künneth 公式

设 k 是一个域，且 X 和 Y 是拟紧拟分离的 k-概形。在本小节中，我们证明 $X \times_k Y$ 的 étale 同伦型的 Künneth 公式，其中 k 不是 可分闭的。其思路是利用基本纤维序列

$$\widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}((X \times_k Y)_{\bar{k}}) \longrightarrow \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y) \longrightarrow \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\text{Spec}(k)) \tag{4.21}$$

[22]，将问题归结为可分闭情形。

下一个命题是一个适用于多种情形的一般结果。由于纤维序列（4.21）在远离 $\text{char}(k)$ 完备化后未必仍是纤维序列，因此其表述需要谨慎。

4.22 回顾。 设 Σ 是一个素数集合，并记 Σ' 为素数全集中去掉 Σ 后的补集。域 k 按照 [22, 定义 3.24] 的意义是 Σ'-闭的，如果对于任意可分 $\bar{}$ $\bar{}$ 闭包 $k \supset k$，伽罗瓦群 $\text{Gal}(k/k)$ 都是一个 Pro-Σ 群。

4.23 命题。设 k 为一个可分闭包为 $k \supset k$ 的域， X 和 Y 为拟紧拟分离的 k-概形，且 Σ 为一组素数。假设满足以下条件:

(4.23.1) 域 k 是 Σ'-闭的。

(4.23.2) 关于 k 的 Künneth 公式：自然映射

$$\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} Y_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} \longrightarrow \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} \times \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma}$$

是一个等价。

那么诱导出的方形

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y)^{\wedge}_{\Sigma} & \longrightarrow & \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y)^{\wedge}_{\Sigma} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{\Sigma} & \longrightarrow & \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(\operatorname{Spec} k)^{\wedge}_{\Sigma} \end{array}$$

是一个前有限空间的拉回方块。

证明。记 $G \coloneqq \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$。由于 k 是 Σ'-闭的，G 是一个 pro-Σ 群；因此，丛有限空间 BG 是 Σ-完备的。所选的可分闭包给出了一个等同 $\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(\operatorname{Spec} k) \simeq \mathrm{BG}$。由于基点 $* \to \mathrm{BG}$ 是有效满射，只需证明自然映射

$$\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y)^{\wedge}_{\Sigma} \longrightarrow \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{\Sigma} \underset{\mathrm{BG}}{\times} \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y)^{\wedge}_{\Sigma} \tag{4.24}$$

沿 $* \to \mathrm{BG}$ 拉回后成为等价。

首先计算（4.24）左端在 BG 上的纤维。为此，注意到基本纤维序列 [22, 推论 3.28] 蕴含下述自然方块

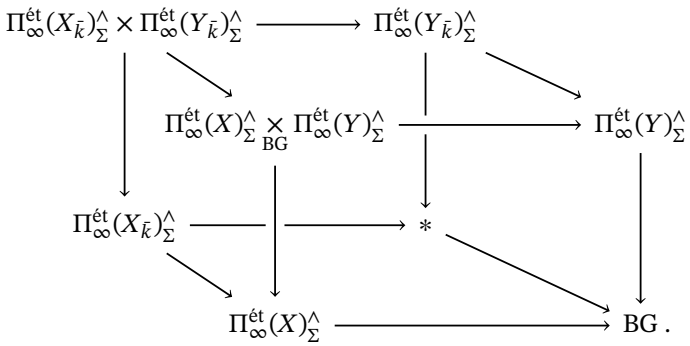
$$\begin{array}{ccc} \Pi^{\text{ét}}_{\infty}((X \times_k Y)_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} & \longrightarrow & \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y)^{\wedge}_{\Sigma} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \mathrm{BG} \end{array}$$

是一个拉回。此外，将（4.14）与假设（4.23.2）结合可知

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{ét}}_{\infty}((X \times_k Y)_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} &\simeq \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} Y_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} \\ &\simeq \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} \times \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} \end{aligned}$$

为计算（4.24）右端在 BG 上的纤维，考虑如下立方体

(4.25)



再次利用基本纤维序列，我们看到最右侧的竖直面和底部的水平面都是拉回方块。由于 (4.25) 的前后两个竖直面按定义都是拉回，我们看到 (4.25) 中出现的所有方块都是拉回方块。特别地，

$$\left(\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{\Sigma} \underset{\mathrm{BG}}{\times} \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y)^{\wedge}_{\Sigma}\right) \underset{\mathrm{BG}}{\times} * \simeq \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} \times \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y_{\bar{k}})^{\wedge}_{\Sigma} .$$

因此，自然映射（4.24）在纤维上诱导出一个等价，如所求。 □

4.26 推论（相对 Künneth 公式，适当情形）。设 k 是一个域，X 和 Y 是拟紧拟分离 k-概形。若 Y 在 k 上是适当的，则诱导的方形

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y) & \longrightarrow & \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X) & \longrightarrow & \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\operatorname{Spec} k) \end{array}$$

是一个拉回。

证明。应用 命题 4.23 于 Σ 所有素数的集合；假设（4.23.1）显然满足，且 例 4.9 表明假设（4.23.2）满足。 □

4.27 推论（素数与 p 互素的相对 Künneth 公式）。设 k 是一个特征为 $p \geq 0$的域，且 X 和 Y 是 *qcqs* k-概形。若 k 是 p-闭的，则诱导的方块

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X \times_k Y)^{\wedge}_{p'} & \longrightarrow & \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(Y)^{\wedge}_{p'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\wedge}_{p'} & \longrightarrow & \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(\operatorname{Spec} k)^{\wedge}_{p'} \end{array}$$

是一个拉回。

证明。应用 命题 4.23；定理 4.12表明假设（4.23.2）满足 . □

4.28 警告。若 k 不是 p-闭的，推论 4.27 则不成立。参见 [22, 警告 3。23]。

最后，我们对如何使用 推论 4.26 和 4.27 来推出对称幂的 Künneth 公式，作两点说明。这些 对称 *Künneth* 公式 类似于 Deligne 关于对称幂的 étale 上同调的结果 [SGA 4_{III}，Exposé XVII，定理 5.5。21]；关于这些结果与 Deligne 的结果有何不同，[25] 可参见引言中的总结。

4.29 备注 (对称 Künneth 公式，适当情形)。设 k 为一个域，X 为一个适当 k-概形。受 Hoyois [25, §5], 的思路启发，Chough 证明了：若 k 为可分闭域，则存在关于对称幂的 Künneth 公式

$$\widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(\operatorname{Sym}^n X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Sym}^n \widehat{\Pi}^{\text{ét}}_{\infty}(X)$$

[11, 定理 6。12]。Chough 的证明中，只有 Künneth 公式这一部分用到了基域为可分闭域这一条件（在 Chough 的论文发表时，该公式仅对可分闭域已知）。作为推论 4.26的推论，Chough 的证明表明，对称 Künneth 公式对适当概形在任意基域上均成立。

4.30 备注（素于-p 对称 Künneth 公式）。设 k 是一个 $p \geq 0$特征的域，且 X 是一个拟射影 k-概形。若 k 是可分闭的，则 Hoyois 证明了对于任意素数 $\ell \neq p$，自然映射

$$\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(\operatorname{Sym}^n X) \to \operatorname{Sym}^n \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)$$

经过 $\mathbf{Z}/\ell$-同调局部化 [25, 定理 5。6]。与 再标记 4.29类似，关键的“非形式”输入是自然映射

$$\Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X^{\times n}) \to \Pi^{\text{ét}}_{\infty}(X)^{\times n}$$

经过 $\mathbf{Z}/\ell$-同调局部化 [25, 命题 5。1]。由于我们现在知道更强的 Künneth 公式 推论 4.27，Hoyois 的证明表明，如果 k 是一个 p-闭域，那么自然映射

$$(\Pi_\infty^{\text{ét}}(\mathrm{Sym}^n X))^\wedge_{p'} \to (\mathrm{Sym}^n \Pi_\infty^{\text{ét}}(X))^\wedge_{p'}$$

关于 $\widehat{\Pi}_\infty^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(k))$ 的前有限空间之间的函子是等价。

参考文献

STK Stacks 项目作者，Stacks 项目，stacks.math.columbia.edu，2022。HTT J. Lurie，《高阶拓扑斯理论》（Annals of Mathematics Studies）。Princeton University Press，Princeton, NJ，2009，卷170，页xviii+925，ISBN：978-0-691-14049-0；0-691-14049-9。DOI：10.1515/9781400830558，math.ias.edu/~lurie/papers/HTT.pdf。HA J. Lurie，《高阶代数》，2017年9月，math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。SAG J. Lurie，《谱代数几何》，2018年2月，math . ias . edu / ~lurie / papers / SAG - rootfile.pdf。SGA 1《étale 覆盖与基本群》（布瓦玛丽代数几何研讨班 1960–61（SGA 1）。由 A. Grothendieck 主编。Lecture Notes in Mathematics，第224卷）。Berlin：Springer-Verlag，1960–61，页xxii+447。SGA 4_{II}《拓扑斯理论与概形的 étale 上同调》。第2卷（布瓦玛丽代数几何研讨班 1963–64（SGA 4）。由 M. Artin、A. Grothendieck、J.-L. Verdier 主编。N. Bourbaki、P. Deligne、B. Saint–Donat 协作。Lecture Notes in Mathematics，第270卷）。Berlin：Springer-Verlag，1963–64，iv+ 418。SGA 4_{III}《拓扑斯理论与概形的 étale 上同调》。第3卷（布瓦玛丽代数几何研讨班 1963–64（SGA 4）。由 M. Artin、A. Grothendieck、J.-L. Verdier 主编。N. Bourbaki、P. Deligne、B. Saint–Donat 协作。Lecture Notes in Mathematics，第305卷）。Berlin：Springer-Verlag，1963–64，vi+ 640。1. P. Achinger，$\mathrm{K}(\pi,1)$《代数几何中的空间》。ProQuest LLC，安娜堡，MI，2015，页116，ISBN：978-1339-01300-8，博士论文——加州大学伯克利分校。2. P. Achinger，《野分歧与 $\mathrm{K}(\pi,1)$ 空间》，Invent. Math.，卷210，第2期，页453–499，2017。DOI：10.1007/s00222-017-0733-5，arXiv:1701.03197。3. M. Anel、G. Biedermann、E. Finster 和 A. Joyal，《广义 Blakers–Massey 定理》，J. Topol.，卷13，第4期，页1521–1553，2020。DOI：10.1112/topo.12163，arXiv:1703.09050。4. M. Artin 和 B. Mazur，《étale 同伦》（Lecture Notes in Mathematics，第100号）。Springer-Verlag，Berlin-New York，1969，页iii+169。5. C. Barwick、S. Glasman 和 P. J. Haine，《外单值》，2020年8月，arXiv:1807.03281v7。6. A. Beauville 和 Y. Laszlo，《一个下降引理》，C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.，卷320，第3期，页335–340，1995。7. B. Bhatt 和 A. Mathew，《弧拓扑》，Duke Math. J.，卷170，第9期，页1899–1988，2021。DOI：10.1215/00127094-2020-0088，arXiv:1807.04725。8. D. Carchedi，《高阶栈的 étale 同伦型》，High. Struct.，卷5，第1期，页121–185，2021，arXiv:1511.07830。9. D. Carchedi、S. Scherotzke、N. Sibilla 和 M. Talpo，《对数概形的有限生成同伦型》，2019年5月，arXiv:1905.06243。

10. S. Carmeli、T. M. Schlank 和 L. Yanovski，《双侧性与高度》，Adv. Math.，卷385，论文编号107763，90页，2021。DOI：10.1016/j.aim.2021.107763，arXiv:2007.13089。11. C.-Y. Chough，《空间 étale 层的本性基变换》，J. Eur. Math. Soc. (JEMS)，卷24，第11期，页3679–3702，2022。DOI：10.4171/jems/1263。12. D. Clausen 和 A. Mathew，《超下降与 étale K理论》，Invent. Math.，卷225，第3期，页981–1076，2021。DOI：10.1007/s00222-021-01043-3，arXiv:1905.06611。13. S. Devalapurkar 和 P. J. Haine，《James 与 Hilton–Milnor 分裂及亚稳定 EHP 序列》，Doc. Math.，卷26，页1423–1464，2021，arXiv:1912.04130。14. R. Elkik，《Hensel 环中系数方程的解》，Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)，卷6，553–603（1974），1973。15. D. Ferrand，《导子、下降与粘合》，Bull. Soc. Math. France，卷131，第4期，页553–585，2003。DOI：10.24033/bsmf.2455。16. E. M. Friedlander，《单纯概形的 étale 同伦》（Annals of Mathematics Studies）。Princeton University Press，Princeton, N.J.；University of Tokyo Press，Tokyo，1982，卷104，页vii+190，ISBN：0-691-08288-X；0-691-08317-7。17. K. Fujiwara，《étale 拓扑中的管状邻域理论》，Duke Math. J.，卷80，第1期，页15–57，1995。DOI：10.1215/S0012-7094-95-08002-8。18. O. Gabber，《本性基变换定理的仿射类比》，Israel J. Math.，卷87，第1–3期，页325–335，1994。DOI：10.1007/BF02773001。19. J. Giraud，《非阿贝尔上同调》。Springer-Verlag，Berlin-New York，1971，页ix+467，Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften，第179卷。20. P. J. Haine，《从非阿贝尔基变换到带系数的基变换》，2022年2月，arXiv: 2108.03545。21. P. J. Haine，《乘积的前有限完备化》，2024年6月，arXiv:2406.00136。22. P. J. Haine、T. Holzschuh 和 S. Wolf，《étale 同伦论中的基本纤维序列》，Int. Math. Res. Not. IMRN，第1期，页175–196，2024。DOI：10.1093/imrn/rnad018，arXiv:2209.03476。23. R. Haugseng、F. Hebestreit、S. Linskens 和 J. Nuiten，《松弛幺半群伴随、双变量纤维化与伴随变换演算》，Proc. Lond. Math. Soc. (3)，卷127，第4期，页889–957，2023。DOI：10.1112/plms.12548，arXiv:2011.08808。24. M. Hoyois，《高阶伽罗瓦理论》，J. Pure Appl. Algebra，卷222，第7期，页1859–1877，2018。DOI：10.1016/j.jpaa.2017.08.010，arXiv:1506.07155。25. M. Hoyois，《étale 对称 Künneth 定理》，Math. Z.，卷304，第1期，论文编号1，2023。DOI：10.1007/s00209-023-03246-1，arXiv:1810.00351。26. M. Hoyois、S. Kelly 和 P. A. Østvær，《正特征下的动机 Steenrod 代数》，J. Eur. Math. Soc. (JEMS)，卷19，第12期，页3813–3849，2017。DOI：10 .4171 / JEMS/ 754，arXiv:1305.5690。27. R. Huber，《Hensel 环的 étale 上同调与域的抽象黎曼曲面上同调》，Math. Ann.，卷295，第4期，页703–708，1993。DOI：10.1007/BF01444911。28. L. Illusie，《关于 Gabber 精细化》，2009年3月，东京大学演讲，1月17日、22日、31日，2月7日，2008年。imo.universite-paris-saclay.fr/~luc.illusie/refined_uniformization3.pdf。29. L. Illusie、Y. Laszlo 和 F. Orgogozo 编，《Gabber 关于局部一致化与准优概形 étale 上同调的著作》。法国数学会，Paris，2014，i–xxiv及1–625页，巴黎综合理工学院研讨会 2006–2008。协作者：Frédéric Déglise、Alban Moreau、Vincent Pilloni、Michel Raynaud、Joël Riou、Benoît Stroh、Michael Temkin 和 Weizhe Zheng，Astérisque 第363-364号（2014）。

30. P. T. Johnstone，《大象素描：拓扑斯理论纲要》第2卷（牛津逻辑指南丛书）。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津，2002年，第44卷，i–xxii，469–1089及I1–I71页，ISBN：0-19-851598-7。31. P. T. Johnstone 和 I. Moerdijk，《拓扑斯的局部映射》，伦敦数学会会刊（第3辑），第58卷，第2期，第281–305页，1989年。doi：10.1112/plms/s3-58.2.281。32. A. J. de Jong，《光滑性、半稳定性与变更》，高等科学研究所数学出版物，第83期，第51–93页，1996年。33. K. S. Kedlaya，《层、代数栈与施图卡》，2017年3月，亚利桑那冬季学校2017年笔记。swc-math.github.io/aws/2017/2017KedlayaNotes.pdf。34. G. M. Kelly 和 R. Street，《2-范畴元素述评》，载于《范畴研讨会》（研讨班论文集，悉尼，1972/1973），数学讲义，第420卷，施普林格，Berlin，1974年，第75–103页。35. A. Landesman，对 Math Overflow 问题257722的回答：拟射影簇的 étale 基本群在代数闭域之间作基变换后得到的映射是否为同构？2016年12月，MO:257722。36. A. Landesman，《代数闭域之间基变换下基本群的不变性》，2020年5月，arXiv:2005.09690。37. F. Orgogozo，《Altérations et groupe fondamental premier à p》，Bull. Soc. Math. France，第131卷，第1期，第123–147页，2003年。doi：10.24033/bsmf.2438。38. E. Riehl 和 D. Verity，《∞-范畴论元素》（剑桥高等数学研究丛书）。剑桥大学出版社，剑桥，2022年，第194卷，第xix+759页，ISBN：978-1-108-83798-9。doi：10.1017/9781108936880。39. D. Rydh，《淹没与 étale 态射的有效下降》，Bull. Soc. Math. France，第138卷，第2期，第181–230页，2010年。doi：10.24033/bsmf.2588，arXiv:0710.2488。40. A. Schmidt，《受限分歧扩张与算术概形的对偶》，Compositio Math.，第100卷，第2期，第233–245页，1996年。41. A. Schmidt 和 J. Stix，《基于 étale 同伦型的单远几何》，数学年刊（第2辑），第184卷，第3期，第817–868页，2016年。doi：10.4007/annals.2016.184.3.5，arXiv:1504.01068。42. S. Schröer，《全可分闭概形上的几何》，代数与数论，第11卷，第3期，第537–582页，2017年。doi：10.2140/ant.2017.11.537，arXiv:1503.02891。43. M. Temkin，《通过 p-变更进行温和蒸馏与消奇点》，数学年刊（第2辑），第186卷，第1期，第97–126页，2017年。doi：10.4007/annals.2017.186.1.3，arXiv:1508.06255。44. V. Voevodsky，《概形的同调与协变动机》。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1992年，第64页，博士论文——哈佛大学。45. V. Voevodsky，《概形的同调》，数学精选（新辑），第2卷，第1期，第111–153页，1996年。doi：10.1007/BF01587941。