arXiv:2304.00949v1 [math.FA] 3 Apr 2023

广义 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式及其在球Banach Sobolev空间中的应用

Chenfeng Zhu、Dachun Yang*和 Wen Yuan

摘要 设 X 是 $\mathbb{R}^n$上的球型巴拿赫函数空间。本文在关于 X 以及其凸化的伴随空间上 Hardy–Littlewood 极大算子的有界性的若干温和假设下，作者成功地通过泛函 $\||\nabla f|\|_X$恢复了齐次球Banach Sobolev半范数

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\left[\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |f(\cdot)-f(y)|>\lambda|\cdot-y|^{1+\frac{\gamma}{q}}\}}|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X$$

对于任意满足 $|\nabla f|\in X$ 的分布 f，以及相应的极限恒等式：当 $\gamma\in(0,\infty)$ 时，$\lambda\to\infty$ 的极限；或当 $\gamma\in(-\infty,0)$ 时，$\lambda\to0^+$ 的极限，其中$\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，且 $q\in(0,\infty)$ 与 X 相关。特别是，即使当 $X:=L^p(X)$ 且 $p\in[1,\infty$ 时，其中一些结果仍然是新的。作为应用，作者在 X 的框架下获得了一些分数阶 Sobolev 型不等式和分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式。所有这些结果都具有相当广泛的适用性，并应用于各种具体的函数空间，包括 Morrey 空间、混合范数（或变指数或加权）Lebesgue 空间、洛伦兹空间和 Orlicz（或 Orlicz-slice）空间，其中一些结果即使在这些特殊情形下也仍然是新的。本文的创新之处在于同时运用外推方法以及 X 和其凸化的伴随空间上的 Hardy–Littlewood 极大算子的有界性，从而克服由平移不变性和旋转不变性的缺失，以及缺乏 X 的范数显式表达式所造成的根本困难。

目录

1 引言 **2**

2 球Banach函数空间与齐次球 Banach Sobolev 空间 **8**

2020年 数学主题分类。主要分类 46E35；次要分类 26D10、42B25、26A33、35A23。关键词与短语。球型巴拿赫函数空间、球型巴拿赫 Sobolev 空间、 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式、分数阶 Sobolev 型不等式、分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式。本项目获国家自然科学基金委员会（项目编号：12122102、11971058 和 12071197）及国家重点研发计划（项目编号：2020YFA0712900）资助。*通讯作者，电子邮箱： dcyang@bnu.edu.cn/2023年3月6日/最终版本。

3 球内广义 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式
巴拿赫函数空间 **11**
3.1 上界估计.12 3.2 下界估计与两个极限恒等式.31 3.3 扩展至 $\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$.38

4 分数阶 Sobolev 型及分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式的应用 48

5 应用 于特定函数空间 57
5.1 Morrey 空间.57 5.2 混合范数Lebesgue空间.60 5.3 变 Lebesgue 空间.62 5.4 加权Lebesgue空间.65 5.5 Lorentz空间.67 5.6 Orlicz 空间.69 5.7 Orlicz-slice 空间.72

1 引言

回顾一下，对于任意给定的 $s \in (0,1)$ 和 $p \in [1,\infty)$，齐次分数阶 Sobolev空间$\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ 最初由 Gagliardo [44], 引入，其定义为满足以下有限 Gagliardo 半范数的 $\mathbb{R}^n$ 上所有可测函数 f 的集合

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := \left[\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}}\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{p}} =: \left\|\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{s+\frac{n}{p}}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}. \tag{1.1}$$

这些空间在涉及调和分析和偏微分方程的许多问题中发挥着重要作用（例如，参见 [10, 22, 23, 51, 56, 77, 78, 84]）。记定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的弱可微函数 f 的梯度（在分布意义下）为 $\nabla f := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$，其中，对于任意 $j \in \{1,\dots,n\}$，$\partial_j f$ 表示 f 的第 j 阶弱导数，也就是说，对于任意 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$（即所有具有紧支撑的无穷次可微函数的集合），

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_j\phi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\phi(x)\,dx.$$

回顾一下，对于给定的 $p \in [1,\infty)$，齐次 Sobolev 空间 $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有在$\mathbb{R}^n$ 上具有以下有限齐次 Sobolev 半范数的局部可积函数 f 所构成的集合

$$\|f\|_{\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} := \||\nabla f|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

众所周知，式 (1.1) 中的 Gagliardo 半范数存在一个缺点：如果直接将式 (1.1) 中的 s 替换为 1，就无法恢复上述齐次 Sobolev 半范数 $\||\nabla f|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$。事实上，

Bourgain 等人 [8, 10] 指出，当 $s = 1$ 时，除非 f 是常值函数，否则式 (1.1) 中的积分是有限的。因此，自然要问，式 (1.1) 中取 $s = 1$ 的 Gagliardo 半范数能以何种方式恢复上述齐次 Sobolev 半范数 $\||\nabla f|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$。近年来，这一问题引起了广泛关注。其中一种重要方法归功于 Bourgain 等人 [9]，他们证明，对于任意给定的 $p \in [1,\infty)$ 以及任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) := \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{s\to 1^-} (1-s)\|f\|^p_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = C_{(p,n)} \||\nabla f|\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.2}$$

其中正数常数 $C_{(p,n)}$ 仅取决于 p 和 n。下文中，$s \to 1^-$ 表示 $s \in (0,1)$ 且 $s \to 1$。另一种重要方法归功于 Brezis 等人 [20]，他们最近发现了一种巧妙的替代方法，只需将 (1.1) 中的 L^p 范数 $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}$ 替换为 Marcinkiewicz 拟范数 [，即弱乘积 L^p 拟范数 $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}$]，便可弥补上述缺陷。更准确地说，Brezis 等人 [20] 证明，对于任意给定的 $p \in [1,\infty)$ 以及任意 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\||\nabla f|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \left\| \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{1+\frac{n}{p}}} \right\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)} \tag{1.3}$$

and

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p \left| \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ x \neq y, \ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{1+\frac{n}{p}}} > \lambda \right\} \right| \sim \||\nabla f|\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.4}$$

其中 (1.3) 和 (1.4) 中的正等价常数均与 f 无关；并且对于 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的任意可测函数 g,

$$\|g\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)} := \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left| \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ |g(x,y)| > \lambda\} \right|^{\frac{1}{p}}.$$

此处及下文中，对于任意给定的 $m \in \mathbb{N}$ 以及任意 Lebesgue 可测集 $E \subset \mathbb{R}^m$，符号 $|E|$ 表示 E 的 m 维 Lebesgue 测度。(1.3) 和 (1.4) 均由 Brezis 等人 [18] 进一步推广到任意满足 $p \in [1,\infty)$ 的 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，他们还证明了 (1.3) 和 (1.4) 更一般的版本。更确切地说，令 $p \in (1,\infty)$ 且 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，或者令 $p = 1$ 且 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus [-1,0]$。Brezis 等人 [18] 证明，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\||\nabla f|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \left\| \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{1+\frac{n}{p}}} \right\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\nu_\gamma)} \tag{1.5}$$

而且，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p \nu_\gamma \left(\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ x \neq y, \ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{1+\frac{\gamma}{p}}} > \lambda \right\} \right) \sim \||\nabla f|\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.6}$$

如果 $\gamma\in(0,\infty)$，并且

$$\lim_{\lambda\to0^+}\lambda^p\nu_\gamma\left(\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n:\ x\neq y,\ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{1+\frac{\gamma}{p}}}>\lambda\right\}\right)\sim\||\nabla f|\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\tag{1.7}$$

若 $\gamma\in(-\infty,0)$，其中 (1.5)、(1.6) 和 (1.7) 中的正等价常数与 f 无关，并且对于任意 $\gamma\in\mathbb{R}$ 以及任意 Lebesgue 可测集 $E\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$，

$$\nu_\gamma(E):=\iint_{\{(x,y)\in E:\ x\neq y\}}|x-y|^{\gamma-n}\,dx\,dy.\tag{1.8}$$

此处及下文中，$\lambda\to0^+$ 表示 $\lambda\in(0,1)$，且 $\lambda\to0$。关于 (1.6) 和 (1.7) 中这两个极限的更多细节，请参阅 [18, 第 3 页，注释 (i)] ；另见 [18, 引理 3.2]的证明。 [18] 中的这些结果统一并大幅拓展了 Nguyen [85] 和 Brezis 等人 [20], 此前的工作。事实上，若 $\gamma=n$，则 (1.5) 与 (1.3) 一致，且 (1.6) 与 (1.4) 一致；若 $\gamma=-p\in(-\infty,-1)$，则 (1.7) 与 [85,(3)] 一致（另见 [16, 17]）。回顾一下，前述在 [18] 和 [20]中得到的结果已产生了一些非常有趣的应用。例如，利用 (1.5)，Brezis 等人 [18] 给出了 $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画。此外，作为 (1.3) 的重要应用，Brezis 等人 [20]在某些涉及 $\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 的特殊（临界）情形下，得到了分数阶 Sobolev 型不等式和分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式的若干出人意料的替代性（较弱）估计；在这些情形下，预期的分数阶 Sobolev 型估计和分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型估计可能不成立。有关更多相关工作，请参阅 [11, 15, 19, 21, 33, 39, 38, 40, 41, 50] ；关于 Gagliardo–Nirenberg 型不等式的更多研究，请参阅 [13, 14] 。

另一方面，回顾一下，球型（拟）Banach 函数空间这一概念最初由 Sawano 等人 [93] 引入，旨在统一研究若干重要的函数空间，而这些函数空间在分析学的许多分支中都有广泛的应用（球型（拟）Banach 函数空间的定义见下文定义 2.1）。与 Bennett and Sharpley 在 [7, 第 1] 章中引入的经典巴拿赫函数空间相比，它的限制较少，因而具有更广泛的普适性和应用范围。许多著名且发展较为成熟的函数空间都是球型（拟）Banach 函数空间，例如 Morrey 空间、混合范数（或变指数或带权）Lebesgue 空间、洛伦兹空间以及 Orlicz 空间（或 Orlicz-slice 空间）（关于它们的历史和定义，分别见下文第 5.1 至 5.7 小节），但其中有些可能并非经典巴拿赫函数空间；例如参见 [93, 第 7]节。球型（拟）Banach 函数空间这一概念提出后，引起了许多调和分析学家的浓厚兴趣，尤其是在球型（拟）Banach 函数空间框架下研究并推广前述的 Bourgain–Brezis–Mironescu（BBM）公式（1.2）和前述的 Brezis–Van Schaftingen–Yung（BVY）公式（1.3）方面。最近，Dai 等人 [34] 巧妙地运用了 Poincar´e 不等式、$\mathbb{R}^n$的精妙几何性质、一种外推方法，以及 X 的凸化的伴随空间上 Hardy–Littlewood 极大算子的精确算子范数，从而摆脱了对 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的旋转不变性和平移不变性的强依赖，同时克服了一般球型（拟）Banach 函数空间的范数缺乏显式表达式所带来的困难。由此，Dai 等人 [34] 成功地将（1.3）和（1.4）推广到了球型巴拿赫函数空间

中，随后又在若干具体函数空间中建立了一些分数阶 Sobolev 型不等式和分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式。同时，应用与 [34], Dai 等人 [32] 所采用的类似思想和技术，也将 [9] 中得到的极限结果（1.2）推广到了球型巴拿赫函数空间。关于球拟Banach函数空间的更多研究，读者可参阅 [24, 75, 90, 93, 98, 101, 102, 103, 104] ，其中讨论了与球拟Banach函数空间相关的Hardy空间；参阅 [59, 99, 106] ，其中讨论了球拟Banach函数空间上算子的有界性；以及参阅 [63, 67, 68, 96, 100] ，其中讨论了球拟Banach函数空间的进一步应用。

受上述研究启发，本文在球型巴拿赫函数空间的框架下，建立了（1.5）的一个适当推广，并证明了类似于（1.6）和（1.7）的极限行为。具体而言，设 X 是 $\mathbb{R}^n$上的球型巴拿赫函数空间。在对 X 以及 Hardy–Littlewood 极大算子在 X 和其凸化的伴随空间上的有界性作出一些温和假设后，我们建立了（1.5）的以下广义版本：对任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ [, $\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$],的定义见下文定义 2.7

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \sim \| |\nabla f| \|_X , \tag{1.9}$$

其中，$q \in (0,\infty)$ 与 X 有关，$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f] := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ x \neq y, \ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{1+\frac{\gamma}{q}}} > \lambda \right\} \tag{1.10}$$

对任意 $\lambda \in (0,\infty)$，且（1.9）中的正等价常数与 f 无关。我们还建立了（1.6）和（1.7）在 X 上的相应推广。特别是，与 [18], 中的结果相比，即使当 $X := L^p(X)$ 且 $p \in [1,\infty)$ 时，其中一些结果仍然是新的。随后，我们利用（1.9）进一步在球型巴拿赫函数空间的框架下，得到了一些更一般的分数阶 Sobolev 型不等式和分数阶 Gagliaro–Nirenberg 型不等式，其中参数为 $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$；当 $\gamma := n$ 时，它们就是 [34, 推论 4.13 和 4.15] 中的分数阶 Sobolev 型不等式和分数阶 Gagliaro–Nirenberg 型不等式；而当$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0,n\}$ 时，则是新的。所有这些结果都具有相当广泛的适用性，可应用于多种具体函数空间，包括 Morrey、混合范数（或变指数或加权）Lebesgue、洛伦兹和 Orlicz（或 Orlicz-slice）空间，其中一些结果即使在这些特殊情形下也属新颖。本文的创新之处在于同时运用外推方法以及 Hardy–Littlewood 极大算子在 X 和其凸化的伴随空间上的有界性，从而克服由平移不变性和旋转不变性的缺失以及 X 的范数缺乏显式表达所造成的关键困难。

正如在 [18, 定理 2.1], 的证明中所示，当 $p \in (1,\infty)$ 时，(1.5) 中的上界可直接由 Lusin–Lipschitz 不等式（例如，参见 [20, (2.9)]）以及 Hardy–Littlewood 极大算子在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性推出。因此，证明 (1.5) 上界的核心难点是 $p = 1$ 的情形。在这一核心情形下，当 $\gamma \in (0,\infty)$ 时， [20, 命题 2.1 和 2.2] 的证明使用了 Vitali 覆盖引理和旋转方法；而当 $\gamma \in (-\infty,-1)$ 时， [18, 定理 2.2(b)] 的证明使用了停时论证和旋转方法（实际上，这两种证明对 $p \in [1,\infty$ 的整个范围都成立）。另一方面

另一方面，请注意，上述球型巴拿赫函数空间的一些例子显然不具有旋转不变性。因此，我们指出，(1.9) 即将 (1.5) 从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 推广到球型巴拿赫函数空间 X，并非显而易见，因为旋转不变性似乎确实在已知的 (1.5) 上界证明中发挥着重要作用。还值得注意的是，(1.9) 给出了 Sobolev 半范数与一个涉及所考察函数差分的正泛函之间的等价关系。事实上，在逼近理论中，即使对于一维的一些简单加权勒贝格空间，要找到适当的方法通过有限差分刻画函数的光滑性也相当困难（参见[72, 76] 及其中的参考文献）。主要障碍在于，对于任意 $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$，差分算子 $\Delta_h f := f(\cdot + h) - f(\cdot)$ 在一般加权勒贝格空间上可能不再有界。为克服这一主要困难，外推定理 [34, 引理 4.6 和 4.7] 起着至关重要的作用，它是连接球型巴拿赫函数空间与加权 Lebesgue 空间的桥梁。借助外推定理以及 Hardy–Littlewood 极大算子在 X 的凸化的伴随空间上的精确算子范数，(1.9) 的证明可归结为在带有 $A_1(\mathbb{R}^n)$ 权 [的加权 Lebesgue 空间中建立以下估计（Muckenhoupt 权类和齐次加权 Sobolev 空间 $\dot{W}^{1,p}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$] 的定义见定义 2.8 和 2.9 ）：若 $p \in [1,\infty)$ 且 $\omega \in A_1(\mathbb{R}^n)$，则对任意 $f \in \dot{W}^{1,p}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$，

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx \sim \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p\,\omega(x)\,dx, \tag{1.11}$$

其中，$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，$q \in (0,\infty)$ 与 p 相关，且正等价常数与 f 无关。请注意，(1.11) 中的积分关于 x 和 y 并不对称，这给证明 (1.11) 带来了诸多困难。另一个困难来自权 ω：在 $p = 1$ 的情况下证明 (1.11) 时，无权情形下 [18, 20] 中证明 (1.5) 所用的旋转方法似乎并不适用。我们借助若干有用工具克服了这些障碍，例如 Poincar´e 型不等式、通过 $\mathbb{R}^n$ 的相邻二进立方体系展示的 $\mathbb{R}^n$ 的精妙几何性质，以及一维情形下的停时论证。

本文其余部分的安排如下。

在第 2 节中，我们首先回顾球型（拟）Banach 函数空间的若干概念，以及相关的凸化和伴随空间。然后回顾齐次球型巴拿赫-索оболев空间 $\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 的概念，并介绍 Muckenhoupt 权重类和加权 Lebesgue 空间的一些预备知识。

第 3 节的主要目标是证明 (1.9) 以及相应的极限恒等式。在第 3.1 小节中，对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，我们给出 (1.9) 的上界估计。更具体地说，利用 Lusin–Lipschitz 不等式（或经典莫里不等式）、Hardy–Littlewood 极大算子在 X 上的有界性假设以及外推方法，我们得到 (1.9) 的上界估计（见下文定理 3.1）。在临界情形[例如，$X := L^1(\mathbb{R}^n)$], 且不假设 Hardy–Littlewood 极大算子在 X 上有界时，我们在

$\mathbb{R}^n$ 在 $\gamma \in (0,\infty)$ 的情形下，并在 $(-\infty,-1)$ 和 $n = 1$同时成立时采用停时论证，以建立 (1.9) 的上界估计（见下文定理 3.8 和 3.14）。在第 3.2 小节中，当 X 仅假设为球准 Banach 函数空间时，我们通过使用 [18, 引理 3.1] 中的 Lebesgue 微分引理以及 X 的 Fatou 性质，证明 (1.9) 的下界估计（见下文定理 3.19）。特别地，若 X 是球型巴拿赫函数空间，我们还可得到两个极限恒等式（见下文推论 3.26）。在第 3.3 小节中，在额外假设 X 具有绝对连续范数的条件下，我们通过稠密性论证，将第 3.1 和第 3.2 小节的结果从任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 推广到任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$（见下文定理 3.29 和 3.35）。作为定理 3.29 的推论，我们在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $p \in [1,\infty)$ 的情形下，得到广义 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式及相应的极限恒等式（见下文推论 3.32），其中一些结果仍是新的。

在第 4 节中，作为 (1.9) 的应用，我们进一步在球型巴拿赫函数空间 X 上建立了两类分数阶 Gagliaro– Nirenberg 型不等式（见下文定理 4.1 和定理 4.4）。当 $p \in [1,\infty)$ [or $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时，定理 4.1 同时涉及 $\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 和 $X^p(\mathbb{R}^n)$；而定理 4.4 则同时涉及 $\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 及其分数阶版本。作为定理 4.1 的一个特例，我们还得到了 X 上的分数阶 Sobolev 型估计。

在第 5 节中，我们将第 3 节和第 4 节得到的所有结果应用于若干具体的球型巴拿赫函数空间，例如 Morrey 空间（见下文小节 5.1）、混合范数 Lebesgue 空间（见下文小节 5.2）、变指数 Lebesgue 空间（见下文小节 5.3）、加权 Lebesgue 空间（见下文小节 5.4）、Lorentz 空间（见下文小节 5.5）、Orlicz 空间（见下文小节 5.6），以及 Orlicz 切片空间或广义拼接空间（见下文小节 5.7）。其中大多数结果都是新的。

由于本文结果具有一般性和灵活性，预计它们还会有更多应用。特别是，广义 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式 (1.9)（另见下文定理 3.29）还可用于给出齐次球型巴拿赫-Sobolev 空间 $\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 的一种新刻画，本文 [108] 中未予介绍，以限制篇幅。

回顾一下，当 $\gamma \in (-\infty,-1)$ 时，对于任意满足 $n \in \mathbb{N}$ 的 $f \in \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$，(1.5) 在 $p = 1$ 时的上界估计成立（例如，参见 [18, 定理 2.2(b)]）。在下文定理 3.14 中，仅当 $n = 1$ 时，才将 $p = 1$ 时的这一上界估计推广到球型巴拿赫函数情形。当 $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$ 时，如何将 $p = 1$ 时的这一上界估计推广到球型巴拿赫函数空间情形仍属未知 [（见下文注 3.17(iv)]）。请注意，在定理 3.1 中，我们假设 Hardy–Littlewood 极大算子在 X 上有界；而当 $X = L^1(\mathbb{R}^n)$ 时，这一假设并不成立，因此定理 3.1 无法在 $X = L^1(\mathbb{R}^n)$ 时给出这一上界估计。

在本节末尾，我们对符号作一些约定。我们始终令 $\mathbb{N} := \{1,2,\dots\}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$，并令 $\mathbb{S}^{n-1}$ 为 $\mathbb{R}^n$的单位球面。我们用 C 表示一个与主要参数无关、但可能随行变化的正数常数。我们用 $C_{(\alpha,\dots)}$表示依赖于所示参数 $\alpha,\dots$ 的正数常数。符号 $f \lesssim g$ 表示 $f \le Cg$；若 $f \lesssim g \lesssim f$，则记作 $f \sim g$。若 $f \le Cg$ 且 $g = h$ 或 $g \le h$，则记作 $f \lesssim g = h$ 或 $f \lesssim g \le h$。对于任意指标 $q \in [1,\infty]$，我们用 q' 表示其共轭指标，即 $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$。若 E 是 $\mathbb{R}^n$的子集，则用 $\mathbf{1}_E$ 表示其示性函数，并用 $E^\complement$ 表示集合 $\mathbb{R}^n \setminus E$。我们用 0 表示 $\mathbb{R}^n$的原点。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r \in (0,\infty)$，令 $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$，并且

$$\mathbb{B} := \{B(x,r) : \ x \in \mathbb{R}^n \text{ and } r \in (0,\infty)\} \tag{1.12}$$

表示 $\mathbb{R}^n$中所有球组成的集合。通常，对于任意 $r \in (0,\infty)$，令 $B_r := B(0,r)$。对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，以及 $\mathbb{R}^n$ 中的任意球 $B := B(x_B, r_B)$，若其中心为 $x_B \in \mathbb{R}^n$ 且半径 $r_B \in (0,\infty)$，令 $\lambda B := B(x_B, \lambda r_B)$。对于 $\mathbb{R}^n$上的任意可测函数 f，其支集 $\operatorname{supp}(f)$ 定义为 $\operatorname{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$。

在本文中，我们用 $C_c(\mathbb{R}^n)$ [（分别用 $C^k(\mathbb{R}^n)$，其中 $k \in \mathbb{N}$] ）表示所有紧支撑连续函数 [（分别表示所有在 $\mathbb{R}^n$上 k 阶连续可微函数]）的集合。特别地，用 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$上所有无穷次可微函数的集合。

对于任意 $p \in (0,\infty]$，勒贝格空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有在 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 的集合，这些函数满足

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

对于任意 $p \in (0,\infty)$，所有在 $\mathbb{R}^n$上局部 p 可积函数构成的集合 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，定义为满足以下条件的所有可测函数 f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 的集合：对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r \in (0,\infty)$，$\|f\mathbf{1}_{B(x,r)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$。对于任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，其 Hardy–Littlewood 极大函数$\mathcal{M}(f)$ 定义为：对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\mathcal{M}(f)(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \, dy,$$

其中，上确界取遍所有包含 x 的球 $B \subset \mathbb{R}^n$。对于任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 和满足 $|E| < \infty$ 的集合 $E \subset \mathbb{R}^n$，令

$$f_E := \fint_E f(x)\,dx := \frac{1}{|E|}\int_E f(x)\,dx.$$

对于任意 $q \in (0,\infty)$ 和 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\kappa(q,n) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |e\cdot\omega|^q \, d\omega = \frac{2\Gamma(\frac{q+1}{2})\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{q+n}{2})}, \tag{1.13}$$

其中，e 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意单位向量，Γ 是伽马函数。最后，在证明某个定理或类似结论时，我们始终在待证的定理或类似结论中使用相同的符号。

2 球型巴拿赫函数空间与齐次球型巴拿赫-索оболев空间

本节回顾球型（拟）Banach 函数空间及其凸化和伴随空间、齐次球型巴拿赫-索оболев空间，以及 Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$ 类的概念。首先，介绍文献 [93] 中提出的球准 Banach 函数空间的一些预备知识。本文中，用符号 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有可测函数的集合。

定义 2.1. 配备拟范数 $\|\cdot\|_X$（对 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的所有函数均有意义）的准 Banach 空间 $X \subset \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$，若满足以下条件，则称为球准 Banach 函数空间：

(i) 对任意 $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$，若 $\|f\|_X = 0$，则 $f = 0$ 几乎处处成立；

(ii) 如果 f、$g \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$，且 $|g| \le |f|$ 几乎处处成立，则 $\|g\|_X \le \|f\|_X$；

(iii) 如果序列 $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 和 $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 满足：当 $m \to \infty$ 时，$0 \le f_m \uparrow f$ 几乎处处成立，则当 $m \to \infty$ 时，$\|f_m\|_X \uparrow \|f\|_X$；

(iv) 对于任意球 B：$= B(x, r)$，其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $r \in (0, \infty)$，$\mathbf{1}_B \in X$。

此外，如果球准 Banach 函数空间 X 满足以下附加条件，则称其为球型 Banach 函数空间：

(v) 对于任意 f、$g \in X$,

$$\|f + g\|_X \le \|f\|_X + \|g\|_X;$$

(vi) 对任意球 B，存在一个依赖于 B 的正数常数 $C_{(B)}$，使得对任意 $f \in X$,

$$\int_B |f(x)|\, dx \le C_{(B)} \|f\|_X.$$

注 2.2. (i) 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的球准 Banach 函数空间。那么，根据 [101, 注 2.5(i)]（另见 [102, 注 2.6(i)]），我们发现，对任意 $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$，$\|f\|_X = 0$ 当且仅当 $f = 0$ 几乎处处成立。

(ii) 如 [101, 注 2.5(ii)]（另见 [102, 注 2.6(ii)]）所述，将其中任意球 B 替换为任意有界可测集 E，即可得到定义 2.1 的一个等价表述。

(iii) 在定义 2.1 中，若将任意球 B 替换为满足 $|E| < \infty$ 的任意可测集 E，则得到 Bennett and Sharpley 最初在 [7,定义 1.1 和 1.3] 中引入的（拟）Banach 函数空间的定义。因此，（拟）Banach 函数空间总是球型（拟）Banach 函数空间，但反过来则未必成立。

(iv) 根据 [75, 命题 1.236]（另见 [35, 定理 2]），我们得出，定义 2.1 的 (ii) 和 (iii) 均意味着任意球准 Banach 函数空间都是完备的。

以下关于球准 Banach 函数空间的 p-凸化的定义可见于 [93,定义 2.6]

定义 2.3. 设 X 是一个球准 Banach 函数空间，且 $p \in (0, \infty)$。X 的 p-凸化记为 X_p，定义为 $X^p := \{f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n) : |f|^p \in X\}$，并赋予拟范数 $\|f\|_{X^p} := \||f|^p\|_{p}^{1/p}{}_X$，其中任意 $f \in X^p$。

接下来，我们回顾具有绝对连续范数的球型巴拿赫函数空间的定义（例如参见 [7, 定义 3.1] 和 [99,定义 3.2]）。

定义 2.4. 若对任意 $f \in X$ 以及任意一列可测集 $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，当 $j \to \infty$ 时满足 $\mathbf{1}_{E_j} \to 0$ 几乎处处成立，则称球型巴拿赫函数空间 X 具有绝对连续范数，此时有 $\|f\,\mathbf{1}_{E_j}\|_X \to 0$ 当 $j \to \infty$。

球型巴拿赫函数空间的伴随空间这一概念可见于[93, 第9]页；更多详情请参见 [7, 第 1 章 第 2] 节。

定义 2.5. 设 X 为球型巴拿赫函数空间。X 的伴随空间（也称为 K¨othe 对偶空间）X′ 定义为

$$X' := \left\{ f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_{X'} := \sup_{\{g \in X:\ \|g\|_X = 1\}} \|fg\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

其中， $\|\cdot\|_{X'}$ 称为 $\|\cdot\|_X$的伴随范数。

注 2.6. 设 X 为球型巴拿赫函数空间。则 [93, 命题 2.3] 表明， X′ 也是球型巴拿赫函数空间。

现在，我们回顾齐次球型巴拿赫-Sobolev 空间的概念，该概念在 [34,定义 2.4]中引入。

定义 2.7. 设 X 为球型巴拿赫函数空间。齐次球型巴拿赫-Sobolev 空间 $\dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$定义为满足下述条件的所有 $\mathbb{R}^n$ 上的分布 f 的集合： $|\nabla f| \in X$ 配备拟范数

$$\|f\|_{\dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)} := \| |\nabla f| \|_X,$$

其中， $\nabla f := (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$ 表示 f 的分布梯度。

接下来，我们回顾 Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$ 权类的概念（例如参见 [48,定义 7.1.1 和 7.1.3]）。

定义 2.8。一个 $A_p(\mathbb{R}^n)$-权 ω（其中 $p \in [1,\infty)$）是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数，并满足：当 $p = 1$

$$[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)} := \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{\|\omega^{-1}\|_{L^\infty(Q)}}{|Q|} \int_Q \omega(x)\,dx < \infty, \tag{2.1}$$

以及当 $p \in (1,\infty)$ 时

$$[\omega]_{A_p(\mathbb{R}^n)} := \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)\,dx \right] \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q [\omega(x)]^{1-p'}\,dx \right\}^{p-1} < \infty, \tag{2.2}$$

其中， $p' \in [1,\infty]$ 表示 p 的共轭指标，且（2.1）和（2.2）中的上确界均取遍所有满足 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 的立方体。此外，令

$$A_\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{p \in [1,\infty)} A_p(\mathbb{R}^n).$$

我们如下回顾加权 Lebesgue 空间和齐次加权 Sobolev 空间的概念。

定义 2.9. (i) 设 $p \in (0,\infty]$ 且 ω 是 $\mathbb{R}^n$上的一个权。加权 Lebesgue 空间 $L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有满足下述条件的 $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 的集合：

$$\|f\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} := \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, \omega(x)\,dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

(ii) 设 $p \in [1,\infty]$ 且 ω 是 $\mathbb{R}^n$上的一个权。齐次加权 Sobolev 空间 $\dot{W}^{1,p}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有满足其分布梯度 $\nabla f \in L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$ 的 $\mathbb{R}^n$ 上的分布 f 的集合。此外，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,p}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$，令

$$\|f\|_{\dot{W}^{1,p}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} := \||\nabla f|\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

对于 Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$-权，以下基本性质及相关结论成立（例如，参见 [42, (7.3) 和 (7.5)], [48,命题 7.1.5 与定理 7.1.9], 以及 [36,定理 2.7.4]）。

引理 2.10. 设 $p \in [1,\infty)$ 且 $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$。则以下陈述成立：

(i) 若 $p = 1$，则 $[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)} \in [1,\infty)$，并且对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\mathcal{M}(\omega)(x) \le [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\omega(x);$$

(ii) 对任意立方体 Q、$S \subset \mathbb{R}^n$，若 $Q \subset S$，

$$\omega(S) \le [\omega]_{A_p(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p \omega(Q);$$

(iii)

$$[\omega]_{A_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n}\sup_{\|f\mathbf{1}_Q\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}\in(0,\infty)} \frac{[\frac{1}{Q}\int_Q |f(t)|\,dt]^p}{\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q |f(t)|^p\omega(t)\,dt},$$

其中第一个上确界取遍所有立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$；

(iv) $\omega \in A_q(\mathbb{R}^n)$ 对任意 $q \in [p,\infty)$均成立；此外，$[\omega]_{A_q(\mathbb{R}^n)} \le [\omega]_{A_p(\mathbb{R}^n)}$；

(v) 若 $p \in (1,\infty)$ 且 $\mu := \omega^{1-p'}$，则 $\mu \in A_{p'}(\mathbb{R}^n)$，

$$[\mu]^{p-1}_{A_{p'}(\mathbb{R}^n)} = [\omega]_{A_p(\mathbb{R}^n)} \le [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)},\ \textit{and}\ \left[L^p_\omega(\mathbb{R}^n)\right]' = L^{p'}_\mu(\mathbb{R}^n);$$

(vi) 若 $p \in (1,\infty)$，则 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$ 上有界；此外，存在一个与 ω 无关的正数常数 C，使得

$$\|\mathcal{M}\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)\to L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \le C[\omega]^{p'-1}_{A_p(\mathbb{R}^n)},$$

其中$\|\mathcal{M}\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)\to L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}$ 表示 $\mathcal{M}$ 在 $L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$ 上的算子范数。

3 球型巴拿赫函数空间中的广义 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式

设 X 为球型巴拿赫函数空间。在本节中，在关于 X 的一些温和假设下，我们在 X 上建立广义 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式。更确切地说，我们

旨在通过以下泛函恢复任意 $f\in \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$ 或其某个稠密子空间上的球型巴拿赫—索
ობолев半范数 $\||\nabla f|\|_X$

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X, \tag{3.1}$$

其中 $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$q\in(0,\infty)$，且 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$，与 (1.10 中相同).

3.1 上界估计

本小节致力于给出 (1.9) 的上界估计。以下是本小节的主要结果之一。

定理 3.1. 设 X 是一个球型巴拿赫函数空间，$\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$p\in[1,\infty)$，且 $q\in(0,p]$。假设

(i) $X^{\frac{1}{p}}$ 是一个球型巴拿赫函数空间;

(ii) Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 X 和 $(X^{\frac{1}{p}})'$ 上均有界，其算子范数分别记为 $\|\mathcal{M}\|_{X\to X}$ 和 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$。

于是，存在一个正数常数 C，它仅依赖于 p、q、γ、n 以及 $\|\mathcal{M}\|_{X\to X}$ 和 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$，使得对于任意满足 $|\nabla f|\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\le C\,\||\nabla f|\|_X,$$

其中，对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$，$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 与 (1.10) 中的定义相同；正数常数 C 关于 $\|\mathcal{M}\|_{X\to X}$ 或 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 分别连续，并且随着 $\|\mathcal{M}\|_{X\to X}$ 或 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 分别增大而增大。

为证明定理 3.1，我们需要三个技术引理。下面的引理正是 [34,引理 4.6]。

引理 3.2. 设 $X\subset\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 是一个线性赋范空间，其赋予的范数 $\|\cdot\|_X$ 对 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的所有函数都有意义。假设 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界，其算子范数记为 $\|\mathcal{M}\|_{X\to X}$。对于任意 $g\in X$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$R_Xg(x):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{M}^kg(x)}{2^k\|\mathcal{M}\|_{X\to X}^k}, \tag{3.2}$$

其中，对于任意 $k\in\mathbb{N}$，$\mathcal{M}^k$ 是 $\mathcal{M}$ 的 k 次迭代，而 $\mathcal{M}^0g(x):=|g(x)|$。于是，对于任意 $g\in X$，有

(i) 对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$，$|g(x)|\le R_Xg(x)$;

(ii) $R_Xg\in A_1(\mathbb{R}^n)$和 $[R_Xg]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\le 2\|\mathcal{M}\|_{X\to X}$;

(iii) $\|R_X g\|_X \le 2\|g\|_X$.

下面的引理是 [34,引理 4.7 和注 4.8] 的简单推论。

引理 3.3. 设 X 是一个球型巴拿赫函数空间，且 $p \in [1,\infty)$。假设 $X^{\frac{1}{p}}$ 是一个球巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood 极大算子在 $(X^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。那么，对于任意 $f \in X$，

$$\|f\|_X \le \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\le 1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_X.$$

下面的引理就是 [106,引理 2.6]。

引理 3.4. 设 X 是一个球型巴拿赫函数空间。那么 X 与其二重伴随空间 X″ 重合。换言之，函数 $f \in X$ 当且仅当 $f \in X''$，且在这种情况下，

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}.$$

现在，我们证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明。我们仅证明 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 情形下的本定理，因为 $\gamma \in (0,\infty)$ 情形的证明与此非常相似。为此，设 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$。由 Lusin–Lipschitz 不等式（例如参见 [20, (2.9)]），可知存在一个与 f 无关的正常数 C，使得对于任意 $(x,y) \in E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$，

$$\lambda|x-y|^{\frac{\gamma}{q}} < \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le \widetilde{C}\left[\mathcal{M}(|\nabla f|)(x) + \mathcal{M}(|\nabla f|)(y)\right],$$

这进一步意味着

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f] &\subset \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n :\ x\neq y,\ \frac{\mathcal{M}(|\nabla f|)(x)}{\lambda|x-y|^{\frac{\gamma}{q}}} > \frac{1}{2\widetilde{C}}\right\} \\ &\quad \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n :\ x\neq y,\ \frac{\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)}{\lambda|x-y|^{\frac{\gamma}{q}}} > \frac{1}{2\widetilde{C}}\right\} \\ &=: E_1 \cup E_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

一方面，根据 E_1, 的定义、极坐标以及 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界这一假设，我们可知，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned} &\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_1}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X \\ &= \left\|\left[\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |\cdot-y|^{\frac{\gamma}{q}} < 2\widetilde{C}\lambda^{-1}\mathcal{M}(|\nabla f|)(\cdot)\}} |\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X \\ &= \left\|\left\{\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{[2\widetilde{C}\lambda^{-1}\mathcal{M}(|\nabla f|)(\cdot)]^{\frac{q}{\gamma}}}^{\infty} r^{\gamma-1}\,dr\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{q}}\right\|_X \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\sim \frac{1}{\lambda}\,\|\mathcal{M}(|\nabla f|)\|_X \le \frac{\|\mathcal{M}\|_{X\to X}}{\lambda}\,\||\nabla f|\|_X.$$

另一方面，为了估计 E_2, ，我们考虑 p 和 q 的以下两种情况 .

情形 1) $\mathrm{p} = \mathrm{q}$。在此情形下，由引理 3.3、Tonelli 定理以及 E_2，的定义，我们得出

$$\begin{aligned}(3.5)\qquad &\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_2}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X^q\\ &\le \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{q}})'}\le 1}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_2}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]R_{(X^{\frac{1}{q}})'}g(x)\,dx\\ &= \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{q}})'}\le 1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ \frac{\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)}{\lambda|x-y|^{\frac{\gamma}{q}}}>\frac{1}{2C}\}}|x-y|^{\gamma-n}R_{(X^{\frac{1}{q}})'}g(x)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

由 $\gamma\in(-\infty,0)$ 和引理 2.10(ii)，我们推得，对于任意 $\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n$、$\mathrm{r}\in(0,\infty)$ 以及 $\omega\in\mathrm{A}_1(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}(3.6)\qquad &\int_{[B(y,r)]^{\complement}}|x-y|^{\gamma-n}\,\omega(x)\,dx\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^jB(y,r)\setminus 2^{j-1}B(y,r)}|x-y|^{\gamma-n}\,\omega(x)\,dx\\ &\le \sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{j-1}r\right)^{\gamma-n}\omega\left(2^jB(y,r)\right)\\ &\lesssim [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=1}^{\infty}2^{j\gamma}r^{\gamma-n}\omega\left(B(y,r)\right)\sim [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}r^{\gamma-n}\omega\left(B(y,r)\right),\end{aligned}$$

其中，隐含正常数与 y、r 和 ω 无关。结合 (3.5)、引理 3.2(ii) 和引理 2.10(i)，以及 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界这一假设，可进一步推出

$$\begin{aligned}(3.7)\qquad &\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_2}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X^q\\ &\lesssim \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{q}})'}\le 1}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)}{\lambda}\right]^{\frac{q(\gamma-n)}{\gamma}}\\ &\quad\times\int_{B(y,[2\widetilde{C}\lambda^{-1}\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)]^{\frac{q}{\gamma}})}R_{(X^{\frac{1}{q}})'}g(x)\,dx\,dy\\ &\le \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{q}})'}\le 1}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)}{\lambda}\right]^{\frac{q(\gamma-n)}{\gamma}}\\ &\quad\times\inf_{x\in B(y,[2\widetilde{C}\lambda^{-1}\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)]^{\frac{q}{\gamma}})}\mathcal{M}\left(R_{(X^{\frac{1}{q}})'}g\right)(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left| B\big(y, [2\widetilde{C}\lambda^{-1}\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)]^{\frac{q}{\gamma}}\big)\right| dy\\
&\lesssim \left[R_{(X^{\frac{1}{q}})'} g\right]_{A_1(\mathbb{R}^n)} \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{q}})'}\le 1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)}{\lambda}\right]^q\\
&\quad\times \inf_{x\in B(y,[2\widetilde{C}\lambda^{-1}\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)]^{\frac{q}{\gamma}})} R_{(X^{\frac{1}{q}})'} g(x)\, dy\\
&\lesssim \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{q}})'\to(X^{\frac{1}{q}})'} \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{q}})'}\le 1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\mathcal{M}(|\nabla f|)(y)}{\lambda}\right]^q R_{(X^{\frac{1}{q}})'} g(y)\, dy\\
&\lesssim \lambda^{-q}\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{q}})'\to(X^{\frac{1}{q}})'} \|\mathcal{M}(|\nabla f|)\|_X^q\\
&\le \lambda^{-q}\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{q}})'\to(X^{\frac{1}{q}})'} \|\mathcal{M}\|_{X\to X}^q \| |\nabla f| \|_X^q .
\end{aligned}
$$

情形 2) $\mathrm{q} \in (0, \mathrm{p})$。在这种情况下，令 $\mathrm{r} := {}_{p\,q} \in (1,\infty)$，$\omega \in \mathrm{A}_1(\mathbb{R}^n)$，且 $\mu := \omega^{1-r'}$。由引理 2.10 的 (i) 和 (v)，可得 $\omega \in \mathrm{A}_r(\mathbb{R}^n)$、$\mu \in \mathrm{A}_{r'}(\mathbb{R}^n)$、$[\mu]_{A_{r'}}^{r-1}(\mathbb{R}^n) = [\omega]_{A_r}(\mathbb{R}^n) \le [\omega]_{A_1}(\mathbb{R}^n)$，以及$[\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)]' = \mathrm{L}^{r'}\,\mu(\mathbb{R}^n)$。由此，结合 $\mathrm{X} := \mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 的引理 3.4、定义 2.5、引理 3.2 的 (i)、(ii) 和 (vi)、引理 2.10(vi)，以及与估计 (3.7) 时所用论证类似的论证，可推得

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(\cdot, y)|\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy\right\|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)}\\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(\cdot, y)|\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy\right\|_{[L^r_\omega(\mathbb{R}^n)]''} = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(\cdot, y)|\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy\right\|_{[L^{r'}_\mu(\mathbb{R}^n)]'}\\
&= \sup_{\|g\|_{L^{r'}_\mu(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(x, y)|x - y|^{\gamma-n}\, dy\right] g(x)\, dx\\
&\le \sup_{\|g\|_{L^{r'}_\mu(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(x, y)|x - y|^{\gamma-n}\, dy\right] Rg(x)\, dx\\
&\lesssim \sup_{\|g\|_{L^{r'}_\mu(\mathbb{R}^n)}=1} [Rg]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\lambda^{-q} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{M}(|\nabla f|)(x)]^q\, Rg(x)\, dx\\
&\lesssim \sup_{\|g\|_{L^{r'}_\mu(\mathbb{R}^n)}=1} \|\mathcal{M}\|_{L^{r'}_\mu(\mathbb{R}^n)\to L^{r'}_\mu(\mathbb{R}^n)}\, \lambda^{-q} \left\|[\mathcal{M}(|\nabla f|)]^q\right\|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)} \|Rg\|_{L^{r'}_\mu(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim [\mu]_{A_{r'}}^{r-1}(\mathbb{R}^n)\lambda^{-q} \left\|[\mathcal{M}(|\nabla f|)]^q\right\|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)} \le [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\lambda^{-q} \left\|[\mathcal{M}(|\nabla f|)]^q\right\|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathrm{Rg} := \mathrm{R}_X\mathrm{g}$ 与 (3.2) 中相同，只是将 X 替换为 $\mathrm{L}^{r'}\,\mu(\mathbb{R}^n)$；结合引理 3.3 和 3.2(ii)，以及 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界这一假设，可进一步推出

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(\cdot, y)\,|\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X^q\\
&\quad\le \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\le 1} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(x, y)\,|x - y|^{\gamma-n}\, dy\right]^{\frac{p}{q}} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\, dx\right\}^{\frac{q}{p}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \lambda^{-q} \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\le 1} \left[R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g\right]_{A_1(\mathbb{R}^n)} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} \left[\mathcal{M}\left(|\nabla f|\right)(x)\right]^p R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx\right\}^{\frac{q}{p}}\\
&\lesssim \lambda^{-q} \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'} \|\mathcal{M}(|\nabla f|)\|_X^q\\
&\le \lambda^{-q} \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'} \|\mathcal{M}\|_{X\to X}^q \||\nabla f|\|_X^q.
\end{aligned}$$

由此，根据定义 2.1(v)、(3.3)、(3.4) 和 (3.7)，我们得出

$$\begin{aligned}
&\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\
&\quad\lesssim \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_1}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\qquad\left.+\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\
&\quad\le \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_1}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\
&\qquad+\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_2}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\
&\quad\lesssim \left[1+\|\mathcal{M}\|^{\frac{1}{q}}_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}\right] \|\mathcal{M}\|_{X\to X} \||\nabla f|\|_X.
\end{aligned}$$

这就完成了定理 3.1 的证明。 □

注 3.5. 在定理 3.1 中，若 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $p \in (1,\infty)$，并且 $q \in (0,p]$,，那么 X 和 $X^{\frac{1}{p}} = L^1(\mathbb{R}^n)$ 都是球型巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood 极大算子在 X 和 $(X_{p})' = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上有界。因此，此时定理 3.1 成立；当 $q = p \in (1,\infty)$ 时，这就是 [18, 命题 2.1]；当 $q \in (0,p)$ 时，这是一个新结果。

回顾经典莫里不等式：对于任意给定的 $r \in (n,\infty)$，任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，以及几乎处处的 $x, y \in \mathbb{R}^n$，其中 x , y,

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \lesssim \left[\mathcal{M}(|\nabla f|^r)(x)\right]^{\frac{1}{r}},$$

其中，隐含正常数仅取决于 r 和 n（例如，参见 [43, 定理 4.10(i)]）。由此，再结合与估计 (3.4) 时类似的论证，我们得到以下关于 (1.9) 在 $q \in (0,\infty)$ 的完整取值范围内的上界估计结论；此处省略细节。

定理 3.6. 设 X 是球型巴拿赫函数空间，$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，$r \in (n,\infty)$，且 $q \in (0,\infty)$。假设 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $X^{\frac{1}{r}}$ 上有界，其算子范数

记为 $\|\mathcal{M}\|_{X^{\frac{1}{r}}\to X^{\frac{1}{r}}}$。则存在一个正数常数 C，它仅依赖于 r、q、 γ、n 和 $\|\mathcal{M}\|_{X^{\frac{1}{r}}\to X^{\frac{1}{r}}}$，使得对任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le C \, \| |\nabla f| \|_X ,$$

其中，对任意 $\lambda \in (0,\infty)$，$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 与 (1.10) 中的定义相同。

注 3.7. 在定理 3.6 中，若 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$，其中 $p \in (n,\infty)$，且 $q \in (0,\infty)$，则存在 $r \in (n,p)$，使得 Hardy–Littlewood 极大算子在 $X^{\frac{1}{r}} = L^{p,r}(\mathbb{R}^n)$ 上有界，因此此时定理 3.6 成立；当 $q = p \in (n,\infty)$ 时，这是 [18, 命题 2.1] 的一部分；当 $q \in (0,\infty) \setminus \{p\}$ 时，则是新的结果。

回顾一下，在端点情形，即 $p = 1$ 时，(1.5) 中的上界估计也成立（例如，参见 [18, 定理 2.2]）。注意，在定理 3.1 中，我们假设 Hardy– Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界；但当 $X := L^1(\mathbb{R}^n)$ 时，这一条件并不成立，因此定理 3.1 无法在 $X := L^1(\mathbb{R}^n)$ 时给出 (1.9) 中的上界估计。因此，为了在球型巴拿赫函数空间 X 的框架下建立 (1.9)，而此时 $\mathcal{M}$ 是否有界可能尚不清楚，我们还有另外两个结论（见下文定理 3.8 和 3.14）。以下讨论的是情形 $\gamma \in (0,\infty)$。

定理 3.8. 设 X 为球型巴拿赫函数空间，$\gamma \in (0,\infty)$，$p \in [1,\infty)$，且 $q \in (0,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$。假设 $X^{\frac{1}{p}}$ 是球型巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood $\frac{1}{p}$ 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\frac{1}{p}})'$ 上有界，其算子范数记为 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$。则存在一个正数常数 C，它仅依赖于 p、q、 γ、n 和 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$，使得对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le C \, \| |\nabla f| \|_X ,$$

其中 $\kappa(q,n)$ 和 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ with $\lambda \in (0,\infty)$ 分别与 (1.13) 和 (1.10) 中的相同，并且 C 关于 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 连续，且随 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 增大而增大。

为证明定理 3.8，我们先证明以下命题。

命题 3.9. 设 $\gamma \in (0,\infty)$, $p \in [1,\infty)$, 且 $q \in (0,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$。假设 $\omega \in A_1(\mathbb{R}^n)$。那么存在一个正数常数 $C_{([\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)})}$，它依赖于 $[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}$，使得对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(x,y) |x-y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\, dx \\ \le C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p\, \omega(x)\, dx, \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 对任意 $\lambda \in (0,\infty)$ 都与 (1.10) 中的相同，并且 $C_{([\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)})}$ 关于 $[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}$ 连续，且随 $[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}$ 的增加而增加。

为证明命题 3.9，我们需要三个技术引理。首先回顾下面这个有用的不等式。

引理 3.10. 设 r $\in(0,1]$ and $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$. Then $(\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_j|)^r\le\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_j|^r$.

下面的 Poincar´e 型引理正是引理 3.12]。

引理 3.11. 设 $p\in[1,\infty)$, $\omega\in A_p(\mathbb{R}^n)$, 且 $f\in \dot{W}^{1,p}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$。那么存在集合 $A\subset\mathbb{R}^n$，满足 $|A|=0$，以及一个正数常数 $C_{(n)}$，它仅依赖于 n，使得对于任意 $x\in\mathbb{R}^n\setminus A$、任意 $r\in(0,\infty)$，以及任意球 $B_1\subset B:=B(x,r)\subset 3B_1$,

$$\left|f(x)-f_{B_1}\right|\le C_{(n)}r\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\fint_{2^{-j}B}|\nabla f(y)|\,dy.$$

下面的相邻二进立方体系可见于引理 3.2] 节。

引理 3.12. 对任意 $\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n$，设

$$\mathscr{D}^{\alpha}:=\left\{2^j\left[k+(0,1]^n+(-1)^j\alpha\right]:\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^n\right\}.$$

Then

(i) 对任意具有相同 $\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n$ 的 Q、$P\in\mathscr{D}^{\alpha}$，

$$Q\cap P\in\{\emptyset,Q,P\};$$

(ii) 对任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$，存在一个 $\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n$ 和一个 $Q\in\mathscr{D}^{\alpha}$，使得 $B\subset Q\subset CB$，其中正数常数 C 仅依赖于 n。

现在，我们可以证明命题 3.9 了。

命题 3.9 的证明。我们借鉴了证明 [34, 定理 3.13] 中的一些思路。设 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$，且 $|\nabla f|\in C_c(\mathbb{R}^n)$。不失一般性，可假设 $\lambda=1$。否则，对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$，我们可以用 $f\overline{\lambda}$ 替换 f。令 A 与引理 3.11 中相同。对于任意满足 $x\ne y$ 的 $x、y\in\mathbb{R}^n$，令 $B_{x,y}:=B(\frac{x+y}{2},|x-y|)$。那么

$$\begin{aligned}
&E_{1,\frac{\gamma}{q}}[f]\setminus[(A\times\mathbb{R}^n)\cup(\mathbb{R}^n\times A)]\\
&\quad\subset\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n:\ x\ne y,\ \frac{|f(x)-f_{B_{x,y}}|}{|x-y|^{1+\frac{\gamma}{q}}}>\frac{1}{2}\right\}\setminus(A\times\mathbb{R}^n)\\
&\qquad\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n:\ x\ne y,\ \frac{|f(y)-f_{B_{x,y}}|}{|x-y|^{1+\frac{\gamma}{q}}}>\frac{1}{2}\right\}\setminus(\mathbb{R}^n\times A)\\
&\quad=:E^{(1)}\cup E^{(2)}.
\end{aligned}$$

由此可知，为证明本定理，只需证明存在一个与 f 无关的正数常数 C，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E^{(1)}}(x,y)|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx \tag{3.9}$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p \, \omega(x) \, dx$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E^{(2)}}(x,y) |x-y|^{\gamma-n} \, dy \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x) \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p \, \omega(x) \, dx. \tag{3.10}$$

我们先证明 (3.9)。设 $\varepsilon \in (0,1)$。根据 $E^{(1)}$ 的定义以及引理 3.11，取 $B := B(x, 2|x-y|)$ 和 $B_1 := B_{x,y}$，可知存在一个仅依赖于 n 的正数常数 c_0, ，使得对于任意给定的 $(x,y) \in E^{(1)}$,

$$\frac{|x-y|^{\frac{\gamma}{q}}}{2} < \frac{|f(x) - f_{B_{x,y}}|}{|x-y|} \leq c_0 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \fint_{2^{-j}B} |\nabla f(y)| \, dy, \tag{3.11}$$

这进一步意味着存在一个 $j_{x,y} \in \mathbb{Z}_+$，它仅依赖于 x 和 y，使得

$$\fint_{B_{j_{x,y}}} |\nabla f(z)| \, dz > c_1 2^{j_{x,y}(1-\varepsilon)} \left| 2^{j_{x,y}} B_{j_{x,y}} \right|^{\frac{\gamma}{qn}}, \tag{3.12}$$

其中 $B_{j_{x,y}} := B(x, 2^{-j_{x,y}+1}|x-y|)$，且 $c_1 := \frac{1-2^{\varepsilon}}{2^{\frac{\gamma}{q}+1} q c_0} \in (0,\infty)$。事实上，如果对任意 $j \in \mathbb{Z}_+$,

$$\fint_{2^{-j}B} |\nabla f(z)| \, dz \leq c_1 2^{j(1-\varepsilon)} |B|^{\frac{\gamma}{qn}} = \frac{1-2^{\varepsilon}}{2c_0} 2^{j(1-\varepsilon)} |x-y|^{\frac{q}{\gamma}},$$

then

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \fint_{2^{-j}B} |\nabla f(y)| \, dy \leq \frac{|x-y|^{\frac{\gamma}{q}}}{2c_0},$$

这与 (3.11) 矛盾。因此，(3.12) 成立。将引理 3.12(ii) 应用于 $B_{j_{x,y}}$，可得存在一个 $\alpha_{x,y} \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$ 以及一个二进立方体 $Q_{x,y} \in \mathcal{D}^{\alpha_{x,y}}$，使得

$$B_{j_{x,y}} \subset Q_{j_{x,y}} \subset \widetilde{C} B_{j_{x,y}}, \tag{3.13}$$

其中 C 与引理 3.12(ii) 中的常数相同。结合 (3.12)，进一步可得存在一个正数常数 c_2, ，它仅依赖于 q、γ、n 和 ε，使得

$$\fint_{Q_{j_{x,y}}} |\nabla f(z)| \, dz > c_2 2^{j_{x,y}(1-\varepsilon)} \left| 2^{j_{x,y}} Q_{j_{x,y}} \right|^{\frac{\gamma}{qn}}. \tag{3.14}$$

对于任意 $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$ 和 $j \in \mathbb{Z}_+$，令

$$\mathscr{A}_{\alpha,j} := \left\{ Q \in \mathcal{D}^{\alpha} : \ Q \text{ satisfies (3.14) with } j_{x,y} \text{ replaced by } j \right\}.$$

由此、式 (3.14) 以及引理 2.10 的 (iii) 和 (iv)，我们可推出：对于任意 $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$、$j \in \mathbb{Z}_+$ 和 $Q \in \mathscr{A}_{\alpha,\, j}$，

$$\omega(Q)\left|2^j Q\right|^{\frac{p\gamma}{qn}} < [\omega]_{A_p(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_Q |\nabla f(z)|^p \omega(z)\, dz}{[\fint_Q |\nabla f(z)|\, dz]^p} \left[\frac{\fint_Q |\nabla f(z)|\, dz}{c_2 2^{j(1-\varepsilon)}}\right]^p \le c_2^{-p} [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)} 2^{-jp(1-\varepsilon)} \int_Q |\nabla f(z)|^p\, \omega(z)\, dz. \tag{3.15}$$

此外，注意到，由于 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$，(3.14) 进一步意味着，对任意给定的 $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$ 和 $j \in \mathbb{Z}_+$，$\sup_{Q \in \mathscr{A}_{\alpha,j}} l_{(Q)} < \infty$，其中 $l_{(Q)}$ 是 Q 的边长。因此，每个二进立方体 $Q \in \mathscr{A}_{\alpha,\, j}$ 都包含在 $\mathscr{A}_{\alpha,j}$ 中一个关于集合包含关系极大的二进立方体内。对于任意 $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$ 和 $j \in \mathbb{Z}_+$，记 $\mathscr{A}\max_{\alpha,\, j}$ 为 $\mathscr{A}_{\alpha,\, j}$ 中所有极大的二进立方体组成的集合。于是，由 (3.12)、引理 3.12(ii) 以及 $\mathscr{A}_{\alpha,\, j}$ 和 $\mathscr{A}\max_{\alpha,\, j}$ 的定义可知，对于任意 $(x, y) \in E^{(1)}$，存在一个 $j_{x,y} \in \mathbb{Z}_+$、一个 $\alpha_{x,y} \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$、一个满足 (3.13) 的二进立方体 $Q_{j_{x,y}} \in \mathscr{D}^{\alpha_{x,y}}$，以及一个极大二进立方体 $Q_{j_{x,y}} \subset \mathscr{A}\max_{\alpha_{x,y},\, j_{x,y}}$，使得

$$(x, y) \in \left(B_{j_{x,y}} \times 2^{j_{x,y}} B_{j_{x,y}}\right) \subset \left(Q_{j_{x,y}} \times 2^{j_{x,y}} Q_{j_{x,y}}\right) \subset \left(\widetilde{Q}_{j_{x,y}} \times 2^{j_{x,y}} \widetilde{Q}_{j_{x,y}}\right),$$

这进一步意味着

$$E^{(1)} \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n} \bigcup_{Q \in \mathscr{A}^{\max}_{\alpha,j}} \left(Q \times 2^j Q\right). \tag{3.16}$$

设 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 为任意一个二进立方体。注意，对于任意给定的 $x \in Q$ 和 $j \in \mathbb{Z}_+$，以及任意 $y \in 2^j Q$，

$$|x - y| \le |x - z_Q| + |z_Q - y| \le \frac{n^{\frac{1}{2}} l_{(Q)}}{2} + \frac{2^j n^{\frac{1}{2}} l_{(Q)}}{2} =: \frac{M}{2},$$

其中 z_Q 表示 Q 的中心，因此 $2^j Q \subset B(x, M)$。由此以及 $M \sim 2^j l_{(Q)}$，我们推得，对于任意给定的 $x \in Q$ 和 $j \in \mathbb{Z}_+$，

$$\int_{2^j Q} |x - y|^{\gamma - n}\, dy \le \int_{B(x,M)} |x - y|^{\gamma - n}\, dy \le \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^M r^{\gamma - 1}\, dr\, d\sigma \sim |2^j Q|^{\frac{\gamma}{n}},$$

结合 (3.16)，进一步可得，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E^{(1)}}(x, y) |x - y|^{\gamma - n}\, dy \\ &\quad \le \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n} \sum_{Q \in \mathscr{A}^{\max}_{\alpha,j}} \int_{2^j Q} |x - y|^{\gamma - n}\, dy \mathbf{1}_Q(x) \\ &\quad \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n} \sum_{Q \in \mathscr{A}^{\max}_{\alpha,j}} |2^j Q|^{\frac{\gamma}{n}} \mathbf{1}_Q(x). \end{aligned}$$

结合 (3.15)，并采用与证明 [34,引理 3.14] 中情形 1) 和情形 2) 所用论证类似的方法，将 $|2_jQ|^{\gamma}{}_n$ 替换 $|2^jQ|$，进一步可得 (3.9) 成立；此处省略细节。

接下来，我们证明 (3.10)。由于 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < 1$，我们可以取一个 $\eta \in (0,1)$，使得

$$\eta < 1 - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right). \tag{3.17}$$

通过类似于证明 (3.9) 时所用的论证，我们得出

(i) 存在一个正数常数 C_1，使得对任意 $(x,y) \in E^{(2)}$，都存在一个 $ej_{x,y} \in \mathbb{Z}_+$satisfying that

$$\fint_{\widetilde{B}_{j_{x,y}}} |\nabla f(z)|\, dz > C_1 2^{\widetilde{j}_{x,y}(1-\eta)} \left|2^{\widetilde{j}}\widetilde{B}_{j_{x,y}}\right|^{\frac{\gamma}{q}},$$

其中 $eB_{j_{x,y}} := B(y,\ 2^{-\widetilde{j}_{x,y}+1}|x - y|)$;

(ii) 对任意给定的 $(x, y) \in E^{(2)}$，满足 $eB_{j_{x,y}}$ 与上文相同，存在一个 $e\alpha_{x,y} \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n e$ ~以及一个二进立方体 $Q_{x,y} \in \mathcal{D}^{\alpha_{x,y}}$，使得

$$\widetilde{B}_{\widetilde{j}_{x,y}} \subset \widetilde{Q}_{\widetilde{j}_{x,y}} \subset \widetilde{C}\,\widetilde{B}_{\widetilde{j}_{x,y}},$$

其中 C 与引理 3.12(ii) 中的常数相同，因此存在一个正数常数 C_2,，它仅依赖于 n、q、γ 和 ε，使得

$$\fint_{\widetilde{Q}_{j_{x,y}}} |\nabla f(z)|\, dz > C_2 2^{\widetilde{j}_{x,y}(1-\eta)} \left|2^{\widetilde{j}_{x,y}}\widetilde{Q}_{\widetilde{j}_{x,y}}\right|^{\frac{\gamma}{qn}}; \tag{3.18}$$

(iii) 对任意 $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$ 和 $j \in \mathbb{Z}_+$，令

$$\widetilde{\mathscr{A}_{\alpha,j}} := \left\{Q \in \mathcal{D}^{\alpha} :\ Q \text{ satisfies (3.18) with } \widetilde{j}_{x,y} \text{ replaced by } j\right\}$$

f f 和 $\mathscr{A}\max_{\alpha,\ j}$表示 $\mathscr{A}_{\alpha,\ j}$ 中所有关于集合包含关系而言极大的二进立方体组成的集合。则存在一个正数常数 C_3,，它仅依赖于 n、q、γ 和 η，使得对于任意 $j \in \mathbb{Z}_+$、$\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$，以及 $Q \in f_{\mathscr{A}}\max_{\alpha,\ j}$，

$$\omega(Q)\left|2^j Q\right|^{\frac{p\gamma}{qn}} \le C_3[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)} 2^{-jp(1-\eta)} \int_Q |\nabla f(z)|^p\, \omega(z)\, dz; \tag{3.19}$$

(iv) 我们还有

$$E^{(2)} \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{\alpha\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}^n} \bigcup_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}}^{\max}_{\alpha,j}} \left(2^j Q \times Q\right). \tag{3.20}$$

当 $q \in [p,\infty)$ 时，为了证明 (3.10)，我们首先断言

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E^{(2)}}(x,y)|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx \lesssim [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n}\sum_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}}^{\max}_{\alpha,j}}2^{jn(1-\frac{p}{q})}\left|2^jQ\right|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q). \tag{3.21}$$

为此，我们考虑关于 γ 的以下两种情形。

情形 1) $\gamma\in[n,\infty)$。在这种情形下，设 $Q\subset\mathbb{R}^n$ 是任意一个二进立方体，且 $j\in\mathbb{Z}_+$。那么，对于任意给定的 $x\in 2^jQ$，

$$\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\le|Q|\max_{y\in Q}|x-y|^{\gamma-n}\lesssim 2^{-jn}\left|2^jQ\right|^{\frac{\gamma}{n}}.$$

由此，结合 (3.20)、$r:=\frac{p}{q}\in(0,1]$，时的引理 3.10 以及引理 2.10(ii)，我们进一步推得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E^{(2)}}(x,y)|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n}\sum_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}}^{\max}_{\alpha,j}}\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\mathbf{1}_{2^jQ}(x)\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\lesssim\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n}\sum_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}}^{\max}_{\alpha,j}}2^{-\frac{jnp}{q}}|2^jQ|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(2^jQ)\\
&\le[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n}\sum_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}}^{\max}_{\alpha,j}}2^{jn(1-\frac{p}{q})}\left|2^jQ\right|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q).
\end{aligned}$$

这就完成了在 $\gamma\in[n,\infty)$ 情形下对 (3.21) 的证明。

*Ca*情形 2) $\gamma\in(0,n)$。在这种情形下，由 (3.20) 和 $r:=\frac{p}{q}\in(0,1]$，时的引理 3.10，我们得出 at

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E^{(2)}}(x,y)|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n}\sum_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}}^{\max}_{\alpha,j}}\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\mathbf{1}_{2^jQ}(x)\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\le\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n}\sum_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}}^{\max}_{\alpha,j}}\int_{2^jQ}\left(\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx.
\end{aligned}$$

因此，要证明这种情况下的 (3.21)，只需证明：对于任意 $j\in\mathbb{Z}_+$、$\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n$ 和 $fQ\in\mathscr{A}\max_{\alpha,\,j}$，

$$\int_{2^jQ}\left(\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\lesssim[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}2^{jn(1-\frac{p}{q})}\left|2^jQ\right|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q), \tag{3.22}$$

其中，隐含正常数与 j、 α 和 Q 无关。为此，我们按 j 分为以下三种情形。

子情形 1）j = 0。在此子情形中，利用对任意 x $\overline{\in}$ Q 都有 Q $\subset$ B(x, $\sqrt{n}l_{(Q)}$)、极坐标以及引理 2.10(i)，我们得到

$$\begin{aligned}(3.23)\qquad &\int_Q\left(\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\ &\le\int_Q\left[\int_{B(x,\sqrt{n}l_{(Q)})}|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\ &=\int_Q\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{\sqrt{n}l_{(Q)}}r^{\gamma-1}\,dr\,d\sigma\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\ &\sim|Q|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q)\le[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}|Q|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q).\end{aligned}$$

子情形 2）j = 1。在此子情形中，由引理 2.10(ii) 以及对任意 x $\in \underline{2Q}$ 都有 Q $\subset$ B(x, $\sqrt[3]{n}$ 2 l(Q))，我们推得

$$\begin{aligned}(3.24)\qquad &\int_{2Q}\left(\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\ &\le\int_{2Q}\left[\int_{B(x,\frac{3\sqrt{n}}{2}l_{(Q)})}|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\ &=\int_{2Q}\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{\frac{3\sqrt{n}}{2}l_{(Q)}}r^{\gamma-1}\,dr\,d\sigma\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\ &\sim|Q|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(2Q)\lesssim[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}|2Q|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q),\end{aligned}$$

其中，隐含正常数仅依赖于 p、q、 γ 和 n。

子情形 3）j $\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$。在此子情形中，由 $\gamma\in(0,n)$ 和引理 2.10(ii)，我们得到对于任意 k $\in\mathbb{N}\cap[2,\infty)$，

$$\begin{aligned}&\int_{2^kQ\setminus2^{k-1}Q}\left(\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\ &\le\int_{2^kQ\setminus2^{k-1}Q}|Q|^{\frac{p}{q}}\left[\frac{(2^{k-1}-1)l_{(Q)}}{2}\right]^{\frac{p(\gamma-n)}{q}}\omega(x)\,dx\\ &\lesssim2^{\frac{kp(\gamma-n)}{q}}|Q|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(2^kQ)\le[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}2^{k[\frac{p\gamma}{q}+\frac{(q-p)n}{q}]-\frac{jp\gamma}{q}}\left|2^jQ\right|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q),\end{aligned}$$

这与 (3.24) 和 q $\in[p,\infty)$ 结合起来，进一步推出

$$\begin{aligned}&\int_{2^jQ}\left(\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\ &=\int_{2Q}\left(\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=2}^{j}\int_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q}\left(\int_Q|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\lesssim [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\left\{2^{n(1-\frac{p}{q})}|2Q|^{\frac{p\gamma}{qn}}\,\omega(Q)+\sum_{k=2}^{j}2^{k[\frac{p\gamma}{q}+\frac{(q-p)n}{q}]-\frac{jp\gamma}{q}}\left|2^jQ\right|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q)\right\}\\
&\lesssim [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}2^{jn(1-\frac{p}{q})}\left|2^jQ\right|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q).
\end{aligned}
$$

结合这些结果、(3.23) 和 (3.24)，我们进一步得到 (3.22)，从而完成了 (3.21) 的证明，也就证明了上述结论。

根据　　上述断言、(3.19)、(3.17)、$\mathscr{A}\mathrm{max}_{\alpha,j}$ 的定义以及引理 3.12(i)，我们推得

$$
\begin{aligned}
(3.25)\qquad &\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E^{(2)}}(x,y)|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}\omega(x)\,dx\\
&\lesssim [\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n}\sum_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}^{\max}_{\alpha,j}}}2^{jn(1-\frac{p}{q})}|2^jQ|^{\frac{p\gamma}{qn}}\omega(Q)\\
&\lesssim [\omega]^2_{A_1(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-jp[1-n(\frac1p-\frac1q)-\eta]}\sum_{\alpha\in\{0,\frac13,\frac23\}^n}\sum_{Q\in\widetilde{\mathscr{A}^{\max}_{\alpha,j}}}\int_Q|\nabla f(z)|^p\,\omega(z)\,dz\\
&\lesssim [\omega]^2_{A_1(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(z)|^p\,\omega(z)\,dz,
\end{aligned}
$$

这就完成了当 $q\in[p,\infty)$ 时 (3.10) 的证明。

当 $q\in(0,p)$ 时，由取 $q:=p$ 的 (3.25)，并采用与定理 3.1 的证明中情形 2) 所用论证类似的论证，我们发现 (3.10) 在此情形下也成立。结合 (3.25)，这就完成了 (3.10) 的证明，从而也完成了命题 3.9 的证明。□

现在，我们利用命题 3.9 和外推方法来证明定理 3.8　　.

定理 3.8 的证明。由引理 3.3、命题 3.9 和引理 3.2(ii)，我们得出，对于任意满足 $|\nabla f|\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac1q}\right\|_X\\
&\le\sup_{\|g\|_{(X^{\frac1p})'}\le1}\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda^p\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(x,y)|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{p}{q}}R_{(X^{\frac1p})'}g(x)\,dx\\
&\le\sup_{\|g\|_{(X^{\frac1p})'}\le1}C_{([R_{(X^{\frac1p})'}g]_{A_1(\mathbb{R}^n)})}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^p\,R_{(X^{\frac1p})'}g(x)\,dx\\
&\le C_{(2\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac1p})'\to(X^{\frac1p})'})}\sup_{\|g\|_{(X^{\frac1p})'}\le1}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^p\,R_{(X^{\frac1p})'}g(x)\,dx\lesssim\||\nabla f|\|_X,
\end{aligned}
$$

其中，正数常数 $C_{([R_{(X^{1_p})'}g]_{A_1(\mathbb{R}^n)})}$ 和 $C_{(2\|\mathcal{M}\|_{(X^{1_p})'\to(X^{1_p})'})}$ 与式 (3.8) 中的常数相同，只需分别将 $[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^n)}$ 替换为 $[R_{(X^{\frac{1}{p}})'}g]_{A_1(\mathbb{R}^n)}$ 和 $2\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{1_p})'}$。定理 3.8 的证明至此完成。□

注 3.13. (i) 当 $\gamma = n$ 与 [34, 定理 4.5] 重合时，定理 3.8。

(ii) 在定理 3.8(iii) 中，如果 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$（$p \in [1,\infty)$，并且 $q \in (0,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < 1$，那么 X 和 $X^{\frac{1}{p}} = L^1(\mathbb{R}^n)$ 都是球型巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood 极大算子在 $(X^{1_p})' = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上有界。因此，在这种情况下，定理 3.8(iii) 成立；当 $p = q \in [1,\infty)$ 时，这正是 [18, (2.3) 和 (1.7)] 在 $\gamma \in (0,\infty)$ 情形下的结论，而当 p、q 时则是新的结论。

(iii) 正如 [34, 注 3.6(iii)], 所指出的，命题 3.9 中的假设 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < 1$ 似乎是尖锐的。更准确地说，设 $p, q \in [1,\infty)$ 满足 $n\max\{0, \frac{1}{p}-\frac{1}{q}\} < s < 1$。一方面，由 [62, 定理 1.3] 可知，若 $f \in L^{\min\{p,q\}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则 $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当以下非齐次 Gagliaro 准范数

$$I := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\cdot)-f(y)|^q}{|\cdot - y|^{n+q}}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty, \tag{3.26}$$

其中，$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 表示经典 Triebel–Lizorkin 空间（其定义见 [97, 第 2.3] 节）；此外，$I \sim \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$，且正等价常数与 f 无关。另一方面，由 [62, 定理 1.5], 可推得，在 $p, q \in [1,\infty)$ 的假设下，对于任意 $f \in L^{\min\{p,q\}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，只有当 $I \sim \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ 时，才有 $n\max\{0, \frac{1}{p}-\frac{1}{q}\} \le s < 1$。从这个意义上说，当 $s \in (0,1)$ 时，$n\max\{0, \frac{1}{p}-\frac{1}{q}\} < s < 1$ 是尖锐的。与 $s = 1$ 的情形相对应，一个重要的观察是，对于任意给定的 $p \in [1,\infty)$ 和 $q \in [1,p]$,

$$\left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\cdot)-f(y)|^q}{|\cdot - y|^{n+q}}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

除非 f 是常数（这可由 [34,定理 4.3] 推得）。因此，当 $s = 1$ 时，(3.26) 中的拟范数无法恢复 Triebel–Lizorkin 拟范数 $\|\cdot\|_{F^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$。事实上，正如带有 $\omega \equiv 1$ 的命题 3.9 所示（另见 [34, 定理 3.5]），当 $s = 1$ 时，(3.26) 的一个适当替代形式是：对于任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{F^1_{p,2}(\mathbb{R}^n)} \sim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(x,y) \times |x-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

其中 $\gamma \in (0,\infty)$ 任意给定。

当 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 时，在 $n = 1$ and$\gamma \in (-\infty, -1)$ 均成立的情形下，无需假设 Hardy–Littlewood 极大算子在 X 上有界，我们有 (1.9) 的如下上界估计。

定理 3.14. 设 X 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的球型巴拿赫函数空间，$p \in [1,\infty)$，$q \in [1,p]$, and $\gamma \in (-\infty,-1)$。假设 $X_{(\cdot)}$ 是球型巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X_{(\cdot)})'$ 上有界，其算子范数记为 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$。则存在一个正数常数 C，它仅依赖于 p、q、$\gamma$、n 和 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$，使得对于任意 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 且 $f' \in C_c(\mathbb{R})$，

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le C \left\| f' \right\|_X,$$

其中，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 与 (1.10) 中相同，并且正数常数 C 关于 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 连续，且随 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 增大而增大。

为了证明定理 3.14，我们需要以下引理。

引理 3.15. 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的球型巴拿赫函数空间，$p \in [1,\infty)$、$q \in (0,p]$, 且 $\gamma \in (-\infty,-1)$。假设 $X_{(\cdot)}$ 是球型巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X_{(\cdot)})'$ 上有界，其算子范数记为 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$。那么存在一个正数常数 C，仅依赖于 p、q、$\gamma$、n 和 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$，使得对于任意 $f \in C_c(\mathbb{R})$，

$$\left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E(f,\gamma)}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le C \left\| |f|^{\frac{1}{q}} \right\|_X, \tag{3.27}$$

其中

$$E(f,\gamma) := \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} :\ x\neq y,\ \left| \int_x^y |f(s)|\,ds \right| > |x-y|^{\gamma+1} \right\} \tag{3.28}$$

并且 C 关于 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 连续，且随着 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 增大而增大。

证明。为了证明此引理，我们借鉴了 [18, 命题 2.3(ii)] 证明中的一些想法。不失一般性，可以假设 f 非负且不恒为零。记

$$\begin{aligned} E(f,\gamma) &= \{(x,y)\in E(f,\gamma) :\ x>y\} \cup \{(x,y)\in E(f,\gamma) :\ x<y\} \\ &=: E_+(f,\gamma)\cup E_-(f,\gamma). \end{aligned}$$

因此，要证明 (3.27)，只需证明

$$\left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_+(f,\gamma)}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \lesssim \left\| f^{\frac{1}{q}} \right\|_X \tag{3.29}$$

and

$$\left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_-(f,\gamma)}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \lesssim \left\| f^{\frac{1}{q}} \right\|_X. \tag{3.30}$$

我们首先证明 (3.29)。为此，根据引理 3.3 及当前引理的假设，只需证明：对于任意 $\omega \in A_1(\mathbb{R})$ 且 $[\omega]_{A_1(\mathbb{R})} \le 2\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})' \to (X^{\frac{1}{p}})'}$，

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_+(f,\gamma)}(x,y)(x-y)^{\gamma-1}\,dy \right]^{\frac{p}{q}} \omega(x)\,dx \lesssim \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{\frac{p}{q}}\,\omega(x)\,dx. \tag{3.31}$$

此外，借助与定理 3.1 的证明中情形 2) 所用论证类似的方法（简言之，即对 Muckenhoupt 权和加权 Lebesgue 空间分别使用对偶论证），我们得出：要证明任意 $q \in (0,p]$, 时的 (3.31)，只需证明 $q = p$ 时的 (3.31)。

假设 $\operatorname{supp}(f) \subset [a,b]$，其中 $-\infty < a < b < \infty$。根据 $\gamma \in (-\infty,-1)$，并采用与命题 2.3(ii) 的证明中类似的停时论证，我们发现存在一个 $K \in \mathbb{N}$，它仅依赖于 f 和 γ，以及一个满足以下条件的序列 $\{a_i\}_{i=1}^{K+1} \subset \mathbb{R}$：

(i) 对任意 $i \in \mathbb{N} \cap [1,K]$, $a_i < a_{i+1}$;

(ii) $a_1 = a$ 和 $a_K < b \le a_{K+1}$;

(iii) 对任意 $i \in \mathbb{N} \cap [1,K]$,

$$(a_{i+1}-a_i)^{-(\gamma+1)} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(s)\,ds = \frac{1}{2}. \tag{3.32}$$

记 $I_0 := (-\infty, a_1], I_{K+1} := [a_{K+1}, \infty)$，以及 $I_i := [a_i,\ a_{i+1}]$ 对任意 $i \in \mathbb{N} \cap [1,K]$。此外，[18,命题 2.3(ii)] 的证明还表明

$$E_+(f,\gamma) = \bigcup_{i=1}^{K+1} \{E_+(f,\gamma) \cap [(a_i,\infty) \times (-\infty,a_i)]\} =: \bigcup_{i=1}^{K+1} \mathcal{E}_i \tag{3.33}$$

并且，对于任意给定的 $i \in \mathbb{N} \cap [1, K+1]$ 以及满足 $y < a_i < x$ 的任意 $(x,y) \in E_+(f,\gamma)$,

$$|x-y| \ge \min\{|I_i|, |I_{i-1}|\}.$$

由此可推得，对于任意给定的 $i \in \mathbb{N} \cap [1,K+1]$ 和 $\omega \in A_1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathcal{E}_i}(x,y)(x-y)^{\gamma-1}\,dy \right] \omega(x)\,dx \\
&\quad \le \int_{a_i}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\min\{a_i, x-\min\{|I_i|,|I_{i-1}|\}\}} (x-y)^{\gamma-1}\,dy \right] \omega(x)\,dx \\
&\quad = -\frac{1}{\gamma} \int_{a_i}^{\infty} [\max\{x-a_i, \min\{|I_i|,|I_{i-1}|\}\}]^{\gamma}\,\omega(x)\,dx \\
&\quad = -\frac{1}{\gamma} \left\{ \int_{a_i}^{a_i+\min\{|I_i|,|I_{i-1}|\}} [\min\{|I_i|,|I_{i-1}|\}]^{\gamma}\,\omega(x)\,dx \right. \\
&\qquad \left. + \int_{a_i+\min\{|I_i|,|I_{i-1}|\}}^{\infty} (x-a_i)^{\gamma}\omega(x)\,dx \right\} \\
&\quad =: -\frac{1}{\gamma}(Z_1+Z_2).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

为处理 Z_1, , 我们考虑 $|I_i|$ 和 $|I_{i-1}|$上的以下两种情况。

情形 1) $|I_i| \le |I_{i-1}|$。在此情形下，根据 $\mathcal{M}$的定义、(3.32)以及引理 2.10(i)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}_1 &= |I_i|^\gamma \omega(I_i) \le |I_i|^{\gamma+1} \inf_{t\in I_i} \mathcal{M}(\omega)(t)\\ &\lesssim [\omega]_{A_1(\mathbb{R})} \inf_{t\in I_i} \omega(t) \int_{I_i} f(s)\,ds \le [\omega]_{A_1(\mathbb{R})} \int_{I_i} f(s)\omega(s)\,ds.\end{aligned} \tag{3.35}$$

情形 2) $|I_i| > |I_{i-1}|$。在此情形下，由(3.32)、 $\mathcal{M}$的定义以及引理 2.10(i)，我们推得

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}_1 &= |I_{i-1}|^\gamma \omega((a_i, a_i + |I_{i-1}|)) \le |I_{i-1}|^\gamma \omega((a_{i-1}, 2a_i - a_{i-1}))\\ &\le 2[\omega]_{A_1(\mathbb{R})} |I_{i-1}|^\gamma \omega(I_{i-1}) \le 2[\omega]_{A_1(\mathbb{R})} |I_{i-1}|^{\gamma+1} \inf_{t\in I_{i-1}} \mathcal{M}(\omega)(t)\\ &\le 4[\omega]^2_{A_1(\mathbb{R})} \inf_{t\in I_{i-1}} \omega(t) \int_{I_{i-1}} f(s)\,ds \le 4[\omega]^2_{A_1(\mathbb{R})} \int_{I_{i-1}} f(s)\omega(s)\,ds,\end{aligned}$$

结合(3.35)，进一步得到

$$\mathrm{Z}_1 \lesssim \max\left\{[\omega]_{A_1(\mathbb{R})}, [\omega]^2_{A_1(\mathbb{R})}\right\} \int_{I_{i-1}\cup I_i} f(s)\omega(s)\,ds, \tag{3.36}$$

其中，隐含正常数与 i、 ω 和 f 无关。

为处理 Z_2, , 我们还需分别考虑 $|I_i|$ 和 $|I_{i-1}|$上的以下两种情形。

情形 1) $|I_i| \le |I_{i-1}|$。在此情形下，由引理 2.10 的 (i) 和 (ii)、 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 以及 (3.32)，我们得出

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}_2 &= \int_{a_i+|I_i|}^\infty (x-a_i)^\gamma \omega(x)\,dx = \int_{|I_i|}^\infty x^\gamma \omega(x+a_i)\,dx\\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_{2^{n-1}|I_i|}^{2^n|I_i|} x^\gamma \omega(x+a_i)\,dx \le \sum_{n=1}^\infty 2^{(n-1)\gamma} |I_i|^\gamma \int_{2^{n-1}|I_i|}^{2^n|I_i|} \omega(x+a_i)\,dx\\ &\le 2^{-\gamma} \sum_{n=1}^\infty 2^{n\gamma} |I_i|^\gamma \omega((a_i, a_i + 2^n|I_i|))\\ &\le 2^{-\gamma}[\omega]_{A_1(\mathbb{R})} \sum_{n=1}^\infty 2^{n(\gamma+1)} |I_i|^\gamma \omega(I_i)\\ &\le 2^{-\gamma}[\omega]_{A_1(\mathbb{R})} \sum_{n=1}^\infty 2^{n(\gamma+1)} |I_i|^{\gamma+1} \inf_{t\in I_i} \mathcal{M}(\omega)(t)\\ &\lesssim [\omega]^2_{A_1(\mathbb{R})} \inf_{t\in I_i} \omega(t) \int_{I_i} f(s)\,ds \le [\omega]^2_{A_1(\mathbb{R})} \int_{I_i} f(s)\omega(s)\,ds.\end{aligned} \tag{3.37}$$

情形 2) $|I_i| > |I_{i-1}|$。在此情形下，由引理 2.10 的 (i) 和 (ii)、 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 以及 (3.32)，可得

$$\mathrm{Z}_2 = \int_{a_i+|I_{i-1}|}^\infty (x-a_i)^\gamma \omega(x)\,dx = \int_{|I_{i-1}|}^\infty x^\gamma \omega(x+a_i)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{n-1}|I_{i-1}|}^{2^n|I_{i-1}|} x^\gamma \omega(x+a_i)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n-1)\gamma}|I_{i-1}|^\gamma \int_{2^{n-1}|I_{i-1}|}^{2^n|I_{i-1}|} \omega(x+a_i)\,dx \\
&\lesssim \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\gamma}|I_{i-1}|^\gamma \omega\left((a_{i-1}, a_i + 2^n|I_{i-1}|)\right) \\
&\le [\omega]_{A_1(\mathbb{R})} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\gamma}(2^n+1)|I_{i-1}|^\gamma \omega(I_{i-1}) \\
&\lesssim [\omega]_{A_1(\mathbb{R})} \inf_{t\in I_{i-1}} \mathcal{M}(\omega)(t) \int_{I_{i-1}} f(s)\,ds \\
&\le [\omega]_{A_1(\mathbb{R})}^2 \inf_{t\in I_{i-1}} \omega(t) \int_{I_{i-1}} f(s)\,ds \le [\omega]_{A_1(\mathbb{R})}^2 \int_{I_{i-1}} f(s)\omega(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

结合 (3.37)，进一步可得

$$
\mathrm{Z}_2 \lesssim [\omega]_{A_1(\mathbb{R})}^2 \int_{I_{i-1}\cup I_i} f(s)\omega(s)\,ds,
$$

其中，隐含正常数与 i、 ω 和 f 无关。由此，结合 (3.33)、Tonelli 定理、(3.34) 和 (3.36)，我们得出，对于任意满足 $[\omega]_{A_1(\mathbb{R})} \le 2\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}$ 的 $\omega \in \mathrm{A}_1(\mathbb{R})$，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_+(f,\gamma)}(x,y)(x-y)^{\gamma-1}\,dy \right] \omega(x)\,dx \\
&\quad = \sum_{i=1}^{K+1} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathcal{E}_i}(x,y)(x-y)^{\gamma-1}\,dy \right] \omega(x)\,dx \\
&\quad \lesssim \max\left\{ [\omega]_{A_1(\mathbb{R})}, [\omega]_{A_1(\mathbb{R})}^2 \right\} \sum_{i=1}^{K+1} \int_{I_{i-1}\cup I_i} f(s)\omega(s)\,ds \\
&\quad \lesssim \max\left\{ \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}, \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'}^2 \right\} \int_{\mathbb{R}} f(s)\omega(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

这就完成了 $\mathrm{q} = \mathrm{p}$ 时 (3.31) 的证明，从而也完成了任意 $\mathrm{q} \in (0, \mathrm{p}]$ 时 (3.31) 的证明。这就完成了 (3.29) 的证明。通过与 (3.29) 证明中类似的论证，我们进一步推得 (3.30) 成立；结合 (3.29)，即可完成引理 3.15 的证明。□

注 3.16. 在引理 3.15 中，若 $\mathrm{X} := \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ 且 $\mathrm{p} \in [1,\infty)$，并且 $\mathrm{q} \in (0, \mathrm{p}]$，，那么 X 和 $\mathrm{X}^{\frac{1}{p}} = \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ 都是球型巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood 极大算子在 $(\mathrm{X}^{\frac{1}{p}})' = \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上有界。因此，在这种情况下，引理 3.15 成立；当 $\mathrm{q} = \mathrm{p} \in (1,\infty)$ 时，该结果与一维欧几里得空间中的 [18, 命题 2.3(ii)] 一致，而当 $\mathrm{q} \in (0, \mathrm{p})$ 时，该结果是新的。

现在，我们来证明定理 3.14。

定理 3.14 的证明。设 $f \in C^1(\mathbb{R})$，且 $f' \in C_c(\mathbb{R})$。由 Hölder 不等式及 $q \in [1,\infty)$，可得，对任意满足 $x < y$ 的 $x, y \in \mathbb{R}$，

$$|f(y)-f(x)| \le \int_x^y \left|f'(s)\right| ds \le (y-x)^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_x^y \left|f'(s)\right|^q ds\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{3.38}$$

wh这进一步意味着，对于任意给定的 $\lambda \in (0,\infty)$，以及任意满足 $x < y$ 的 $x, y \in E_{\lambda,\ \gamma_q}[f]$，

$$\int_x^y \left|f'(s)\right|^q ds \ge \frac{|f(y)-f(x)|^q}{(y-x)^{q-1}} > \lambda^q (y-x)^{\gamma+1}.$$

由此以及 (3.28)，我们可推得，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，

$$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f] \subset E\left(\frac{|f'|^q}{\lambda^q}, \gamma\right),$$

其中，对于任意 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，$E(g,\gamma)$ 与 (3.28) 中的定义相同。由此以及引理 3.15（取 $f := \lambda^{-q}|f'|^q$），我们得到，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，

$$\begin{aligned}\lambda &\left\|\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X \\ &\le \lambda \left\|\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E(\frac{|f'|^q}{\lambda^q},\gamma)}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X \lesssim \left\|f'\right\|_X.\end{aligned}$$

对所有 $\lambda \in (0,\infty)$ 取上确界，即完成定理 3.14 的证明。 . □

注 3.17. (i) 我们应指出，在定理 3.14 中，假设 $q \in [1,\infty)$ 仅用于估计 (3.38)。

(ii) 在定理 3.14 中，若 $X := L^p(\mathbb{R})$，其中 $p \in [1,\infty)$，且 $q \in [1,p]$,，则 X 和 $X^{\frac{1}{p}} = L^1(\mathbb{R}^n)$ 都是球型巴拿赫函数空间，并且 Hardy–Littlewood 极大算子在 $(X_{\ p})' = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上有界。因此，在此情形下定理 3.14 成立；当 $q = p \in [1,\infty)$ 时，它是 [18, 定理 2.2(b)] 的一部分；当 $q \in [1,p)$ 时，则是新的结果。

(iii) 当 $\gamma \in (-\infty,0)$ 时，在 $X := L^1(\mathbb{R})$ 的情形下，定理 3.14 中的假设 $\gamma \in (-\infty,-1)$ 是尖锐的。事实上，一方面，注意到 $L^1(\mathbb{R})$ 满足定理 3.14 对 X 的所有假设，因此 $X := L^1(\mathbb{R})$ 时定理 3.14 成立。另一方面，[18, 命题 6.1] 的证明给出了若干反例，表明当 $X := L^1(\mathbb{R})$ 且 $\gamma \in [-1,0)$ 时，定理 3.14 不成立。

(iv) 当 $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$ 时，定理 3.14 中的 $\mathbb{R}$ 被 $\mathbb{R}^n$ 替换后是否仍然成立，目前尚不清楚。

在本小节末尾，我们对 $\gamma = 0$ 情形下的 (1.9) 作一条备注。

备注 3.18。如 [18, 推论 1.6], 所示，若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，且 $|\nabla f| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n:\ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}>\lambda\}} |x-y|^{-n}\,dx\,dy < \infty$$

对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，则 f 几乎处处等于一个常值函数。因此，即使在 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $p \in [1,\infty)$、$q = p$ 的情形下，除非 f 几乎处处等于一个常值函数，否则 (1.9) 在 $\gamma = 0$ 下也不成立。

3.2 下界估计与两个极限恒等式

本小节的主要目标是建立 (1.9) 的下界估计。此外，作为将 (1.6) 和 (1.7) 从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 推广到球型巴拿赫函数空间 X 的结果，我们还得到两个极限恒等式：当 $\gamma \in (0,\infty)$ 时的极限 $\lambda \to \infty$，以及当$\gamma \in (-\infty,0)$ 时的极限 $\lambda \to 0^+$。下面先给出以下结论。

定理 3.19. 设 X 为球准 Banach 函数空间，$q \in (0,\infty)$，且 $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$。对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$,

(i) 若 $\gamma \in (0,\infty)$，则

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \geq \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X ;$$

(ii) 若 $\gamma \in (-\infty,0)$，则

$$\liminf_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \geq \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X ,$$

其中，$\kappa(q,n)$ 和 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 满足 $\lambda \in (0,\infty)$ 分别与 (1.13) 和 (1.10) 中的定义相同。

为了证明定理 3.19，我们需要球准 Banach 函数空间上的如下 Fatou 引理；例如参见 [98,引理 2.4]。

引理 3.20. 设 X 是一个球准 Banach 函数空间，且 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$。则

$$\left\| \liminf_{k\to\infty} |f_k| \right\|_X \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_X .$$

现在，我们证明定理 3.19。

定理 3.19 的证明。通过类似于证明 [18, 引理 3.2] 时所用的论证，将 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fatou 引理替换为引理 3.20，即可得到本定理所需的结果；此处省略细节。定理 3.19 的证明至此结束。□

注 3.21. (i) 在定理 3.19 中，若 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $p \in [1,\infty)$，并且 $q \in (0,\infty)$，则此时定理 3.19 成立。当 $q = p \in [1,\infty)$ 时，这恰好是 [18, 引理 3.2]；而当 $q \in (0,\infty)$ 且 q, p 时，这是新的结果。

(ii) 当 $\gamma = n$ 与 [34,(3.25)] 一致时，定理 3.19 成立。

此外，若 X 是球型巴拿赫函数空间，则在以下两种极限情形下，我们有关于 X 的上界：$\lambda \to \infty$ 当 $\gamma \in (0,\infty)$ 时，以及 $\lambda \to 0^+$ 当 $\gamma \in (-\infty,0)$ 时。

定理 3.22. 设 X 是球型巴拿赫函数空间。

(i) 若 γ，$q \in (0,\infty)$，则对任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X , \tag{3.39}$$

其中 $\kappa(q,n)$ 和 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 满足 $\lambda \in (0,\infty)$，分别与 (1.13) 和 (1.10) 中的定义相同。

(ii) 设 $p \in [1,\infty)$，$\gamma \in (-\infty,0)$，且 $q \in (0, n^{-\gamma} p)$。假设 $X^{\frac{1}{p}}$ 是球型巴拿赫函数空间，并且 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。则对任意 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X . \tag{3.40}$$

为证明定理 3.22，我们需要以下众所周知的不等式（例如参见 [12,第 699] 页）。

引理 3.23。设 $q \in (0,\infty)$。那么，对于任意 $\theta \in (0,1)$，存在一个正数常数 C_θ，使得对于任意 $a, b \in (0,\infty)$，

$$(a+b)^q \le (1+\theta) a^q + C_\theta b^q .$$

定理 3.22 的证明。我们首先证明 (i)。设 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，且 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$。由于 $\lambda \to \infty$，不妨先假设 $\lambda \in [L,\infty)$，然后令 $\lambda \to \infty$，其中 $L := \| |\nabla f| \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$。设 B_0 是一个以 0 为中心的球，使得 $\operatorname{supp}(|\nabla f|) \subset B_0$。令 $B_0 := B(0, 1 + r_{B_0})$，其半径为 r_{B_0}，与 B_0 相同。由引理 3.3(i)],的证明中所用的相同论证，我们可推出

$$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f] \subset \widetilde{B_0} \times \mathbb{R}^n . \tag{3.41}$$

另一方面，采用与证明 [18, (3.7)], 时相同的论证可得：若 $(x,y) \in E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$，并记 $y := x + r\omega$，其中 $r \in (0,\infty)$ 且 $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$，则

$$r \le \left\{ \lambda^{-1} \left[|\nabla f(x) \cdot \omega| + \rho\left(\left(\frac{L}{\lambda} \right)^{\frac{q}{\gamma}} \right) \right] \right\}^{\frac{q}{\gamma}} =: r(x,\omega,\lambda),$$

其中，对于任意 $t \in (0,\infty)$，

$$\rho(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|h|\le t} |\nabla f(x+h) - \nabla f(x)| .$$

由此，根据 (3.41)、极坐标、引理 3.23 和定义 2.1(v)，我们可推出，对于任意给定的 θ_1, $\theta_2 \in (0,1)$，存在 $C_{\theta_1}, C_{\theta_2} \in (0,\infty)$，使得

$$
\begin{aligned}
&\lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \\
&\quad \le \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{r(\cdot,\omega,\lambda)} r^{\gamma-1}\,dr\,d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{\widetilde{B_0}}(\cdot) \right\|_X \\
&\quad \le \left\| \left\{ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (1+\theta_1)|\nabla f(\cdot)\cdot\omega|^q + C_{\theta_1}\left[\rho\left(\left\{\frac{L}{\lambda}\right\}^{\frac{q}{\gamma}}\right)\right]^q\,d\omega \right\}^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{\widetilde{B_0}}(\cdot) \right\|_X \\
&\quad \le (1+\theta_1)^{\frac{1}{q}}(1+\theta_2) \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla f(\cdot)\cdot\omega|^q\,d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{\widetilde{B_0}}(\cdot) \right\|_X \\
&\qquad + (C_{\theta_1})^{\frac{1}{q}} C_{\theta_2} \rho\left(\left[\frac{L}{\lambda}\right]^{\frac{q}{\gamma}}\right) \left\| \mathbf{1}_{\widetilde{B_0}}(\cdot) \right\|_X \\
&\quad \le (1+\theta_1)^{\frac{1}{q}}(1+\theta_2) \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X \\
&\qquad + (C_{\theta_1})^{\frac{1}{q}} C_{\theta_2} \rho\left(\left[\frac{L}{\lambda}\right]^{\frac{q}{\gamma}}\right) \left\| \mathbf{1}_{\widetilde{B_0}}(\cdot) \right\|_X,
\end{aligned}
$$

结合定义 2.1(iv) 以及显然的估计 $\rho(t) \to 0$ 当 $t \to \infty$[时，因为 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$],，先令 $\lambda \to \infty$，再令 $\theta_1, \theta_2 \to 0$，进一步可得 (3.39) 成立。至此，(i) 的证明完成。

接下来，我们证明 (ii)。设 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$，且 B 是一个中心位于 0 的球，使得 $\operatorname{supp}(f) \subset B$。根据引理 3.23 和定义 2.1(v)，我们发现，对于任意给定的 $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$，存在 $C_{\eta_1}, C_{\eta_2} \in (0,\infty)$，使得

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \\
&\quad \le \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| (1+\eta_1) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap(2B\times\mathbb{R}^n)}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\qquad + C_{\eta_1}(1+\eta_2) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap[(2B)^{\complement}\times B]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \left. + C_{\eta_1} C_{\eta_2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap[(2B)^{\complement}\times B^{\complement}]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \\
&\quad \le (1+\eta_1) \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap(2B\times\mathbb{R}^n)}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \\
&\qquad + C_{\eta_1}(1+\eta_2) \limsup_{\lambda\to 0^+}
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

$$\times \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap[(2B)^{\complement}\times B]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X$$

$$+ C_{\eta_1}C_{\eta_2}\limsup_{\lambda\to 0^+}\lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap[(2B)^{\complement}\times B^{\complement}]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X$$

$$=: (1+\eta_1)\mathrm{I}_1 + C_{\eta_1}(1+\eta_2)\mathrm{I}_2 + C_{\eta_1}C_{\eta_2}\mathrm{I}_3.$$

为处理 I_1,，对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,\infty)$，令 $\delta(\varepsilon)\in(0,\infty)$ 满足：对于任意 $r\in(0,\delta(\varepsilon))$，都有 $\rho(r)\le\varepsilon$。由与证明 [18, 引理 3.3(ii)], 中所用相同的论证可知，如果 $(x,y)\in E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$，并记 $y:=x+r\omega$，其中 $r\in(0,\infty)$ 且 $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$，那么

$$r\ge \min\left\{\delta(\varepsilon),\left[\frac{\lambda}{|\nabla f(x)\cdot\omega|+\varepsilon}\right]^{\frac{-q}{\gamma}}\right\}.$$

由此、引理 3.23 和定义 2.1(v)，我们得出：对于任意给定的 θ、θ_1、$\theta_2\in(0,1)$，存在正数常数 C_θ、C_{θ_1} 和 C_{θ_2}，使得

$$\mathrm{I}_1 \le \limsup_{\lambda\to 0^+}\lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\min\{\delta(\varepsilon),(\frac{\lambda}{|\nabla f\cdot\omega|+\varepsilon})^{\frac{-q}{\gamma}}\}}^{\infty} r^{\gamma-1}\,dr\,d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{2B} \right\|_X$$

$$= \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} \limsup_{\lambda\to 0^+}\lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max\left\{ [\delta(\varepsilon)]^{\gamma}, \left(\frac{\lambda}{|\nabla f\cdot\omega|+\varepsilon}\right)^{-q} \right\} d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{2B} \right\|_X$$

$$\le \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} C_\theta \limsup_{\lambda\to 0^+}\lambda \left\| \left\{ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} [\delta(\varepsilon)]^{\gamma}\,d\omega \right\}^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{2B} \right\|_X$$

$$+ \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} (1+\theta)\limsup_{\lambda\to 0^+}\lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{|\nabla f\cdot\omega|+\varepsilon}{\lambda}\right)^{q} d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{2B} \right\|_X$$

$$= \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} (1+\theta) \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (|\nabla f\cdot\omega|+\varepsilon)^{q}\,d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{2B} \right\|_X$$

$$\le \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} (1+\theta) \left\{ (1+\theta_1)^{\frac{1}{q}}(1+\theta_2) \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla f\cdot\omega|^{q}\,d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{2B} \right\|_X \right.$$

$$\left. + C_{\theta_1}^{\frac{1}{q}} C_{\theta_2} \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{q}\,d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{2B} \right\|_X \right\},$$

结合 $\varepsilon\in(0,\infty)$的任意性，进一步可得

$$\mathrm{I}_1 \le \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} (1+\theta)(1+\theta_1)^{\frac{1}{q}}(1+\theta_2) \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla f\cdot\omega|^{q}\,d\omega \right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{2B} \right\|_X$$

$$= \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} (1+\theta)(1+\theta_1)^{\frac{1}{q}}(1+\theta_2) \left\| \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left|\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\cdot\omega\right|^{q} d\omega \right]^{\frac{1}{q}} |\nabla f|\,\mathbf{1}_{2B} \right\|_X$$

$$\leq \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} (1+\theta)(1+\theta_1)^{\frac{1}{q}}(1+\theta_2)\left[\kappa(q,n)\right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X .$$

令 $\theta, \theta_1, \theta_2 \to 0$，进一步可得

$$\mathrm{I}_1 \leq \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X . \tag{3.43}$$

为处理 I_2, ，我们首先断言，对于任意给定的球 $\mathrm{B}_r := \mathrm{B}(0, \mathrm{r})$，其中 $\mathrm{r} \in (0,\infty)$,

$$\left\| |\cdot|^{\frac{\gamma-n}{q}} \mathbf{1}_{(B_r)^{\complement}}(\cdot) \right\|_X < \infty. \tag{3.44}$$

确　实，由引理 3.3、2.10(ii) 和 3.2(ii)，$\mathrm{q} \in (0, {}_n{}^{-\gamma}\underline{{}_n\mathrm{p}})$，以及定义 2.1(iv)，我们得到 th　at

$$\begin{aligned}
&\left\| |\cdot|^{\frac{\gamma-n}{q}} \mathbf{1}_{(B_r)^{\complement}} \right\|_X \\
&\quad\leq \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\leq 1} \left[\int_{(B_r)^{\complement}} |x|^{\frac{p(\gamma-n)}{q}} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad= \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\leq 1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j B_r \setminus 2^{j-1}B_r} |x|^{\frac{p(\gamma-n)}{q}} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\leq \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\leq 1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (2^{j-1}r)^{\frac{p(\gamma-n)}{q}} \int_{2^j B_r} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\leq \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\leq 1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (2^{j-1}r)^{\frac{p(\gamma-n)}{q}} C_{\left[R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g\right]_{A_1(\mathbb{R}^n)}} 2^{jn} \int_{B_r} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad= 2^{\frac{n-\gamma}{q}+\frac{1}{p}} \|\mathcal{M}\|^{\frac{1}{p}}_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'} r^{\frac{\gamma-n}{q}} \left\{\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j[\frac{p(\gamma-n)}{q}+n]}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad\times \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\leq 1} \left[\int_{B_r} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\lesssim \|\mathcal{M}\|^{\frac{1}{p}}_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'} r^{\frac{\gamma-n}{q}} \left\|\mathbf{1}_{B_r}\right\|_X < \infty,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

其中隐含正常数仅取决于 p、q、 γ 和 n，由此完成了上述论断的证明。注意，对于任意给定的 $\mathrm{x} \in (2\mathrm{B})^{\complement}$，以及任意 $\mathrm{y} \in \mathrm{B}$，我们有 $|\mathrm{x}-\mathrm{y}| \geq |\mathrm{x}|-|\mathrm{y}| \geq |\mathrm{x}|/2$。由此以及将 B_r 替换为 2B 后的 (3.44)，可推得

$$\mathrm{I}_2 = \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda^q \left\| \left[\int_B |\cdot - y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{(2B)^{\complement}}(\cdot) \right\|_X \tag{3.46}$$

$$\leq 2^{\frac{n-\gamma}{q}} \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda^q |B|^{\frac{1}{q}} \left\| |\cdot|^{\frac{\gamma-n}{q}} \mathbf{1}_{(2B)^{\complement}}(\cdot) \right\|_X = 0.$$

为处理 I_3,，注意到 $(x, y) \in (2B)^{\complement} \times B^{\complement}$ 且 $\operatorname{supp}(f) \subset B$ 这两个条件意味着 $f(x) = 0 = f(y)$。因此，

$$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f] \cap \left[(2B)^{\complement} \times B^{\complement}\right] = \emptyset,$$

这进一步意味着 $I_3 = 0$。结合这一点、(3.42)、(3.43) 和 (3.46)，并令 $\eta_1, \eta_2 \to 0$，我们得到

$$\limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma-n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \leq \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X .$$

这就完成了 (ii) 的证明，从而完成了定理 3.22 的证明。 □

注 3.24. 当 $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ 时，由定理 3.22(ii) 的证明可知，对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，(3.40) 也成立。

当 $n = 1$ 时，在 $p \in [1, \infty)$、$\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $q \in (0, -p\gamma)$ 的情况下，我们还可以将定理 3.22(ii) 中的假设 $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ 弱化为满足 $f' \in C_c(\mathbb{R})$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R})$，如下所示。

定理 3.25. 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的球型巴拿赫函数空间，$p \in [1, \infty)$，$\gamma \in (-\infty, 0)$，且 $q \in (0, -p\gamma)$。假设

(i) $X^{\frac{1}{p}}$ 是球型巴拿赫函数空间；

(ii) Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。

那么，对任意 $f \in C^1(\mathbb{R})$，若 $f' \in C_c(\mathbb{R})$，

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma-1} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \leq \left[-\frac{\kappa(q,1)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \|f'\|_X ,$$

其中 $\kappa(q, 1)$ 与 (1.13) 中的相同，只需将 n 替换为 1；$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$，其中 $\lambda \in (0, \infty)$，与 (1.10) 中的相同。

证明。取 $\beta \in (0, \infty)$，使得 $\operatorname{supp}(f') \subset (-\beta, \beta)$。由引理 3.23 和定义 2.1(v)，我们得知，对于任意给定的 $\theta \in (0, 1)$，存在一个正数常数 C_θ，使得

$$\begin{aligned} (3.47) \qquad & \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma-1} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \\ & \leq (1+\theta) \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap[(-2\beta,2\beta)\times\mathbb{R}]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma-1} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \\ & \quad + C_\theta \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap[(-2\beta,2\beta)^{\complement}\times\mathbb{R}]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma-1} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \end{aligned}$$

$$=: (1+\theta)\mathrm{I}_1 + C_\theta \mathrm{I}_2.$$

一方面，采用与估计 (3.43) 类似的论证可得

$$\mathrm{I}_1 \le \left[-\frac{\kappa(q,1)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \left\|f'\right\|_X. \tag{3.48}$$

另一方面，由于 f 在 (β,∞) 上为常数，在 $(-\infty,-\beta)$ 上也为常数，因此，如果 $(x,y) \in E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 且 $x \in [2\beta,\infty)$，则 $y \in (-\infty,\beta)$；并且，如果 $(x,y) \in E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 且 $x \in (-\infty,-2\beta]$，则 $y \in (-\beta,\infty)$。由此，利用引理 3.3、与估计 (3.6) 时类似的论证，以及 $q \in (0,-p\gamma)$，我们推得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2^p &\le \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda^p \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\le 1} \left\{ \int_{-\infty}^{-2\beta} \left[\int_{-\beta}^{\infty} (y-x)^{\gamma-1}\,dy\right]^{\frac{p}{q}} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{2\beta}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\beta} (x-y)^{\gamma-1}\,dy\right]^{\frac{p}{q}} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx \right\} \\
&= \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{p}{q}} \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda^p \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\le 1} \left[\int_{-\infty}^{-2\beta} (-x-\beta)^{\gamma} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{2\beta}^{\infty} (x-\beta)^{\gamma} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx \right] \\
&\le 2^{3-\frac{p\gamma}{q}} \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'} \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\quad \times \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda^p \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{p}})'}\le 1} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\frac{p\gamma}{q}+1)} \beta^{\gamma} \int_{-\beta}^{\beta} R_{(X^{\frac{1}{p}})'} g(x)\,dx \\
&\lesssim \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X^{\frac{1}{p}})'} \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda^p \beta^{\gamma} \left\|\mathbf{1}_{(-\beta,\beta)}\right\|_X^p = 0,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

其中隐含正常数仅依赖于 p、q 和 γ；结合 (3.47) 和 (3.48)，进一步可得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \\
&\quad \le (1+\theta) \left[-\frac{\kappa(q,1)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \left\|f'\right\|_X.
\end{aligned}$$

Letting $\theta \to 0$，于是我们得到所需结果。定理 3.25 的证明至此完成 . □

利用注 3.24 以及定理 3.19、3.22 和 3.25，我们立即得到以下结论；此处省略证明细节。

推论 3.26. 设 X 为球型巴拿赫函数空间。

(i) 若 $\gamma, q \in (0,\infty)$，则对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X,$$

其中，$\kappa(q,n)$ 和 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 且 $\lambda \in (0,\infty)$ 分别与 (1.13) 和 (1.10) 中的定义相同。

(ii) 设 $p \in [1,\infty)$、$\gamma \in (-\infty, 0)$，且 $q \in (0, n^{-\gamma} n p)$。假设 $X^{\frac{1}{p}}$ 是一个球 Banach 函数空间，并且 Hardy–Littlewood 极大算子在 $(X^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。那么，对于任意 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X; \tag{3.50}$$

此外，若 $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$，或若 $n = 1$ 且 $q \in (0, -p\gamma)$，则 (3.50) 对任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 也成立。

注 3.27. (i) 当 $\gamma = n$ 与 [34,(3.26)] 相同时，推论 3.26(i) 成立。

(ii) 设 $p \in [1,\infty)$ 和 $q \in (0,\infty)$ 与推论 3.26 中的相同。若 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$，则 X 和 $X^{\frac{1}{p}} = L^1(\mathbb{R}^n)$ 都是球型巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood 极大算子在 $(X^p)' = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上有界。因此，推论 3.26 在 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 时成立；当 $q = p$ 时，它就是 [18, (1.7) 和 (1.8)]；而当 $\gamma \in (0,\infty)$ 且 $q \in (0,\infty)$、q, p 时，或当 $\gamma \in (-\infty, 0)$、$n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$ 且 $q \in (0, n^{-\gamma} n p)$、$q, p$ 时，或当 $\gamma \in (-\infty, 0)$、$n = 1$ 且 $q \in (0, -p\gamma)$、q, p 时，对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，该结果都是新的。此外，当 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $q \in (0, n^{-\gamma} n p)$、$q, p$ 时，对于任意 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$，$X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 下的推论 3.26 是新的。

3.3 推广到 $\dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$

本小节中，在对 X 作出一些额外的温和假设后，我们通过稠密性论证，将小节 3.1 和 3.2 的主要结果从任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 推广到任意 $f \in \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$。为此，我们先给出以下稠密性引理，它正是 [34,推论 2.18]。

引理 3.28. 设 X 是一个球型巴拿赫函数空间，且 $p \in [1,\infty)$。假设 $X^{\frac{1}{p}}$ 是一个球型巴拿赫函数空间，Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\frac{1}{p}})'$ 上有界，并且 X 具有绝对连续范数。那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$，存在一个序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$，满足 $|\nabla f_k| \in C_c(\mathbb{R}^n)$，对任意 $k \in \mathbb{N}$ 均成立；并且对任意 $R \in (0,\infty)$，

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{\dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{k\to\infty} \left\| (f - f_k)\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},R)} \right\|_X = 0. \tag{3.51}$$

本小节的第一个主要结果如下。

定理 3.29。设 X 是一个球型巴拿赫函数空间，且 $p \in [1,\infty)$。假设 X_p 是一个球型巴拿赫函数空间，Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X_p)'$ 上有界，其算子范数记为 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X_{1p})'}$，并且 X 具有绝对连续范数。

假设以下四个陈述之一成立：

(a) $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $q \in (0,p]$, 且 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界。(b) $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $q \in (0,\infty)$，并且存在 $r \in (n,\infty)$，使得 $\mathcal{M}$ 在 $X^{\frac{1}{r}}$ 上有界。(c) $\gamma \in (0,\infty)$ 且 $q \in (0,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < 1$。(d) $\gamma \in (-\infty,-1)$, $n = 1$，且 $q \in [1,p]$。

则以下陈述成立。

(i) 存在一个正数常数 C，使得对于任意 $f \in \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$，

$$\left[\frac{\kappa(q,n)}{|\gamma|}\right]^{\frac{1}{q}} \||\nabla f|\|_X \le \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X \le C\,\||\nabla f|\|_X,$$

其中 $\kappa(q,n)$ 和 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 且 $\lambda\in(0,\infty)$ 分别与 (1.13) 和 (1.10) 中的定义相同；C 关于 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X_{1p})'}$ 连续，并随着 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{p}})'\to(X_{1p})'}$ 的增大而增大。

(ii) 若 $\gamma \in (0,\infty)$，则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X = \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \||\nabla f|\|_X.$$

(iii) 若 $\gamma \in (-\infty,0)$，进一步假设 $n \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$ 和 $q \in (0, n^{-\gamma}n\,p)$，或者 $n = 1$、$q \in (0,-p\gamma)$，且 $\gamma \in (-\infty,-1)$。则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X = \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \||\nabla f|\|_X.$$

为证明定理 3.29，我们需要以下技术引理，它正是 [34, 引理 2.13]。

引理 3.30。设 X 是球型巴拿赫函数空间，X' 是其伴随空间。若 $f \in X$ 且 $g \in X'$，则 fg 可积，并且

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

定理 3.29 的证明。设 f $\in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$。由引理 3.28，我们可得存在一个序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$，满足对于任意 k $\in \mathbb{N}$，$|\nabla f_k| \in C_c(\mathbb{R}^n)$，且（3.51）成立。由定理 3.1、3.6、3.8 和 3.14 以及推论 3.26，我们推得，对于任意 k $\in \mathbb{N}$，(i)、(ii) 和 (iii) 对 f_k成立。

接下来，我们 证明对于这样的 f，(i) 中的上界估计成立。为此，对于任意 自然数集 $\in \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{F}_N := \left\{(x,y) \in B(\mathbf{0},N)\times B(\mathbf{0},N) :\ |x-y| \geq N^{-1}\right\}.$$

注意，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$ 和 k, $\in \mathbb{N}$ 属于自然数集,

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap\mathcal{F}_N \subset{}& \left(E_{\frac{\lambda}{3},\frac{\gamma}{q}}[f_k]\cap\mathcal{F}_N\right)\\ &\cup\left(\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n :\ x\neq y,\ \frac{|f_k(x)-f(x)|}{|x-y|^{1+\frac{\gamma}{q}}} > \frac{\lambda}{3}\right\}\cap\mathcal{F}_N\right)\\ &\cup\left(\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n :\ x\neq y,\ \frac{|f_k(y)-f(y)|}{|x-y|^{1+\frac{\gamma}{q}}} > \frac{\lambda}{3}\right\}\cap\mathcal{F}_N\right)\\ =:{}& E_1\cup E_2\cup E_3, \end{aligned}$$

结合定义 2.1(v)，进一步可知，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned} &\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap\mathcal{F}_N}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\ &\lesssim \sum_{i=1}^{3}\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_i}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X =: \sum_{i=1}^{3}\mathrm{I}_i. \end{aligned} \tag{3.52}$$

由 f_k 和定义 2.1(v)，根据 (i) 处理 I_1, ，我们得出，对于任意 k $\in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_1 \lesssim \||\nabla f_k|\|_X \leq \||\nabla f|\|_X + \||\nabla(f_k-f)|\|_X. \tag{3.53}$$

To 根据 E_2 和 $\mathcal{F}_N$ 的定义处理 I_2, ，我们推得，对于任意 k，N $\in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_2 &\lesssim \left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_k(\cdot)-f(\cdot)|^q}{|\cdot-y|^{q+n}}\mathbf{1}_{\mathcal{F}_N}(\cdot,y)\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\ &\lesssim N^{\frac{q+2n}{q}}\|(f-f_k)\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\|_X. \end{aligned} \tag{3.54}$$

为处理 I_3, ，根据 E_3 和 $\mathcal{F}_N$ 的定义以及引理 3.30，我们得出，对于任意 k,N $\in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_3 &\lesssim \lambda^{1-\frac{1}{q}}\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_k(y)-f(y)|}{|\cdot-y|^{1+\frac{\gamma}{q}+n-\gamma}}\mathbf{1}_{\mathcal{F}_N}(\cdot,y)\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\ &\lesssim \lambda^{1-\frac{1}{q}}N^{|1+\frac{\gamma}{q}+n-\gamma|}\left\|(f-f_k)\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\right\|_X^{\frac{1}{q}}\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\|_{X'}^{\frac{1}{q}}\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\|_X, \end{aligned}$$

结合 (3.52)、(3.53) 和 (3.54)，进一步可得，对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$，

$$\begin{aligned}&\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap\mathcal{F}_N}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\&\quad\lesssim\||\nabla f|\|_X+\||\nabla(f_k-f)|\|_X+N^{\frac{q+2n}{q}}\|(f-f_k)\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\|_X\\&\qquad+\lambda^{1-\frac{1}{q}}N^{|1+\frac{\gamma}{q}+n-\gamma|}\left\|(f-f_k)\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\right\|_X^{\frac{1}{q}}\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\|_{X'}^{\frac{1}{q}}\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\|_X.\end{aligned}$$

利用此结果、注 2.6、定义 2.1(iv) 以及 (3.51)，并令 $\mathrm{k}\to\infty$，我们发现，对于任意$\lambda\in(0,\infty)$和 $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$，

$$\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap\mathcal{F}_N}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\lesssim\||\nabla f|\|_X.$$

由此及定义 2.1(iii)，令 $\mathrm{N}\to\infty$，并对所有 $\lambda\in(0,\infty)$ 取上确界，我们进而得到

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\lesssim\||\nabla f|\|_X. \tag{3.55}$$

这就完成了对任意 $\mathrm{f}\in\dot{\mathrm{W}}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n)$，(i) 中上界估计的证明。

现在，我们证明对任意 $\mathrm{f}\in\dot{\mathrm{W}}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n)$，(ii) 中的下界估计。由引理 3.23、定义 2.1(v) 以及 (3.55)，我们推得，对于任意 $\mathrm{k}\in\mathbb{N}$ 和 $\delta,\eta\in(0,1)$，存在 $\mathrm{C}_\eta\in(0,\infty)$，使得对任意 $\lambda\in(0,\infty)$，

$$\begin{aligned}&\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f_k]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\&\quad\le(1+\eta)\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\delta\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\&\qquad+C_\eta\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{(1-\delta)\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f_k-f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\&\quad\le(1+\eta)\delta^{-1}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\&\qquad+\widetilde{C}C_\eta(1-\delta)^{-1}\||\nabla(f-f_k)|\|_X,\end{aligned}$$

其中 C 是 (3.55) 中的隐含正常数，结合定义 2.1(v)、(ii) 中对 f_k 的下界估计以及 (3.51)，可进一步推出

$$\begin{aligned}\||\nabla f|\|_X&\le\||\nabla f_k|\|_X+\||\nabla(f-f_k)|\|_X\\&\le\left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{-\frac{1}{q}}\liminf_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f_k]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\|\,|\nabla(f-f_k)|\,\|_X\\
&\le\left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{-\frac{1}{q}}(1+\eta)\delta^{-1}\liminf_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\
&\quad+\left\{\left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{-\frac{1}{q}}\widetilde{C}C_\eta(1-\delta)^{-1}+1\right\}\|\,|\nabla(f-f_k)|\,\|_X\\
&\to\left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{-\frac{1}{q}}(1+\eta)\delta^{-1}\liminf_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X
\end{aligned}
$$

当 $k\to\infty$ 时。令 $\delta\to1$ 和 $\eta\to0$，可进一步得到

$$
\liminf_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\ge\left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}}\|\,|\nabla f|\,\|_X,\tag{3.56}
$$

这就完成了对这类 f 在 (ii) 中下界估计的证明，进而也完成了在 $\gamma\in(0,\infty)$ 情形下这类 f 在 (i) 中下界估计的证明。由与估计 (3.56) 类似的论证可得，对于任意 $f\in\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，在 $\gamma\in(-\infty,0)$ 情形下，(iii) 中的下界估计以及 (i) 中的下界估计也都成立。

为完成本定理的证明，还需证明对于任意 $f\in\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，(ii) 和 (iii) 中的上界估计。我们只证明前者，因为后者的证明类似，故省略细节。由 f_k 在 (ii) 中的上界估计、(3.55)、引理 3.23 以及定义 2.1(v)，可知对于任意 $k\in\mathbb{N}$ and $\delta,\eta\in(0,1)$，存在一个 $C_\eta\in(0,\infty)$，使得

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\
&\le C_\eta\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{(1-\delta)\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f-f_k]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\
&\quad+(1+\eta)\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\delta\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f_k]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\
&\le\widetilde{C}(1-\delta)^{-1}C_\eta\|\,|\nabla(f-f_k)|\,\|_X+(1+\eta)\delta^{-1}\left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}}\|\,|\nabla f|\,\|_X,
\end{aligned}
$$

结合 (3.51)，先令 $k\to\infty$，再令 $\eta\to0$ 和 $\delta\to1$，进一步可得

$$
\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\le\left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}}\|\,|\nabla f|\,\|_X.
$$

这就完成了对任意 $f\in\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 的 (ii) 中上界估计的证明，从而证明了定理 3.29。 □

注 3.31. 当 $\gamma=n$ 与 [34,定理 4.5(ii)] 一致时，定理 3.29。

将定理 3.29 应用于 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $p \in [1,\infty)$，可得以下推论。

推论 3.32. 设 $p \in [1,\infty)$，$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，且 $q \in (0,\infty)$。若以下四个命题之一成立：

(a) $p \in (n,\infty)$，$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，且 $q \in (0,\infty)$；(b) $p \in [1,n]$，$\gamma \in (0,\infty)$，且 $q \in (0,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < 1$；(c) $p \in (1,n]$，$\gamma \in (-\infty,0)$，且 $q \in (0,p]$；(d) $p = q = n = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty,-1)$。

那么以下命题成立。

(i) 对任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \| |\nabla f| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中，正等价常数与 f 无关，且 $\kappa(q,n)$ 和 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ with $\lambda \in (0,\infty)$ 分别与 (1.13) 和 (1.10) 中的相同。

(ii) 若 $\gamma \in (0,\infty)$，则对任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(iii) 若 $\gamma \in (-\infty,0)$，进一步假设 $n \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$ 和 $q \in (0, n^{-\gamma} n p)$，或者 $n = 1$、$q \in (0,-p\gamma)$ 且 $\gamma \in (-\infty,-1)$。则对任意 $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。令 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$。注意，$X^{\frac{1}{p}} = L^1(\mathbb{R}^n)$ 显然是一个球 Banach 函数空间。众所周知，Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X_p)' = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上有界。当 $p \in [1,\infty)$ 时，也容易证明 $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。接下来，我们讨论 p、γ 和 q 的以下四种情形。

情形 1) $p \in (n,\infty)$，$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，且 $q \in (0,\infty)$。在这种情形下，很容易发现，存在一个 $r \in (n,p)$，使得 $\mathcal{M}$ 在 $X^{\frac{1}{r}} = L^{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$ 上有界。因此，取 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 时，定理 3.29(b) 的条件得到满足。由此以及定理 3.29 可得，在这种情形下，本推论成立。

情形 2) $p \in [1,n]$，$\gamma \in (0,\infty)$，且 $q \in (0,\infty)$ 满足 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < 1$。在这种情形下，我们发现，取 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 时，定理 3.29(c) 成立。由此以及定理 3.29，我们推得本推论在这种情形下成立。

情形 3) $p \in (1, n]$, $\gamma \in (-\infty, 0)$，且 $q \in (0, p]$。在这种情形下，容易看出 $\mathcal{M}$ 在 $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界，因此取 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 时，定理 3.29(a) 成立。由此以及定理 3.29，我们得出本推论在这种情形下成立。

情形 4) $p = q = n = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, -1)$。在这种情况下，我们发现，取 $X := L^1(\mathbb{R}^n)$ 时，定理 3.29(d) 成立。由此以及定理 3.29，可推得本推论在这种情况下成立。

推论 3.32 的证明至此完成。 □

注 3.33. (i) 当 $p = q \in [1, \infty)$ 且 $\gamma \in (0, \infty)$，或当 $p = q \in (1, \infty)$ 且 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 时，推论 3.32 与同一情形下定理 1.1、定理 1.3(i) 和定理 1.4(i) 的 (a) 和 (b) 两部分 [18,] 一致。

(ii) 当 $p = q = n = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 属于 [18, 定理 1.1(b) 和定理 1.4(i)]的一部分时的推论 3.32。

(iii) 当 $p \in (n, \infty)$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，且 $q \in (0, \infty) \setminus \{p\}$，或当 $p \in [1, n]$, $\gamma \in (0, \infty)$，且 $q \in (0, \infty)$ 且 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$ 和 q , p 均成立时，推论 3.32 的 (i) 和 (ii) 均为新结果；或当 $p \in (1, n]$,$\gamma \in (-\infty, 0)$，且 $q \in (0, p)$ 为新结果时。特别地，在 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 的情形下，当 $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$、$p \in (n, \infty)$，且 $q \in (0, n^{-\gamma} p)$ 且 q , p，或当 $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$、$p \in (1, n)$，且 $q \in (0, p)$ 时，推论 3.32(iii) 是新结果。

请注意，在定理 3.29 中，我们假设 Hardy–Littlewood 极大算子在 $(X_p)'$ 上有界，其中某个 $p \in [1, \infty)$。然而，在某些特定函数空间的临界情形下（例如，当 $\alpha \in [1, \infty$ 时的 Morrey 空间 $M^{\alpha}_1(\mathbb{R}^n)$、当 $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) = 1$ 时的变指数 Lebesgue 空间 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，以及下型为 $r^-_{\Phi} = 1$ 的 Orlicz 空间 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$；这些空间的定义见下文第 5 节），即使 $p = 1$，这一假设也不成立。为在这种情形下证明 (1.9)，我们先给出一个稠密性引理。回顾一下，对于任意给定的 $r \in (0, \infty)$，中心球平均算子 $\mathcal{B}_r$ 定义如下：对任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{B}_r(f)(x) := \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

下面的稠密性引理即为 [34,定理 2.6]。

引理 3.34. 设 X 是一个球型巴拿赫函数空间。假设 X 具有绝对连续范数，且中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r \in (0,\infty)}$ 在 X 上一致有界。那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1, x}(\mathbb{R}^n)$，存在一个序列 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，满足 $|\nabla f_k| \in C_c(\mathbb{R}^n)$，对任意 $k \in \mathbb{N}$均成立，并且对任意 $R \in (0, \infty)$，式 (3.51) 均成立。

以下结论是定理 3.29 的另一种表述，它证明了式 (1.9)，且无需假设 Hardy–Littlewood 极大算子在 X′上有界。

定理 3.35. 设 X 是一个球型巴拿赫函数空间。假设 X 的范数绝对连续，且中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r \in (0,\infty)}$ 在 X 上一致有界。假设存在一个序列 $\{\theta_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$，满足 $\lim_{m \to \infty} \theta_m = 1$，使得对于

任意 $m \in \mathbb{N}$，$X^{\frac{1}{\theta_m}}$ 是一个球型巴拿赫函数空间，Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\frac{1}{\theta_m}})'$ 上有界，其算子范数记为 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})' \to (X^{\frac{1}{\theta_m}})'}$，并且

$$\lim_{m \to \infty} \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})' \to (X^{\frac{1}{\theta_m}})'} < \infty. \tag{3.57}$$

进一步假设以下陈述之一成立：

(a) $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$q \in (0, 1]$，且 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界。（b） $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$q \in (0, \infty)$，且存在一个 $r \in (n, \infty)$，使得 $\mathcal{M}$ 在 $X^{\frac{1}{r}}$ 上有界。（c） $\gamma \in (0, \infty)$ 且 $q \in (0, \infty)$ 满足 $n(1 - \frac{1}{q}) < 1$。（d） $\gamma \in (-\infty, -1)$ 且 $n = q = 1$。

则以下陈述成立。

(i) 则存在一个正数常数 C，使得对于任意 $f \in \dot{W}^{1, X}(\mathbb{R}^n)$，

$$\left[\frac{\kappa(q,n)}{|\gamma|}\right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X \le \sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X \le C \| |\nabla f| \|_X,$$

其中 $\kappa(q, n)$ 和 $E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]$ with $\lambda \in (0, \infty)$ 分别与（1.13）和（1.10）中的相同。

(ii) 若 $\gamma \in (0, \infty)$，则对于任意 $f \in \dot{W}^{1, X}(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X.$$

(iii) 若 $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ 和 $q \in (0, n^{-\gamma} n p)$，或者 $n = 1$、$q \in (0, -p\gamma)$，且 $\gamma \in (-\infty, -1)$。则对于任意 $f \in \dot{W}^{1, X}(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_X.$$

证明。我们首先断言，对于任意满足 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 f，(i)、(ii) 和 (iii) 均成立。我们先证明这类 f 满足 (i) 中的上界估计。为此，根据定理 3.8 和 3.14，其中将 $p := 1$ 和 X 均替换为带有 $m \in \mathbb{N}$ 的 $X^{\frac{1}{\theta_m}}$，并由以下假设：对于任意 $m \in \mathbb{N}$，X^{θ_m} 是球型巴拿赫函数空间，且 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\frac{1}{\theta_m}})'$ 上有界，我们得到，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X^{\frac{1}{\theta_m}}} \le C_m \| |\nabla f| \|_{X^{\frac{1}{\theta_m}}},$$

其中，正数常数 C_m 关于 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}$ 连续，并且随着 $\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}$ 的增大而增大，这进一步意味着，对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$，

$$\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q\theta_m}}\right\|_X\le C_m^{\frac{1}{\theta_m}}\lambda^{-\frac{1}{\theta_m}}\left\||\nabla f|^{\frac{1}{\theta_m}}\right\|_X.$$

由此，根据引理 3.20、(3.57) 以及勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_X\\&\quad\le\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\liminf_{m\to\infty}\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q\theta_m}}\right\|_X\\&\quad\lesssim\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\liminf_{m\to\infty}C_m^{\frac{1}{\theta_m}}\lambda^{-\frac{1}{\theta_m}}\left\||\nabla f|^{\frac{1}{\theta_m}}\right\|_X\\&\quad=\liminf_{m\to\infty}C_m^{\frac{1}{\theta_m}}\||\nabla f|\|_X\lesssim\||\nabla f|\|_X.\end{aligned}$$

这就完成了对此类 f 的 (i) 中上界估计的证明。另一方面，根据定理 3.19，我们得出，对于此类 f，(i)、(ii) 和 (iii) 中的下界估计显然成立。结合 (i) 中的上界估计，这就完成了对任意满足 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ 的 f 证明 (i)。因此，为了证明此类 f 的 (ii) 和 (iii)，只需证明此类 f 的 (ii) 和 (iii) 中的上界估计。注意到，由定理 3.22(i) 易得，此类 f 的 (ii) 中的上界估计成立。下面我们证明此类 f 的 (iii) 中的上界估计。根据定理 3.22(ii) 的证明，我们发现，为证明这一点，只需证明对于任意满足 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $|\nabla f|\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 f，(3.40) 成立。为此，我们针对 n 考虑以下两种情形。

情形 1) $n\in\mathbb{N}\cap[2,\infty)$。在此情形下，由定理 3.22 的证明可知，我们只需证明 (3.44)。利用在 $X:=X^{\frac{1}{\theta_m}}$ 和 $p:=1$ 的情形下对 (3.45) 的估计，并根据假设：对任意 $m\in\mathbb{N}$，$X^{\frac{1}{\theta_m}}$ 是球型巴拿赫函数空间，且 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\frac{1}{\theta_m}})'$ 上有界，我们得出，对于任意 $m\in\mathbb{N}$ 以及任意满足 $B_r:=B(0,r)$、$r\in(0,\infty)$ 的球，

$$\left\||\cdot|^{\frac{\gamma-n}{q}}\mathbf{1}_{(B_r)^\complement}(\cdot)\right\|_{X^{\frac{1}{\theta_m}}}\le C_{(q,\gamma,n)}\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}r^{\frac{\gamma-n}{q}}\left\|\mathbf{1}_{B_r}\right\|_{X^{\frac{1}{\theta_m}}},$$

其中 $C_{(p,q,\gamma,n)}$ 是仅依赖于 p、q、γ 和 n 的正数常数。结合定义 2.3，可进一步推出，对于任意满足 $B_r:=B(0,r)$、$r\in(0,\infty)$ 的球，

$$\left\|\left[|\cdot|^{\frac{\gamma-n}{q}}\mathbf{1}_{(B_r)^\complement}(\cdot)\right]^{\frac{1}{\theta_m}}\right\|_X\le\left[C_{(q,\gamma,n)}\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}r^{\frac{\gamma-n}{q}}\right]^{\frac{1}{\theta_m}}\left\|\mathbf{1}_{B_r}\right\|_X.$$

由此，结合引理 3.20、(3.57) 和定义 2.1(iv)，我们推得，对于任意给定的球 $B_r:=B(0,r)$，其中 $r\in(0,\infty)$，

$$\left\||\cdot|^{\frac{\gamma-n}{q}}\mathbf{1}_{(B_r)^\complement}(\cdot)\right\|_X\le\liminf_{m\to\infty}\left\|\left[|\cdot|^{\frac{\gamma-n}{q}}\mathbf{1}_{(B_r)^\complement}(\cdot)\right]^{\frac{1}{\theta_m}}\right\|_X$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \liminf_{m\to\infty}\left[\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} r^{\frac{\gamma-n}{q}}\right]^{\frac{1}{\theta_m}} \left\|\mathbf{1}_{B_r}\right\|_X\\
&= \left[\lim_{m\to\infty}\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}\right] r^{\frac{\gamma-n}{q}} \left\|\mathbf{1}_{B_r}\right\|_X\\
&\sim r^{\frac{\gamma-n}{q}} \left\|\mathbf{1}_{B_r}\right\|_X < \infty,
\end{aligned}$$

这就完成了 (3.44) 的证明，从而也完成了 (3.40) 的证明。至此，在这种情况下，对这样的 f，(iii) 中的上界估计得证。

情形 2) $n = 1$。在这种情况下，要证明对于任意满足 $f' \in C_c(\mathbb{R})$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R})$，式 (3.40) 成立，只需仿照定理 3.25 的证明，证明

$$\limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap[(-2\beta,2\beta)^{\complement}\times\mathbb{R}]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X = 0, \tag{3.58}$$

其中 $\beta \in (0,\infty)$ 满足 $\operatorname{supp}(f') \subset (-\beta,\beta)$。由于 f 在 (β,∞) 上为常数，在 $(-\infty,-\beta)$ 上也为另一个常数，因此，若 $(x,y) \in E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 且 $x \in [2\beta,\infty)$，则 $y \in (-\infty,\beta)$；若 $(x,y) \in E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 且 $x \in (-\infty,-2\beta]$，则 $y \in (-\beta,\infty)$。由此及定义 2.1(v)，可得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]\cap[(-2\beta,2\beta)^{\complement}\times\mathbb{R}]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_X\\
&= \limsup_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left(\int_{-\infty}^{\beta} |\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right)^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{[2\beta,\infty)}(\cdot) \right.\\
&\quad \left. + \left(\int_{-\beta}^{\infty} |\cdot-y|^{\gamma-1}\,dy \right)^{\frac{1}{q}} \mathbf{1}_{(-\infty,-2\beta]}(\cdot) \right\|_X\\
&\le \limsup_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda}{(-\gamma)^{\frac{1}{q}}} \left[\left\| |\cdot-\beta|^{\frac{\gamma}{q}} \mathbf{1}_{[2\beta,\infty)}(\cdot) \right\|_X + \left\| |\cdot+\beta|^{\frac{\gamma}{q}} \mathbf{1}_{(-\infty,-2\beta]}(\cdot) \right\|_X \right].
\end{aligned}$$

因此，要证明 (3.58)，只需证明

$$\left\| |\cdot-\beta|^{\frac{\gamma}{q}} \mathbf{1}_{[2\beta,\infty)}(\cdot) \right\|_X + \left\| |\cdot+\beta|^{\frac{\gamma}{q}} \mathbf{1}_{(-\infty,-2\beta]}(\cdot) \right\|_X < \infty. \tag{3.59}$$

事实上，根据本证明中情形 1) 的证明以及对 (3.49) 的估计所用的类似论证，我们可以推出 (3.59) 成立；此处省略细节。至此，对于 $n = 1$ 的情形，任意满足 $f' \in C_c(\mathbb{R})$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 的 (3.40) 证明完成，从而完成了这类 f 的 (iii) 中上界估计的证明，也就证明了上述结论。

现在，设 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$。由引理 3.34 可知，存在一个序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$，其中 $|\nabla f_k| \in C_c(\mathbb{R}^n)$，对任意满足 (3.51) 的 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。由此，结合上述结论以及与定理 3.29 证明中所用的类似稠密性论证，我们进一步推出，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，(i)、(ii) 和 (iii) 均成立。至此，定理 3.35 的证明完成。□

注 3.36. (i) 由定理 3.35 的证明中的论断可知，对于任意满足 $\in C^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 f，即使不假设 X 具有绝对连续范数，定理 3.35 的 (i)、(ii) 和 (iii) 仍然成立。

(ii) 当 $\gamma = n$ 与 [34,定理 4.10] 重合时的定理 3.35。

(iii) 我们应指出，定理 3.35 的 (i)、(ii) 和 (iii) 中的下界估计不需要假设 (3.57)。

4 分数阶 Sobolev 型不等式与分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式的应用

本节中，我们使用第 3 节建立的广义 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式 (1.9)，证明球型巴拿赫函数空间 X 上的分数阶 Sobolev 型不等式和分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式。以下分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式涉及 $\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 和 $X^p(\mathbb{R}^n)$，其中 $p \in [1,\infty)$ [或 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$，当 $p = \infty$] 时，是本节的两个主要定理之一。

定理 4.1. 设 X 是一个球型巴拿赫函数空间，$p \in [1,\infty]$，$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，$s \in (0,1)$，且 $q \in [1,p]$ 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1-s}{p} + s$。假设存在一个序列 $\{\theta_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$，满足 $\lim_{m\to\infty}\theta_m = 1$，使得对任意 $m \in \mathbb{N}$，$X^{\overline{\theta_m}}$ 都是球型巴拿赫函数空间，并且 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\overline{\theta_m}})'$ 上有界，且 (3.57) 成立。若 $\gamma \in (-\infty,0)$，进一步假设 $\mathcal{M}$ 在 X 上有界，或者 $n = 1$ 和 $\gamma \in (-\infty,-1)$。则以下结论成立。

(i) 若 $p \in [1,\infty)$，则存在一个正数常数 C，使得对于任意 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，且 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$，

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot - y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X^q} \le C\|f\|_{X^p}^{1-s}\,\||\nabla f|\|_X^s, \tag{4.1}$$

其中，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，

$$D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f] := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ x \ne y,\ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{s+\frac{\gamma}{q}}} > \lambda \right\}. \tag{4.2}$$

进一步假设 X 具有绝对连续范数，X^p 是一个球型巴拿赫函数空间，且中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 X 上一致有界。那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，(4.1) 也成立。

(ii) 若 $p = \infty$，则存在一个正数常数 eC，使得对于任意 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，且 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$，

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot - y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X^q} \le \widetilde{C}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-s}\,\||\nabla f|\|_X^s. \tag{4.3}$$

进一步假设，X 具有绝对连续范数，且中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 X 上一致有界。则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，(4.3) 也成立。

为证明定理 4.1，我们需要以下引理，它正是 [32, 推论 3.10]。

引理 4.2. 设 X 是具有绝对连续范数的球型巴拿赫函数空间。假设中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 X 上一致有界。则 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 X 中稠密。

定理 4.1 的证明。我们先证明 (i)。为此，设 $p \in [1,\infty)$。我们首先证明，对于任意 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，若 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$，则 (4.1) 成立。由于 $\frac{1}{q} = \frac{1-sp}{p}+s$，因此~~对~~于任意满足 $x, y \in \mathbb{R}^n$，

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{s+\frac{\gamma}{q}}} = \left[\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{\gamma}{p}}}\right]^{1-s}\left[\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{1+\gamma}}\right]^{s},$$

这进一步意味着，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，

$$\begin{aligned} D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f] &\subset D_{A^{-s}\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f] \cup D_{A^{1-s}\lambda,\gamma,1}[f] \\ &= D_{A^{-s}\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f] \cup E_{A^{1-s}\lambda,\gamma}[f], \end{aligned}$$

其中 $A \in (0,\infty)$ 是稍后给出的一个常数，且 $E_{A^{1-s}\lambda,\gamma}[f]$ 与 (1.10) 中相同，只是分别将 λ 和 $\frac{\gamma}{q}$ 替换为 $A^{1-s}\lambda$ 和 γ。由此，根据定义 2.1(v) 以及取 $r := \frac{1}{q} \in (0,1]$, 的引理 3.10，我们得出对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，

$$\begin{aligned} &\lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_X^{\frac{1}{q}} \\ &\le \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{A^{-s}\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_X^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{A^{1-s}\lambda,\gamma}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_X^{\frac{1}{q}} \\ &\le \lambda^{1-\frac{p}{q}} (A^s G)^{\frac{p}{q}} + \lambda^{1-\frac{1}{q}} \left(A^{s-1}H\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中

$$G := \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_X^{\frac{1}{p}}$$

and

$$H := \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\gamma}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_X. \tag{4.5}$$

选择一个 $A \in (0,\infty)$，使得

$$\lambda^{1-\frac{p}{q}} (A^s G)^{\frac{p}{q}} = \lambda^{1-\frac{1}{q}} \left(A^{s-1}H\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由此，结合 (4.4)、$\frac{1}{q} = \frac{1-sp}{p} + s$、注 3.36(i) 以及取 $q := 1$ 的定理 3.35(i)，我们推得

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_X^{\frac{1}{q}} \lesssim G^{1-s}H^s \lesssim G^{1-s}\,\||\nabla f|\|_X^s. \tag{4.6}$$

接下来，我们断言，对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，

$$G \lesssim \|f\|_{X^p}. \tag{4.7}$$

由此结论和 (4.6)，我们立即得到 (4.1) 成立。为了证明上述结论，由引理 3.4 和 3.2(i) 可推得，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$ 和 $m \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_{X^{\frac{1}{\theta_m}}} \\
&\quad= \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy \right] g(x)\,dx \\
&\quad\le \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy \right] R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx \\
&\quad\le \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_1}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy \right] R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx \\
&\qquad+ \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_2}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy \right] R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中

$$D_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n :\ x \neq y,\ \frac{|f(x)|}{|x-y|^{\frac{\gamma}{p}}} > \frac{\lambda}{2} \right\}$$

and

$$D_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n :\ x \neq y,\ \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\frac{\gamma}{p}}} > \frac{\lambda}{2} \right\}.$$

接下来我们对 γ 考虑以下两种情形。

情形 1) $\gamma \in (0,\infty)$. 在这种情形下，一方面，根据极坐标以及引理 3.30 和 3.2(iii)，我们可得，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，

$$\begin{aligned}
&\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_1}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy \right] R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx \\
&\quad= \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{[\frac{2|f(x)|}{\lambda}]^{\frac{p}{\gamma}}} r^{\gamma-1}\,dr\,d\sigma \right) R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx \\
&\quad\sim \lambda^{-p} \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx \\
&\quad\le \lambda^{-p} \|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}} \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \left\| R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g \right\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} \lesssim \lambda^{-p} \|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

另一方面，对于任意给定的 $y \in \mathbb{R}^n$，令

$$B_y := B\left(y, \left[2\lambda^{-1}|f(y)|\right]^{\frac{p}{\gamma}}\right).$$

由 Tonelli 定理、引理 2.10(i)、引理 3.2 的 (ii) 和 (iii) 以及引理 3.30，我们推得，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_2}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right] R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx \\
&= \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j}B_y \setminus 2^{-j-1}B_y} |x-y|^{\gamma-n} R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx\,dy \\
&\lesssim \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{2^{-j}\left[\frac{|f(y)|}{\lambda}\right]^{\frac{p}{\gamma}}\right\}^{\gamma-n} \int_{2^{-j}B_y} R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dx\,dy \\
&\le \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \left[R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g\right]_{A_1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{2^{-j}\left[\frac{|f(y)|}{\lambda}\right]^{\frac{p}{\gamma}}\right\}^{\gamma-n} \\
&\quad \times \left|2^{-j}B_y\right| \inf_{x\in 2^{-j}B_y} R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(x)\,dy \\
&\lesssim \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\gamma j}\left[\frac{|f(y)|}{\lambda}\right]^{p} R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g(y)\,dy \\
&\lesssim \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} \lambda^{-p}\|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}} \sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1} \left\|R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} g\right\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} \\
&\lesssim \|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'} \lambda^{-p}\|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}},
\end{aligned}$$

这与 c ombined with (4.8)、(4.9) 以及控制收敛定理进一步推出 tha t

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} &= \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\|\lim_{m\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{\theta_m}}\right\|_X^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \liminf_{m\to\infty} \left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{\theta_m}}\right\|_X^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \liminf_{m\to\infty} \left\{\left[1+\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}\right]\lambda^{-p}\|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}}\right\}^{\frac{1}{p\theta_m}} \\
&\lesssim \liminf_{m\to\infty} \left\||f|^{\frac{p}{\theta_m}}\right\|_X^{\frac{\theta_m}{p}} = \|f\|_{X^p}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

这就完成了上述关于情形 $\gamma \in (0,\infty)$ 的论证。

情形 2) $\gamma\in(-\infty,0)$。在这种情况下，一方面，由极坐标以及引理 3.30 和 3.2(iii)，我们得到，对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$，

$$
\begin{aligned}
(4.11)\qquad &\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_1}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g(x)\,dx\\
&=\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{[\frac{2|f(x)|}{\lambda}]^{\frac{p}{\gamma}}}^{\infty}r^{\gamma-1}\,dr\,d\sigma\right]R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g(x)\,dx\\
&\sim\lambda^{-p}\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g(x)\,dx\\
&\le\lambda^{-p}\|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}}\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\left\|R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g\right\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}\lesssim\lambda^{-p}\|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}}.
\end{aligned}
$$

另一方面，由 Tonelli 定理、引理 2.10(i)、引理 3.2 的 (ii) 和 (iii) 以及引理 3.30 可推得，对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_2}(x,y)\,|x-y|^{\gamma-n}\,dy\right]R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g(x)\,dx\\
&=\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^jB_y\setminus2^{j-1}B_y}|x-y|^{\gamma-n}\,R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g(x)\,dx\,dy\\
&\lesssim\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{2^{j-1}\left[\frac{|f(y)|}{\lambda}\right]^{\frac{p}{\gamma}}\right\}^{\gamma-n}\int_{2^jB_y}R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g(x)\,dx\,dy\\
&\le\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\left[R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g\right]_{A_1(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{2^j\left[\frac{|f(y)|}{\lambda}\right]^{\frac{p}{\gamma}}\right\}^{\gamma-n}\\
&\qquad\times\left|2^jB_y\right|\inf_{x\in2^jB_y}R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g(x)\,dy\\
&\lesssim\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}2^{\gamma j}\left[\frac{|f(y)|}{\lambda}\right]^p R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g(y)\,dy\\
&\lesssim\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}\lambda^{-p}\|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}}\sup_{\|g\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}=1}\left\|R_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}g\right\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}\\
&\lesssim\|\mathcal{M}\|_{(X^{\frac{1}{\theta_m}})'\to(X^{\frac{1}{\theta_m}})'}\lambda^{-p}\|f\|^p_{X^{\frac{p}{\theta_m}}},
\end{aligned}
$$

结合 (4.8)、(4.11) 以及与估计 (4.10) 时所用论证类似的论证，可进一步推出 $G\lesssim\|f\|_{X^p}$。再结合 (4.10)，即可完成上述断言的证明，从而得到对于任意满足 $|\nabla f|\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$，(4.1) 成立。

现在，在 (i) 中附加假设下，我们证明任意 $f\in\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 满足 (4.1)。根据与估计 (4.6) 类似的论证，并利用 $q:=1$ 时的定理 3.35(i)，我们推得

对于任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right\|_X^{\frac{1}{q}} \lesssim G^{1-s}\, \| |\nabla f| \|_X^s .$$

因此，为完成 (i) 的证明，只需证明对于任意 $f \in \dot{W}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n) \cap X^p$，都有 $G \lesssim \|f\|_{X^p}$。事实上，若 $f \notin X^p$，则 (4.1) 自动成立。令 $f \in \dot{W}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n) \cap X^p$。由 X 具有绝对连续范数且 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 X 上一致有界的假设，直接通过其定义容易证明，X^p 也具有绝对连续范数，且 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 X^p 上也一致有界。这些条件再结合 X^p 是球型巴拿赫函数空间以及引理 4.2，进一步推出 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 X^p 中稠密。由此可知，存在一个序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{X^p} = 0. \tag{4.12}$$

对于任意自然数集 $\in \mathbb{N}$,
令

$$\mathcal{F}_N := \left\{ (x,y) \in B(\mathbf{0},N) \times B(\mathbf{0},N) :\ |x-y| \geq \frac{1}{N} \right\}.$$

注意，对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$ 和 $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f] \cap \mathcal{F}_N \subset & \left[\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n :\ x \neq y,\ \frac{|f(x) - f_k(x)|}{|x-y|^{\frac{\gamma}{p}}} > \frac{\lambda}{3} \right\} \cap \mathcal{F}_N \right] \\ & \cup \left[\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n :\ x \neq y,\ \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|x-y|^{\frac{\gamma}{p}}} > \frac{\lambda}{3} \right\} \cap \mathcal{F}_N \right] \\ & \cup \left[\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n :\ x \neq y,\ \frac{|f_k(y) - f(y)|}{|x-y|^{\frac{\gamma}{p}}} > \frac{\lambda}{3} \right\} \cap \mathcal{F}_N \right] \\ =: & E_1 \cup E_2 \cup E_3, \end{aligned}$$

结合定义 2.1(v) 和引理 3.10，其中 $r := \frac{1}{p} \in (0,1]$, 意味着

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]\cap\mathcal{F}_N}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right\|_X^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \leq \sum_{i=1}^3 \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_i}(\cdot,y)\, |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right\|_X^{\frac{1}{p}} =: \sum_{i=1}^3 I_i. \end{aligned} \tag{4.13}$$

为处理 I_1, , 根据 E_1 和 $\mathcal{F}_N$ 及 $p \in [1,\infty)$ 的定义，我们推得，对于任意 k, $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_1 & \lesssim \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{B(\mathbf{0},N)\cap\mathcal{F}_N} \left[\frac{|f(\cdot) - f_k(\cdot)|}{\lambda |\cdot - y|^{\frac{\gamma}{p}}} \right]^p |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right\|_X^{\frac{1}{p}} \\ & = \left\| |f(\cdot) - f_k(\cdot)|^p \int_{B(\mathbf{0},N)\cap\mathcal{F}_N} |\cdot - y|^{-n}\, dy \right\|_X^{\frac{1}{p}} \lesssim N^{\frac{2p}{n}} \|f - f_k\|_{X^p} . \end{aligned} \tag{4.14}$$

为处理 I_2, , 根据 (4.7)、 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 以及定义 2.1(v)，我们发现，对于任意 k，$N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2&\le\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f_k]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^{\frac1p}\\&\lesssim\|f_k\|_{X^p}\le\|f-f_k\|_{X^p}+\|f\|_{X^p}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

根据 E_3 和 $\mathcal{F}_N$、$p\in[1,\infty)$ 的定义以及引理 3.30，为处理 I_3, , 我们推得，对于任意 k，$N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3&\lesssim\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\int_{B(\mathbf{0},N)\cap\mathcal{F}_N}\left[\frac{|f(y)-f_k(y)|}{\lambda|x-y|^{\frac{\gamma}{p}}}\right]^p|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}(\cdot)\right\|_X^{\frac1p}\\&\lesssim N^n\left\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\right\|_X^{\frac1p}\left[\int_{B(\mathbf{0},N)}|f(y)-f_k(y)|^p\,dy\right]^{\frac1p}\\&\le N^n\left\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\right\|_X^{\frac1p}\left\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\right\|_{X'}^{\frac1p}\|f-f_k\|_{X^p},\end{aligned}$$

这与 (4.13)、(4.14) 和 (4.15) 一起进一步推出

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{p},0}[f]\cap\mathcal{F}_N}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^{\frac1p}\\&\quad\lesssim\left[1+N^{\frac{2p}{n}}+N^n\left\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\right\|_{X'}^{\frac1p}\left\|\mathbf{1}_{B(\mathbf{0},N)}\right\|_X^{\frac1p}\right]\|f-f_k\|_{X^p}+\|f\|_{X^p}.\end{aligned}$$

利用上述结果以及 (4.12)，并令 $k\to\infty$ 和 $N\to\infty$，我们得到，对于任意 $f\in\dot{W}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n)\cap X^p$，$G\lesssim\|f\|_{X^p}$，从而对于任意 $f\in\dot{W}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n)$，(4.1) 成立。这就完成了 (i) 的证明。

下面证明 (ii)。设 $f\in\dot{W}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n)$。如果 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}=0$ 或 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}=\infty$，则 (4.3) 自动成立。现在，假设 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\in(0,\infty)$。注意，对于任意 $(x,y)\in D_{\lambda,\,\gamma s,\,s}[f]$,

$$\left[\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\gamma+1}}\right]^s\ge\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{(\gamma+1)s}}\left[2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right]^{s-1}>\frac{\lambda}{\left[2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right]^{1-s}},$$

这进一步意味着

$$D_{\lambda,\gamma s,s}[f]\subset D_{\frac{\lambda^{\frac1s}}{[2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}]^{\frac{1-s}{s}}},\gamma,1}[f].\tag{4.16}$$

No注意到 $p=\infty$ 蕴含 $qs=1$。由此，结合式 (4.16) 和定义 2.1(ii)，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac1q}\right\|_{X^q}\\&\quad=\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\lambda,\gamma s,s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^s\\&\quad\le\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\frac{\lambda^{\frac1s}}{[2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}]^{\frac{1-s}{s}}},\gamma,1}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^s\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$= [2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}]^{1-s} \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda^s \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\gamma,1}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_X^s$$
$$= [2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}]^{1-s} \left[\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\gamma}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right\|_X \right]^s.$$

此外，结合注 3.36(i) 和定理 3.35(i)（其中 $q := 1$），进一步可得：对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X^q} \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-s} \| |\nabla f| \|_X^s. \tag{4.18}$$

接下来，若 X 具有绝对连续范数，且 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 X 上一致有界，则由 $q := 1$时的定理 3.35(i) 结合 (4.17)，可进一步推出，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，(4.3) 均成立。再结合 (4.18)，即可完成 (ii) 的证明。至此，定理 4.1 的证明完成。□

注 4.3。(i) 当 $\gamma = n$ 与 [34, 重合时，定理 4.1 即为推论 4.13]。此时，若 $p = \infty$、$q \in (1,\infty)$、$X := L^1(\mathbb{R}^n)$，且 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，则定理 4.1(ii) 就是推论 5.1]。据我们所知，$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时的定理 4.1 是新的。

(ii) 若 $p = \infty$、$q \in (1,\infty)$，且 $X := L^1(\mathbb{R})$，则定理 4.1(ii) 表明，对于任意 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\| \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\frac{2}{q}}} \right\|_{L^{q,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\nu_\gamma)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{q}} \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

其中测度 ν_γ 与 (1.8) 中的相同，γ 与定理 4.1 中的相同；当$\gamma = 1$ 时，这就是 [20, 推论 4.1]；当 $\gamma = 1$ 且 $q = 2$ 时，则最初由 [49,定理 3.1]给出。

(iii) 正如 [34, 评注 4.14], 的 (ii) 和 (iii) 中所指出的，即使在 $\gamma = n$ 且 $p \in [1,\infty)$ 的情况下，定理 4.1(i) 是否仍然成立（将 (4.1) 左端替换为下式），目前仍不清楚：

$$\left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\cdot)-f(y)|^q}{|\cdot-y|^{n+sq}}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{X^q}.$$

然而，当 $\gamma = n$ 且 $p = \infty$ 时，采用上述相同的修改后，(4.3) 未必成立（例如，参见 [20, (5.3)]）。从这个意义上说，(4.3) 似乎是尖锐的。

(iv) 设 X 与定理 3.29 中的相同。则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，(4.1) 和 (4.3) 均成立；这可通过对定理 4.1 的证明稍作修改，并将定理 3.35(i) 替换为定理 3.29(i) 来证明。

本节的另一条主要定理是以下涉及 $\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 及其分数阶版本的分数阶 Gagliardo–Nirenberg 型不等式。

定理 4.4. 设 $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\eta\in(0,1)$，且 $0\le s_0<s<1<q<q_0<\infty$ 满足

$$s=(1-\eta)s_0+\eta \quad and \quad \frac{1}{q}=\frac{1-\eta}{q_0}+\eta. \tag{4.19}$$

设 X 为球型巴拿赫函数空间。假设存在一个序列 $\{\theta_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset(0,1)$[1]，满足 $\lim_{m\to\infty}\theta_m=1$，使得对于任意 $m\in\mathbb{N}$，X^{θ_m} 是球型巴拿赫函数空间，且 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $(X^{\frac{1}{\theta_m}})'$ 上有界，条件 (3.57) 成立。若$\gamma\in(-\infty,0)$，进一步假设 $\mathcal{M}$在 X 上有界，或者 $n=1$ 和 $\gamma\in(-\infty,-1)$ 均成立。则存在正数常数 C，使得对于任意满足 $|\nabla f|\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^{\frac{1}{q}}\\&\quad\le C\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q_0},s_0}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^{\frac{1-\eta}{q_0}}\||\nabla f|\|_X^{\eta},\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中，对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$，$D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]$ 与 (4.2) 中的定义相同。进一步假设 X 具有绝对连续范数，且中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 X 上一致有界。则 (4.20) 对任意 $f\in\dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 也成立。

证明。首先，设 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$，且 $|\nabla f|\in C_c(\mathbb{R}^n)$。由 (4.19) 可知，对于任意满足 x,y 的 $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{s+\frac{\gamma}{q}}}=\left[\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{s_0+\frac{\gamma}{q_0}}}\right]^{1-\eta}\left[\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\gamma+1}}\right]^{\eta},$$

这意味着，对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$,

$$D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]\subset\left(D_{A^{-\eta}\lambda,\frac{\gamma}{q_0},s_0}[f]\cup E_{A^{1-\eta}\lambda,\gamma}[f]\right)$$

其中 $A\in(0,\infty)$ 是稍后指定的常数，$E_{A^{1-\eta}\lambda,\gamma}[f]$ 与 (1.10) 中的相同，只是 λ 和 $\frac{\gamma}{q}$ 分别替换为 $A^{1-\eta}\lambda$ 和 γ。由此，根据定义 2.1(v) 和引理 3.10，取 $r:=\frac{1}{q}\in(0,1)$，可得对于任意 $\lambda\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}&\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^{\frac{1}{q}}\\&\quad\le\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{A^{-\eta}\lambda,\frac{\gamma}{q_0},s_0}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^{\frac{1}{q}}\\&\qquad+\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{A^{1-\eta}\lambda,\gamma}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^{\frac{1}{q}}\\&\quad\le\lambda^{1-\frac{q_0}{q}}(A^{\eta}G)^{\frac{q_0}{q}}+\lambda^{1-\frac{1}{q}}\left(A^{\eta-1}H\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中

$$G:=\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q_0},s_0}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right\|_X^{\frac{1}{q_0}}$$

且 H 与 (4.5) 中相同。选取一个 $A \in (0,\infty)$，使得

$$\lambda^{1-\frac{q_0}{q}} (A^\eta G)^{\frac{q_0}{q}} = \lambda^{1-\frac{1}{q}} \left(A^{\eta-1} H\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由此，结合 (4.21)、(4.19)、注 3.36(i) 以及取 $q := 1$ 的定理 3.35(i)，我们推得，对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right\|_X^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \lesssim \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda^{1-\frac{q_0}{q}} (A^\eta G)^{\frac{q_0}{q}} = G^{1-\eta} H^\eta \lesssim G^{1-\eta} \| |\nabla f| \|_X^\eta . \end{aligned} \tag{4.22}$$

接下来，在附加假设 X 具有绝对连续范数且中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 X 上一致有界的条件下，我们证明对任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，(4.20) 成立。事实上，根据取 $q := 1$ 的定理 3.35(i)，并采用与估计 (4.22) 时类似的论证，我们得到

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{D_{\lambda,\frac{\gamma}{q},s}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right\|_X^{\frac{1}{q}} \lesssim G^{1-\eta} H^\eta \lesssim G^{1-\eta} \| |\nabla f| \|_X^\eta ,$$

这就完成了对任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$ 证明 (4.20)，从而证明了定理 4.4。 □

注 4.5. (i) 当 $\gamma = n$ 与 [34, 推论 4.15] 重合时，定理 4.4 成立。在这种情况下，若 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $p \in [1,\infty)$，则将定理 4.4 中的 X 替换为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 后，结论仍成立。此外，当 $\gamma = n$、$X := L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时，定理 4.4 即为 [20, 推论 5.2]。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 4.4 是新的。

(ii) 设 X 与定理 3.29 中的相同。则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$，(4.20) 均成立；这可通过对定理 4.4 的证明稍作修改得到，其中将定理 3.35(i) 替换为定理 3.29(i)。

5 特定函数空间中的应用

在本节中，我们分别将定理 3.29、3.35、4.1 和 4.4 应用于七类具体的球型巴拿赫函数空间实例，即 Morrey 空间（见下文第 5.1 小节）、混合范数 Lebesgue 空间（见下文第 5.2 小节）、变 Lebesgue 空间（见下文第 5.3 小节）、加权Lebesgue空间（见下文第 5.4 小节）、Lorentz空间（见下文第 5.5 小节）、Orlicz 空间（见下文第 5.6 小节）以及 Orlicz-slice 空间（见下文第 5.7 小节）。

5.1 Morrey 空间

回顾一下，Morrey 空间 $M_r^\alpha(\mathbb{R}^n)$，其中 $0 < r \le \alpha < \infty$，定义为所有满足以下条件的 $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 的集合：

$$\|f\|_{M_r^\alpha(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B\in\mathbb{B}} |B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L^r(B)} < \infty,$$

其中 $\mathbb{B}$与 (1.12) 中的相同。1938年，Morrey [79] 引入了上述 Morrey 空间，以研究偏微分方程解的正则性。如今，这些空间在椭圆型偏微分方程、位势理论和调和分析中有重要应用（例如参见 [2, 26, 52, 53, 54, 55, 69, 91, 92, 95]）。如[93, p. 87], 所示，对于任意 $1 \le r \le \alpha < \infty$，$M^\alpha_r(\mathbb{R}^n)$ 是一个球型巴拿赫函数空间，但按照 Bennett and Sharpley [7]的术语，它并不是一个 Banach 函数空间。

利用定理 3.1、3.6、3.8、3.14 和 3.35、注 3.36(i) 以及推论 3.26，我们得到以下结论。

定理 5.1. 设 $1 \le r \le \alpha < \infty$。如果以下条件之一成立：

(a) $r \in (n, \infty)$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 且 $q \in (0, \infty)$;
(b) $r \in [1, n]$, $\gamma \in (0, \infty)$, 且 $n(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}) < 1$; (c) $r \in (1, n]$, $\gamma \in (-\infty, 0)$, 且 $q \in (0, r)$; (d) $r = n = q = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, -1)$,

那么，对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{M^\alpha_r(\mathbb{R}^n)} \sim \| |\nabla f| \|_{M^\alpha_r(\mathbb{R}^n)},$$

其中，正等价常数与 f 无关，而 $E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]$ 对于任意 $\lambda \in (0, \infty)$ 的情况与 (1.10) 中相同。此外，对于任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$,

(i) 若 $\gamma \in (0, \infty)$，则

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{M^\alpha_r(\mathbb{R}^n)} = \left[\frac{\kappa(q, n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{M^\alpha_r(\mathbb{R}^n)};$$

(ii) 若 $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ 且 $q \in (0, n^{-\gamma} n r)$，或者 $n = 1, \gamma \in (-\infty, -1)$ 且 $q \in (0, -\gamma r)$，则

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{M^\alpha_r(\mathbb{R}^n)} = \left[-\frac{\kappa(q, n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{M^\alpha_r(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。我们通过分别考察 r 和 γ 的以下五种情形来证明本定理.

情形 1) $r \in (n, \infty)$ 和 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。在这种情形下，我们发现存在一个 $s \in (n, r)$，结合 [91, 第 410 页定理 382], , 可进一步推出 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在任意 $\alpha \in [r, \infty)$ 下都在 $[M^\alpha_r(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{s}}$ 上有界。证明 (ii) 时，若 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$，则我们选择一个 $p \in [1, r)$，使得 $q \in (0, n^{-\gamma} n p)$；若 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $n = 1$，则选择一个 $p \in [1, r)$，使得 $q \in (0, -\gamma p)$。由此，结合定理 3.6 和推论 3.26，我们得出本情形下该定理成立。

情形 2) $r \in (1, n]$ 且 $\gamma \in (0, \infty)$。在这种情形下，令 $X := M^{\alpha}_{r}(\mathbb{R}^n)$。由于 $n(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}) < 1$，可知存在一个 $p \in [1, r)$，满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$。众所周知，对于任意 $1 < r \le \alpha < \infty$，伴随空间 $[M^{\alpha}_{r}(\mathbb{R}^n)]'$ 是一个块空间（例如参见 [94, 定理 4.1]），且 $\mathcal{M}$ 在其上有界（例如参见 [25, 定理 3.1] 和 [57, 引理 5.7]）。由此以及 [93, 第 87], 页，我们发现 X 和 X_{p} 都是球型巴拿赫函数空间，且 $\mathcal{M}$ 在 $(X_{p})'$ 上有界。由此，结合定理 3.8 和推论 3.26，我们推知本情形下该定理成立。

情形 3) $r = 1$ and $\gamma \in (0, \infty)$. 在此情形下，根据 [25, 定理 3.1], 的证明可知，当 $\alpha \in [1, \infty)$ 且 $\theta \in (0, 1)$ 时，对于任意 $f \in (X^{\frac{1}{\theta}})'$，其中 $X := M^{\alpha}_{1}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\mathcal{M} f\|_{(X^{\frac{1}{\theta}})'} \lesssim \theta^{-1} \|f\|_{(X^{\frac{1}{\theta}})'},$$

其中，隐含正常数仅取决于 n。由此可很容易得出 (3.57) 成立。因此，根据注 3.36(i)，可知本情形下的定理成立。

情形 4) $r \in (1, n]$ and $\gamma \in (-\infty, 0)$。在此情形下，由 [91, 第 410 页的定理 382], 可推得，对于任意 $\alpha \in [r, \infty)$，$\mathcal{M}$ 在 $M^{\alpha}_{r}(\mathbb{R}^n)$ 上有界。由于 $q \in (0, r)$，因此存在一个 $p \in [\max\{1, q\}, r)$。在证明 (ii) 时，若 $n = 1$，则选取满足 $q \in (0, -\gamma p)$ 的 $p \in [\max\{1, q\}, r)$。结合定理 3.1、推论 3.36(i) 以及与情形 2) 中所用方法类似的论证，可进一步推出本情形下的定理成立。

情形 5) $r = 1$ and $\gamma \in (-\infty, -1)$。在这种情形下，通过采用与情形 3) 和注 3.36(i) 中类似的论证，我们得出结论：本定理在此情形下成立。定理 5.1 的证明至此完成。□

利用定理 4.1 和定理 4.4 以及注 4.3(iv) 和 4.5(ii)，我们得到以下结论；由于其证明与定理 5.1 的证明类似，这里省略细节。

定理 5.2。设 $1 \le r \le \alpha < \infty$、$p \in [1, \infty]$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，且 $s \in (0, 1)$。设 $q \in [1, p]$ 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1-s}{p} + s$。若 $r = 1$ and $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 且 $n = 1$。

(i) 若 $p \in [1, \infty)$，则对任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，将 (4.1) 中的 X 替换为 $M^{\alpha}_{r}(\mathbb{R}^n)$ 后结论仍成立。(ii) 若 $p = \infty$，则对任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，将 (4.3) 中的 X 替换为 $M^{\alpha}_{r}(\mathbb{R}^n)$ 后结论仍成立。

定理 5.3. 设 $1 \le r \le \alpha < \infty, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \eta \in (0, 1)$，且 $0 \le s_0 < s < 1 < q < q_0 < \infty$ 满足 (4.19)。若 $r = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, 0)$，则进一步假设 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 和 $n = 1$。那么，对任意满足 $|\nabla f| \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$，将 (4.20) 中的 X 替换为 $M^{\alpha}_{r}(\mathbb{R}^n)$ 后结论成立。

注 5.4. (i) 由推论 3.26(i)，我们可推出定理 5.1(i) 对任意给定的 $q \in (0, \infty)$ 均成立。

(ii) 当 $\gamma = n$ 与 [34, 定理 5.1] 重合时，定理 5.1 成立。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, n\}$ 时，定理 5.1 是新的。(iii) 当 $\gamma = n$ 分别与 [34, 推论 5.3 和 5.4], 重合时，定理 5.2 和 5.3 成立。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, n\}$ 时，定理 5.2 和 5.3（Sobolev–Morrey 空间上的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式）是新的。

(iv) 设 $1 \le r < \alpha < \infty$。由于 Morrey 空间 $M^{\alpha}_{r}(\mathbb{R}^n)$ 不具有绝对连续范数，因此对于任意 $f \in \dot{W}^{1,\, M^{\alpha}_{r}(\mathbb{R}^n)}(\mathbb{R}^n)$，定理 5.1、5.2 和 5.3 是否成立仍不清楚。

5.2 混合范数Lebesgue空间

对于给定的向量 $\vec{r} := (r_1, \dots, r_n) \in (0, \infty]^n$，混合范数 Lebesgue 空间 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有具有有限拟范数的 $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 的集合

$$\|f\|_{L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)} := \left\{ \int_{\mathbb{R}} \cdots \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} \, dx_1 \right]^{\frac{r_2}{r_1}} \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{r_n}},$$

当对于某个 $i \in \{1, \dots, n\}$，$r_i = \infty$ 时，作通常的相应修改。在本小节中，我们始终令 $r_- := \min\{r_1, \dots, r_n\}$。关于混合范数 Lebesgue 空间的研究可以追溯到 H¨ormander [61] 以及 Benedek 和 Panzone [6]。关于混合范数Lebesgue空间的更多研究，关于与混合范数Lebesgue空间相关的Hardy空间，参见 [27, 64, 65, 66]；关于与混合范数Lebesgue空间相关的 Triebel–Lizorkin 空间和 Besov 空间，参见 [28, 46, 47]；关于（各向异性的）混合范数 Lebesgue 空间，参见 [27, 29]；关于混合Morrey空间，参见 [86, 87]。此外，当 $\vec{r} \in (0, \infty)^n$ 时，由 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 的定义，我们容易推出 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 是一个球准 Banach 函数空间。但是，$L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 可能不是准 Banach 函数空间（例如参见 [106, 注 7.20]）。当 $X := L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 时，我们简写 $\dot{W}^{1,\vec{r}}(\mathbb{R}^n) := \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$。

利用定理 3.29，我们得到以下结论。

定理 5.5. 设 $\vec{r} := (r_1, \dots, r_n) \in (1, \infty)^n$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，且 $q \in (0, \infty)$。若以下陈述之一成立：

(a) $r_- \in (n, \infty)$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，且 $q \in (0, \infty)$;
(b) $r_- \in (1, n]$, $\gamma \in (0, \infty)$，且 $n\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{q}\right) < 1$; (c) $r_- \in (1, n]$, $\gamma \in (-\infty, 0)$，且 $q \in (0, r_-)$,

那么，对任意 $f \in \dot{W}^{1,\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)} \sim \| |\nabla f| \|_{L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)},$$

其中，正等价常数与 f 和 $E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]$ 无关；对任意 $\lambda \in (0, \infty)$，其含义与 (1.10) 中相同。此外，对任意 $f \in \dot{W}^{1,\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$,

(i) 若 $\gamma \in (0, \infty)$，则

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)} = \left[\frac{\kappa(q, n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)};$$

(ii) 若 $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ 且 $q \in (0, n^{-\gamma} n r_-)$，或者 $n = 1, \gamma \in (-\infty, -1)$ 且 $q \in (0, -\gamma r_-)$，则

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda, \frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)} = \left[-\frac{\kappa(q, n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。为证明本定理，我们考虑 r_- 和 γ 的以下三种情形。

情形 1) $r_- \in (n, \infty)$ 和 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。在此情形下，我们发现存在一个 $s \in (n, r_-)$；结合 [64, 引理 3.5], , 可进一步推出 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $[L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{s}}$ 上有界。在证明 (ii) 时，若 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$，则我们选择一个 $p \in [1, r_-)$，使得 $q \in (0, n^{-\gamma} n p)$；若 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $n = 1$，则选择一个 $p \in [1, r_-)$，使得 $q \in (0, -\gamma p)$。由 [45, 引理 4.1], , 我们推得 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。由此并根据定理 3.29，我们得出本定理在此情形下成立。

情形 2) $r_- \in (1, n]$ 且 $\gamma \in (0, \infty)$时。在这种情况下，由于 $(r_1, \ldots, r_n) \in (1, \infty)^n$ 且 $n(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}) < 1$，可知存在一个 $p \in [1, r_-)$ 满足 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$。由此，$[L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}} = L^{\vec{r}_p}(\mathbb{R}^n)$，并且根据[6, 第 304 页，定理 1.b)]（另见 [64, 注 2.8(ii)]），我们发现 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $[L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}}$都是球型巴拿赫函数空间。另一方面，由 [6, 第 304 页，定理 1.a)] 以及 $1 < r_- p \le r_+ < \infty$，我们推得

$$\left(\left[L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n) \right]^{\frac{1}{p}} \right)' = L^{(\frac{\vec{r}}{p})'}(\mathbb{R}^n),$$

其中 $(\frac{\vec{r}}{p})' := ((\frac{r_1}{p})', \ldots, (\frac{r_n}{p})')$，结合 [64, 引理 3.5], 进一步可知，$\mathcal{M}$ 在 $([L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。此外，由 [45, 引理 4.1], 可知，$L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。因此，由定理 3.29 可得，本情形下该定理成立。

情形 3) $r_- \in (1, n]$ 且 $\gamma \in (-\infty, 0)$。在此情形下，由于 $q \in (0, r_-)$，可知存在一个 $p \in [\max\{1, q\}, r_-)$；并且在证明 (ii) 时，若 $n = 1$，我们选择一个满足 $q \in (0, -\gamma p)$ 的 $p \in [\max\{1, q\}, r_-)$。由此以及与情形 2) 中所用论证类似的论证，要证明本情形下的定理成立，只需说明 $\mathcal{M}$ 在 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 上有界。事实上，这可由[64, 引理 3.5]直接推出。因此，由定理 3.29 可知，本情形下该定理也成立。定理 5.5 的证明至此完成。□

结合定理 4.1 和定理 4.4 以及注 4.3(iv) 和 4.5(ii)，我们得到以下结论；由于其证明与定理 5.5 的证明类似，这里省略细节。

定理 5.6. 设 $\vec{r} := (r_1, \ldots, r_n) \in (1, \infty)^n$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p \in [1, \infty]$，且 $s \in (0, 1)$。令 $q \in [1, p]$ 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1-s}{p} + s$。

(i) 若 $p \in [1, \infty)$，则对任意 $f \in \dot{W}^{1, \vec{r}}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.1) 中的 X 替换为 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 后，结论成立 true.

(ii) 若 $p = \infty$，则对任意 $f \in \dot{W}^{1, \vec{r}}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.3) 中的 X 替换为 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 后，结论成立.

定理 5.7. 设 $\vec{r} := (r_1, \ldots, r_n) \in (1, \infty)^n$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\eta \in (0, 1)$, 且

$$0 \le s_0 < s < 1 < q < q_0 < \infty$$

满足 (4.19)。那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1, \vec{r}}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.20) 中的 X 替换为 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 后，该式仍成立.

注 5.8. (i) 当 $\gamma = n$ 与 [34, 定理 5.6] 重合时，定理 5.5 成立。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 5.5 是新的。

(ii) 当 $\gamma = n$ 与 [34，相同时，定理 5.6 和 5.7 分别与推论 5.7 和 5.8]，重合。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 5.6 和 5.7（混合范数 Sobolev 空间上的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式）是新的。

(iii) 设 $\vec{r} := (r_1, \ldots, r_n) \in [1,\infty)^n$，其中 $r_- = 1$。在此情形下，由于 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $[L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)]'$ 上可能不有界，并且将 X 替换为 $L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)$ 后，(3.57) 也可能不成立，因此定理 5.5 以及推论 5.6 和 5.7 在 $r_- = 1$ 时是否成立仍不清楚。

5.3 变 Lebesgue 空间

设 $r : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 是非负可测函数。设

$$\widetilde{r}_- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n} r(x) \text{ and } \widetilde{r}_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} r(x).$$

若存在一个 $r_\infty \in \mathbb{R}$ 和正数常数 C，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，函数 $r : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 满足以下条件，则称其具有全局对数 Hölder 连续性：

$$|r(x) - r(y)| \le \frac{C}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})} \text{ and } |r(x) - r_\infty| \le \frac{C}{\log(e + |x|)}.$$

与函数 $r : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 相关联的变指数 Lebesgue 空间 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，定义为所有满足有限拟范数的 $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 所构成的集合

$$\|f\|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \inf\left\{\lambda \in (0,\infty) : \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{r(x)} dx \le 1\right\}.$$

根据 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的定义，容易证明 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 是一个球准 Banach 函数空间（例如，参见 [93, 第 7.8] 节）。特别地，当 $1 \le r_- \le r_+ < \infty$ 时，按 Bennett and Sharpley [7] 的术语，$(L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)})$ 是一个 Banach 函数空间，因此也是一个球型巴拿赫函数空间。关于变 Lebesgue 空间的更多相关结果，请参见 [30, 31, 37, 73, 80, 82, 83]。当 $X := L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 时，我们简记 $\dot{W}^{1,\,r(\cdot)}(\mathbb{R}^n) := \dot{W}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n)$。

下面关于变指数 Lebesgue 空间上中心球平均算子的有界性，正是 [34,引理 5.10]。

引理 5.9. 设 $r : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 是全局对数-Hölder 连续的，且 $1 \le r_- \le r_+ < \infty$。那么中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_t\}_{t\in(0,\infty)}$ 在 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界；此外，存在一个正数常数 C，使得对于任意 $t \in (0,\infty)$ 和 $f \in L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\mathcal{B}_t(f)\|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

利用引理 5.9 以及定理 3.29 和 3.35，我们得到以下结论 .

定理 5.10. 设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $r : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 是全局对数-Hölder 连续的。设$1 \le r_- \le r_+ < \infty$ 和 $q \in (0,\infty)$。若下列陈述之一成立：

(a) $\widetilde{r}_- \in (n,\infty)$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *and* $q \in (0,\infty)$;

(b) $\widetilde{r}_- \in [1,n]$, $\gamma \in (0,\infty)$, *and* $n(\frac{1}{\widetilde{r}_-} - \frac{1}{q}) < 1$;

(c) $\widetilde{r}_- \in (1,n]$, $\gamma \in (-\infty,0)$, *and* $q \in (0,\widetilde{r}_-)$;

(d) $\widetilde{r}_- = n = q = 1$ *and* $\gamma \in (-\infty,-1)$,

那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sim \| |\nabla f| \|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

其中，正等价常数与 f 和 $E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 无关；对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，其含义与 (1.10) 中相同。此外，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$,

(i) 若 $\gamma \in (0,\infty)$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)};$$

(ii) 若 $\gamma \in (-\infty,0)$，进一步假设 $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$ 和 $q \in (0, n^{-\gamma} r_-)$，或者 $n = 1, \gamma \in (-\infty,-1)$ 且 $q \in (0,-\gamma r_-)$，则

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。我们通过考察 γ 和 r_- 上的以下五种情形来证明本定理。

情形 1) $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 且 $r_- \in (n,\infty)$。在此情形下，我们发现存在一个 $s \in (n, r_-)$；结合 [1, 定理 1.7]，还可推出 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $[L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{s}}$ 上有界。证明 (ii) 时，若 $\gamma \in (-\infty,0)$ 且 $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$，则选取一个 $p \in [1, r_-)$，使得 $q \in (0, n^{-\gamma} p)$；若 $\gamma \in (-\infty,0)$ 且 $n = 1$，则选取一个 $p \in [1, r_-)$，使得 $q \in (0,-\gamma p)$。由 [30, p. 73], 可推知，$L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。根据上述结果及定理 3.29，我们得出该情形下本定理成立。

情形 2) $\gamma \in (0,\infty)$ 且 $r_- \in (1,n]$。在这种情况下，由于 $n(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}) < 1$，可知存在 $p \in [1, r_-)$，使得 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$。由此，$[L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}} = L^{r(\cdot)p}(\mathbb{R}^n)$，并且根据 [30, 定理 2.17 和 2.71]，我们得出 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^{r(\cdot)p}(\mathbb{R}^n)$ 都是球型巴拿赫函数空间。由 [30, 定理 2.80] 和 $1 < r_- p \le r_+ < \infty$，我们推得

$$\left(\left[L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right]^{\frac{1}{p}} \right)' = L^{(\frac{r(\cdot)}{p})'}(\mathbb{R}^n),$$

其中，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$(\frac{r(x)}{p})'$ 是 $r(x)$ 的共轭指标；结合 [1, 定理 1.7]，还可进一步推出 $\mathcal{M}$ 在 $([L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。此外，由于 [30, p. 73]，我们得出 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$具有绝对连续范数。因此，定理 3.29 表明，本情形下该定理成立。

情形 3) $\gamma \in (0,\infty)$ 和 $er_- = 1$。在此情形下，由 [36, 4.3 定理.8], 可推得，对于任意给定的 $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ 以及任意 $f \in [L^{\frac{r(\cdot)}{\theta}}(\mathbb{R}^n)]'$,

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{[L^{\frac{r(\cdot)}{\theta}}(\mathbb{R}^n)]'} \lesssim \frac{1}{\theta}\|f\|_{[L^{\frac{r(\cdot)}{\theta}}(\mathbb{R}^n)]'},$$

其中隐含正常数仅依赖于 n 和 r，这进一步说明当 $X := L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 时，(3.57) 成立。此外，由引理 5.9 可知，中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界。由此，结合引理 5.9、定理 3.35 以及与情形 2) 中所用论证类似的论证，可得本定理在此情形下成立。

情形 4) $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $er_- \in (1, n]$。在此情形下，由于 $q \in (0, er_-)$，可知存在 $p \in [\max\{1, q\}, er_-)$；并且在证明 (ii) 时，若 $n = 1$ 且 $er_- \in (1,\infty)$，则选择满足 $q \in (0, -\gamma p)$ 的 $p \in [\max\{1, q\}, er_-)$。由此，结合与情形 2) 中所用论证类似的论证，要证明本定理在此情形下成立，只需证明 $\mathcal{M}$ 在 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界。事实上，这可直接由 [1, Theorem 1.7] 得出。因此，定理 3.29 表明本定理在此情形下成立。

情形 5) $\gamma \in (-\infty, -1)$ 且 $er_- = 1$。在此情形下，利用与情形 3) 中所采用的论证类似的论证、引理 5.9 以及定理 3.35，我们推得本定理在此情形下仍然成立。定理 5.10 的证明至此完成。

□

利用引理5.9、定理 4.1 和定理 4.4，以及注 4.3(iv) 和 4.5(ii)，我们得到以下结论；由于它们的证明与定理 5.10 的证明类似，故此处略去细节。

定理 5.11。设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $r : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 是全局对数-Hölder 连续的。设 $1 \le er_- \le er_+ < \infty$, $p \in [1,\infty]$, 且 $s \in (0, 1)$。设 $q \in [1, p]$ 满足 $\frac{1}{q} = 1 - s\frac{1}{p} + s$。此外，若 $er_- = 1$且 $\gamma \in (-\infty, 0)$，则进一步假设 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 和 $n = 1$。

(i) 若 $p \in [1,\infty)$，则对任意 $f \in \dot{W}^{1,r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，将 X 替换为 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 后，(4.1) 成立 *e.*

(ii) 若 $p = \infty$，则对任意 $f \in \dot{W}^{1,r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，将 X 替换为 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 后，(4.3) 成立。

定理 5.12. 设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $r : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 全局对数-Hölder 连续。设 $1 \le er_- \le er_+ < \infty, \eta \in (0,1)$，并且

$$0 \le s_0 < s < 1 < q < q_0 < \infty$$

满足 (4.19)。此外，若 $er_- = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 和 $n = 1$ 均成立。则对任意 $f \in \dot{W}^{1,r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，将 X 替换为 $L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 后，(4.20) 成立。

注 5.13. (i) 当 $\gamma = n$ 与 [34, 定理 5.11]一致时，定理 5.10。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, n\}$ 时，定理 5.10 是新的。

(ii) 当 $\gamma = n$ 分别与 [34, 推论 5.12 和 5.13], 一致时，定理 5.11 和 5.12。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 5.11 和 5.12（变指数 Sobolev 空间上的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式）是新的。

5.4 加权 Lebesgue 空间

回顾一下，对于任意给定的 $r \in (0,\infty)$ 以及定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的权 ω，$L^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 表示关于 $\mathbb{R}^n$ 上测度 $\omega(x)\,dx$ 的加权 Lebesgue 空间；见定义 2.9(i)。正如 [93, 第 86], 页所指出的，加权 Lebesgue 空间 $L^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 是一个球准 Banach 函数空间，但不一定是 Banach 函数空间。当 $X := L^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 时，我们简记 $\dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n) := \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$。

利用定理 3.29，我们得到以下结论。

定理 5.14. 设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $1 \le p \le r < \infty$, $\omega \in A_{rp}(\mathbb{R}^n)$，且 $q \in (0,\infty)$。若以下陈述之一成立：

(a) $r \in (n,\infty)$, $p \in [n,r)$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, and $q \in (0,\infty)$; (b) $r \in [1,\infty)$, $p \in [1,r]$, $\gamma \in (0,\infty)$, and $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$; (c) $r \in (1,\infty)$, $p \in [1,r]$, $\gamma \in (-\infty,0)$, and $q \in (0,p]$; (d) $r = n = p = q = 1$ and $\gamma \in (-\infty,-1)$,

那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot - y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)} \sim \| |\nabla f| \|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)},$$

其中，正等价常数与 f 无关，并且当任意 $\lambda \in (0,\infty)$ 时，$E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]$ 与 (1.10) 中相同。此外，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,X}(\mathbb{R}^n)$,

(i) 若 $\gamma \in (0,\infty)$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot - y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)} = \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)};$$

(ii) 若 $\gamma \in (-\infty,0)$，进一步假设 $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$ 和 $q \in (0, n^{-\gamma} n\,p)$，或者 $n = 1, \gamma \in (-\infty,-1)$ 且 $q \in (0,-\gamma p)$，则

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot - y|^{\gamma-n}\,dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)} = \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^r_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

[1] 证明。由定义 2.9(i) 和 [93, p. 86], 可直接推出，$[L^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\bar{p}} = L^{rp}_\omega(\mathbb{R}^n)$, 并且 $L^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 和 $[L^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\bar{p}}$ 都是球型巴拿赫函数空间。

[1]接下来，我们声称 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $([\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\overline{p}})'$上有界。一方面，当 $p \in [1, r)$ 时，由 [36, 定理 2.7.4] 以及 $\frac{r}{p} \in (1, \infty)$，我们得出

$$\left([L^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}}\right)' = L^{(\frac{r}{p})'}_{\omega^{1-(\frac{r}{p})'}}(\mathbb{R}^n). \tag{5.1}$$

由 $\omega \in A_{rp}(\mathbb{R}^n)$、$rp > 1$ 以及引理 2.10(v)，可推得 $\omega^{1-(rp)'} \in A_{(rp)'}(\mathbb{R}^n)$。由此，结合 (5.1)、[1] 以及引理 2.10(vi)，我们进一步得出 $\mathcal{M}$ 在 $([\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\overline{p}})'$ 上有界。另一方面，当 $p = r$ 时，由 [67, p. 9], 可推得

$$\left([L^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}}\right)' = \left[L^1_\omega(\mathbb{R}^n)\right]' = L^\infty_{\omega^{-1}}(\mathbb{R}^n),$$

这与 [3, 定理 3.1(b)] 及 [67, p. 9], 一起进一步说明，$\mathcal{M}$ 在 $([\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\overline{p}})'$ 上有界。这就完成了上述论断的证明。

现在，我们针对 r、p、γ 和 q 考虑以下四种情形。

情形 1) $r \in (n, \infty)$，$p \in [n, r)$，$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，且 $q \in (0, \infty)$。在此情形下，由于 $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$，$p \in [n, r)$，且 [48, 推论 7.2.6],，可知存在 $ep \in (p, r)$，使得 $\omega \in A_{\frac{r}{ep}}(\mathbb{R}^n)$。取 $s \in (n, ep)$，于是由引理 2.10(iv)可得 $\omega \in A^r_s(\mathbb{R}^n)$。接着，引理 2.10(vi)表明 $\mathcal{M}$ 在 $[\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{s}}$ 上有界。此外，由 [89, 定理 1.34], 可推得 $\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。因此，由定理 3.29可知，本情形下该定理成立。

情形 2) $r \in [1, \infty)$、$p \in [1, r]$, $\gamma \in (0, \infty)$，且 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$。在这种情形下，根据上述结论，[1]我们发现 $\mathcal{M}$ 在 $([\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)]^{\overline{p}})'$ 上有界。此外，由 [89, 定理 1.34], 可推得 $\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。因此，定理 3.29 表明，本情形下的定理成立。

情形 3) $r \in (1, \infty)$、$p \in [1, r]$, $\gamma \in (-\infty, 0)$，且 $q \in (0, p]$。在这种情形下，通过类似于情形 1) 中所用的论证，我们发现 $\mathcal{M}$ 在 $\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 上有界；结合类似于情形 2) 中所用的论证以及定理 3.29，进一步可得本情形下的定理成立。

情形 4) $r = n = p = q = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, -1)$。在这种情形下，根据与情形 2) 中所用论证类似的方法以及定理 3.29，我们得出本定理在此情形下成立。定理 5.14 的证明至此完成。□

利用定理 4.1 和定理 4.4 以及注 4.3(iv) 和 4.5(ii)，我们得到以下结论；由于其证明与定理 5.14 的证明类似，这里省略细节。

定理 5.15。设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$r \in [1, \infty)$，$\omega \in A_r(\mathbb{R}^n)$，$p \in [1, \infty]$，且 $s \in (0, 1)$。设 $q \in [1, p]$满足 $\frac{1}{q} = 1 - s\,p + s$。此外，若 $r = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 和 $n = 1$均成立。

(i) 若 $p \in [1, \infty)$，则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,}{}_{\omega}{}^{r}(\mathbb{R}^n)$，将 X 替换为 $\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 后，(4.1) 仍然成立。

(ii) 若 $p = \infty$，则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,}{}_{\omega}{}^{r}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.3) 中的 X 替换为 $\mathrm{L}^r_\omega(\mathbb{R}^n)$ 后仍然成立 tru e.

定理 5.16。设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$r \in [1,\infty)$，$\omega \in A_r(\mathbb{R}^n)$，$\eta \in (0,1)$，并且

$$0 \le s_0 < s < 1 < q < q_0 < \infty$$

满足 (4.19)。此外，如果 $r = 1$ and $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 和 $n = 1$。那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,r}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.20) 中的 X 替换为 $L^r_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ 后，结论仍成立。

注 5.17. (i) 当 $\gamma = n$ 与 [34, 定理 5.15] 重合时，定理 5.14 成立。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, n\}$ 时，定理 5.14 是新的。

(ii) 当 $\gamma = n$ 与 [34, 推论 5.16 和 5.17], 分别重合时，定理 5.15 和 5.16 成立。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 5.15 和 5.16（关于加权 Sobolev 空间的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式）是新的。

5.5 洛伦兹空间

回顾一下，Lorentz 空间 $L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有满足下述条件的 $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 的集合，其中 $r\ \tau \in (0,\infty)$ 任意给定：

$$\|f\|_{L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)} := \left\{ \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{r}} f^*(t) \right]^\tau \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{\tau}} < \infty,$$

其中，f^* 表示 f 的递减重排，定义为：对于任意 $t \in [0,\infty)$，

$$f^*(t) := \inf \left\{ s \in (0,\infty) : \left| \{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s \} \right| \le t \right\}.$$

我们约定 $\inf \emptyset = \infty$，因此当 $|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}| > t$ 对所有 $s \in [0,\infty)$ 时，$f^*(t) = \infty$。当 $r\ \tau \in (0,\infty)$ 时，$L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 是一个准 Banach 函数空间，因此也是一个球型准 Banach 函数空间（例如参见 [48, 定理 1.4.11]）；当 $r\ \tau \in (1,\infty)$ 时，Lorentz 空间 $L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 函数空间，因此也是一个球型 Banach 函数空间（例如参见[93, 第 87] 页和第 74] 页）。当 $X := L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 时，我们简单地记 $\dot{W}^{1,L^{r,\tau}}(\mathbb{R}^n) := \dot{W}^{1,x}(\mathbb{R}^n)$。

利用定理 3.29，我们得到以下结论。

定理 5.18. 设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$、$r$、$\tau \in (1,\infty)$ 和 $q \in (0,\infty)$。若以下陈述之一成立：

(a) $\min\{r, \tau\} \in (n, \infty)$、$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $q \in (0,\infty)$；
(b) $\min\{r, \tau\} \in (1, n]$, $\gamma \in (0,\infty)$，且 $n(\frac{1}{\min\{r,\tau\}} - \frac{1}{q}) < 1$；(c) $\min\{r, \tau\} \in (1, n]$, $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $q \in (0, \min\{r, \tau\})$,

那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,L^{r,\tau}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot, y) |\cdot - y|^{\gamma - n} \, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)} \sim \| |\nabla f| \|_{L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

其中，正等价常数与 f 和 E 无关，$\lambda, \frac{\gamma}{q}[f]$ 对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$ 与 (1.10) 中相同。此外，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,L^{r,\tau}}(\mathbb{R}^n)$,

(i) 若 $\gamma\in(0,\infty)$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)}=\left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}}\||\nabla f|\|_{L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)};$$

(ii) 若 $\gamma\in(-\infty,0)$，则进一步假设 $n\in\mathbb{N}\cap[2,\infty)$ 且 $q\in(0,n^{-\gamma}n\min\{r,\tau\})$，或者 $n=1,\gamma\in(-\infty,-1)$ 且 $q\in(0,-\gamma\min\{r,\tau\})$，则

$$\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\left\|\left[\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot-y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)}=\left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma}\right]^{\frac{1}{q}}\||\nabla f|\|_{L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。我们根据 $\min\{r,\tau\}$ 和 γ 考虑以下三种情形。

情形 1) $\min\{r,\tau\}\in(n,\infty)$ 且 $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。在这种情形下，我们发现存在 $s\in(n,\min\{r,\tau\})$，结合引理 3.5], 可进一步推出 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $[L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{s}}$ 上有界。由 [99, 注 3.4(iii)], 可知，$L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。此外，在证明 (ii) 时，若 $\gamma\in(-\infty,0)$ 且 $n\in\mathbb{N}\cap[2,\infty)$，则我们选取 $p\in[1,\min\{r,\tau\})$，使得 $q\in(0,n^{-\gamma}np)$；若 $\gamma\in(-\infty,0)$ 且 $n=1$，则我们选取 $p\in[1,\min\{r,\tau\})$，使得 $q\in(0,-\gamma p)$。因此，定理 3.29 表明本情形下的定理成立。

情形 2) $\min\{r,\tau\}\in(1,n]$ 且 $\gamma\in(0,\infty)$。在这种情况下，由于 $r,\tau\in(1,\infty)$ 且 $n(\frac{1}{\min\{r,\tau\}}-\frac{1}{q})<1$，可知存在一个 $p\in[1,\min\{r,\tau\})$，使得 $n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})<1$。注意，$1<r<[L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}}=L^{\frac{r}{p},\frac{\tau}{p}}(\mathbb{R}^n)$。由此以及 [93, p. 87], 中的结论可知，$L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 和 $[L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}}$ 都是球型巴拿赫函数空间。根据 [48, 定理 1.4.16(vi)], , 我们推得 $([L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}})'=L^{(\frac{r}{p})',(\frac{\tau}{p})'}(\mathbb{R}^n)$; 结合 [107, 引理 3.5], , 进一步可知 $\mathcal{M}$ 在 $([L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。由 [99, 注 3.4(iii)], 可知，$L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。因此，定理 3.29 表明，本情形下当前定理成立。

情形 3) $\min\{r,\tau\}\in(1,n]$ and $\gamma\in(-\infty,0)$. 在这种情形下，根据 [107, 引理 3.5], , 我们得到 $\mathcal{M}$ 在 $L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 上有界。由于 $r,\tau\in(1,\infty)$ 且 $q\in(0,\min\{r,\tau\})$，因此存在 $p\in[1,\min\{r,\tau\})$，使得 $q\le p$；在证明 (ii) 时，若 $n=1$，我们选取满足 $q\in(0,-\gamma p)$ 的 $p\in[\max\{1,q\},\min\{r,\tau\})$。结合与情形 2) 中所用论证类似的论证，还可进一步推出，以 $X:=L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 为例，定理 3.29 的所有假设均得到满足。因此，由定理 3.29 可知，本定理在此情形下仍然成立。至此，定理 5.18 的证明完成。□

结合定理 4.1 和定理 4.4 以及注 4.3(iv) 和 4.5(ii)，我们得到以下结论；由于其证明与定理 5.18 的证明类似，此处省略细节。

定理 5.19. 设 $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$r$，$\tau\in(1,\infty)$，$p\in[1,\infty]$，且 $s\in(0,1)$。设 $q\in[1,p]$ 满足 $r\,q=\tau-s\,p+s$。

(i) 若 $p\in[1,\infty)$，则对任意 $f\in\dot{W}^{1,L^{r,\tau}}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.1) 中的 X 替换为 $L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 后，结论仍成立。

(ii) 若 $p=\infty$，则对于任意 $f\in\dot{W}^{1,L^{r,\tau}}(\mathbb{R}^n)$，以 $L^{r,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 替换 X 后，(4.3) 仍然成立 .

定理 5.20. 设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$、r、$\tau \in (1,\infty)$、$\eta \in (0,1)$，并且

$$0 \le s_0 < s < 1 < q < q_0 < \infty$$

满足 (4.19)。于是，对于任意 f $\in \dot{W}^{1,\,L^r,\,\tau}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.20) 中的 X 替换为 $L^{r,\,\tau}(\mathbb{R}^n)$ 后，结论仍然成立。

注 5.21. (i) 当 γ = n 时，定理 5.18 可由 [34, 定理 4.5(ii)] 推出，其中 X := $L^{r,\,\tau}(\mathbb{R}^n)$，对任意 r，$\tau \in (1,\infty)$ 均成立。据我们所知，当$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 5.18 是新的。

(ii) 当 γ = n 时，定理 5.19 和 5.20 可分别由 [34, 推论 4.13 和 4.15] 得到，其中 X := $L^{r,\,\tau}(\mathbb{R}^n)$，对任意 r，$\tau \in (1,\infty)$ 均成立。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 5.19 和 5.20（Sobolev–Lorentz 空间上的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式）是新的。

5.6 Orlicz 空间

我们首先给出 Orlicz 空间的几个基本概念。若一个非递减函数 $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 满足 Φ，则称其为 Orlicz 函数，即

(i) $\Phi(0) = 0$;

(ii) 对任意 t $\in (0,\infty)$, $\Phi(t) \in (0,\infty)$; (iii) $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$。

若某个 Orlicz 函数 Φ 对某个 r $\in \mathbb{R}$ 属于下型（分别为上型）r，则称其为下型（分别为上型）r；如果存在正数常数 $C_{(r)}$，使得对任意 t $\in [0,\infty)$ 以及 s $\in (0,1)$ [（分别为 s $\in [1,\infty)$],

$$\Phi(st) \le C_{(r)} s^r \Phi(t).$$

在本小节的其余部分，我们始终假设 $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个同时具有正下型 r_Φ^- 和正上型 r_Φ^+的 Orlicz 函数。Orlicz 空间 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有具有有限拟范数的 f $\in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 的集合

$$\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} := \inf\left\{\lambda \in (0,\infty): \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \le 1\right\}.$$

容易证明，$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 是一个准 Banach 函数空间（见 [93, 第 7.6] 节）。关于 Orlicz 空间的更多相关结果，请参阅 [35, 81, 88]。当 X := $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 时，我们简记 $\dot{W}^{1,\,\Phi}(\mathbb{R}^n) := \dot{W}^{1,\,x}(\mathbb{R}^n)$。下面关于中心球平均算子在 Orlicz 空间上的有界性结论就是 [34, 引理 5.19]。

引理 5.22. 设 Φ 是一个 Orlicz 函数，同时具有正下型 $r_\Phi^- \in [1,\infty)$ 和正上型 r_Φ^+。则中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界；此外，存在正数常数 C，使得对于任意 r $\in (0,\infty)$ 和 f $\in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\mathcal{B}_r(f)\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}.$$

利用引理 5.22 以及定理 3.29 和 3.35，我们得到以下结论。

定理 5.23. 设 Φ 是一个具有正下型 r_Φ^- 和正上型 r_Φ^+ 的 Orlicz 函数。设 $1 \le \mathrm{r}_\Phi^- \le \mathrm{r}_\Phi^+ < \infty$ 且 $\mathrm{q} \in (0,\infty)$。若以下命题之一成立：

(a) $\mathrm{r}_\Phi^- \in (\mathrm{n}, \infty)$, $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, 且 $\mathrm{q} \in (0,\infty)$;
(b) $\mathrm{r}_\Phi^- \in [1, \mathrm{n}]$, $\gamma \in (0,\infty)$, 且 $\mathrm{n}(\frac{1}{\mathrm{r}_\Phi^-} - \frac{1}{\mathrm{q}}) < 1$; (c) $\mathrm{r}_\Phi^- \in (1, \mathrm{n}]$, $\gamma \in (-\infty, 0)$, 且 $\mathrm{q} \in (0, \mathrm{r}_\Phi^-)$; (d) $\mathrm{r}_\Phi^- = \mathrm{n} = \mathrm{q} = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, -1)$,

于是，对于任意 $\mathrm{f} \in \dot{\mathrm{W}}^{1,\Phi}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \sim \| |\nabla f| \|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)},$$

其中，正等价常数与 f 和 E 无关，$\chi_q[\mathrm{f}]$ 对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$ 与 (1.10) 中的相同。此外，对于任意 $\mathrm{f} \in \dot{\mathrm{W}}^{1,\Phi}(\mathbb{R}^n)$,

(i) 若 $\gamma \in (0,\infty)$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)};$$

(ii) 若 $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 both $\mathrm{n} \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$ 和 $\mathrm{q} \in (0, \mathrm{n}^{-\gamma}\mathrm{n}\mathrm{r}_\Phi^-)$，或者 $\mathrm{n} = 1$, $\gamma \in (-\infty, -1)$，且 $\mathrm{q} \in (0, -\gamma \mathrm{r}_\Phi^-)$，则

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。为证明本定理，我们针对 γ 和 r_Φ^- 分别考虑以下五种情形。

情形 1) $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $\mathrm{r}_\Phi^- \in (\mathrm{n}, \infty)$。在这种情形下，我们发现存在一个 $\mathrm{s} \in (\mathrm{n}, \mathrm{r}_\Phi^-)$，结合 [71,定理 1.2。1], 进一步推出 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $[\mathrm{L}^\Phi(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{s}}$ 上有界。由 [105, 引理 4.5], 的证明可推得，$\mathrm{L}^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。此外，在证明 (ii) 时，若 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$，则取一个 $\mathrm{p} \in [1, \mathrm{r}_\Phi^-)$，使得 $\mathrm{q} \in (0, {}^{n^{-\gamma}}{}_n\mathrm{p})$；若 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $\mathrm{n} = 1$，则取一个 $\mathrm{p} \in [1, \mathrm{r}_\Phi^-)$，使得 $\mathrm{q} \in (0, -\gamma \mathrm{p})$。因此，由定理 3.29 可知，本定理在此情形下成立。

情形 2） $\gamma \in (0,\infty)$ 且 $\mathrm{r}_\Phi^- \in (1, \mathrm{n}]$。在这种情形下，由于 $\mathrm{n}(\frac{1}{\mathrm{r}_\Phi^-} - \frac{1}{rq}) < 1$，可知存在 $\mathrm{p} \in [1, \mathrm{r}_\Phi^-)$，使得 $\mathrm{n}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$。令 $\Phi_p(\mathrm{t}) := \Phi(\mathrm{t}^{\frac{1}{p}})$，其中任意 $\mathrm{t} \in [0,\infty)$。注意到 $[\mathrm{L}^\Phi(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}} = \mathrm{L}^{\Phi_p}(\mathbb{R}^n)$。由此以及 Orlicz 空间的定义，容易看出 $\mathrm{L}^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 和 $[\mathrm{L}^\Phi(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}}$ 都是球型巴拿赫函数空间。此外，根据 [71, 定理 1.2.1] 以及

$L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶定理（例如，参见 [88, 定理 13]），我们进一步得出，$\mathcal{M}$ 在 $([L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{p}})'$ 上有界。此外，由 [105, 引理 4.5], 的证明可知，$L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。因此，定理 3.29 表明，本情形下的定理成立。

情形 3) $\gamma \in (0,\infty)$ 且 $r_{\Phi}^{-} = 1$。在此情形下，根据 [71, 定理 1.2.1], 的证明可知，当 $1 = r_{\Phi}^{-} \le r_{\Phi}^{+} < \infty$ 且 $\theta \in (0,1)$ 时，对任意 $f \in ([L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{\theta}})'$,

$$\|\mathcal{M}f\|_{([L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{\theta}})'} \lesssim \left[3C_{(r_{\Phi}^{+})}\right]^{\frac{3r_{\Phi}^{+}}{\theta}} \|f\|_{([L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{\theta}})'},$$

其中，隐含正常数仅依赖于 n。因此，取 $X := L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 时，(3.57) 成立。由此，采用与情形 2)、引理 5.22 和定理 3.35 中类似的论证，可推出本情形下的定理成立。

情形 4) $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $r_{\Phi}^{-} \in (1, n]$。在此情形下，由 [71, 定理 1.2.1], 可知，$\mathcal{M}$ 在 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 上有界。由于 $q \in (0, r_{\Phi}^{-})$，因此存在 $p \in [\max\{1, q\}, r_{\Phi}^{-})$；并且在证明 (ii) 时，若 $n = 1$，我们总是选取满足 $q \in (0, -\gamma p)$ 的 $p \in [\max\{1, q\}, r_{\Phi}^{-})$。据此，采用与情形 2) 和定理 3.29 中类似的论证，可知本情形下的定理成立。

情形 5) $\gamma \in (-\infty, -1)$ 和 $r_{\Phi}^{-} = 1$。在这种情形下，利用与情形 3) 中类似的论证、引理 5.22 和定理 3.35，我们可推出本定理在此情形下也成立。由此完成定理 5.23 的证明。□

利用引理 5.22、定理 4.1 和定理 4.4，以及注 4.3(iv) 和 4.5(ii)，我们得到以下结论；由于其证明与定理 5.23 的证明类似，此处省略细节。

定理 5.24. 设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 Φ 为同时具有正下型 r_{Φ}^{-} 和正上型 r_{Φ}^{+}的 Orlicz 函数。设 $1 \le r_{\Phi}^{-} \le r_{\Phi}^{+} < \infty$，$p \in [1,\infty]$，且 $s \in (0,1)$。设 $q \in [1,p]$ 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1-s}{p} + s$。若 $r_{\Phi}^{-} = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, 0)$，则进一步假设 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 和 $n = 1$均成立。

(i) 若 $p \in [1,\infty)$，那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,\Phi}(\mathbb{R}^n)$，将 X 替换为 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 后，(4.1) 仍成立。

(ii) 若 $p = \infty$)，那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,\Phi}(\mathbb{R}^n)$，将 X 替换为 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 后，(4.3) 仍成立 *e.*

定理5.25. 设 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 Φ 为 Orlicz 函数，且都具有正下型 r_{Φ}^{-} 和正上型 r_{Φ}^{+}。设 $1 \le r_{\Phi}^{-} \le r_{\Phi}^{+} < \infty, \eta \in (0,1)$，并且

$$0 \le s_0 < s < 1 < q < q_0 < \infty$$

满足 (4.19)。若 $r_{\Phi}^{-} = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty, 0)$，进一步假设 $\gamma \in (-\infty, -1)$ 和 $n = 1$。那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,\Phi}(\mathbb{R}^n)$，将 X 替换为 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 后，(4.20) 仍成立。

注记 5.26。（i）当 $\gamma = n$ 与 [34, 定理 5.20] 重合时，定理 5.23。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, n\}$ 时，定理 5.23 是新的。

(ii) 当 $\gamma = n$与 [34, 重合时，定理5.24和定理5.25分别与推论5.21和5.22], 一致。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理5.24和定理5.25（Sobolev–Orlicz空间上的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式）是新的。

5.7 Orlicz 切片空间

我们回顾 Orlicz-slice 空间的定义，并简要介绍一些相关事实。在本小节中，我们始终假设 $\Phi:\ [0,\infty)\ \to [0,\infty)$ 是一个具有正下型 r_Φ^- 和正上型 r_Φ^+的 Orlicz 函数。对于任意给定的 t, $\mathrm{r}\ \in (0,\infty)$，Orlicz 切片空间 $(\mathrm{E}_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有拟范数有限的 $\mathrm{f}\ \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 所构成的集合：

$$\|f\|_{(E_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)} := \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\|f\mathbf{1}_{B(x,t)}\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}}{\|\mathbf{1}_{B(x,t)}\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}}\right]^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}.$$

Orlicz 切片空间在 [105] 中被引入，作为 Auscher 和 Mourgoglou 的切片空间 [4, 5] 以及 [58, 60, 70]中的 Wiener 混合空间的推广。根据 [105, 引理 2.28] 和 [106, 注 7.41(i)], , Orlicz 切片空间 $(\mathrm{E}_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)$ 是球型巴拿赫函数空间，但一般而言并非 Banach 函数空间。当 $\mathrm{X} := (\mathrm{E}_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)$ 时，我们简记为 $\dot{\mathrm{W}}^{1,\,(E_\Phi^r)_t}(\mathbb{R}^n) := \dot{\mathrm{W}}^{1,\,X}(\mathbb{R}^n)$。

下面关于中心球平均算子在 Orlicz 切片空间上的有界性，正是 [34,引理 5.24]。

引理 5.27. 设 $\mathrm{t}\ \in (0,\infty)$、$\mathrm{r}\ \in [1,\infty)$，且 Φ 是一个 Orlicz 函数，其下型为正且为 $\mathrm{r}_{\bar{\Phi}}^- \in [1,\infty)$，上型也为正且为 r_Φ^+。则中心球平均算子 $\{\mathcal{B}_r\}_{r\in(0,\infty)}$ 在 $(\mathrm{E}_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界；此外，存在一个正数常数 C，使得对于任意 t、$\mathrm{s}\ \in (0,\infty)$ 以及 $\mathrm{f}\ \in (\mathrm{E}_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\mathcal{B}_s f\|_{(E_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{(E_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)}.$$

利用引理 5.27 以及定理 3.29 和 3.35，我们得到以下结论。

定理 5.28. 设 $\mathrm{t}\ \in (0,\infty)$，$\mathrm{r}\ \in [1,\infty)$，且 Φ 是一个同时具有正下型 r_Φ^- 和正上型 r_Φ^+ 的 Orlicz 函数。设 $1 \le \mathrm{r}_\Phi^- \le \mathrm{r}_\Phi^+ < \infty$，且 $\mathrm{q}\ \in (0,\infty)$。若以下陈述之一成立：

(a) $\min\{\mathrm{r}_\Phi^-,\ \mathrm{r}\} \in (\mathrm{n},\ \infty)$，$\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，且 $\mathrm{q}\ \in (0,\infty)$；(b) $\mathrm{r}_\Phi^- \in [1,\infty)$，$\mathrm{r}\ \in [1,\infty)$，$\gamma \in (0,\infty)$，且 $\mathrm{n}(\frac{1}{\min\{\mathrm{r}_\Phi^-,\ \mathrm{r}\}} - \frac{1}{\mathrm{q}}) < 1$；(c) $\mathrm{r}_\Phi^- \in (1,\infty)$，$\mathrm{r}\ \in (1,\infty)$，$\gamma \in (-\infty, 0)$，且 $\mathrm{q}\ \in (0, \min\{\mathrm{r}_\Phi^-,\ \mathrm{r}\})$；(d) $\mathrm{r}_\Phi^- \in (1,\infty)$，$\mathrm{r}\ = \mathrm{n}\ = \mathrm{q}\ = 1$，且 $\gamma \in (-\infty, -1)$；(e) $\mathrm{r}_\Phi^- = \mathrm{n}\ = \mathrm{q}\ = 1$，$\mathrm{r}\ \in [1,\infty)$，且 $\gamma \in (-\infty, -1)$,

那么，对于任意的 $\mathrm{f}\ \in \dot{\mathrm{W}}^{1,\,(E_\Phi^r)_t}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y)\,|\cdot - y|^{\gamma-n}\,dy\right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{(E_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)} \sim \||\nabla f|\|_{(E_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)},$$

其中正等价常数与 f 和 E 无关$\lambda,\ \frac{\gamma}{q}[\mathrm{f}\,]$对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$，与 (1.10) 中的相同。此外，对于任意 $\mathrm{f}\ \in \dot{\mathrm{W}}^{1,\,(E_\Phi^r)_t}(\mathbb{R}^n)$,

(i) 如果 $\gamma \in (0,\infty)$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)} = \left[\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)};$$

(ii) 若 $\gamma \in (-\infty, 0)$，则进一步假设 $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$ 且 $q \in (0, n^{-\gamma} n \min\{r^-_\Phi, r\})$，或者 $n = 1, \gamma \in (-\infty, -1)$ 且 $q \in (0, -\gamma \min\{r^-_\Phi, r\})$，则

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \left\| \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E_{\lambda,\frac{\gamma}{q}}[f]}(\cdot,y) |\cdot - y|^{\gamma-n}\, dy \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)} = \left[-\frac{\kappa(q,n)}{\gamma} \right]^{\frac{1}{q}} \| |\nabla f| \|_{(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。为证明本定理，我们根据 r^-_Φ、r、γ 和 q 考虑以下六种情形。

情形 1) $\min\{r^-_\Phi, r\} \in (n, \infty)$，$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，且 $q \in (0,\infty)$。在此情形下，我们发现存在一个 $s \in (n, \min\{r^-_\Phi, r\})$；结合 [105, 引理 4.3], , 可进一步推出 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $[(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)]^{\frac{1}{s}}$ 上有界。由 [105, 引理 4.5], 可知，$(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。此外，在证明 (ii) 时，若 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$，则我们选取一个 $p \in [1, \min\{r^-_\Phi, r\})$，使得 $q \in (0, n^{-\gamma} n\, p)$；若 $\gamma \in (-\infty, 0)$ 且 $n = 1$，则选取一个 $p \in [1, \min\{r^-_\Phi, r\})$，使得 $q \in (0, -\gamma p)$。因此，由定理 3.29 可知，本定理在此情形下成立。

情形 2) $r^-_\Phi \in (1,\infty)$, $r \in [1,\infty)$，$\gamma \in (0,\infty)$, 且 $n(\frac{1}{\min\{r^-_\Phi, r\}} - \frac{1}{q}) < 1$。在此情形下，由于 $n(\frac{1}{\min\{r^-_\Phi, r\}} - \frac{1}{q}) < 1$，可知存在 $p \in [1, \min\{r^-_\Phi, r\})$，使得 $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$。1 r根据 [105, 引理 2.31], , 我们得到 $[(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)]^{\overline{p}} = (E\, p\, \Phi_p)_t(\mathbb{R}^n)$，其中对任意 $t \in [0,\infty)$，$\Phi_p(t) := \Phi(t\, p)$。由此，结合 [105, 引理 2.28], 和 [106, 备注 7.41(i)], , 可推知 $(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)$ 和 $1[(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)]^{\overline{p}}$ 均为球型巴拿赫函数空间。此外，根据 [105, 定理 2.26 和引理 4.4], , 我们得出 $\mathcal{M}$ 在 $([(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)]\, p)'$ 上有界。另外，由 [105, 引理 4.5], 可推得 $(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)$ 具有绝对连续范数。因此，定理 3.29 表明，本情形下的定理成立。

情形 3) $r^-_\Phi = 1, r \in [1,\infty)$，$\gamma \in (0,\infty)$, 且 $n(\frac{1}{\min\{r^-_\Phi, r\}} - \frac{1}{q}) < 1$。在此情形下，根据 [105, 定理 2.20], 的证明，我们得出：当 $1 = r^-_\Phi \le r^+_\Phi < \infty$, $r \in [1,\infty)$, 且 $\theta \in (0,1)$ 时，对于任意 $f \in (X^{\frac{1}{\theta}})'$ 满足 $X := (E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{(X^{\frac{1}{\theta}})'} \lesssim \left[\left(3C_{r^+_\Phi}\right)^{\frac{3r^+_\Phi}{\theta}} + \frac{r}{\theta} \right] \|f\|_{(X^{\frac{1}{\theta}})'},$$

其中，隐含正常数仅取决于 n。因此，$X := (E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)$ 时，(3.57) 成立。由此，结合引理 5.27、与情形 2) 中所用论证类似的论证以及定理 3.35，我们推得本情形下的定理成立。

情形 4) $r^-_\Phi \in (1,\infty)$, $r \in (1,\infty)$，$\gamma \in (-\infty, 0)$，且 $q \in (0, \min\{r^-_\Phi, r\})$。在此情形下，根据 [105, 引理 4.3], , 我们发现 $\mathcal{M}$ 在 $(E^r_\Phi)_t(\mathbb{R}^n)$ 上有界。由于 $q \in (0, r^-_\Phi)$，因此存在一个 $p \in [\max\{1,q\}, r^-_\Phi)$；并且在证明 (ii) 时，若 $n = 1$，我们总是选取一个满足 $q \in (0, -\gamma p)$ 的 $p \in [\max\{1,q\}, r^-_\Phi)$。由此，采用与情形 2) 中类似的论证，并结合定理 3.29，可得本定理在此情形下成立。

情形 5) $r_\Phi^- \in (1,\infty)$, $r = q = 1$, 且 $\gamma \in (-\infty,-1)$。在此情形下，通过与情形 2) 中类似的论证并结合定理 3.29，我们可推得本定理在此情形下成立。

情形 6) $r_\Phi^- = q = 1$, $r \in [1,\infty)$, and $\gamma \in (-\infty,-1)$. 在这种情形下，根据与情形 3) 中所用论证类似的方法、引理 5.27 和定理 3.35，可推得本定理在此情形下成立。由此完成定理 5.28 的证明。□

利用引理 5.27、定理 4.1 和定理 4.4，以及注 4.3(iv) 和 4.5(ii)，我们得到以下结论；由于其证明与定理 5.28 的证明类似，这里省略细节。

定理 5.29. 设 $t \in (0,\infty)$, $r \in [1,\infty)$, 且 Φ 是一个同时具有正下型 r_Φ^- 和正上型 r_Φ^+的 Orlicz 函数。设 $1 \le r_\Phi^- \le r_\Phi^+ < \infty$, $p \in [1,\infty]$, 且 $s \in (0,1)$。设 $q \in [1,p]$ 满足 $\frac{1}{q} = 1 - \frac{s}{n}$。此外，如果 $r_\Phi^- = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty,0)$，进一步假设 $\gamma \in (-\infty,-1)$ 和 $n = 1$均成立。

(i) 若 $p \in [1,\infty)$，则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,(E_\Phi^r)'}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.1) 中的 X 替换为 $(E_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)$ 后结论仍成立。

(ii) 若 $p = \infty$，则对于任意 $f \in \dot{W}^{1,(E_\Phi^r)'}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.3) 中的 X 替换为 $(E_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)$ 后结论仍成立。

定理 5.30. 设 $t \in (0,\infty)$，$r \in [1,\infty)$，且 Φ 是一个同时具有正下型 r_Φ^- 和正上型 r_Φ^+ 的 Orlicz 函数。设 $1 \le r_\Phi^- \le r_\Phi^+ < \infty$, $\eta \in (0,1)$，并且

$$0 \le s_0 < s < 1 < q < q_0 < \infty$$

满足 (4.19)。此外，若 $r_\Phi^- = 1$ 且 $\gamma \in (-\infty,0)$，进一步假设 $\gamma \in (-\infty,-1)$ 且 $n = 1$。那么，对于任意 $f \in \dot{W}^{1,(E_\Phi^r)'}(\mathbb{R}^n)$，将 (4.20) 中的 X 替换为 $(E_\Phi^r)_t(\mathbb{R}^n)$ 后结论仍成立。

注 5.31。（i）当 $\gamma = n$ 与 [34, 定理 5.25] 相同时，定理 5.28 成立。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 5.28 是新的。

（ii）当 $\gamma = n$ 与 [34, 定理 5.26 和定理 5.27], 分别相同时，定理 5.29 和定理 5.30 成立。据我们所知，当 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,n\}$ 时，定理 5.29 和定理 5.30（Sobolev–Orlicz 切片空间上的 Gagliardo–Nirenberg 型不等式）是新的。

致谢 Chenfeng Zhu 谨向 Yangyang Zhang 致谢，感谢他就本文主题进行的有益讨论并提出建议。

作者贡献 全体作者共同推导并讨论了这些结果，并参与了最终稿件的撰写。

数据可用性声明 本文不适用数据共享，因为未生成或分析任何数据集。

声明

利益冲突 所有作者均声明不存在利益冲突。

知情同意 已获得本研究中所有参与者的知情同意。

参考文献

[1] T. Adamowicz、P. Harjulehto 和 P. H¨ast¨o，《无界拟度量测度空间上的变指数 Lebesgue 空间极大算子》，《斯堪的纳维亚数学》116 (2015)，5–22。[2] D. R. Adams，《Morrey 空间》，应用与数值调和分析讲义，Birkh¨auser/Springer，查姆，2015。[3] K. F. Andersen 和 R. T. John，《向量值极大函数与奇异积分的加权不等式》，《数学研究》69 (1980/81)，19–31。[4] P. Auscher 和 M. Mourgoglou，《通过一阶系统表示椭圆边值问题的解及其唯一性》，《伊比利亚数学评论》35 (2019)，241–315。[5] P. Auscher 和 C. Prisuelos-Arribas，《通过外推得到帐篷空间有界性》，《数学杂志》286 (2017)，1575–1604。[6] A. Benedek 和 R. Panzone，《带混合范数的空间 L^p》，《杜克数学杂志》28 (1961)，301–324。[7] C. Bennett 和 R. Sharpley，《算子插值》，纯粹与应用数学第129卷，Academic Press, Inc.，波士顿，1988。[8] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu，《Sobolev 空间中的提升》，《分析与数学》80 (2000)，37–86。[9] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu，《重新审视 Sobolev 空间》，载于：《最优控制与偏微分方程》，IOS，阿姆斯特丹，2001，第439–455页。[10] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu，《$W^{s,p}$ 的极限嵌入定理（当 $s \uparrow 1$ 时）及其应用》，《分析与数学》87 (2002)，77–101。[11] D. Brazke、A. Schikorra 和 P.-L. Yung，《通过 Triebel–Lizorkin 空间实现 Bourgain–Brezis–Mironescu 收敛》，《变分法与偏微分方程》62 (2023)，论文编号41，共33页。[12] H. Brezis，《如何识别常值函数：与 Sobolev 空间的联系》，《俄罗斯数学评论》57 (2002)，693–708。[13] H. Brezis 和 P. Mironescu，《Gagliardo–Nirenberg 不等式与非不等式：完整论述》，《亨利·庞加莱研究所分析与非线性分析年刊》35 (2018)，1355–1376。[14] H. Brezis 和 P. Mironescu，《Sobolev 空间与 Gagliardo–Nirenberg 不等式的交汇》，《泛函分析杂志》277 (2019)，2839–2864。[15] H. Brezis 和 H.-M. Nguyen，《重新审视 BBM 公式》，《林琴国家科学院报告：数学与应用数学》27 (2016)，515–533。[16] H. Brezis 和 H.-M. Nguyen，《与全变差相关的非局部泛函及其与图像处理的联系》，《偏微分方程年刊》4 (2018)，论文编号9，共77页。[17] H. Brezis 和 H.-M. Nguyen，《收敛到 Sobolev 范数的非局部非凸泛函》，《非线性分析》191 (2020)，111626，共9页。[18] H. Brezis、A. Seeger、J. Van Schaftingen 和 P.-L. Yung，《表示 Sobolev 范数的泛函族》，《分析与偏微分方程》（即将刊出）或 arXiv: 2109.02930。[19] H. Brezis、A. Seeger、J. Van Schaftingen 和 P.-L. Yung，《重新审视 Sobolev 空间》，《林琴国家科学院报告：数学与应用数学》33 (2022)，413–437。[20] H. Brezis、J. Van Schaftingen 和 P.-L. Yung，《Sobolev 范数的一个意想不到的公式》，《美国国家科学院院刊》118 (2021)，论文编号 e2025254118，共6页。

[21] H. Brezis、J. Van Schaftingen 和 P.-L. Yung，分数阶 Sobolev、Gagliardo 和 Nirenberg 估计失效时转向洛伦兹空间，《变分法与偏微分方程》60（2021年），第129号论文，12页。[22] L. Caffarelli、J.-M. Roquejoffre 和 O. Savin，非局部极小曲面，《纯粹与应用数学通讯》63（2010），1111–1144。[23] L. Caffarelli 和 E. Valdinoci，非局部极小曲面的一致估计与极限论证，《变分法与偏微分方程》41（2011），203–240。[24] D.-C. Chang、S. Wang、D. Yang 和 Y. Zhang，与球准 Banach 函数空间相关的 Hardy 型空间的 Littlewood–Paley刻画，Complex Anal. Oper. Theory 14（2020年），第40号论文，33页。[25] K. Cheung 和 K.-P. Ho，变指数块空间上的 Hardy–Littlewood 极大算子的有界性，Czechoslovak Math. J. 64(139)（2014），159–171。[26] F. Chiarenza 和 M. Frasca，Morrey 空间与 Hardy–Littlewood 极大函数，Rend. Mat. Appl. (7) 7（1987），273–279（1988）。[27] G. Cleanthous、A. G. Georgiadis 和 M. Nielsen，各向异性混合范数 Hardy 空间，J. Geom. Anal. 27（2017），2758–2787。[28] G. Cleanthous、A. G. Georgiadis 和 M. Nielsen，齐次混合范数 Besov 空间的离散分解，载于：泛函分析、调和分析与图像处理：献给 Bj¨orn Jawerth 的论文集，167–184，Contemp. Math. 693，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[29] G. Cleanthous、A. G. Georgiadis 和 M. Nielsen，分布的各向异性混合范数空间上的 Fourier 乘子，Math. Scand. 124（2019），289–304。[30] D. V. Cruz-Uribe 和 A. Fiorenza，变指数 Lebesgue 空间：基础与调和分析，Appl. Number. Harmon. Anal.，Birkh¨auser/Springer，海德堡，2013。[31] D. V. Cruz-Uribe 和 L.-A. D. Wang，变 Hardy 空间，《印第安纳大学数学杂志》63（2014），447–493。[32] F. Dai、L. Grafakos、Z. Pan、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，球型巴拿赫函数空间上的 Bourgain–Brezis–Mironescu 公式，《数学年刊》（2023），https://doi.org/10.1 007/s00208-023-02562-5。[33] F. Dai、X. Lin、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，Poincar´e 不等式与度量测度空间上的 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式相遇，《泛函分析杂志》283（2022年），第109645号论文，52页。[34] F. Dai、X. Lin、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，球型巴拿赫函数空间中的 Brezis–Van Schaftingen–Yung 公式及其在分数阶 Sobolev 与 Gagliardo–Nirenb- erg 不等式中的应用，《变分法与偏微分方程》62（2023年），第56号论文，73页。[35] R. del Campo、A. Fern´andez、F. Mayoral 和 F. Naranjo，与准 Banach 函数空间相关的 Orlicz 空间：在向量测度与插值中的应用，《数学集刊》72（2021年），481–499。[36] L. Diening、P. Harjulehto、P. H¨ast¨o 和 M. R˚u˘zi˘cka，变指数 Lebesgue 与 Sobolev 空间，《数学讲义》2017，Springer，海德堡，2011。[37] L. Diening、P. H¨ast¨o 和 S. Roudenko，变光滑度与可积性的函数空间，《泛函分析杂志》256（2009），1731–1768。[38] O. Dom´ınguez 和 M. Milman，与极大不等式和单参数算子族相关的新型 Brezis–Van Schaftingen–Yung–Sobolev 不等式，《数学进展》411（2022年），第108774号论文，76页。

[39] O. Dom´ınguez 和 M. Milman，通过插值与外推得到的分数阶 Sobolev 空间 Bourgain–Brezis–Mironescu–Maz'ya–Shaposhnikova 极限公式，《变分法与偏微分方程》62（2023年），第43号论文，37页。[40] O. Dom´ınguez、A. Seeger、B. Street、J. Van Schaftingen 和 P.-L. Yung，Besov–Sobolev 型空间与一个关于非线性逼近的问题，《泛函分析杂志》284（2023年），第109775号论文，50页。[41] O. Dom´ınguez 和 S. Tikhonov，Sobolev 嵌入、外推及相关不等式，arXiv: 1909.12818。[42] J. Duoandikoetxea，傅里叶分析，数学研究生教材29，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。[43] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy，测度论与函数的精细性质，数学教材，CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2015。[44] E. Gagliardo，多元函数的某些类的性质，Ricerche Mat. 7（1958），102–137。`A. R. Galmarino 和 R. Panzone，混合范数 L`-空间，其中 P 为一个序列，《数学分析及其应用杂志》10（1965），494–518。[45] A. G. Georgiadis、J. Johnsen 和 M. Nielsen，齐次混合范数 Triebel–Lizorkin 空间的小波变换，《数学月刊》183（2017），587–624。^{p}A. G. Georgiadis 和 M. Nielsen，混合范数 Besov 与 Triebel–Lizorkin 空间上的伪微分算子，Math. Nachr. 289（2016），2019–2036。[46] L. Grafakos，经典傅里叶分析，第三版，数学研究生教材249，Springer，纽约，2014。[47] L. Greco 和 R. Schiattarella，有界变差函数的一个嵌入定理，Commun. Contemp. Math. 22（2020），1950032，13页。[48] Q. Gu 和 P.-L. Yung，L[49] 范数的一个新公式，《泛函分析杂志》281（2021年），第109075号论文，19页。[50] D. D. Haroske，带 Muckenhoupt 权重的 Sobolev 空间、奇异性与不等式，Georgian Math. J. 15（2008），263–280。^{p} D. D. Haroske、S. D. Moura、C. Schneider 和 L. Skrzypczak，区域上正则分布的光滑度 Morrey 空间的无界性性质，Sci. China Math. 60（2017），2349–2376。[51] D. D. Haroske、S. D. Moura 和 L. Skrzypczak，具有临界光滑度的 Morrey 空间的一些嵌入，《傅里叶分析及其应用杂志》26（2020年），第50号论文，31页。[52] D. D. Haroske、C. Schneider 和 L. Skrzypczak，区域上的 Morrey 空间：不同方法与增长包络，J. Geom. Anal. 28（2018），817–841。[53] D. D. Haroske 和 L. Skrzypczak，加权 Morrey 空间的嵌入，Math. Nachr. 290（2017），1066–1086。[54] D. D. Haroske 和 H. Triebel，分布、Sobolev 空间与椭圆方程，EMS 数学教材，欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2008。[55] K.-P. Ho，变指数 Hardy–Morrey 空间的原子分解，《芬兰科学院数学年刊》40（2015），31–62。[56] K.-P. Ho，拼接空间 (L¨,l[57]) 上的伸缩算子与积分算子，《数学研究》68（2019），661–677。

[59] K.-P.Ho，球型巴拿赫函数空间上的 Erd´elyi–Kober 分数积分算子，Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 145 (2021), 93–106.[60] F. Holland，L^p 与 l^q 的拼合上的调和分析，J. London Math. Soc. (2) 10 (1975), 295–305.[61] L. H¨ormander，L^p 空间中平移不变算子的估计，Acta Math. 104 (1960), 93–140.[62] M. Hovemann，Triebel–Lizorkin–Morrey 空间与差分，Math. Nachr. 295 (2022), 725–761.[63] L. Huang, D.-C. Chang 和 D. Yang，与球拟Banach函数空间相关的 Hardy 空间的傅里叶变换，《应用分析》 (2021), 3825–3840.[64] L. Huang, J. Liu, D. Yang 和 W. Yuan，各向异性混合范数 Hardy 空间的原子分解与 Littlewood–Paley 刻画及其应用，J. Geom. Anal. 29 (2019), 1991–2067.[65] L. Huang, J. Liu, D. Yang 和 W. Yuan，各向异性混合范数 Hardy 空间的对偶空间，Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), 1201–1215.[66] L. Huang 和 D. Yang，混合范数函数空间综述，J. Math. Study 54 (2021), 262–336.[67] M. Izuki, T. Noi 和 Y. Sawano，球型巴拿赫函数空间中的 John–Nirenberg不等式及其在 BMO 刻画中的应用，J. Inequal. Appl. 2019, Paper No. 268, 11 pp.[68] M. Izuki 和 Y. Sawano，通过球型巴拿赫函数空间刻画 BMO，Vestn. St.-Peterbg. Univ. Mat. Mekh. Astron. 4(62) (2017), 78–86.[69] H. Jia 和 H. Wang，Hardy–Morrey 空间的分解，J. Math. Anal. Appl. 354 (2009), 99–110.[70] N. Kikuchi, E. Nakai, N. Tomita, K. Yabuta 和 T. Yoneda，拼合空间及离散情形中的 Calder´on–Zygmund 算子，J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), 198–212.[71] V. Kokilashvili 和 M. Krbec，《洛伦兹空间和 Orlicz 空间中的加权不等式》，World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1991.[72] K. A. Kopotun，具有有限个零点和奇异性的倍增权的多项式逼近，J. Approx. Theory 198 (2015), 24–62.[73] O. Kov´aˇcik 和 J. R´akosn´ık，关于 $L^{p(x)}$ 和 $W^{k,p(x)}$ 空间，Czechoslovak Math. J. 41(116) (1991), 592–618.[74] M. Lacey, E. T. Sawyer 和 I. Uriarte-Tuero，关于一个倍增测度下极大奇异积分的双权范数不等式的刻画，《分析与偏微分方程》5 (2012), 1–60.[75] Y. Li, D. Yang 和 L. Huang，《Rafeiro 和 Samko 广义 Herz 空间相关 Hardy 空间的实变量理论》，《数学讲义》2320，Springer，查姆，2022.[76] G. Mastroianni 和 V. Totik，倍增权的最佳逼近与光滑模，J. Approx. Theory 110 (2001), 180–199.[77] V. Maz'ya，《Sobolev 空间及其在椭圆型偏微分方程中的应用》，第二版，修订增补版，《数学科学基础丛书》342，Springer，海德堡，2011.[78] G. Mingione，梯度势估计，J. Eur. Math. Soc. 13 (2011), 459–486.

[79] C. B. Morrey，关于拟线性椭圆偏微分方程的解，Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126–166.[80] E. Nakai 和 Y. Sawano，变指数 Hardy 空间与广义 Campanato 空间，《泛函分析杂志》262 (2012), 3665–3748.[81] E. Nakai 和 Y. Sawano，Orlicz–Hardy 空间及其对偶，Sci. China Math. 57 (2014), 903–962.[82] H. Nakano，《模化半序线性空间》，丸善株式会社，东京，1950.[83] H. Nakano，《线性拓扑空间的拓扑学》，丸善株式会社，东京，1951.[84] E. Di Nezza, G. Palatucci 和 E. Valdinoci，分数阶 Sobolev 空间指南，Bull. Sci. Math. 136 (2012), 521–573.[85] H.-M. Nguyen，Sobolev 空间的一些新刻画，《泛函分析杂志》237 (2006), 689–720.[86] T. Nogayama，混合 Morrey 空间，Positivity 23 (2019), 961–1000.[87] T. Nogayama, T. Ono, D. Salim 和 Y. Sawano，混合 Morrey 空间的原子分解，J. Geom. Anal. 31 (2021), 9338–9365.[88] M. M. Rao 和 Z. D. Ren，《Orlicz 空间的应用》，《纯粹与应用数学专著和教科书》250，Marcel Dekker, Inc., 纽约，2002.[89] W. Rudin，《实分析与复分析》，第三版。McGraw-Hill Book Co., 纽约，1987.[90] Y. Sawano，《Besov 空间理论》，数学新进展56，Springer，新加坡，2018.[91] Y. Sawano, G. Di Fazio 和 D. Hakim，《Morrey 空间——积分算子与偏微分方程的导论及应用》第一卷，《数学专著与研究笔记》。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2020.[92] Y. Sawano, G. Di Fazio 和 D. Hakim，《Morrey 空间——积分算子与偏微分方程的导论及应用》第二卷，《数学专著与研究笔记》。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2020.[93] Y. Sawano, K.-P. Ho, D. Yang 和 S. Yang，球准 Banach 函数空间相关 Hardy 空间，Dissertationes Math. 525 (2017), 1–102.[94] Y. Sawano 和 H. Tanaka，块空间的 Fatou 性质，J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), 663–683.[95] J. Tao, Da. Yang 和 Do. Yang，Morrey 空间上 Cauchy 积分交换子的有界性与紧性刻画，Math. Methods Appl. Sci. 42 (2019), 1631–1651.[96] J. Tao, D. Yang, W. Yuan 和 Y. Zhang，球型巴拿赫函数空间上交换子的紧性刻画，Potential Anal (2021), https://doi.org/10.1007/s11118-021-09953-w.[97] H. Triebel，《函数空间理论》，数学专著78，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1983.[98] F.Wang, D. Yang 和 W. Yuan，与球准 Banach 函数空间相关 Hardy 空间的 Riesz 变换刻画，arXiv: 2208.10309.[99] F. Wang, D. Yang 和 S. Yang，与球准 Banach 函数空间相关 Hardy 空间的应用，Results Math. 75 (2020), Paper No. 26, 58 pp.

[100] S. Wang、D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，与球拟Banach函数空间相关的弱Hardy型空间 II：Littlewood–Paley刻画与实插值，J. Geom. Anal. 31（2021年），631–696。[101] X. Yan、Z. He、D. Yang 和 W. Yuan，齐次型空间上与球拟Banach函数空间相关的Hardy空间：Littlewood–Paley刻画及其在 Calder´on–Zygmund 算子有界性中的应用，Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 38（2022年），1133–1184。[102] X. Yan、Z. He、D. Yang 和 W. Yuan，齐次型空间上与球拟Banach函数空间相关的Hardy空间：极大函数、分解和对偶空间的刻画，Math. Nachr.（2022年），https://doi.org/10.1002/mana.2021004 32。[103] X. Yan、D. Yang 和 W. Yuan，与球拟Banach函数空间相关的Hardy空间的内禀平方函数刻画，Front. Math. China 15（2020年），769–806。[104] Y. Zhang、L. Huang、D. Yang 和 W. Yuan，新的球Campanato型函数空间及其应用，J. Geom. Anal. 32（2022年），论文编号99，42页。[105] Y. Zhang、D. Yang、W. Yuan 和 S. Wang，Orlicz切片Hardy空间的实变量刻画，Anal. Appl. (Singap.) 17（2019），597–664。[106] Y. Zhang、D. Yang、W. Yuan 和 S. Wang，与球拟Banach函数空间相关的弱Hardy型空间 I：分解及其在 Calder´on–Zygmund 算子有界性中的应用，Sci. China Math. 64（2021年），2007–2064。[107] X. Zhou、Z. He 和 D. Yang，齐次型空间上Hardy–Lorentz空间的实变量刻画及其在实插值和 Calder´on–Zygmund 算子有界性中的应用，Anal. Geom. Metr. Spaces 8（2020年），182–260。[108] C. Zhu、D. Yang 和 W. Yuan，齐次球 Banach Sobolev 空间的新刻画，已投稿。

Chenfeng Zhu、Dachun Yang（通讯作者）和 Wen Yuan

数学与复杂系统实验室（中华人民共和国教育部），数学科学学院，北京师范大学，北京 100875，中华人民共和国

电子邮箱：cfzhu@mail.bnu.edu.cn（C. Zhu）；dcyang@bnu.edu.cn（D. Yang）；wenyuan@bnu.edu.cn（W. Yuan）