arXiv:2304.00960v1 [math.CO] 3 Apr 2023

两个猜　　想的 q-超同余及其推广

HAIHONG HE 和 XIAOXIA WANG*

Abstract. 我们证明了 Guo 最近提出猜想的两个单参数 q-超同余，并建立了它们带有另一个参数的进一步推广。证明中的关键要素是 q 二项式定理的终止形式，以及 Gasper 提出的 Karlsson-Minton 型求和公式。此外，通过建立 Wang、Li 和 Tang 所述结论的 q 类比，我们也验证了该结论。

1. Introduction

除了研究 Calabi-Yau 流形的超几何族外，Rodriguez-Villegas [14]还通过数值计算观察到许多可能的超同余，其中包括以下一个：对任意奇素数 p,

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(\frac{1}{2})_k^2}{k!^2}\equiv(-1)^{(p-1)/2}\pmod{p^2}. \tag{1.1}$$

此处及下文中，Pochhammer 符号定义为：当 n 为正整数时，$(x)_0=1$ 和 $(x)_n=x(x+1)\cdots(x+n-1)$。同余式 (1.1) 最初由 Mortenson [13] 证明。随后，Deines 等人 [3] 给出了 (1.1) 的如下推广：对于任意整数 $d>1$ 和满足 $p\equiv 1 \pmod d$ 的素数 p，

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(\frac{d-1}{d})_k^d}{k!^d}\equiv-\Gamma_p\big(\tfrac{1}{d}\big)^d\pmod{p^2}, \tag{1.2}$$

其中 $\Gamma_p(x)$ 表示 p-进伽马函数（参见 [2, §1.12]）。

对于任意复变量 x 和整数 n，定义 q-移位阶乘如下：

$$(x;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}(1-xq^k)\quad\text{and}\quad(x;q)_n=\frac{(x;q)_\infty}{(xq^n;q)_\infty}.$$

为简便起见，我们也采用紧凑的表达式

$$(x_1,x_2,\ldots,x_m;q)_n=(x_1;q)_n(x_2;q)_n\cdots(x_m;q)_n.$$

2010年 数学主题分类：主要分类 33D15；次要分类 11A07、11B65。关键词：同余； q-超同余；分圆多项式； q-二项式定理；Karlsson-Minton 型求和；创造性显微化。本研究得到上海市自然科学基金（22ZR1424100）资助。

此外， $[n]:=[n]_q=1+q+\cdots+q^{n-1}$ 表示 q-整数。(1.1)的一个 q-类比可见 Guo 和 Zeng [10, 推论 2.4]。最近，Guo [6, 定理 1.1]给出了(1.2)的一个 q-推广：对于任意满足 $n\equiv 1 \pmod{d}$的整数 $d, n>1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d-1};q^d)_k^d q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}\equiv\frac{(q^d;q^d)_{(d-1)(n-1)/d}q^{(d-1)(n-1)(d+n-1)/(2d)}}{(q^d;q^d)_{(n-1)/d}^{d-1}(-1)^{(d-1)(n-1)/d}}\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{1.3}$$

在此处及下文中， n次分圆多项式 $\Phi_n(q)$ 定义为

$$\Phi_n(q)=\prod_{\substack{1\le k\le n\\ \gcd(k,n)=1}}(q-\zeta^k),$$

其中， ζ 是一个 n次本原单位根。在同一篇论文中，Guo 还给出了两个类似的 q-超同余，如下所示。

(i) 对于任意奇整数 $d\ge 3$ 和满足 $n\equiv -1$ (模 d) 且 $n\ge 2d-1$ 的整数 n ,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-1}(q^{1-d};q^d)_k q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}\\ &\equiv\frac{(1-q)(1-q^{d-1})(q^d;q^d)_{n-1-(n+1)/d}}{-(q^d;q^d)_{(n+1)/d}^{d-1}}q^{(d(d+n)(n+1)-(n+1)^2)/(2d)-1}\pmod{\Phi_n(q)^2}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

(ii) 对于任意偶整数 $d\ge 4$ 和满足 $n\equiv -1$ (模 d) 的正整数 n ,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-2}(q;q^d)_k^2 q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}\\ &\equiv\frac{(1-q)^2(q^d;q^d)_{n-1-(n+1)/d}}{(-1)^{(n+1)/d}(q^d;q^d)_{(n+1)/d}^{d-1}}q^{(d(d+n)(n+1)-(n+1)^2)/(2d)-2}\pmod{\Phi_n(q)^2}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

关于同余和 q-同余的近期进展，建议读者参阅文献[5, 7–9, 12, 16–21]。

作为（1.4）和（1.5）的补充，Guo [6, 猜想 5.2 和 5.3]分别提出了如下两个q-超同余，并将其表述为以下两个定理。此外，我们将用两个参数建立（1.4）与（1.6）的共同推广，以及（1.5）与（1.7）的共同推广。

定理 1.1（6，猜想 5.2）。设 $d\ge 4$ 为偶整数， n 为满足$n\equiv -1$ （模 d）且 $n\ge 2d-1$ 的整数。则，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-1}(q^{1-d};q^d)_k q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}\\ &\equiv\frac{(1-q)(1-q^{d-1})(q^d;q^d)_{n-1-(n+1)/d}}{-(-1)^{(n+1)/d}(q^d;q^d)_{(n+1)/d}^{d-1}}q^{(d(d+n)(n+1)-(n+1)^2)/(2d)-1}\pmod{\Phi_n(q)^2}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

定理 1.2（6，猜想 5.3）。设 $d\geq 3$ 为奇整数， n 为满足 $n\equiv -1$ （模 d）的正整数。则，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-2}(q;q^d)_k^2q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}$$
$$\equiv \frac{(1-q)^2(q^d;q^d)_{n-1-(n+1)/d}}{(q^d;q^d)_{(n+1)/d}^{d-1}}q^{(d(d+n)(n+1)-(n+1)^2)/(2d)-2}\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{1.7}$$

特别地，在定理 1.1 和 1.2 中令 $n=p$ 为奇素数且 $q\to 1$ ，便得到 Guo 的两个同余式 [6, (5.4) 和 (5.5)], ，它们已由 Wang、Li 和 Tang [15]成功证明。此外，作者 [15] 猜想：对于任意整数$d\geq 2$， n 满足 $n\equiv -1 \pmod d$ 且 $n\geq 2d-1$,

$$\frac{(n-1)!^d d^{dn-d}}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\frac{d+1}{d})_k^{d-2}(\frac{1}{d})_k(\frac{1-d}{d})_k}{(1)_k^d}\in\mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

通过确定以下 q-同余式即可证明断言 (1.8)。

定理 1.3. 设 $d\geq 2$和 n为整数，满足 $n\equiv -1 \pmod d$ 且 $n\geq 2d-1$。那么，

$$\frac{(q^d;q^d)_{n-1}^d}{(1-q)^{dn-d}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-2}(q,q^{1-d};q^d)_kq^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}\equiv 0\pmod{[n]^2}.$$

显然，在定理 1.3 中令 $q\to 1$ 即可得到 (1.8)。

本文其余部分安排如下。我们将在第 2 节运用q-二项式定理的终止形式来证明定理 1.1 和 1.3。第 3 节将借助 Gasper 的 Karlsson-Minton 型求和公式证明定理 1.2。第 4 节中，我们将给出 (1.4) 和 (1.6) 的双参数推广，以及 (1.4) 和 (1.7) 的双参数推广。证明中也将采用 Guo 和 Zudilin [11]提出的“创造性显微化”方法。

2. Proofs of Theorems 1.1 and 1.3

为证明定理 1.1 和 1.3，我们需要以下关键结果。

引理 2.1. 设 d,r为正整数，满足 $d\geq 3+r$ ，且 $\gcd(d,r)=1$。设 n为一个整数，使得 $n\equiv -r \pmod d$，且 $n\geq 2d-r$。那么，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+r};q^d)_k^{d-r-1}(q^r;q^d)_k^r(q^{r-d};q^d)_kq^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}\equiv 0\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.1}$$

特别地，对于满足 $n\equiv -1 \pmod d$ 的整数 $d\geq 4$ and $n\geq 2d-1$ ，我们有，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-2}(q,q^{1-d};q^d)_kq^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}\equiv 0\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.2}$$

证明。显然，比值 $(q^{d+r};q^d)_k^{d-r-1}/(q^d;q^d)_k^d$ 含有因子 $(1-q^{(d-1)n})^2$，其中$n-(n+r)/d\le k\le n-1$。此外，容易发现，对于 $k\ge 0$,

$$(q^r;q^d)_k^r(q^{r-d};q^d)_k=(1-q^{r-d})(1-q^r)^{r+1}(q^{d+r};q^d)_{k-2}^{r+1}(1-q^{dk-d+r})^r.$$

等价地，我们只需证明下述同余成立,

$$\sum_{k=0}^{n-1-(n+r)/d}\frac{(q^{d+r};q^d)_k^{d-r-1}(q^{d+r};q^d)_{k-2}^{r+1}(1-q^{dk-d+r})^rq^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}\equiv 0\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.3}$$

在此之前，我们确认 (2.3) 的以下参数化推广，它们关于 a 和 a^{-1} 对称:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1-(n+r)/d}&\frac{(a^{d-1}q^{d+r},a^{d-3}q^{d+r},\cdots,a^{r+2}q^{d+r},a^{-r-2}q^{d+r},\cdots,a^{3-d}q^{d+r},a^{1-d}q^{d+r};q^d)_kq^{dk}}{(q^d,a^{d-2}q^d,a^{d-4}q^d,\cdots,a^{r+3}q^d,a^{-r-1}q^d,\cdots,a^{4-d}q^d,a^{2-d}q^d;q^d)_k}\\&\times\frac{(a^rq^{d+r},a^{r-2}q^{d+r},\cdots,a^{-r+2}q^{d+r},a^{-r}q^{d+r};q^d)_{k-2}(1-q^{dk-d+r})^r}{(a^{r+1}q^d,a^{r-1}q^d,\cdots,a^{-r+3}q^d,a^{-r+1}q^d;q^d)_k}\\&\equiv 0\pmod{(1-aq^n)(a-q^n)}\end{aligned} \tag{2.4}$$

当 $d+r\equiv 1$ (模 2) 时，且

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1-(n+r)/d}&\frac{(a^{d-1}q^{d+r},a^{d-3}q^{d+r},\cdots,a^{r+3}q^{d+r},q^{d+r},a^{-r-3}q^{d+r},\cdots,a^{3-d}q^{d+r},a^{1-d}q^{d+r};q^d)_k}{(q^d,a^{d-2}q^d,a^{d-4}q^d,\cdots,a^{r+4}q^d,aq^d,a^{-r-2}q^d,\cdots,a^{4-d}q^d,a^{2-d}q^d;q^d)_kq^{-dk}}\\&\times\frac{(a^{r+1}q^{d+r},a^{r-1}q^{d+r},\cdots,a^2q^{d+r},a^{-2}q^{d+r},\cdots,a^{-r+1}q^{d+r},a^{-r-1}q^{d+r};q^d)_{k-2}}{(a^{r+2}q^d,a^rq^d,\cdots,a^3q^d,a^{-1}q^d,\cdots,a^{-r+2}q^d,a^{-r}q^d;q^d)_k(1-q^{dk-d+r})^{-r}}\\&\equiv 0\pmod{(1-aq^n)(a-q^n)}\end{aligned} \tag{2.5}$$

当 $d\equiv r\equiv 1$ (模 2) 时。

接下来，我们着重证明（2.4）。由于 $\gcd(d,r)=\gcd(d,n)=1$，（2.4）左边的分母不含因子 $1-aq^n$ 或 $a-q^n$。因此，对于 $a=q^{-n}$ 或 $a=q^n$，注意到当 $k>n-1-(n+r)/d$ 时，$(q^{d+r-(d-1)n};q^d)_k=0$，（2.4）左边等于

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1-(n+r)/d}&\frac{(q^{d+r-(d-1)n},q^{d+r-(d-3)n},\cdots,q^{d+r-(r+2)n},q^{d+r+(r+2)n},\cdots,q^{d+r+(d-1)n};q^d)_kq^{dk}}{(q^d,q^{d-(d-2)n},\cdots,q^{d-(r+3)n},q^{d+(r+1)n},\cdots,q^{d+(d-2)n};q^d)_k}\\&\times\frac{(q^{d+r-rn},q^{d+r-(r-2)n},\cdots,q^{d+r+(r-2)n},q^{d+r+rn};q^d)_{k-2}(1-q^{dk-d+r})^r}{(q^{d-(r+1)n},q^{d-(r-1)n},\cdots,q^{d+(r-3)n},q^{d+(r-1)n};q^d)_k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1-(n+r)/d}(-1)^kq^{d\binom{n-1-(n+r)/d-k}{2}}\begin{bmatrix}n-1-(n+r)/d\\k\end{bmatrix}_{q^d}P(q^{dk}).\end{aligned} \tag{2.6}$$

这里， $P(q^{dk})$ 是关于 q^{dk} 的一个多项式，其次数为 $n-2-(n+r)/d$，并且

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}$$

表示 q-二项式系数。在推导式 (2.6) 时，我们使用了以下公式，这些公式很容易验证：

$$\frac{(q^{d+r-(d-1)n};q^d)_k q^{dk}}{(q^d;q^d)_k} = (-1)^k \begin{bmatrix} n-1-(n+r)/d \\ k \end{bmatrix}_{q^d} q^{d\binom{k}{2}+(n+2d+r-dn)k},$$

$$d\binom{k}{2} + (n+2d+r-dn)k = d\binom{n-1-(n+r)/d-k}{2} - d\binom{n-1-(n+r)/d}{2},$$

对于 $1 \le j \le d-1$ 和 $j \ne (d-r-1)/2, \cdots, (d+r-1)/2$

$$\frac{(q^{d+r-(d-2j-1)n};q^d)_k}{(q^{d-(d-2j)n};q^d)_k} = \frac{(q^{d-(d-2j)n+dk};q^d)_{(n+r)/d}}{(q^{d-(d-2j)n};q^d)_{(n+r)/d}}, \tag{2.7}$$

以及对于 $(d-r-1)/2 \le j \le (d+r-1)/2$

$$\frac{(q^{d+r-(d-2j-1)n};q^d)_{k-2}}{(q^{d-(d-2j)n};q^d)_k} = \frac{(q^{d-(d-2j)n+dk};q^d)_{(n+r)/d-2}}{(q^{d-(d-2j)n};q^d)_{(n+r)/d}}. \tag{2.8}$$

我们看到，(2.7) 和 (2.8) 的右端分别是关于 q^{dk} 的次数为 $(n+r)/d$ 和 $(n+r)/d-2$ 的多项式。于是，根据 q-二项式定理的终止形式（例如参见 [1, 第 36] 页）：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{n-k}{2}+jk} = 0 \quad \text{for } 0 \le j \le n-1,$$

我们推得 (2.6) 的右端等于零。这意味着同余式 (2.4) 模 $(1-aq^n)(a-q^n)$ 成立。类似地，我们可以证明 (2.5)，这里省略细节。

显然，极限 $(1-aq^n)(a-q^n)$ 含有因子 $\Phi_n(q)^2$，因为 $a \to 1$。此外，(2.4) 和 (2.5) 左端的分母都与 $\Phi_n(q)$ 互素，因为 $a \to 1$。因此，在 (2.4) 和 (2.5) 中令 $a \to 1$，即可得到 (2.3)。由此验证了 (2.1) 的修正。□

现在，我们准备好证明定理 1.1 和 1.3。

定理 1.1 的证明。容易验证：对于任意整数 $d \ge 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-1} (q^{1-d};q^d)_k q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}$$

$$= [d] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-2} (q,q^{1-d};q^d)_k q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d} - q[d-1] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q^{d+1};q^d)_k^{d-2} (q;q^d)_k^2 q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}, \tag{2.9}$$

其中我们应用了以下恒等式:

$$(q^{d+1},q^{1-d};q^d)_k=-q[d-1]\left(1+\frac{1-q^d}{q^d-q^{dk+1}}\right)(q;q^d)_k^2.$$

因此，由 (1.5)、(2.2) 和 (2.9)，可得定理 1.1。 □

定理 1.3 的证明。首先，我们断言以下两个 q-同余成立，它们是 (2.2) 中的 $d=2$、3 两种情形：对于任意整数 n，模 $\Phi_n(q)^2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q,q^{-1};q^2)_kq^{2k}}{(q^2;q^2)_k^2}\equiv 0\quad\text{if } n\geq 3 \text{ and } n\equiv 1\pmod 2, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^4,q,q^{-2},;q^3)_kq^{3k}}{(q^3;q^3)_k^3}\equiv 0\quad\text{if } n\geq 5 \text{ and } n\equiv 2\pmod 3. \tag{2.11}$$

事实上，将 $d=2$ 代入 (2.9)，可得，模 $\Phi_n(q)^2$,

$$\begin{aligned}[2]\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q,q^{-1};q^2)_kq^{2k}}{(q^2;q^2)_k^2}&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^3,q^{-1};q^2)_kq^{2k}}{(q^2;q^2)_k^2}+q\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k^2q^{2k}}{(q^2;q^2)_k^2}\\&\equiv(-1)^{(n+1)/2}q^{(n^2+3)/4}+q(-1)^{(n-1)/2}q^{(n^2-1)/4},\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中我们用到了文献 [6, 第 9] 页中的一个 q-超同余，以及 (1.3) 的 $d=2$ 情形。类似地，将 $d=3$ 代入 (2.9)，可得，模 $\Phi_n(q)^2$,

$$\begin{aligned}[3]\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^4,q,q^{-2};q^3)_kq^{3k}}{(q^3;q^3)_k^3}&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^4,q^4,q^{-2};q^3)_kq^{3k}}{(q^3;q^3)_k^3}+q[2]\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^4,q,q;q^3)_kq^{3k}}{(q^3;q^3)_k^3}\\&\equiv\frac{(1-q)(1-q^2)(q^3;q^3)_{(2n-1)/3-1}}{-(q^3;q^3)_{(n+1)/3}^2}q^{(3(3+n)(n+1)-(n+1)^2)/6-1}\\&\quad+q[2]\frac{(1-q)^2(q^3;q^3)_{(2n-1)/3-1}}{(q^3;q^3)_{(n+1)/3}^2}q^{(3(3+n)(n+1)-(n+1)^2)/6-2},\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中我们利用了 $d=3$ 时的 (1.4) 和 (1.7)。因此， q 的结果 (2.10) 和 (2.11) 分别由 (2.12) 和 (2.13) 得出。此外，我们注意到：对于任意整数 $d\geq 2$,

$$\frac{(q^d;q^d)_{n-1}^d}{(1-q)^{dn-d}}=\prod_{1\leq m<n}\left(\frac{1-q^{md}}{1-q}\right)^d\equiv 0\pmod{\prod_{\substack{1<m<n\\ m|n}}\Phi_m(q)^2}. \tag{2.14}$$

结合以下性质

$$[n]=\Phi_n(q)\prod_{\substack{1<m<n\\ m|n}}\Phi_m(q)$$

结合同余式 (2.2)、(2.10)、(2.11) 和 (2.14)，我们得到定理 1.3。 □

3. 定理 1.2 的证明

证明。我们将利用 Gasper 的 Karlsson-Minton 型求和公式证明定理 1.2（更一般的形式见 $[4,(1.9.9)]$）：对于非负整数 N、n_1、$\cdots$、n_m，满足 $N=n_1+\cdots+n_m$，

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(q^{-N},b_1q^{n_1},\cdots,b_mq^{n_m};q)_k}{(q,b_1,\cdots,b_m;q)_k}q^k=(-1)^N\frac{(q;q)_Nb_1^{n_1}\cdots b_m^{n_m}}{(b_1;q)_{n_1}\cdots(b_m;q)_{n_m}}q^{\binom{n_1}{2}+\cdots+\binom{n_m}{2}}. \tag{3.1}$$

下文将分别讨论定理 1.2 的两个条件 $d>3$ 和 $d=3$。(i) 对于 $d>3$，我们考虑（1.7）的以下推广：模（$1-aq^n$）（$a-q^n$），

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a^{d-1}q^{d+1},a^{d-3}q^{d+1},\cdots,a^4q^{d+1},a^2q,q^{d+1},a^{-2}q,a^{-4}q^{d+1},\cdots,a^{3-d}q^{d+1},a^{1-d}q^{d+1};q^d)_k}{(a^{d-2}q^d,a^{d-4}q^d,\cdots,a^{4-d}q^d,a^{2-d}q^d;q^d)_k(q^d;q^d)_kq^{-dk}}$$

$$\equiv\frac{(1-a^2q)(1-q/a^2)(q^d;q^d)_{n-1-(n+1)/d}}{(a^{d-2}q^d,a^{d-4}q^d,\cdots,a^{4-d}q^d,a^{2-d}q^d;q^d)_{(n+1)/d}}q^{(d(d+n)(n+1)-(n+1)^2)/(2d)-2}. \tag{3.2}$$

事实上，我们在（3.1）中作代换 $q\to q^d$, $m=d-1$, $N=n-1-\left(n+1\right)/d$, $b_j=q^{d-(d-2j)n}$（$1\le j\le d-1$），$n_{(d-3)/2}=n_{(d+1)/2}=\left(n+r\right)/d-1$ 和 $n_j=\left(n+r\right)/d$（$1\le j\le d-1$和 $j\ne\left(d-3\right)/2$，$\left(d+1\right)/2$）。因此，对于 $a=q^{-n}$ 或 $a=q^n$，（3.2）的左端可化简为

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n-1-(n+1)/d}q^{(d-1)(n+1)-2(d-n)+d(d-3)\binom{(n+1)/d}{2}+2d\binom{(n+1)/d-1}{2}}}{(q^{d-(d-2)n},q^{d-(d-4)n},\cdots,q^{d-5n},q^{d-n},q^{d+3n},\cdots,q^{d+(d-4)n},q^{d+(d-2)n};q^d)_{(n+1)/d}}\\&\quad\times\frac{(q^d;q^d)_{n-1-(n+1)/d}}{(q^{d-3n},q^{d+n};q^d)_{(n+1)/d-1}}\\&=\frac{(1-q^{1-2n})(1-q^{1+2n})(q^d;q^d)_{n-1-(n+1)/d}q^{(d(d+n)(n+1)-(n+1)^2)/(2d)-2}}{(q^{d-(d-2)n},q^{d-(d-4)n},\cdots,q^{d+(d-4)n},q^{d+(d-2)n};q^d)_{(n+1)/d}}.\end{aligned}$$

也就是说，q-同余式 (3.2) 模 $(1-aq^n)(a-q^n)$ 成立。
(ii) 对于 $d=3$，我们考虑以下 q-同余式：模 $(1-aq^n)(a-q^n)$，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a^2q,q^4,q/a^2;q^3)_kq^{3k}}{(aq^3,q^3/a,q^3;q^3)_k}\equiv\frac{(1-a^2q)(1-q/a^2)(q^3;q^3)_{n-1-(n+1)/3}}{(aq^3,q^3/a;q^3)_{(n+1)/3}}q^{(n^2+5n-2)/3}. \tag{3.3}$$

实际上，在 (3.1) 中取 $q\to q^3$, $m=2$, $N=(2n-1)/3$,$b_1=q^{3-n}$, $b_2=q^{3+n}$, $n_1=(n+1)/3$ 以及 $n_2=(n+1)/3-1$，即可得到 q-同余式 (3.3)。因此，在 (3.2) 和 (3.3) 中令 $a\to1$，定理 1.2 的证明便完成了。□

4. The extensions of Theorems 1.1 and 1.2

本节中，我们给出 (1.4) 与 (1.6) 的共同推广，以及 (1.5) 与 (1.7) 在两个参数下的共同推广。我们的发现如下。

定理 4.1. 设 d, r 为正整数，且 $d \geq 3+r$，并且 $\gcd(d,r) = 1$。设 n 为满足 $n \equiv -r \pmod{d}$ 且 $n \geq 2d-r$ 的整数。那么，模 $\Phi_n(q)^2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q^{d+r};q^d)_k^{d-r}(q^r;q^d)_k^{r-1}(q^{r-d};q^d)_k q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d} \equiv \frac{(1-q^r)^r(1-q^{d-r})(q^d;q^d)_{n-1-(n+r)/d}}{-(-1)^{n-1-(n+r)/d}(q^d;q^d)_{(n+r)/d}^{d-1}} q^{A(d,n,r)}, \tag{4.1}$$

其中 $A(d,n,r) = [d(d+n)(n+r) + dn(r-1) - (n+r)^2]/(2d) - r(r+1)/2$。此外，同余式 (4.1) 对 $d = 2$、3 和 $r = 1$ 也成立。

定理 4.2. 设 d, r 为正整数，满足 $d > r$ 且 $\gcd(d,r) = 1$。设 $n > 1$ 为正整数，满足 $n \equiv -r \pmod{d}$。那么，模 $\Phi_n(q)^2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q^{d+r};q^d)_k^{d-r-1}(q^r;q^d)_k^{r+1} q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d} \equiv \frac{(1-q^r)^{r+1}(q^d;q^d)_{n-1-(n+r)/d}}{(-1)^{n-1-(n+r)/d}(q^d;q^d)_{(n+r)/d}^{d-1}} q^{A(d,n,r)-r}, \tag{4.2}$$

其中 $A(d,n,r)$ 如定理 4.1 所述。

显然，在定理 4.1 和 4.2 中取 $r = 1$，根据 d 的奇偶性即可轻松得到 (1.4)-(1.7)。

事实上，定理 4.1 的证明取决于 (4.1) 与 (4.2) 之间的关系。因此，我们再次通过 Karlsson-Minton 型求和 (3.1) 证明定理 4.2。

定理 4.2 的证明概要。根据 d 和 r 的奇偶性，我们将以下四个关于 q 的同余 (4.3)–(4.6) 完全分类讨论；它们关于 a 和 a^{-1} 都是对称的。

(*i*) 对于 $d + r \equiv 1$ (模 2)，模 $(1-aq^n)(a-q^n)$,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a^{d-1}q^{d+r}, a^{d-3}q^{d+r}, \cdots, a^{r+2}q^{d+r}, a^r q^r, a^{r-2}q^r, \cdots, a^{-r}q^r, \cdots, a^{1-d}q^{d+r};q^d)_k}{(a^{d-2}q^d, a^{d-4}q^d, \cdots, a^{4-d}q^d, a^{2-d}q^d;q^d)_k (q^d;q^d)_k q^{-dk}} \\ &\equiv \frac{(1-a^r q^r)(1-a^{r-2}q^r)\cdots(1-a^{-r}q^r)(q^d;q^d)_{n-1-(n+r)/d}}{(-1)^{n-1-(n+r)/d}(a^{d-2}q^d, a^{d-4}q^d, \cdots, a^{4-d}q^d, a^{2-d}q^d;q^d)_{(n+r)/d}} q^{A(d,n,r)-r}\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $d - r \geq 3$，并且

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a^{d-1}q^{d-1}, a^{d-3}q^{d-1}, \cdots, a^{3-d}q^{d-1}, a^{1-d}q^{d-1};q^d)_k q^{dk}}{(q^d, a^{d-2}q^d, a^{d-4}q^d, \cdots, a^{4-d}q^d, a^{2-d}q^d;q^d)_k} \equiv B_q(d,n,d-1) \tag{4.4}$$

其中 $d - r = 1$。这里 $B_q(d,n,r)$ 表示 (4.3) 右侧。

(*ii*) 对于 $d \equiv r \equiv 1$ (模 2)，模 $(1-aq^n)(a-q^n)$,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a^{d-1}q^{d+r}, a^{d-3}q^{d+r}, \cdots, a^{r+3}q^{d+r}, a^{r+1}q^r, \cdots, a^2 q^r, q^{d+r}, a^{-2}q^r, \cdots, a^{1-d}q^{d+r};q^d)_k}{(a^{d-2}q^d, a^{d-4}q^d, \cdots, a^{4-d}q^d, a^{2-d}q^d;q^d)_k (q^d;q^d)_k q^{-dk}} \\ &\equiv C_q(d,n,r) \qquad\qquad \text{with } d-r \geq 4,\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a^{d-1}q^{d-2},a^{d-3}q^{d-2},\cdots,a^2q^{d-2},q^{2d-2},a^{-2}q^{d-2},\cdots,a^{1-d}q^{d-2};q^d)_kq^{dk}}{(a^{d-2}q^d,a^{d-4}q^d,\cdots,a^{4-d}q^d,a^{2-d}q^d;q^d)_k(q^d;q^d)_k}$$
$$\equiv C_q(d,n,d-2) \qquad \text{with } d-r=2, \tag{4.6}$$

其中

$$C_q(d,n,r)=\frac{(q^d;q^d)_{n-1-(n+r)/d}q^{A(d,n,r)-r}}{(a^{d-2}q^d,a^{d-4}q^d,\cdots,a^{2-d}q^d;q^d)_{(n+r)/d}}\prod_{j=1}^{(r+1)/2}(1-a^{2j}q^r)(1-a^{-2j}q^r).$$

实际上，每个条件的证明都需要借助 Karlsson-Minton 型求和 (3.1)。以同余 (4.3) 为例，通过令 $q\to q^d$, $m=d-1$,$N=n-1-(n+r)/d$, $b_j=q^{d-(d-2j)n}$ $(1\le j\le d-1)$，可得

$$n_j=\begin{cases}(n+r)/d-1 & (d-r-1)/2\le j\le (d+r-1)/2\\ (n+r)/d & 1\le j<(d-r-1)/2 \ \text{ and } \ (d+r-1)/2<j\le d-1\end{cases}$$

代入 (3.1) 中。类似地，另外三个同余 (4.4)-(4.6) 也可证明，此处不再赘述。因此，在 (4.3)–(4.6) 中令 $a\to 1$ 并进行积分，即可得到定理 4.2。□

定理 4.1 的证明。鉴于

$$(q^{d+r},q^{r-d};q^d)_k=-q^r\frac{[d-r]}{[r]}\left(1+\frac{1-q^d}{q^d-q^{dk+r}}\right)(q^r;q^d)_k^2,$$

我们考察 (4.1) 与 (4.2) 之间的关系：对于整数 $d>r\ge 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+r};q^d)_k^{d-r}(q^r;q^d)_k^{r-1}(q^{r-d};q^d)_kq^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}$$
$$=\frac{[d]}{[r]}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+r};q^d)_k^{d-r-1}(q^r;q^d)_k^{r}(q^{r-d};q^d)_kq^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}-\frac{[d-r]}{q^{-r}[r]}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{d+r};q^d)_k^{d-r-1}(q^r;q^d)_k^{r+1}q^{dk}}{(q^d;q^d)_k^d}.$$

因此，由 (2.1)、(2.10)、(2.11)、定理 4.2 及上述结果，我们得到定理 4.1。□

特别地，在定理 4.1 和定理 4.2 中令 n 为素数 $p\ge 5$，且 $q\to 1$，可得以下结论。

推论 4.3. (i) 设 d, r 为正整数，满足 $d\ge 3+r$ 且 $\gcd(d,r)=1$。那么，对于任意满足 $p\equiv -r \pmod d$ 的素数 $p\ge 2d-r$，

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(\frac{d+r}{d})_k^{d-r}(\frac{r}{d})_k^{r-1}(\frac{r-d}{d})_k}{k!^d}\equiv\frac{d-r}{d}\big(\frac{r}{d}\big)^r\Gamma_p\big(-\frac{r}{d}\big)^d \pmod{p^2}.$$

(*ii*) 设 d, r 为正整数，满足 $d > r$ 且 gcd$(d, r) = 1$。那么，对于任意满足 $p \equiv -r \pmod{d}$ 的素数 $p \geq 5$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(\frac{d+r}{d})_k^{d-r-1}(\frac{r}{d})_k^{r+1}}{k!^d} \equiv -\big(\tfrac{r}{d}\big)^{r+1}\Gamma_p\big(-\tfrac{r}{d}\big)^d \pmod{p^2}.$$

在推导推论 4.3 时，我们使用了以下公式：对于任意正整数 d、r，满足 $d > r$，以及满足 $p \equiv -r \pmod{d}$ 的素数 $p \geq 5$，

$$\frac{\big(p-1-\frac{p+r}{d}\big)!}{(\frac{p+r}{d})!^{d-1}} \equiv -(-1)^{\frac{p+r}{d}}\Gamma_p\big(-\tfrac{r}{d}\big)^d \pmod{p^2},$$

该公式可以借助 p 进伽马函数的一些基本性质，像公式 [6, (4.4) 和 (4.8)] 那样证明。

References

[1] G.E. Andrews, 《分拆理论》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1998年。[2] G.E. Andrews、R. Askey、R. Roy, 《特殊函数》, 《数学及其应用百科全书》第71卷, 剑桥大学, 剑桥, 1999年。[3] A. Deines、J.G. Fuselier、L. Long、H. Swisher、F.-T. Tu, 《超几何级数、截断超几何级数与高斯超几何函数》, 《数论方向》第3卷, 女性数学家协会丛书, 施普林格, 纽约, 2016年, 第125-159页。[4] G. Gasper、M. Rahman, 《基本超几何级数》, 第二版, 《数学及其应用百科全书》第96卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2004年。[5] V.J.W. Guo, Van Hamme 的 (A.2) 超同余的新推广, 《数学成果》77 (2022年), 第96号文章。[6] V.J.W. Guo, 来自 Gasper 的 Karlsson-Minton 型求和的若干 q-超同余, 《拉马努金杂志》60 (2023年), 825-835。[7] V.J.W. Guo、J.-C. Liu、M. J. Schlosser, Long 和 Ramakrishna 的一个超同余的推广, 《美国数学会会刊》151 (2023年), 1157-1166。[8] V.J.W. Guo、H.-X. Ni, Rodriguez-Villegas 的四个超同余的进一步推广, 《西班牙皇家精确、物理与自然科学院杂志A辑数学》117 (2023年), 第49号文章。[9] V.J.W. Guo、M.J. Schlosser, 一族模分圆多项式立方的 q-超同余, 《澳大利亚数学会通报》105 (2022年), 296-302。[10] V.J.W. Guo、J. Zeng, Rodriguez-Villegas 超同余的一些 q-类比, 《数论杂志》145 (2014年), 301-316。[11] V.J.W. Guo、W. Zudilin, 一个用于超同余的 q-显微镜, 《数学进展》346 (2019年), 329-358。[12] Y. Liu、X. Wang, Van Hamme 的 (G.2) 超同余的进一步 q-类比, 《拉马努金杂志》59 (2022年), 791-802。[13] E. Mortenson, Rodriguez-Villegas 关于某个截断超几何函数的一个超同余猜想, 《数论杂志》99 (2003年), 139-147。[14] F. Rodriguez-Villegas, Calabi-Yau 流形的超几何族, 载于《卡拉比-丘簇与镜像对称》（多伦多, ON, 2001）, 菲尔兹研究所通讯第38卷, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2003年, 第223-231页。[15] C. Wang、J. Li、Y. Tang, 来自 Karlsson-Minton 求和公式的一些同余, 预印本, （2022年）, arXiv.2208.06650。[16] C. Wang、H. Pan, 关于截断超几何级数的超同余, 《数学杂志》300 (2022年), 161-177。

[17] X. Wang、C. Xu，关于三重和与四重和的 q-超同余，《数学成果》78 (2023年)，第27号文章。[18] X. Wang、M. Yu，截断 Appell 级数 F_3 上一个超同余的推广，《澳大利亚数学会通报》107 (2023年)，296-303。[19] C. Wei，来自 Whipple 的 q-类比 ${}_3F_2$ 求和公式的一个超同余，《组合理论杂志》A辑194 (2023年)，第105705号文章。[20] C. Wei，来自 Gasper 和 Rahman 求和公式的 q-超同余，《应用数学进展》139 (2022年)，第102376号文章。[21] C. Xu、X. Wang，Guo 和 Schlosser 的两个猜想的证明，《匈牙利数学期刊》85 (2022年)，474-480。

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHANGHAI UNIVERSITY, SHANGHAI 200444, P. R. CHINA电子邮箱： * 通讯作者。xiaoxiawang@shu.edu.cn (X. Wang), hehaihong5@163.com(H. He)。