arXiv:2304.00975v1 [math.NA] 3 Apr 2023

映射可变尺度核：在太阳成像中的应用

Francesco Marchetti[1 [0000−0003−1087−7589]]、Emma Perracchione[2 [0000−0003−2663−7803]]、Anna Volpara[3 [0000−0003−1479−0827]]、Anna Maria Massone[3 [0000−0003−4966−8864]]、Stefano DeMarchi[1 [0000−0002−2832−8476]]和Michele Piana[3 [0000−0003−1700−991X]]

[1] 帕多瓦大学，意大利帕多瓦 {francesco.marchetti,stefano.demarchi}@unipd.it[2] 都灵理工大学，意大利都灵 emma.perracchione@polito.it[3] 热那亚大学，意大利热那亚 {volpara,massone,piana}@dima.unige.it

摘要。变尺度核和通过所谓的虚节点方法构造的映射基，是为函数插值提供自适应基的两种不同策略。本文聚焦于基于核的插值，并提出一种结合这两种策略的方法，称为映射可变尺度核。我们进行了理论分析，并通过数值实验展示其有效性。此外，我们还在硬X射线天文成像领域中测试了这种新基在图像重建任务中的表现。

关键词： 变尺度核 · 映射基插值 · 硬X射线成像。

1 引言

基于核的插值是解决散乱数据插值问题的一种有效方法，在这类问题中，数据点不一定属于某种特定结构或网格 [17,30]。因此，由于其灵活性和可达到的精度，它在许多不同领域都有应用 [20]，包括图像重建和偏微分方程的数值求解。基于径向核的插值也称为径向基函数（RBF）插值，其有效性往往取决于是否选择了合适的所谓形状参数，该参数决定了基函数的形状。然而，在许多情况下，仅对形状参数进行精细调整，并不足以构造出既适应数据分布、又适合待恢复目标函数的基函数。

因此，为了在插值过程中获得更强的自适应性，文献 [6], 引入了变尺度核（VSK），并在基于核的回归网络这一更一般的框架中于文献 [8] 对其进行了进一步分析，也在持久同调背景下于文献 [16] 进行了分析。变尺度核框架也被用于重构具有跳跃的函数，由此定义了变尺度不连续核（VSDK） [13]，后者被证明

在磁粒子成像（MPI）领域的医学图像重建任务中效果显著 [12]。

一种用于构造数据依赖型或目标依赖型基函数的替代方法，即所谓的虚节点方法（FNA），最初在 [14] 单变量多项式插值框架中提出，随后扩展至有理重心近似 [4] 和一般多变量插值，包括径向基函数框架 [15]。尤其是，在后者的论文中，作者表明，在重构不连续函数时，VSDK 设置与 FNA 在应对吉布斯现象方面可产生非常相似的结果。此外， [11] 还提出了一种有效方案，用于处理吉布斯现象和龙格现象。

本文旨在结合变尺度核框架与虚节点方法（FNA）的优势，设计一种统一的基于核的函数插值方法；这两种方法分别在第 2 节和第 3 节中回顾。我们将由此得到的核称为映射变尺度核（MVSK），并在第 4 节中定义，同时给出一项原创的理论贡献，其中重点研究了在第 5 节中进行测试的不连续情形。第 6 节介绍所提方法在太阳硬X射线成像逆问题中的应用；具体而言，我们考虑来自太阳轨道器任务上欧洲航天局*X*射线成像光谱仪/望远镜（*STIX*）望远镜的数据。最后，我们在第 7 节中总结全文。

2 可变缩放的基于核的近似

关于以下介绍，请参阅 [17,30] 。

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$、 $d \in \mathbb{N}$和 $X = X_N = \{\boldsymbol{x}_i,\ i = 1, \ldots, N\} \subset \Omega$为一组可能的散布互异节点， $N \in \mathbb{N}$。假设我们希望根据未知函数 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 X_N处的取值，即根据向量$\boldsymbol{f} = (f(\boldsymbol{x}_1) \ldots, f(\boldsymbol{x}_n))^{\mathsf{T}} = (f_1, \ldots, f_n)$，重构该函数。在基于核的插值中，可通过考虑如下形式的近似函数来实现

$$R_{f,X}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \kappa_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

其中 $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$，且 $\kappa_\varepsilon : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个严格正定核，它依赖于形状参数 $\varepsilon > 0$。下文中，我们可以使用简写记号 $\kappa = \kappa_\varepsilon$。通过采用 $\boldsymbol{c}$ 施加插值条件，从而得到

$$\mathsf{K}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

其中，$\mathsf{K} = (\mathsf{K}_{i,\ j}) = \kappa(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j)$、 $i,\ j = 1$、.....、 N 是所谓的插值矩阵（也称配置矩阵或简称核矩阵）。只要 κ 是严格正定的，满足 (1) 的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是唯一的。此外，我们假设 κ_ε 是径向的，即存在一个单变量函数 φ_ε : $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ ，使得 $\kappa_\varepsilon(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \varphi_\varepsilon(r)$，其中 $r := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2$。

插值函数$R_{f,\ \mathcal{X}}$属于点积空间

$$\mathcal{H}_\kappa = \operatorname{span}\left\{\kappa(\cdot, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega\right\},$$

其关于由双线性型$(\cdot,\ \cdot)_{\mathcal{H}_\kappa}$诱导的范数$\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\kappa} = \sqrt{(\cdot,\ \cdot)_{\mathcal{H}_\kappa}}$完备化后，即为与$\kappa$相关联的原生空间$\mathcal{N}_\kappa$。众所周知的逐点误差界 [17, 定理 14.2，第 117] 页

$$|f(\boldsymbol{x}) - R_{f,X}(\boldsymbol{x})| \leq P_{\kappa,X}(\boldsymbol{x})\|f\|_{\mathcal{N}_\kappa}, \quad f \in \mathcal{N}_\kappa, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{2}$$

涉及幂函数$P_{\kappa,\ X} = \|\kappa(\cdot,\ x) - \boldsymbol{\kappa}(\cdot)\,\mathrm{K}^{-1}\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x})\|_{\mathcal{H}_\kappa}$，其中$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x}) := (\kappa(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1) \ldots,\ \kappa(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_N))$。在估计式 (2) 中，一个值得注意的性质是，误差分为两项：第一项仅取决于节点和核，第二项则取决于底层函数f。

下面的误差界提供了另一种视角，它考虑了所谓的填充距离

$$h_{X,\Omega} := \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \min_{\boldsymbol{x}_k\in X} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_2.$$

假设Ω有界且满足内部锥条件，并且$\kappa \in C^{2k}(\Omega \times \Omega)$，则存在$C_\kappa(\boldsymbol{x})$，使得

$$|f(\boldsymbol{x}) - R_{f,X}(\boldsymbol{x})| \leq C_\kappa(\boldsymbol{x}) h_{X,\Omega}^k \|f\|_{\mathcal{N}_\kappa(\Omega)}. \tag{3}$$

因子$C_\kappa(\boldsymbol{x})$取决于$\boldsymbol{x} \in \Omega$邻域内$2k$阶核导数的最大值，并且$h_{X,\ \Omega}^k$需要足够小；有关该结果的详细介绍，请参阅 [17, 第 14 节。5]

尽管理论上可达到的收敛率受填充距离和核的光滑性影响，但有两个因素对插值过程条件性的影响至关重要：

- 分离距离$q_X := \dfrac{1}{2}\min_{i\neq j}\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|_2$- 核$\kappa_\varepsilon$的形状

参数ε的取值。

具体而言，随着分离距离减小，插值过程的条件性会变差。实际中，增加插值节点的数量通常会导致这种情况，从而减小填充距离（在 RBF 文献中，这通常称为权衡原则）。至于形状参数，取值较大时会产生高度局部化的基函数，从而得到条件性良好但可能不够准确的逼近方案；降低其取值则可能提高重构精度，但代价是条件性变差。因此，在基于核的插值中，形状参数的调节并非易事。

为部分克服这类不稳定问题，[6] 作者引入了变尺度核（VSK），定义如下。设$\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$为一个缩放函数或形状函数，$\kappa_\varepsilon : (\Omega \times \mathbb{R}) \times (\Omega \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$为一个核，则变尺度核$\kappa_\psi : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$定义为

$$\kappa_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \kappa_\varepsilon((\boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{x})), (\boldsymbol{y}, \psi(\boldsymbol{y}))),$$

对于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega$。注意，我们可以考虑由函数 $\kappa_\psi(\cdot, \boldsymbol{x})$ 张成的相关原生空间 $\mathcal{N}_{\kappa_\psi}$，$\boldsymbol{x} \in \Omega$。关于变尺度核的性质，我们回顾如下：

A1. VSK 框架的理论分析可归结为增广空间 $\Omega \times \mathbb{R}$ 中经典框架的分析。A2. 空间 $\mathcal{N}_\kappa$ 和 $\mathcal{N}_{\kappa_\psi}$ 在等距意义下同构。

在 VSK 框架中，形状参数通常设为 $\varepsilon = 1$。因此，形状函数发挥着双重作用。一方面，选择形状函数取代了对形状参数的调节。另一方面，ψ 可以通过增大增广域 $\Omega \times \mathbb{R}$ 中的分离距离，改善逼近过程的条件性。在下文中，我们不一定将形状参数限制为固定值，这与移动最小二乘 [21] 中的做法一致。请注意，若 κ 是（严格）正定的，则 κ_ψ 也是（严格）正定的。

3 通过映射基函数进行插值

本节介绍基于核的逼近框架中的所谓虚节点方法（FNA）；更一般且全面的论述请参阅 [15]。

设 $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ 为单射。我们的目的是在空间中构造函数的插值函数$R^S_{f,X}$ f

$$\mathcal{H}_{\kappa^S} = \operatorname{span}\left\{\kappa^S(\cdot, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega\right\},$$

其中 $\kappa^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \coloneqq \kappa(S(\boldsymbol{x}) S(\boldsymbol{y}))$。我们有

$$R^S_{f,X}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_i^S \kappa^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{N} c_i^S \kappa(S(\boldsymbol{x}), S(\boldsymbol{x}_i)) = R_{g,X}(S(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

其中 $g_{|S(X)} = f_{|X}$。换言之，构造插值函数 $R^S_{f,\ X} \in \mathcal{H}_{\kappa^S}$ 等价于在“伪”节点 $S(X)$处构造经典插值函数 $R_{g,\ S(X)} \in \mathcal{H}_\kappa$。与变尺度核框架类似，FNA 具有以下性质（参见 A1 和 A2）：

B1. 对 FNA 插值函数的理论分析可归结为对经典框架下插值函数的分析。这一点已在 [15, 命题 3.4] 中得到证明，并且与勒贝格常数 [7]的继承性质有关。
B2. 空间 $\mathcal{N}_\kappa$ 与 $\mathcal{N}_{\kappa^S}$ 等距同构（这是下文所述定理 1 和命题 1 的直接推论）。

在以往的研究中，FNA 主要用于两个目的。首先，利用 S 得到插值设计 $S(X)$，从而相较于原始节点集获得更稳定的插值过程。例如，在基于多项式的框架中，可以通过映射到

(多)一维情形下的（张量积）切比雪夫-洛巴托节点集来实现。此外，正如我们将在第 4 小节讨论的那样，可以采用依赖于目标的方式构造 S，以模拟底层函数可能存在的不连续性，从而在跳跃点附近恢复精度。

4 映射变尺度核

4.1 一般框架

在第 2 节和第 3 节中，我们概述了两种不同的方法。尽管它们存在一些相似之处，但用途相近。下面，我们将讨论如何将变尺度核框架与 FNA 融合为一个统一框架。首先给出以下定义。

定义 1. 设 $S:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^d$ 是单射，$\psi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 是形状函数，且 $\kappa_\varepsilon:(S(\Omega)\times\mathbb{R})\times(S(\Omega)\times\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ 是核。那么，映射变尺度核（*MVSK*）$\kappa_\psi^S:\Omega\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$\kappa_\psi^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\kappa_\varepsilon((S(\boldsymbol{x}),\psi(\boldsymbol{x})),(S(\boldsymbol{y}),\psi(\boldsymbol{y})),$$

对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$。

我们指出，κ_ψ^S 可能有多种等价的定义方式。然而，定义 1 的优势在于将 S 与 ψ 的作用分离开来：函数 S 作用于原始维度 $\mathbb{R}^d$，而 ψ 控制输入在增广维度中的坐标。在某些假设下，MVSK 会退化为映射核或 VSK。

命题 1。设 κ_ψ^S 是建立在径向核 κ_ε 上的 $\Omega\times\Omega$ 上的 *MVSK*。那么：

1. 如果 $\psi(\boldsymbol{x})\equiv\alpha\in\mathbb{R}$，则 $\kappa_\psi^S=\kappa^S$。*2.* 如果 $S(\boldsymbol{x})-S(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$（例如，$S$ 是恒等映射），则 $\kappa_\psi^S=\kappa_\psi$。

证明。根据假设，存在 $\varphi:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$，使得 $\kappa_\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\varphi(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2)$。因此，我们可以写成

$$\begin{aligned}\kappa_\psi^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=\varphi(\|(S(\boldsymbol{x}),\psi(\boldsymbol{x}))-(S(\boldsymbol{y}),\psi(\boldsymbol{y}))\|_2)\\&=\varphi(\sqrt{(S(\boldsymbol{x})-S(\boldsymbol{y}))^2+(\psi(\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{y}))^2}),\end{aligned}$$

由此可得两个结论。

我们还证明了以下结果。

定理 1。空间 $\mathcal{H}_\kappa$ 和 $\mathcal{H}_{\kappa_\psi^S}$ 是等距的。

证明。通过定义映射 $\Lambda_\psi^S(\boldsymbol{x}):=(S(\boldsymbol{x})\ \psi(\boldsymbol{x}))$，我们可以看出 κ_ψ^S 是按照 [29, 方程 2.52]中给出的含义，由 κ 推前得到的。接着，由于 S 是单射，结论便由 [29, 定理 2.9]得出。

作为定理 1 的推论，原生空间 $\mathcal{N}_\kappa$ 和 $\mathcal{N}_{\kappa_\psi^S}$ 是等距同构的（参见 [6, 第 3]节）。

无论需要恢复的目标函数是什么，我们都回顾一下：插值问题的条件性与核矩阵的 ℓ_2-条件数 cond(K) $= \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$有关，其中 $\lambda_{\max}$， $\lambda_{\min}$ 分别表示最大和最小特征值。已知， $\lambda_{\min}$ 会根据分离距离 q_X衰减，其衰减方式受核的正则性影响（见 [17, 第 16]章）。在这方面，可以使用 MVSK 来增大分离距离，从而改善插值方案的条件性，例如通过分离聚集节点。另一方面，减小填充距离可能会提高该方法的精度（见式（3））。我们将在第 5 节对此进行实验。

4.2 使用映射不连续核

下文中，我们聚焦于不连续函数的情形。首先，我们简要回顾变尺度核和 FNA 在不连续情形中的使用方式。

变尺度不连续核（VSDK）。[13] 和 [12] 提出并进一步研究了这一思路：将尺度函数 ψ 定义为在目标函数 f 的跳跃点 $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$处不连续。为此，我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界集，满足：

– Ω是 m 个两两不相交集 Ω_k、 $k \in \{1, \ldots, m\}$的并集。– 每个子集 Ω_k、$k = 1$、.. . 、 m都有 Lipschitz 边界。– f 的不连续点包含在子集 Ω_k、$k = 1$、.. . 、 m的边界并集中。

然后，令 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1$、.. . 、 $\alpha_m)$、 $\alpha_i \in \mathbb{R}$，尺度函数 ψ满足：

– ψ 是分段常数函数，满足 $\psi(\boldsymbol{x})\big|_{\Omega_k} = \alpha_k$。 – 如果 Ω_i 和 Ω_j 是相邻集合，则 $\alpha_i \neq \alpha_j$。

引用文献中开展的理论分析随后聚焦于径向核，其相关的一元函数 φ 具有以下傅里叶衰减

$$(\mathrm{F}\varphi)(\boldsymbol{\omega}) \sim (1 + \|\boldsymbol{\omega}\|^2)^{-s-\frac{1}{2}}, \quad s > \frac{d-1}{2}. \tag{4}$$

满足条件 (4) 的核（例如 Matérn 核和 Wendland 核）的原生空间是 Sobolev 空间 [30,第 10] 章。为给出变尺度核设置下以 Sobolev 空间范数表示的误差界，我们引入两个必要要素：

1. 局部填充距离

$$h_k := h_{X,\Omega_k} = \sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega_k} \min_{\boldsymbol{x}_k \in X \cap \Omega_k} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_2$$

以及全局填充距离

$$h \coloneqq \max_{k\in\{1,\dots,m\}} h_k.$$

2. 令 $s \geq 0$ 和 $1 \leq p \leq \infty$，我们定义空间

$$\mathcal{WP}_p^s(\Omega) \coloneqq \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f|_{\Omega_k} \in \mathcal{W}_p^s(\Omega_k),\ k \in \{1,\dots,m\} \right\},$$

该空间包含定义在 Ω 上的分片光滑函数 f，这些函数在任意子区域 Ω_k, $i = k, \dots, m$上的限制均属于标准 Sobolev 空间$\mathcal{W}_p^s(\Omega_k)$。空间 $\mathcal{WP}_p^s(\Omega)$ 配备范数

$$\|f\|^p_{\mathcal{WP}_p^s(\Omega)} = \sum_{k=1}^{m} \|f|_{\Omega_k}\|^p_{\mathcal{W}_p^s(\Omega_k)}.$$

在上述假设下，令$R^{\psi}_{f,X}$ 为基于 VSDK κ_ψ 构造的、在 X 处对 f 进行插值得到的基于核的插值函数。在 [12, 定理 3.4] 中，作者证明了以下结果。设 $s > 0$, $1 \leq q \leq \infty$ 和 $t \in \mathbb{N}_0$ 满足 $\lfloor s \rfloor > t + \frac{d}{2}$。那么，对于 $f \in \mathcal{WP}_2^s(\Omega)$ 以及 充分小的 h，有

$$\|f - R^{\psi}_{f,X}\|_{\mathcal{WP}_q^t(\Omega)} \leq Ch^{s-t-d(1/2-1/q)_+} \|f\|_{\mathcal{WP}_2^s(\Omega)}, \tag{5}$$

其中常数 $C > 0$ 与 h 无关。

FNA 中的 S-Gibbs 映射。 在映射基方法中，与 VSDK 框架类似，其思路是映射节点，以便在存在不连续性的地方形成一些间隙 。为此，考虑用于构造 VSDK 的子集集合 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$，所谓的*S-Gibbs* 映射 被设计为

$$S(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{\beta}_k \chi_{\Omega_k}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_k = (k\beta, \dots, k\beta) \in \mathbb{R}^d$, $\beta \in \mathbb{R}$，且 χ_{Ω_k} 是对应于 Ω_k的特征函数。在 [15, 第 4.2], 节中，作者讨论了 VSDK κ_ψ 与通过 S-Gibbs 映射构造的映射核 κ^S 之间的相似之处。结果表明，对于某些参数向量取值 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_k$，这两种方法可以得到相似 的结果。这是因为插值矩阵较为接近 ，而核是径向的。

映射 VSDK（MVSDK）。 在采用映射 VSK 核 κ^S_ψ的混合方法中，我们按如下方式处理底层函数的跳跃。

– 我们按照 VSDK 框架定义 ψ 。因此，形状函数的作用是模拟目标函数的跳跃，从而防止吉布斯现象的出现。

– 由于 ψ 已处理不连续性，我们采用 S 将节点集合 X 映射到各个 Ω_k 上，从而在局部获得更优的分布；也就是说，我们旨在减小全局填充距离，并增大全局分离距离，定义如下：

$$q \coloneqq \min_{k\in\{1,\dots,m\}} q_k,$$

$$\text{being } q_k \coloneqq q_{X_k} = \frac{1}{2}\min_{i\neq j}\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|_2,\ \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \in \Omega_k.$$

回顾式 (5) 中的误差估计，这种针对 MVSDK 的构造可能会带来更好的结果，因为 h 更小。此外，通过增大分离距离，与经典 VSDK 相比，该方案的条件性可能会有所改善。我们将在下一节的一些数值示例中检验这些方面。

5 MVSDK 数值测试

本节旨在通过一个数值示例，展示 MVSDK 框架相较于 VSDK 和经典径向基函数插值的优势。为此，我们设定 $\Omega = [-1,1]^2$，并令 $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$，考虑目标函数

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} x_1 + x_2, & x_1 < -0.3, \\ \sin(x_1 - 2x_2), & 0 \le x_1 < 0.5, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为处理 f 的跳跃，我们定义形状函数

$$\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & x_1 < -0.3, \\ 1, & -0.3 \le x_1 < 0, \\ 2, & 0 \le x_1 < 0.5, \\ 3, & x_1 \ge 0.5. \end{cases}$$

对于节点，我们令 G_N 为一组 N 节点，这些节点从均值为 $\boldsymbol{\mu} = (0,\ 0)$、协方差矩阵为 $\Sigma = 0.1 \cdot \mathrm{I}$ 的二元正态分布中采样，其中 I 为 2×2 单位矩阵。于是可以考虑如下定义的映射函数 $S : \Omega \longrightarrow \Omega$

$$S(x_1, x_2) = \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{\sqrt{0.2}}\right), 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x_2}{\sqrt{0.2}}\right)\right) - 1,$$

其中，erf 是众所周知的误差函数。为阐明 S 的构造思路，根据经典概率论，若 $z_1, \dots, z_n$ 按照均值为 μ 、标准差为 σ 的正态分布进行抽样，则 $0.5(1 + \operatorname{erf}((z_i - \mu)/(\sqrt{2}\sigma)))$，$i = 1, \dots, n$ 服从$[0,1]$上的均匀分布。因此，节点集 G_N 被映射到

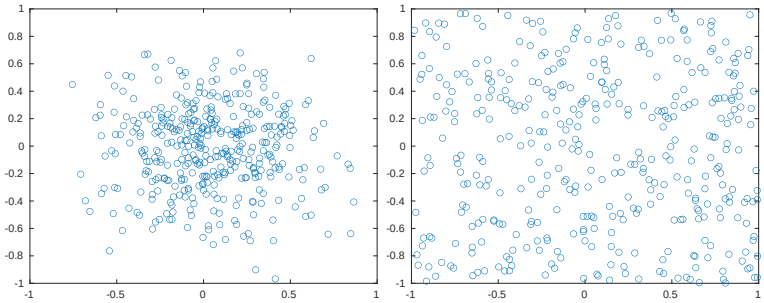


图1。 $N = 400$。左： G_N。右： S（G_N）。

正方形 $[-1, 1]^2$ 中，如图1所示。需要指出的是， G_N 中不属于 Ω 的可能节点会从集合中移除。因此，映射后的集合 $S(G_N)$ 很可能具有比 G_N 更小的填充距离和更大的分离距离。插值结果在 Ω 中更精细的 $M \times M$ 等距网格 Ξ_{M^2} 上进行评估。具体而言，我们计算均方根误差（ RMSE ）

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{M^2}\sum_{k=1}^{M^2}\big(f(\boldsymbol{\xi}_k) - \iota(\boldsymbol{\xi}_k)\big)^2}, \tag{6}$$

其中， $\boldsymbol{\xi}_k \in \Xi_{M^2}$ 和$\iota = R_{f、G_N}$、 $R^{\psi}_{f\ 、G_N}$、 $R^{\psi、f\ \ S}_{\ \ 、G_N}$ 是通过经典方法、VSDK 和 MVSDK 构造的插值函数。形状参数 ε 通过留一交叉验证（LOOCV）[23]，从区间 $[0.01, 50]$ 内 200 个等距值中选取。最后，我们令 N 在 10 到 500 之间变化，并测试两个径向核:

$$\varphi_W(r) = (1-\varepsilon r)_+^2 \quad \text{Wendland } C^0,$$
$$\varphi_M(r) = e^{-\varepsilon r}(15 + 15\varepsilon r + 6(\varepsilon r)^2 + (\varepsilon r)^3) \quad \text{Matérn } C^6.$$

在图2中，我们展示了分离距离和填充距离的变化；在图3中，我们展示了使用 φ_W 和 φ_M所获得的均方根误差。

图2中的曲线展示了在 MVSDK 中采用 S 所带来的益处，具体表现为填充距离减小、分离距离增大。在图3中，我们观察到，对于所选的 Matérn 核，MVSDK 更为有效。这是因为该核比所选的 Wendland 核更规则，因此更容易导致病态插值过程。此外，我们指出，节点集合 G_N、 $N = 10$、.....、500并非嵌套集合，而是聚集在原点附近。因此，我们不能期望准确恢复函数 f，也不能期望随着 N的增大而实现收敛。

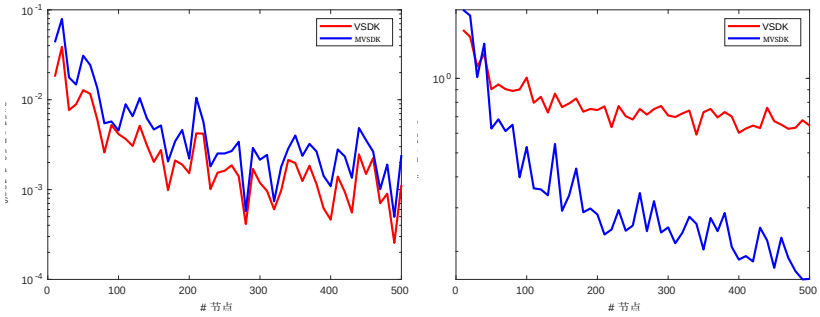


图 2. 分离距离（左）和填充距离（右）的变化 N。

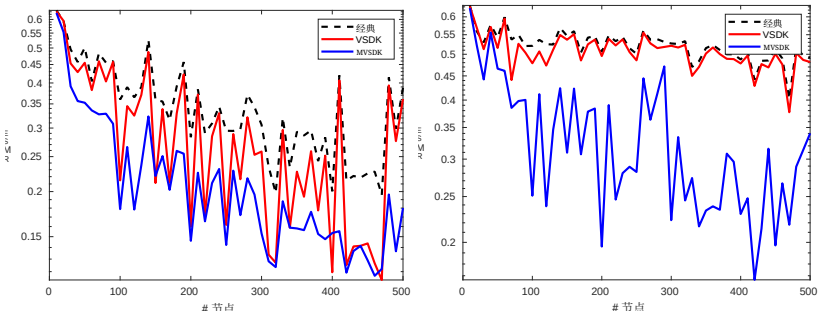


图 3. 使用 φ_W （左）和 φ_M （右）随 N 变化得到的均方根误差。

6 STIX 成像框架的应用

为了在实际应用科学中检验所提出的 MVSK，我们重点研究太阳硬X射线成像，具体而言，研究欧洲航天局 STIX 望远镜 [28]，在太阳轨道器任务中的应用（见图 4）。硬X射线望远镜可提供入射光子通量傅里叶变换在空间频率平面特定点处的实验测量值，称为可见度。对于 STIX，30 个采用莫尔条纹技术的子准直器可在频率平面的 10 个圆周上提供$N = 60$可见度，这些圆周的半径逐渐增大，约从 2.79×10^{-3} 角秒$^{-1}$ 至 7.02×10^{-2} 角秒$^{-1}$ （见图 4）。我们观察到，下半平面上的可见度是将上半平面上的可见度相对于原点反射后得到的。

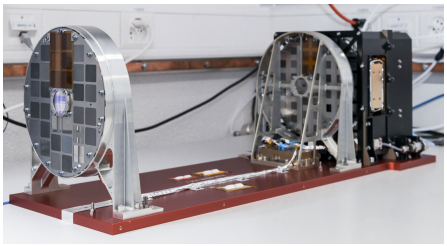


图 4. X射线成像光谱仪/望远镜（STIX）。

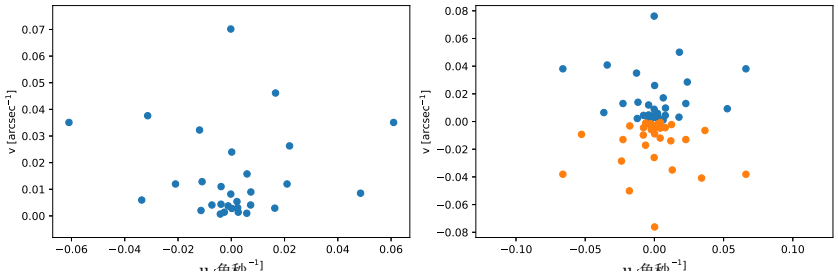


图 5. STIX 可见度：关于原点进行反射后，可见度总数为 60。

我们用$\mathbf{f}$ 表示入射通量离散化后的各分量构成的向量，用$\mathbf{F}$ 表示在 $\{\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)\}_{i=1}^{N}$ 平面的一组点上采样得到的离散傅里叶变换，并用$\mathbf{V}$ 表示其分量为 n

观测到的可见度。于是，在此框架下，成像模型可近似表示为

$$\mathbf{V} = \mathbf{F}\mathbf{f} \ . \tag{7}$$

6.1 成像过程

已有许多反演方法被提出，用于将 STIX 观测结果表示为图像，参见例如 [2,3,5,9,24,25,18]。我们提出的方法分为两个步骤：对可见度进行插值以获得可见度曲面，然后使用相当标准的技术对由此生成的曲面进行反演。这一思路此前已用于已停用的 NASA 望远镜 Reuven Ramaty高能太阳光谱成像仪（RHESSI） [22], ，其名为 uv_smooth 的 IDL 实现 [25], 可在 NASA Solar SoftWare（SSW）代码库中找到。

uv_smooth 代码通过插值和外推程序处理方程（7）：插值步骤采用基于样条函数的算法，外推步骤则通过软阈值处理方案 [10,1] 实现。至于第二步，我们将采用成熟的投影Landweber迭代法 [27]。第一步则将使用我们的 MVSK。

6.2 用于 STIX 的 MVSK

要使用 MVSK，我们需要定义一个尺度函数 ψ 和一个映射 S。

选择 ψ。 为了定义尺度函数，我们利用通过标准反投影算法 [26] 得到的逆问题的一阶近似。该算法借助美国国家航空航天局 SSW 树中的 IDL 源代码 vis_bpmap，计算可见度的离散逆傅里叶变换。随后对由此构造的图像进行正向傅里叶变换，以得到 ψ。计算出插值后的可见度曲面 $\mathbf{V}$ 后，图像重建问题如下：

$$\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{F}\mathbf{f}} \ , \tag{8}$$

其中，$\overline{\mathbf{F}}$ 是 $N^2 \times N^2$ 离散傅里叶变换，$\mathbf{f}$是待重构的 $N^2 \times 1$向量。下文将指出，使用我们的方法对可见度进行插值有哪些优势。

选择 S。 为了详细介绍为 STIX 成像框架所选的映射 S ，我们先进一步阐述图 5 （左）中所示可见度的定义。我们有

$$u_i = (L_1 + L_2)\frac{\cos(\alpha_i^f)}{\rho_i^f} - L_2\frac{\cos(\alpha_i^r)}{\rho_i^r}, \ v_i = (L_1 + L_2)\frac{\sin(\alpha_i^f)}{\rho_i^f} - L_2\frac{\sin(\alpha_i^r)}{\rho_i^r},$$

其中， $L_1 = 550$、 $L_2 = 47$ 和 α_i^f， ρ_i^f， α_i^r， ρ_i^r 在 [19] 中进行了讨论。我们定义映射

$$S(u,v) = C\log(\|(u,v)\|_2)(\cos(\arctan(v/u)), \sin(\arctan(v/u))),$$

其中， C 是一个归一化因子，用于在映射后保留原始可见度的数量级。从图 6 中可以看出，映射后的可见度分布在一个圆环上，没有聚集在原点附近。

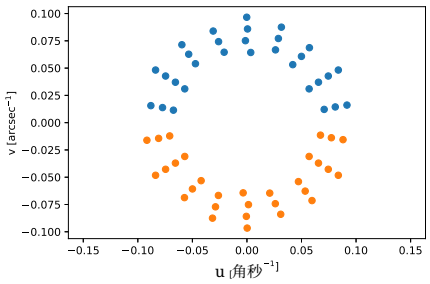


图 6. 映射后的 STIX 可见度。

6.3 数值结果

2022年7月，STIX 在世界时 23:41:15–23:41:41 的时间段内记录到一次耀斑。该事件的能量范围为 15–25 千电子伏。图 7 展示了采用插值/外推算法进行的重构结果，其中分别使用经典径向核、变尺度核和 MVSK 进行插值。此外，作为进一步比较，我们还考虑了 mem_ge [24] ，这是最大熵方法的一种成熟实现，太阳物理学界广泛使用该方法。我们注意到，所有方法都存在伪影，但使用 MVSK 插值重构的源形状与 mem_ge 得出的结果更为相似。为了定量评估精度，我们在图 8 中展示了采用四种不同方法得到的可见度拟合。我们还观察到，mem_ge 和 uv平滑 $+$ MVSK 的卡方值相近，且均为最低。_

7 结论

本文通过将变尺度核与 FNA 相结合，定义了 MVSK。在介绍了一些理论细节后，我们进行了数值模拟，结果显示，与经典的径向基函数核和变尺度 DK 相比，使用 MVSDK 具有优势。随后，我们将该方法应用于硬X射线天文成像。所得结果表明，值得沿着这一研究方向开展进一步研究。

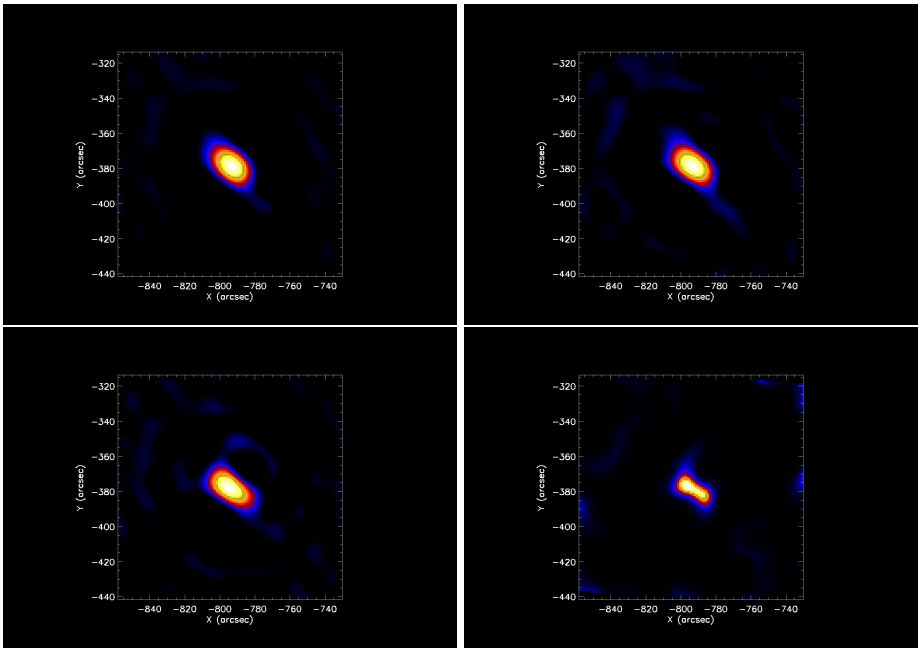


图7. 从左到右、从上到下：采用 uv_smooth ＋ 经典径向核、uv_smooth ＋ 变尺度核、uv_smooth ＋ MVSK 和 mem_ge 对耀发源进行重构。

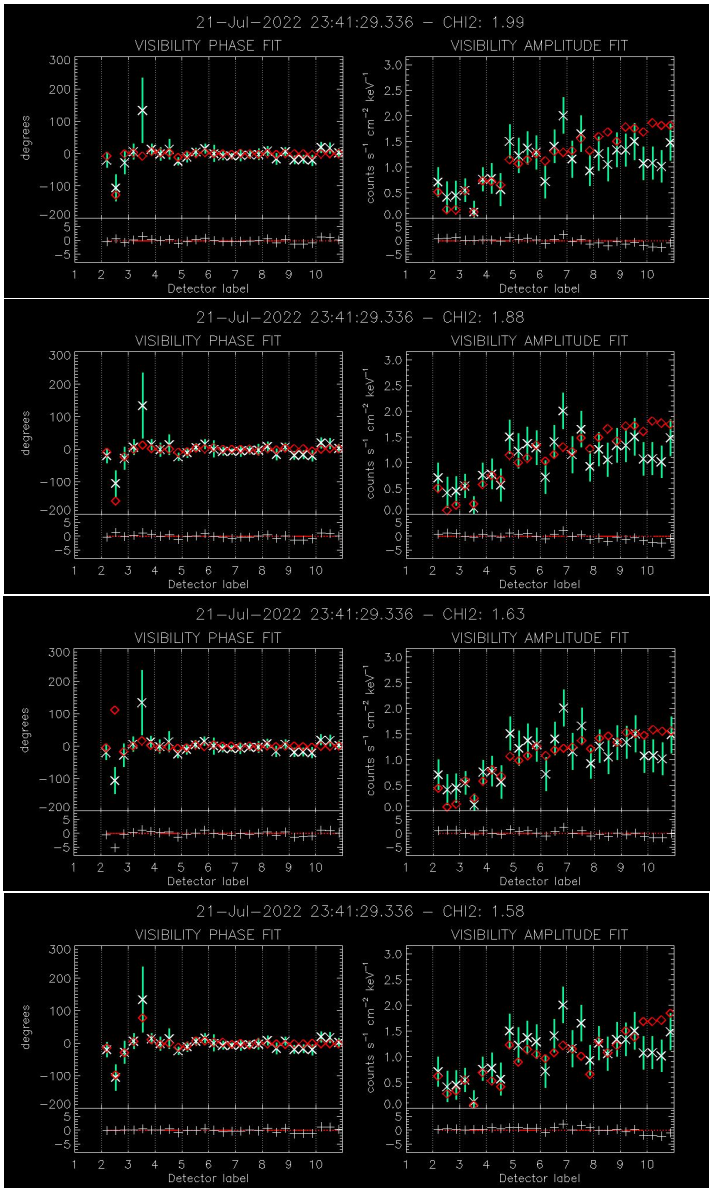


图 8. 从上到下：耀发源的可见度拟合，依次使用：uv_smooth ＋经典径向核、uv_smooth ＋变尺度核、uv_smooth ＋ MVSK 和 mem_ge。

致谢

EP 和 AM 获得项目“用于预测极端天气和空间天气事件的基于物理的人工智能（AIxtreme）”的支持，该项目由 Fondazione Compagnia di San Paolo 资助。FM 感谢“2014—2020年研究与创新国家运营计划（PON）”提供的资金支持。作者谨此感谢 AI-FLARES ASI-INAF n.2018-16-HH.0 协议提供的资金支持。本研究在 GNCS-INδAM 项目框架内完成。

参考文献

1. Allavena, S., Piana, M., Benvenuto, F., Massone, A.M.: 一种用于太阳耀斑X射线成像的插值/外推方法。《逆问题图像》**6**, 147 (2012) 2. Aschwanden, M.J., Schmal, E., RHESSI团队：采用前向拟合方法重构RHESSI太阳耀斑图像。Sol. Phys. **210**, 193 – 211 (2002) 3. Benvenuto, F., Schwartz, R., Piana, M., Massone, A.M.: 硬X射线计数调制轮廓的期望最大化。Astron. Astrophys. **555**, A61 (2013) 4. Berrut, J.P., De Marchi, S., Elefante, G., Marchetti, F.: 通过 S-Gibbs算法处理重心有理插值与逼近中的吉布斯现象。Appl. Math. Lett. **103**, 106196, 7 (2020) 5. Bonettini, S., Anastasia, C., Prato, M.: 一种新的基于傅里叶变换的图像复原半盲反卷积方法：天文学中的一项应用。SIAM J. Imaging Sci. **6**, 1736–1757 (2013) 6. Bozzini, M., Lenarduzzi, L., Rossini, M., Schaback, R.: 使用变尺度核进行插值。IMA J. Numer. Anal. **35**(1), 199–219 (2015) 7. Brutman, L.: 多项式插值的勒贝格函数：综述。Ann. Numer. Math. **4**(1/4), 111–128 (1996) 8. Campi, C., Marchetti, F., Perracchione, E.: 通过变尺度核进行学习。Adv. Comput. Math. **47**(4), 论文编号51，23 (2021)。https://doi.org/10.1007/s10444-021-09875-6, https://doi.org/10.1007/s10444-021-09875-6 9. Cornwell, T., Evans, K.F.: 一种简单的最大熵反卷积算法。Astron. Astrophys. **143**(1), 77–83 (1985) 10. Daubechies, I., Defrise, M., De Mol, C.: 一种用于带稀疏性约束的线性逆问题的迭代阈值算法。Commun. Pure Appl. Math.**57**(11), 1413–1457 (2004) 11. De Marchi, S., Elefante, G., Marchetti, F.: 稳定的不连续映射基：避免吉布斯-龙格现象的稳定多项式逼近（GRASPA）方法。Comput. Appl. Math. **40**(8), 论文编号299，17 (2021) 12. De Marchi, S., Erb, W., Marchetti, F., Perracchione, E., Rossini, M.: 基于形状的不连续核插值：误差分析、边缘提取及其在磁粒子成像中的应用。SIAM J. Sci. Comput.**42**(2), B472–B491 (2020) 13. De Marchi, S., Marchetti, F., Perracchione, E.: 使用变尺度不连续核进行跳跃（VSDKs）。BIT Numer. Math. **60**, 441–463 (2020)

14. De Marchi, S., Marchetti, F., Perracchione, E., Poggiali, D.: 通过映射基进行多项式插值，无需重新采样。计算与应用数学杂志 **364**, 112347, 12 (2020) 15. De Marchi, S., Marchetti, F., Perracchione, E., Poggiali, D.: 伪节点处的多变量逼近。应用数学与计算 **391**, 论文编号125628，17 (2021) 16. De Marchi, S., Lot, F., Marchetti, F., Poggiali, D.: 用于持久同调应用的可变尺度持久性核（VSPKs）。计算数学与数据科学杂志 **4**, 100050 (2022) 17. Fasshauer, G.E.: MATLAB无网格逼近方法。World Scientific (2007) 18. Felix, S., Bolzern, R., Battaglia, M.: 一种基于压缩感知的太阳耀斑X射线观测图像重构算法。《天体物理学杂志》**849**(1), 10 (2017) 19. Giordano, S., Pinamonti, N., Piana, M., Massone, A.M.: 太阳轨道器上X射线成像光谱仪/望远镜（STIX）的数据形成过程。SIAM J. Imaging Sci. **8**(2), 1315–1331 (2015) 20. Guastavino, S., Benvenuto, F.: 谱正则化方法的收敛速率：不适定逆问题与统计核学习之间的比较。SIAM《数值分析杂志》**58**(6), 3504–3529 (2020) 21. Karimnejad Esfahani, M., De Marchı, S., Marchetti, F.: 使用可变尺度不连续权函数的移动最小二乘逼近。构造性数学分析 **6**(1), 38 – 54 (2023) 22. Lin, R.P., Dennis, B.R., Hurford, G.J., Smith, D.M., Zehnder, A., Harvey, P.R., Curtis, D.W., Pankow, D., 都灵, P., Bester, M., Csillaghy, A., Lewis, M., Madden, N., Beek, H.F.V., Appleby, M., Raudorf, T., McTiernan, J., Ramaty, R., Schmahl, E., Schwartz, R., Krucker, S., Abiad, R., Quinn, T., Berg, P., Hashii, M., Sterling, R., Jackson, R., Pratt, R., Campbell, R.D., Malone, D., Landis, D., Barrington-Leigh, C.P., Slassi-Sennou, S., Cork, C., Clark, D., Amato, D., Orwig, L., Boyle, R., Banks, I.S., Shirey, K., Tolbert, A.K., Zarro, D., Snow, F., Thomsen, K., Henneck, R., Mchedlishvili, A., Ming, P., Fivian, M., Jordan, J., Wanner, R., Crubb, J., Preble, J., Matranga, M., Benz, A., Hudson, H., Canfield, R.C., Holman, G.D., Crannell, C., Kosugi, T., Emslie, A.G., Vilmer, N., Brown, J.C., Johns-Krull, C., Aschwanden, M., Metcalf, T., Conway, A.: Reuven Ramaty高能太阳光谱成像仪（RHESSI）。《太阳物理学》**210**(1-2), 3 –32 (2002) 23. Ling, L., Marchetti, F.: 一种用于LpOCV的随机扩展Rippa算法。Ap-plied Mathematics Letters **129**, 107955 (2022) 24. Massa, P., Schwartz, R., Tolbert, A.K., Massone, A.M., Dennis, B.R., Piana, M., Benvenuto, F.: MEM¯GE：一种从太阳X射线可见度重构图像的新型最大熵方法。《天体物理学杂志》**894**(1), 46 (2020) 25. Massone, A.M., Emslie, A.G., Hurford, G.J., Prato, M., Kontar, E.P., Piana, M.: 使用插值可见度进行太阳耀斑硬X射线成像。《天体物理学杂志》**703**, 2004–2016 (2009) 26. Mersereau, R., Oppenheim, A.: 根据投影对多维信号进行数字重建。IEEE会议录 **62**(10) (1974) 27. Piana, M., Bertero, M.: 投影Landweber方法与预条件。《逆问题》**13**(2), 441–463 (1997) 28. S. Krucker, G. J. Hurford, O. Grimm, S. Kögl, H. P. Gröbelbauer, L. Etesi, D. Casadei, A. Csillaghy, A. O. Benz, N. G. Arnold, F. Molendini, P. Orleanski, D. Schori, H. Xiao, M. Kuhar, N. Hochmuth, S. Felix, F. Schramka, S. Marcin, S. Kobler, L. Iseli, M. Dreier, H. J. Wiehl, L. Kleint, M. Battaglia, E. Lastufka, H.

Sathiapal, K. Lapadula, M. Bednarzik, G. Birrer, St. Stutz, Ch. Wild, F. Marone, K. R. Skup, A. Cichocki, K. Ber, K. Rutkowski, W. Bujwan, G. Juchnikowski, M. Winkler, Darmetko, M. Michalska, K. Seweryn, A. Bialek, P. Osica, J. Syl- wester, M. Kowalinski, D. ´Scislowski, M. Siarkowski, M. Ste´slicki, T. Mrozek, P. Podgórski, A. Meuris, O. Limousin, O. Gevin, I. Le Mer, S. Brun, A. Strugarek, N. Vilmer, S. Musset, M. Maksimovi´c, F. Fárník, Z. Kozácek, J. Kasparová, G. Mann, H. Önel, A. Warmuth, J. Rendtel, J. Anderson, S. Bauer, F. Dionies, J. Paschke, D. Plüschke, M. Woche, F. Schuller, A. M Veronig, E. C. M. Dickson, P. T. Gal- lagher, S. A. Maloney, D. S. Bloomfield, M. Piana, A. M. Massone, F. Benvenuto, P. Massa, R. A. Schwartz, B. R. Dennis, H. F. van Beek, J. Rodríguez-Pacheco, R. P. Lin：《X射线成像光谱仪/望远镜（STIX）》。Astron. Astrophys.**642**, A15（2020年）29. Saitoh, S., Sawano, Y.：《再生核理论与应用》，数学进展丛书，第44卷。施普林格，新加坡（2016年）30. Wendland, H.：《散乱数据逼近》，剑桥应用数学与计算数学专著，第17卷。剑桥大学出版社，剑桥（2005年）