arXiv:2304.00981v1 [math.HO] 31 Mar 2023

一维内部山羊问题的闭式解

Nathaniel Dene Hoffman*[1]

[1]鲁莽应用数学系，圣塞里夫大学

2023年4月1日

摘要

“内部山羊问题”是一道困扰数学家近三个世纪的数值谜题。目前，人们只找到了二维情形的闭式解；尽管已经为高维版本建立了近似解，但数学文献中仍缺少一维内部山羊问题的解。为弥补这一疏漏，我们给出一维内部山羊问题的闭式解，并推测其在更低维情形下的延伸。

1 引言

自《女士日记》1749年版 [4], 首次提出所谓的“外部山羊问题”以来，人们 [3, 1, 2, 6, 7]一直在尝试求解 Charles E. Myers 在《美国数学月刊》创刊号 [5],中提出的相关“内部山羊问题”（及其各种推广），题目如下：

> 一个面积为一英亩的圆被另一个圆所截，后者的圆心位于给定圆的圆周上，且两圆的公共面积为半英亩。求截圆的半径。

Ullisch [7] 最近给出的优雅解法独具一格，因为它是一个闭式解：

$$R = 2r\cos\left(\frac{1}{2}\frac{\oint_{|z-3\pi/8|=\pi/4} z\,\mathrm{d}z\,/(\sin z - z\cos z - \pi/2)}{\oint_{|z-3\pi/8|=\pi/4} \mathrm{d}z\,/(\sin z - z\cos z - \pi/2)}\right) \tag{1}$$

*电子邮箱：dene@cmu.edu

其中， r 为圆形栅栏的半径， R 为系绳的长度。当 $r=1$ 时，Ullisch 将解近似为 $R\approx 1.15872847302$。

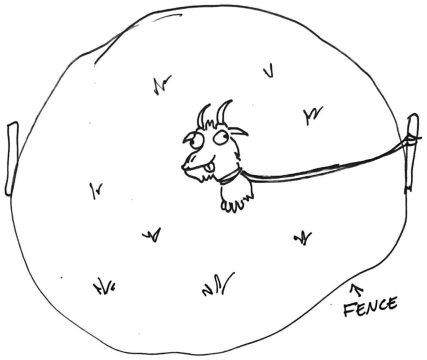

图 1：二维内部山羊问题。这只山羊被残忍地拴住，因此只能在半个场地内吃草。

1984年，Fraser [2] 为推广到 n维场地的情形找到了通解（当然，山羊也是 $n+1$维的）。这些解除了证明中一个由 Meyerson [6]纠正的小错误外，都是正确的。Fraser 给出$R_n = k_n r$，其中 $k_n = 2\cos\beta$。此外， β定义为：连接场地中心与系绳非山羊端点的直线，与山羊沿围栏能够到达的最远点之间的角度。通过对下列方程进行数值求解，可以得到 β （以及 k_n）的近似值：

$$(2\cos\beta)^n \int_{(\pi/2)-\beta}^{\pi/2} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\beta-(\pi/2)} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

Fraser 给出了 $n=2$、3、4、5 这些情形的近似解，其中$n=2$ 情形只是

$$\sin 2\beta - 2\beta\cos 2\beta = \frac{\pi}{2} \implies k_2 \approx 1.158728, \tag{3}$$

与 Ullisch 的闭式解所得相同的数值结果。此外， [2] 和 [6] 都得出结论：$\lim_{n\to\infty} k_n = \sqrt{2}$。

然而，相关文献中似乎显著缺少 $n=1$ 这一情形。在下一节中，我们将为这一重要情形提出一个闭式解。



图 2：一维内部山羊问题。此前，数学文献尚未确定将它限制在半个田地内所需的系绳长度。

2 闭式解

我们从 Fraser 的工作开始，现在令 $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
(2\cos\beta)^1 \int_{(\pi/2)-\beta}^{\pi/2} \cos^1\theta \,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\beta-(\pi/2)} \cos^1\theta \,\mathrm{d}\theta \\
2\cos\beta \left[\sin\theta \Big|_{\theta=(\pi/2)-\beta}^{\pi/2} \right] &= \left[\sin\theta \Big|_{\theta=0}^{2\beta-(\pi/2)} \right] \\
2\cos\beta \left[\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - \sin\Big(\frac{\pi}{2} - \beta\Big) \right] &= \left[\sin\Big(2\beta - \frac{\pi}{2}\Big) - \sin(0) \right] \\
2\cos\beta \left[1 - \sin\Big(\frac{\pi}{2} - \beta\Big) \right] &= \left[\sin\Big(2\beta - \frac{\pi}{2}\Big) - 0 \right] \qquad (4)
\end{aligned}
$$

这对初学者来说可能相当棘手，但我们可以利用一个巧妙的三角恒等式进一步化简方程:

$$
\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad (5)
$$

因此，应用方程 5 后，我们得到

$$
\begin{aligned}
2\cos\beta\,[1 - 1\cdot\cos(\beta) - 0\cdot\sin(\beta)] &= [\sin(2\beta)\cdot 0 - \cos(2\beta)\cdot 1] \\
2\cos\beta\,[1 - \cos(\beta)] &= -\cos(2\beta) \\
2\cos(\beta) - 2\cos^2(\beta) + \cos(2\beta) &= 0 \\
2\cos(\beta) - 1 - \cos(2\beta) + \cos(2\beta) &= 0 \\
\cos(\beta) &= \frac{1}{2} \\
\implies \beta &= \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

最后，我们可以用这个 β 求出解:

$$
k_1 = 2\cos\beta = 2\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \qquad (7)
$$

由于余弦函数是偶函数，且周期为 2π，因此我们忽略 $\pm$ 和 $+2\pi m$ 。

3 讨论

我们该如何理解这个解？首先，什么是一维牧场？更高维的牧场定义为由 n-球面围栏围住的 n 球。一般而言， n 球的体积为

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{8}$$

so

$$V_1(r) = \frac{\pi^{1/2} r^1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 2r \tag{9}$$

因此，要让山羊吃到牧场一半的体积，我们必须让它恰好能够到达牧场的 $\frac{1}{2} \cdot 2r = r$ 个单位。根据上文给出的 k_1 解，我们可以得出，系绳长度 $R = k_n r$ 必须为 $R = r$，也就是牧场半径。这听起来确实很合理——我问过不少人，他们通常都认同我的看法。

如何围起一维牧场？既然我们将围栏定义为 n 球面，牧场就只有两根围栏桩，分别位于牧场两端，这肯定能省下一大笔建造费用。此外，对于 $n = 0$ 情况，我们有

$$\beta = 2\beta - \frac{\pi}{2} \implies \beta = -\frac{\pi}{2} \implies k_0 = 0 \tag{10}$$

而当然，

$$V_0(r) = \frac{\pi^0 r^0}{\Gamma(1)} = 1 \tag{11}$$

因此，零维牧场中的一维山羊可以站着不动，便能吃到一半的面积（见图 3）。

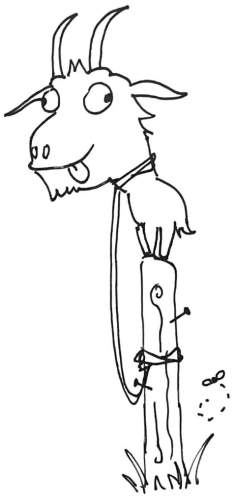

图 3：零维的内部山羊问题。这只山羊既能吃到半个牧场，也能吃完整个牧场！

我们提出这一结果，旨在澄清人们对低维山羊问题解法的种种误解。显而易见，这些解法出乎人们的直觉预期。未来对分数维山羊的研究或许会有所裨益（见图 4）；此外，作者还建议对 $n = 1$ 情形开展一项活体研究，前提是能找到这样一只二维山羊[1] ，并筹集到建造一维牧场。

[1]目前尚不清楚，是否存在一种二维山羊物种，其身体不会被消化道完全分成两半。

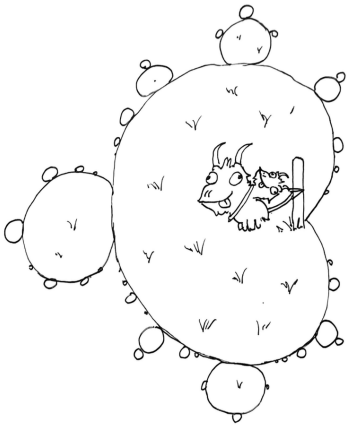

图 4：分形场中的一只山羊。这个问题似乎相当难，所以我就留给读者作为练习。

4 致谢

作者谨此感谢 Geoffrey Chaucer、Eloy d'Amerval 和 Eduard de Dene（并无亲属关系）所作的有益贡献。作者还要感谢 AJ Hoffman（确有亲属关系）提供插图。此外，作者感谢 Ingo Ullisch 为原始问题提出的创意解法，该解法启发了本文。

参考文献

[1] Marshall Fraser. 两只山羊的故事。*Mathematics Magazine*，55:221，9 1982年。

[2] Marshall Fraser. n维空间中的吃草山羊。*The College MathematicsJournal*，15:126，3 1984年。

[3] P. Glaister. 75.16 吃草问题的近似解。*TheMathematical Gazette*，75:198–199，6 1991年。

[4] N. N. Heath。问题302，1749年。

[5] H. Heaton、H. W. Holycross 和 C. E. Myers。问题30。《美国数学月刊》，1:395–396，1894年。[6] Mark D. Meyerson。n维空间中放牧山羊问题的回归。*The CollegeMathematics Journal*，15:430，1984年11月。[7] Ingo Ullisch。几何山羊问题的闭式解。数学智者，42:12–16，2020年9月。