arXiv:2304.00992v2 [math.DS] 6 Jun 2024

环面曲面映射的无稳定性等分布

JEFFREY DILLER 和 ROLAND ROEDER

Abstract. 我们证明了一类广泛的有理映射 $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 的曲线迭代原像满足等分布结果；这些映射无法通过双有理共轭变为代数稳定映射。这些映射包括近期发现的、具有超越第一动力次数的例子，其特点是相对于代数环面上的自然全纯二形式，它们具有常数雅可比行列式。在附加假设 f 具有"小拓扑次数"的情况下，我们还证明了曲线迭代正向像的等分布结果。

为证明这些结果，我们系统地发展了在所有环面曲面的逆极限上研究正闭（1,1）流及其上同调类的思想。进而，这一方法依赖于对单个环面曲面上的正闭（1,1）流进行细致研究。该框架或可用于其他情境。

1. Introduction

关于有理映射 $f : \mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^k$ 在复射影空间 $\mathbb{P}^k$ 上的动力学，一个核心问题是理解当 $n \to \infty$ 时，适当一般的真子簇 $V \subset \mathbb{P}^k$ 在 V 下的原像 $f^{-n}(V)$ 的渐近行为。[RS] 已证明，当 $f^{-n}(V)$ 的次数随 n 足够快地趋于 ∞ 时，这种行为与 V 无关。事实上，人们希望在归一化后，这些原像在积分流意义下收敛到某个不变正闭流，其支集刻画了 f 的动力学至少在 $\operatorname{codim} V$ 个方向上呈指数扩张的点集。$k = 1$ 的情形由 Brolin [Bro] 针对多项式 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 解决；而对于一般有理映射 $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$，Lyubich [Lju] 以及 Freire、Lopes 和 Mañe [FLMn] 分别独立解决了这一问题。他们证明，当 $\deg f \geq 2$ 时，非例外点 $z \in \mathbb{P}^1$ 的原像 $f^{-n}(z)$ 会相对于一个 f-不变测度等分布，该测度的支集与 f 的 Julia集重合。

将定义域和子簇的维数都增加一维后，我们会遇到另一个困难。对我们而言，支配有理映射$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 的次数 $\deg(f)$将定义为一般直线 $\ell \subset \mathbb{P}^2$的原像 $f^{-1}(\ell)$ 的次数。若对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$都有 $\deg(f^n) = (\deg f)^n$，则称f代数稳定。Sibony [Sib2] 证明，如果 f是代数稳定的且 $\deg f \geq 2$，那么存在一个双次数为 (1, 1) 的正闭流 T^*，使得对于几乎每条曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$, ，都有弱收敛

$$\frac{1}{\deg(f^n)} f^{-n}(C) \to (\deg C) \cdot T^*.$$

然而，与一维情形不同，代数稳定性条件可能不成立。这与如下事实有关（见§2.3）：有理映射 $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 不一定在所有点上都连续定义。代数稳定性的概念可推广到任意光滑射影曲面上的有理映射f：$X \dashrightarrow X$，而在 $\mathbb{P}^2$ 上许多不满足

2020年数学主题分类。37F80（主要），14E05、32H50、32U40（次要）。1

代数稳定性的有理映射，仍然存在代数稳定模型，也就是说，它们可提升为有理曲面 $X \to \mathbb{P}^2$ 上的代数稳定映射；这些曲面由经过精心选择的有限次点吹起序列得到（相关讨论见 [Bir22]）。此外，事实证明 Sibony 的结果在这种情形下仍然成立（见 [DDG1]中的推论2.11）。

遗憾的是，存在有理映射 $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$，它们不仅不是代数稳定的，而且根本不存在任何稳定模型。例如，Favre [Fav] 观察到，若 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是一个特征值 $re^{\pm 2\pi i\theta}$ 均非零且辐角为无理数 $\pm\theta$的整数矩阵，那么相应的“单项式”映射 $f(x_1, x_2) := (x_1^a x_2^b, x_1^c x_2^d)$ 无法通过曲面的双有理变换 $\varphi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 共轭为代数稳定映射$f_X: X \dashrightarrow X$。虽然理解单项式映射对曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 的原像的等分布并不特别困难（见下文定理 9.3），但第一作者和 Lin [DL1] 后来将 Favre 的观察推广到了范围更广、类型更多样的“环面”有理映射类。本文将满足 $f^*\eta = \rho(f)\eta$ 的 $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 称为环面映射，其中 $\eta := \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1 x_2}$表示代数环面 $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2$ 上的自然全纯二形式，且 $\rho(f) \in \mathbb{C}^*$ 是一个非零常数。除 Birkett [Bir22], 最近给出的若干扭积例子外，所有已知的不具备稳定模型的平面有理映射例子都是环面映射。本文旨在证明，对于环面曲面映射，即使没有稳定模型，也能得到关于曲线的等分布结果。

为陈述我们的主要结果，我们简要描述其所依据的核心构造。 [DL1] 注意到，通过让 f^n 的定义域和值域沿着代数环面 $\mathbb{T} := (\mathbb{C}^*)^2$的一列日益复杂的紧化变化，可以最好地分析环面映射 $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$。受 [BFJ] 和 [Can1] 的启发，我们将这一思想贯彻到了逻辑上的极致。也就是说，对于光滑射影环面曲面 $X \succ Y$ 和 X，如果双有理映射 $\pi_{XY}: X \dashrightarrow Y$延拓 $\mathrm{id}: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 是一个态射，即如果 X 能够通过有限次点吹起从 Y 规范地得到，那么我们就声明 Y。随后，我们考虑由 f 在满足这一序关系的所有环面曲面的逆极限 $\mathbb{T}$ 上诱导的映射 $f: \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$。

$\mathbb{T}$ 正如我们在§3中所解释的，紧空间 $\mathbb{T}$ 近乎是一个复曲面：它 $\mathbb{T}$ 包含 $\mathbb{T}$ 作为一个开稠密子集，而补集 $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}$ 主要由极点组成，即由$\mathbb{T}$-不变曲线 C_τ 构成，这些曲线由有理射线 $\tau \subset \mathbb{R}^2$编号。同样，我们在§4中定义并研究的映射$\hat{} f: \hat{}_{\mathbb{T}} \dashrightarrow \hat{}\mathbb{T}$，其行为很像射影曲面上的有理映射。它在有限的持久不定集$\mathrm{Ind}(f) \subset \mathbb{T}$之外是$\hat{} \hat{}$良定义且连续的。每条曲线 $C \subset \mathbb{T}$在 f下的像$\hat{} \hat{} \hat{} \hat{} f(C)$要么是一条曲线，要么在 $C \subset \mathrm{Exc}(f)$属于有限条$\hat{} \hat{}$持续例外曲线之一时，是一个点。集合$\mathrm{Ind}(f)$和$\mathrm{Exc}(f)$恰为空，当且仅当环面映射 f 是单项式映射。更一般地，对于环面映射 $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$，若对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$都有 $f^n(\mathrm{Exc}(f)) \cap \mathrm{Ind}(f) = \emptyset$，则称其为内部稳定。对于环面映射而言，这一条件远弱于代数稳定性。所有单项式映射以及 [BDJ]中所展示的具有超越动力学次数的环面映射都满足这一条件。 [HP]关于两个复变量中牛顿法动力学的工作，是与我们此处所描述的构造类似的早期实例：为了理解一个映射的动力学，其定义域被无限多次爆破。

我们在第 9 节证明，单项式映射在环面有理映射 $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 中之所以具有区别性，是因为它们具有最小的第一动力次数

$$\lambda_1(f) := \lim_{n\to\infty} \deg(f^n)^{1/n} \in [d_{top}(f)^{1/2}, \deg(f)]. \tag{1}$$

这里 $d_{top}(f)$ 是 f 的拓扑次数，对于一般点 x，它等于 $\#f^{-1}(x)$。

定理 1.1。若 $f\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ 是一个内部稳定的环面映射，且 $\lambda_1(f)^2 = d_{top}(f)$，则以下情况之一成立：

- f 是平移单项式映射，形式为 $x \mapsto yh(x)$，其中 h 是某个单项式映射，$y \in \mathbb{T}$ 是固定因子；或者
- $\lambda_1(f)$ 是一个正整数，并且存在一个“特征”坐标系，使得 f 具有斜积形式

$$f(x_1, x_2) = (tx_1^{\pm\lambda_1(f)}, g(x_1)x_2^{\pm\lambda_1(f)})$$

其中某个 $t \in \mathbf{C}^*$，且 g 是有理函数：$\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$。

特征坐标将在第 3 节介绍。我们请读者将定理 1.1 与 Favre 和 Jonsson 先前对第一动力次数最小的 $\mathbf{C}^2$ 多项式映射的刻画进行比较（参见 [FJ, 定理 C]）。

为陈述下一个结果，我们回顾 DL 中的一个简单判据，用于识别存在代数稳定模型的环面有理映射 $f\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$。单项式映射所对应的矩阵 A 可通过其“热带化”推广（定理 4.8）为任意环面映射 f：一个连续、正齐次的分段线性映射 $A_f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$。它控制诱导映射 f通过 $f(C_\tau) = C_{A_f(\tau)}$ 对极点的作用。在所有已知的例子中，A_f 实际上都是同胚，因此通过圆周同胚作用于射线。映射f 存在稳定模型，当且仅当该圆周同胚的旋转数为有理数。我们的主要等分布结果讨论的是互补情形。

定理1.2. 设 $f\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ 是一个环面有理映射，其热带化是具有无理旋转数的同胚。若 f 内部稳定且不等于平移单项式映射，则 $\lambda_1(f) > 1$，并且存在 $\mathbf{P}^2$上的一个正闭 (1, 1) 流 T^*，具有以下性质。

- T^* 不在曲线上赋予质量。
- $f^*T^* = \lambda_1(f)T^* + D$，其中 D 是一个有效 R-除子。
- 对于每条曲线 $C \subset \mathbf{P}_2$，都存在 $m(C) > 0$，使得 $\frac{1}{\deg(f^n)}(\cancel{(f^n)^*C} \to m(C)T^*$.

为证明该定理，我们沿用 [BFJ] 在第 7 节中的方法，引入一个由环面上同调类构成的空间 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$，并配备线性拉回算子和推前算子 $\hat{f}^*, \hat{f}_*\colon H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}}) \to H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$。事实上，我们更进一步，引入环面流空间 $\mathcal{D}_{1,1}(\hat{\mathbb{T}})$，其中的流可以自然地表示环面类。$\mathbb{T}$ 中的曲线是正环面流的实例。

实现这些想法需要大量前期工作，相关内容见第6节，讨论固定环面曲面上双次数为 (1, 1) 的正闭流。特别地，对于 $\mathbb{T}$ 上任意（不一定是 $\mathbb{T}$ 不变的）正闭 (1, 1) 流 T，我们关联一个凸函数 $\psi_T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$，并在定理6.9中证明：$T$ 可平凡地延拓为某个/任意紧托里克曲面上的正闭流，当且仅当 ψ_T 至多线性增长。特别地，任意此类流 $T \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 都对应于 $\mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 中的一个元素，我们称其为内部的，以区别于支集中含有 $\mathbb{T}$ 的极点的流。若一个内部流 $T \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 满足

- ψ_T 是正齐次的，对于所有 $t \geq 0$ 和 $v \in \mathbf{R}^2$，满足 $\psi(tv) = t\psi(v)$；并且
- $T = dd^c(\psi_T \circ$对数映射), 其中 Log : $\mathbb{T} \to \mathbf{R}^2$ 是“热带化”映射，在特选局部坐标中定义为 $\mathrm{Log}(x_1, x_2) = (-\log|x_1|, -\log|x_2|)$。

齐次流作为其在 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 中各类的典范代表。

定理1.3. 将每个环面流对应到其上同调类的连续线性映射 $T \mapsto [T]$ 将 $\mathcal{D}_{1,1}(\hat{\mathbb{T}})$ 中的正齐次流锥同胚地映到 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 中的数值有效类锥。

在此设定下，定理1.2的证明如下。在第8节中，我们仿照 [BFJ]，在 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 和 $\mathcal{D}_{1,1}(\hat{\mathbb{T}})$ 上定义推前和拉回。f 的内部稳定性蕴含，对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有 $(f^n)^* = (f^*)^n$。随后，[BFJ] 的主要结果表明，定理1.2在上同调层面成立。也就是说，存在一个上同调类 $\alpha^* \in H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$，使得对于任意数值有效类 $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$，都有 $\frac{f^{n*}\alpha}{\deg(f^n)} \to m(\alpha)\alpha^*$，其中某个常数为 $m(\alpha) > 0$。

在第10节中，我们通过从上同调类过渡到流，完成定理1.2的证明。若 $C \subset \hat{\mathbb{T}}$ 是一条内部曲线（即满足 $C \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$），那么归一化拉回 $C_n = \frac{1}{\lambda_1^n \deg(f^n)} f^{n*}C$，$n \geq 0$ 也具有内部性，且其上同调类 α_n 是数值有效的。若 $T_n \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 是 $\lambda_1(f)^{-n} f^{n*}\alpha$ 的典范齐次代表，那么我们可以将 $C_n = T_n + dd^c\varphi_n$ 写成 $\mathbb{T}$ 上的某个相对势 φ_n。根据定理1.3，流 T_n 收敛于 α^* 的典范代表 T。因此，将关于 $\hat{\mathbb{T}}$ 的陈述平移回 $\mathbb{P}^2$，后，为证明定理1.2，只需证明对每个环面曲面 X，势 φ_n 在 $L^1(X)$ 中收敛。

这一收敛的关键是定理 5.4，它给出了一个较弱但足够的估计，说明环面曲面映射的迭代如何缩小开子集的体积。其证明占据了第 5 节的大部分篇幅，利用了这样一个事实：f 的热带化也控制着 f 在极点附近的分歧，因此也控制着大多数点的轨道逃离 $\mathbb{T}$ 的速率。借助定理 5.4，势 φ_n 的收敛可由内部稳定性假设以及将 $\lim \varphi_n$ 改写为涉及 $f^*T_n - \lambda_1(f)T_{n+1}$ 的势的拉回的望远镜级数得出。此方法的一个优点是，它保证了 $\mathbb{P}^2$ 中所有曲线（而非几乎所有曲线）的原像等分布。文章 [FavJ], 研究了 $\mathbb{P}^2$, 上的全纯自同态，是一个先例：该文利用体积估计证明，对于这类映射，原像等分布至多对有限条曲线失效。

当环面映射 f 具有小拓扑次数时，即当 $d_{top}(f) < \lambda_1(f)$ 时，还可以得到更多结论：曲线的正向像也等分布于一个正闭 (1, 1) 流，并且正向与反向平衡流都具有额外的几何结构。

定理1.4. 设 $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 是一个具有小拓扑次数 $d_{top}(f) < \lambda_1(f)$ 的内部稳定的环面有理映射。那么，T^* 关于 f 的反向等分布流是层状的。此外，存在一个定义在 $\mathbb{P}^2$ 上的正闭 (1, 1) 流 T_*，使得

- T_* 是编织的，且不赋予曲线质量；
- $f_*T_* = \lambda_1(f)T_* + D$，其中 D 是一个有效实除子；

对于任意曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$，存在 $m(C) > 0$，使得 $\frac{1}{\deg(f^n)} f_*^n C \to m(C)T_*$。

粗略地说，如果一个正闭 (1, 1) 流可以表示为若干个（非闭）正 (1, 1) 流 T_n 之和，并且每个流在某个坐标多圆盘 $P \subset \mathbb{P}^2$ 中都可表示为全纯函数图像上的积分流的平均，其中这些图像两两不相交，且平均所依据的是某个非负博雷尔测度，那么就称它是层状的。下文将进一步讨论层流性；关于这一概念的详尽讨论，请参阅 [DDG1] § 2.4 和 § 3.3 以及其中的参考文献。编织性的概念与此类似，只是图像不必两两不相交。

上述结果引出了若干进一步的问题，我们打算在未来的工作中至少探讨其中一些。首先，定理1.2中要求环面映射 f 内部稳定这一条件虽然方便，但很可能并非必要。 [DL1] 中的定理D表明，如果允许定义域比环面曲面稍微一般一些，那么任意环面映射都可以变为内部稳定。逆极限构造以及关于 $\hat{\mathbb{T}}, \hat{f}, \mathcal{D}_{1、1}(\hat{\mathbb{T}})$ 和 $H^{1、1\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 的结果似乎都能推广到更一般的情形，不过具体细节肯定会更加复杂。

此外，了解是否存在满足 $f : \mathrm{P}^2 \dashrightarrow \mathrm{P}^2$ 的环面曲面映射，使得 A_f 不是同胚，也将很有意义。如果不存在此类映射，那么我们就得到一个三分法：要么 f 是单项式，要么 f 满足定理1.2的假设，要么根据定理 F，在 [DL1],f^2 存在一个稳定模型。特别地，将推论2.1（出自 [DDG1] ）应用于最后一种情形，我们便或多或少完整地理解了环面曲面映射的曲线原像的等分布。

最后，对于 f 具有小拓扑次数的情形，人们希望将楔积 $T^* \wedge T_*$ 解释为一个 f-不变的、熵为 $\log \lambda_1(f)$ 的最大熵测度；例如，多项式微分同胚 $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ （见 [BS]）以及许多具有稳定模型的曲面映射（见 [DDG3]）中都已有这样的做法。若 $\lambda_1(f)$ 是超越的，如 [BDJ]，中所示，这将意味着存在熵的指数为超越数的有理曲面映射。

关于全纯和有理动力系统中等分布的文献如今已十分丰富。我们尚未提及的文献包括但不限于 [FS、Dil1、FG、Fav2、Gu1、Gu2、DS1、T、Pr、BLR]。我们建议读者参阅这些文献，以进一步了解我们在此讨论的具体问题，以及我们未涉及的问题，例如高余维子簇、亚纯对应和收敛速度问题。

我们注意到，Babaee 和 Huh [BH]，对光滑环面簇上的“齐次”正闭流所作的另一种处理十分有趣，他们利用这种处理反驳了霍奇猜想的一个变体。Babaee [Bab] 最近也采用了相同的方法，为一些简单的（尤其是代数稳定的）单项式映射构造不变流。我们还要强调，利用给定维数下环面簇集合的逆极限，我们当然并非首创。例如，近期论文 [Bot] 便考虑了（使用不同的术语和记号）所有环面曲面的逆极限 $\mathbb{T}$ 以及相应的向量空间 $H^{1,1\,\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$，并将其视为“环面 b除子”的等价类（这是我们所谓环面流的一部分）。在纯上同调层面上， [FulSt] 更一般地证明了，固定维数下所有环面簇的上同调环的逆极限 d 同构于 R^d中的 McMullen 多面体代数。

还要注意，环面有理映射的动力学也从可积系统和簇代数的角度进行了研究；参见 [MO]及其中的参考文献。

最后，我们简要概述下文各节的内容。

第2节介绍复曲面、有理映射和流的背景知识。$\hat{}$ 第3节回顾环面曲面，并引入这类曲面的逆极限 $\mathbb{T}$ 。第4节介绍并证明有关环面映射的基础事实。第5节证明关键的体积估计定理 5.4。第6节分析 $\mathbb{T}$ 上的正闭（1,1）流与环面曲面上的正闭（1,1）流之间的关系。$\hat{}$ 第 7 节介绍 $\mathbb{T}$ 上的环面类空间和环面流空间。

第8节介绍并分析环面映射在环面类和环面流上诱导的拉回与推前作用。第9节给出定理 1.1 的证明，并陈述和证明一个与定理1.2 相对应的单项式映射等分布结果。第10节给出定理 1.2 和 1.4 的证明。

致谢。我们感谢 Romain Dujardin、Vincent Guedj 和 Duc-Viet Vu 在撰写本文期间对相关问题给予的有益解答，感谢 Misha Lyubich 在一场介绍我们工作的报告后提出的宝贵意见，也感谢 Farhad Babaee、Mattias Jonsson、Charles Favre 和 Simion Filip 对本文草稿提出的有益问题和意见。我们还要感谢匿名审稿人提出的几条建设性意见。最后，两位作者谨此感谢美国国家科学基金会的资助：第一位作者获得了 DMS-1954335 和 DMS-2246893 项目资助，第二位作者获得了 DMS-2154414 项目资助。

2. Background

除非另有说明，本文中的曲面均指光滑复二维射影簇 X，而 X 上的曲线则指不可约的一维复代数子集 $C \subset X$。本节将简要概述下文所需的有关曲面、流和有理映射的事实与术语。

2.1. 除子与流。对于每个曲面 X，我们令 Div(X) 表示 X 上实除子的向量空间，并令 $\mathcal{D}_1^+$,1(X) 表示实正闭（1,1）流构成的锥，并赋予后者弱拓扑。我们进一步令 $\mathcal{D}_1$,1(X) := $\mathcal{D}_1^+$,1(X)− $\mathcal{D}_1^+$,1(X) 表示由 $\mathcal{D}_1^+$,1(X) 生成的向量空间。这种定义并不标准，因为它排除了许多闭的（1,1）流，但出于我们稍后将解释的原因，它适合我们的目的。我们将 $\mathcal{D}_1^+$,1(X) 上的弱拓扑扩展为 $\mathcal{D}_1$,1(X) 上的拓扑，规定 $(T_j) \subset \mathcal{D}_1$,1($X$) 收敛，当且仅当我们可以写作 $T_j = T_j^+ - T_j^-$，其中 (T_j^+) 和 $(T_j^-) \subset \mathcal{D}_1^+$,1($X$) 都是弱收敛序列。我们常将除子与其对应的积分流混为一谈。

Siu定理 [Siu] 表明，任何支集于有限条曲线并集上的流 $\mathcal{D}_{1,1}(X)$ 都是除子。与此相辅的是，Skoda-El Mir 定理指出，若 $C \subset X$ 是一条曲线且 $T \in \mathcal{D}_{1,1}^+(X \setminus C)$，则当且仅当测度 $T \wedge \omega$ 对某个（等价地，任意一个）K¨ahler 形式 ω 上的质量有限时，T 才是 X 上某个正闭 (1, 1) 流的限制。在此条件下，若将 T 表示为系数为测度的形式，则把每个测度以零延拓至 C，便得到 T 的平凡延拓 $\tilde{T} \in \mathcal{D}_{1,1}^+(X)$。更多详情参见例如 [Dem2, 定理 2.3] 。我们将不加赘述地把 Skoda-El Mir 定理应用于（非正）流 $T \in \mathcal{D}_{1,1}(X \setminus C)$：将其写成 $T = T^+ - T^-$，其中 T^+ 和$T^- \in \mathcal{D}_{1,1}^+(X \setminus C)$，并检验 T^+ 与 T^- 的有限质量假设。

我们将 $H^{1,1}_{实}(X) \subset H^2(X, \mathbb{R})$ 记为流 $T \in \mathcal{D}_{1,1}(X)$ 的上同调类 $[T]$ 的集合。下文中，我们的所有曲面都是有理的，此时 $H^{1,1}_{实}(X)$ 与 $H^2(X, \mathbb{R})$ 相同，且任一上同调群中的每个类都由一个实除子表示。根据 K¨ahler 几何中的 dd^c引理，两个流 $S, T \in \mathcal{D}_{1,1}(X)$ 上同调等价，当且仅当存在 $\varphi \in L^1(X)$，它在局部可表示为两个多重次调和函数之差，且满足 $dd^c\varphi = T - S$。回顾一下，若 $T_j = T + dd^c\varphi_j \in \mathcal{D}_{1,1}^+(X)$ 是一列正闭流，它们都表示同一个上同调类 $[T] \in H^{1,1}_{实}(X)$，且相对

势 φ_j 经过归一化，使得相对于 X 上的某个体积形式有 $\int_X \varphi\, dV = 0$，那么 (T_j) 弱收敛，当且仅当 φ_j 在 $L^1(X)$ 中收敛。

我们用 $(\alpha\cdot\beta) = (\alpha\cdot\beta)_X \in \mathbb{R}$ 表示上同调类$\alpha, \beta \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$之间的交配对。若一个类 α 满足：对于所有有效 $D \in \mathrm{Div}(X)$，都有 $(\alpha\cdot D) \geq 0$，则称其为数值有效类。每个数值有效类α 都满足 $\alpha^2 := (\alpha\cdot\alpha) \geq 0$。若 $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)\setminus\{0\}$ 具有非负自交数，且 $\alpha^\perp \subset H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ 表示 α 的 $(\cdot,\cdot)$- 正交补，那么霍奇指标定理指出，对于所有满足条件的 $\beta\in\alpha^\perp$， $\beta^2 \leq 0$ 均成立；等号成立当且仅当 β 是 α的倍数。

2.2. 有理映射。若 $f\colon X \dashrightarrow Y$ 是曲面 X 与 Y之间的有理映射，我们用 $\mathrm{Ind}(f) \subset X$ 表示不定点构成的有限集合；在这些点处， f 无法连续定义。对于每条曲线 $C \subset X$，我们用 $f(C) := f(C\setminus \mathrm{Ind}(f)) \subset Y$表示 C 在 f下的严格变换。它或者是另一条曲线，或者是一个点。后一种情况下，我们称 C 是 f的例外曲线。我们始终假设有理映射是支配的，也就是说， $f(X\setminus I(f))$包含 Y的一个开集。在这种情况下， f只有有限条例外曲线，我们用 $\mathrm{Exc}(f)$表示它们的并集。

限制 $f|_C\colon C \to f(C)$ of f 到任意曲线 C 是一个全纯映射，即使在 $\mathrm{Ind}(f)\cap C$ 上也定义良好。当且仅当集合$f(p) := \{f|_C(p)\colon C \subset X$不是一个点，而是包含 $p\}$ 的有限连通曲线并时，点 $p \in X$ 才是 f 的不定点。

我们对 $\mathcal{D}_{1,1}(X)$ 采用非标准定义的主要原因是，它使我们能够（见 [DDG1]§ 1.2）为任意有理曲面映射 $f\colon X \dashrightarrow Y$ 赋予作用于闭的 (1,1) 流上的连续线性推前和拉回映射 $f_*\colon \mathcal{D}_{1,1}(X) \to \mathcal{D}_{1,1}(Y)$ 以及 $f^*\colon \mathcal{D}_{1,1}(Y) \to \mathcal{D}_{1,1}(X)$。这两个映射都保持除子和正性。若 $T = dd^c\varphi$ 上同调于零，则 $f^*T = dd^c(\varphi\circ f)$ 和 $f_*T = dd^c f_*\varphi$ 也如此。这里 $f_*\varphi(q) := \sum_{f(p)=q}\varphi(p)$，其中原像按重数计数。因此， f^* 和 f_* 诱导出相容的线性映射 $f_*\colon H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \to H^{1,1}_{\mathbb{R}}(Y)$ 以及 $f^*\colon H^{1,1}_{\mathbb{R}}(Y) \to H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$，它们作用于上同调类。相对于交数，这些映射互为伴随：对任意 $\alpha\in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(Y)$、 $\beta\in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$，我们有

$$(f^*\alpha\cdot\beta)_X = (\alpha\cdot f_*\beta)_Y. \tag{2}$$

由此可知， f^* 和 f_* 也保持数值有效类。下文（见定理 8.7 及其在定理 1.1 证明中的推论）将用到 [DF] 中的以下附加事实。回顾一下， $f\colon X \dashrightarrow Y$ 的拓扑次数 $d_{top}(f)$ 是一般点 $p\in X$的原像个数。

定理 2.1. 设 $f\colon X \dashrightarrow Y$ 是曲面 X 与 Y之间的支配有理映射。那么，由 $\mathcal{E}_f^-(\alpha) = f_*f^*\alpha - d_{top}(f)\alpha$定义的线性算子 $\mathcal{E}_f^-\colon H^{1,1}_{\mathbb{R}}(Y) \to H^{1,1}_{\mathbb{R}}(Y)$ 对任意 $\alpha\in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(Y)$ 满足以下性质。

- $\mathcal{E}_f^-(\alpha)$ 可由一个支集包含于 $f(\mathrm{Ind}(f))$ 的除子表示。

当 α 是数值有效的时，
- $\mathcal{E}_f^-(\alpha)$ 是有效的。
- $\mathcal{E}_f^-(\alpha) = 0$当且仅当 $(\alpha\cdot C) = 0$对所有 $C\subset f$(f 的不定点集) 均成立。
- $(\mathcal{E}_f^-(\alpha)\cdot\alpha) \geq 0$，且当且仅当 $\mathcal{E}_f^-(\alpha) = 0$ 时取等号。

在双有理态射 $\pi\colon X \to Y$ 的特殊情形下，即点吹起的有限次复合，拉回是交数等距映射，并且对所有 $\alpha,\beta \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(Y)$，满足 $(\pi^*\alpha\cdot\pi^*\beta)_X = (\alpha\cdot\beta)_Y$。特别地，若 $\mathrm{Div}(\mathrm{Exc}(\pi)) \subset \mathrm{Div}(X)$ 表示支集位于 π-例外曲线上的除子群，则 $(\cdot,\cdot)_X$ 在 $\mathrm{Div}(\mathrm{Exc}(\pi))$ 上负定，并且有正交分解 $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \cong \pi^*H^{1,1}_{\mathbb{R}}(Y) \oplus \mathrm{Div}(\mathrm{Exc}(\pi))$。

有理映射与态射的一个核心区别在于，有理映射的推前和拉回未必与复合相容。

命题 2.2（参见 [DF], 命题 1.13）。设 $g\colon X \dashrightarrow Y$ 和 $f\colon Y \dashrightarrow Z$ 是曲面之间的有理映射。则以下条件等价。

- $(f\circ g)^* = g^*\circ f^*$（关于流和/或类）。
- $(f\circ g)_* = f_*\circ g_*$（关于流和/或类）。
- g(例外集(g)) $\cap$ 不定点集(f) $=\emptyset$。

2.3. 有理自映射与动力次数。当有理映射 $f\colon X \dashrightarrow X$ 的定义域和值域相同时，其动力学的总体特征由两个数值不变量支配。 f 的拓扑次数是一般点 $p\in X$ 的原像 $d_{top}(f) := \#f^{-1}(p) \geq 1$ 的数量。当然，对于所有 $n\in \mathbf{Z}_{\geq 0}$， $d_{top}(f^n) = d_{top}(f)^n$。类似地， f 的（第一）动力次数 $\lambda_1(f)$ 刻画曲线原像的增长，但其定义更为复杂。

定理2.3（参见 [DF], 命题1.18和注记5.2）。若 $f\colon X \dashrightarrow X$ 是曲面 X 上的有理自映射，且 $D, D'\in \mathrm{Div}(X)$ 是丰沛除子，则

$$\lambda_1(f) := \lim_{n\to\infty} (f^{n*}D\cdot D')^{1/n} \tag{3}$$

它定义良好，不依赖于 D 和 D' 的选择，并满足 $\lambda_1(f)^2 \geq d_{top}(f)$。此外，若 $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ 是双有理映射，则 $\lambda_1(\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}) = \lambda_1(f)$。

对于平面有理映射 $f\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$, ，可以验证 $\lambda_1(f)$ 的公式化简为（1）。一般而言，动力次数难以计算，甚至可能取超越值（参见 [BDJ]）；不过， f 上另一个常见的条件能让它更容易理解。

定义2.4. 若有理自映射 $f\colon X \dashrightarrow X$ 满足对所有 $n\geq 1$， $f^n(\mathrm{Exc}(f)) \cap \mathrm{Ind}(f) = \emptyset$，则称其为代数稳定的。

根据命题 2.2，代数稳定性等价于对所有 $n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$，$(f^*)^n = (f^n)^*$；在这种情况下，可以证明（见 [DF] § 5）， $\lambda_1(f)$ 是 f^* 的（始终为实数且为正的）最大特征值。

2.4. 勒隆数与有理映射。我们回顾一下（例如见 [Dem2], 第 3 章）：流 $T\in \mathcal{D}^+_{1,\,1}(X)$ 在点 $p\in X$ 处的勒隆数是一个非负实数 $\nu(T,p)$，当且仅当 T 在 p 处“极大集中”时，该数为正。例如，若 T 是沿除子 $D=\sum c_jC_j\in \mathrm{Div}(X)$ 的积分流，则 $\nu(T,p)$ 在每个 $p\in \mathrm{supp}\, D$ 处均为正，并在分支 C_j 的一般点处等于 c_j。另一方面，若 $T\in \mathcal{D}^+_{1,\,1}(X)$ 不给 X 中的任何曲线赋予质量，那么对任意 $c>0$，集合 $\{p\in X\colon \nu(T,p) > c\}$ 是离散且闭的。

我们将反复使用 [Fav1] 中确立的以下事实。

引理 2.5. 设 $g\colon X \dashrightarrow Y$ 是复曲面 X 与 Y 之间的支配有理映射，且 T 是 Y 上的正闭 (1, 1) 流。则存在一个常数 $C>0$，使得对于任意 $p\in X\setminus$ 不定点集(g)，都有

$$\nu(T, g(p)) \leq \nu(p, g^*T) \leq C\nu(T, g(p)).$$

如果 g 在 p 附近局部有限，那么只需令 C 为 g 关于 p 的局部拓扑度。

3. Toric surfaces

令 $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^2$ 表示二维复代数环面。就我们的目的而言，若曲面 X 带有一个“标记”，即嵌入 $\mathbb{T} \hookrightarrow X$，使得 $\mathbb{T}$ 对自身的自然作用能够全纯地延拓为对整个 X的作用，则称该曲面为环面曲面。本节将回顾一些关于此类曲面所需的事实。关于环面簇，一份更全面且如今已成为标准的论述见 [Ful]。

按照通常的约定，我们令 $N \cong \mathbb{Z}^2$ 表示 $\mathbb{T}$ 和 $N_{\mathbf{R}}$ 的特征格的对偶：$= N \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$。若 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}} \subset \mathbb{T}$ 表示极大紧子群（一个实二维环面），那么我们可以固定一个群同构 $\mathbb{T}/\mathbb{T}_{\mathbf{R}} \to N_{\mathbf{R}}$（在乘以非零实数的意义下唯一），并令 $\mathrm{Log}: \mathbb{T} \to N_{\mathbf{R}}$ 表示商映射“热带化”。$\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$ 上的哈尔测度可延拓为 $\mathbb{T}$ 上的 $\mathbb{T}$-不变全纯二形式，我们将其记为 η，并在下文用它来对闭流及其势进行正则化。

任意环面曲面 X（按照§2开头对曲面的约定，它是光滑且射影的，因此也是正规且紧致的）均由其扇给出，即一个有限划分

$$\Sigma(X) = \{0\} \cup \Sigma_1(X) \cup \Sigma_2(X),$$

将 $N_{\mathbf{R}}(X)$划分为开的0维、1维和2维锥，每个锥都是“有理的”，即其闭包由 N中的元素生成。特别地，曲线 $C_\tau \subset X \setminus \mathbb{T}$ 由射线 $\tau \in \Sigma_1(X)$标记。由于它们是2-形式 η的简单极点，我们称这些曲线为 X的极点。其余所有曲线 $C \subset X$，即满足 $C \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ 的曲线，称为内部曲线。同样，若 X 中的点属于 $\mathbb{T}$，则称其为内部点，否则称为外部点。

如果 $D \in \mathrm{Div}(X)$ 的支集完全位于极点上，我们称其为外部除子，并用 $\mathcal{D}_{ext}(X)$ 表示所有外部除子的集合。例如，将其视为 X 上的亚纯二形式时，η 的除子是外部的，等于 $-\sum_{\tau \in \Sigma_1(X)} C_\tau$。对于任意外部除子 $D = \sum_{\tau \in \Sigma_1(X)} c_\tau C_\tau \in \mathrm{Div}(X)$，可将其与支撑函数 $\psi_D: N_{\mathbf{R}} \to \mathbb{R}$ 联系起来。该函数由以下条件唯一确定：当 $v \in N$ 是生成射线 $\tau \in \Sigma_1(X)$ 的本原向量时，令 $\psi_D(v) = c_\tau$；随后将其线性且连续地延拓到 $\Sigma(X)$ 中的每个锥。根据定义，ψ_D 非负当且仅当 $D \geq 0$ 有效。我们还可以得到

- $D \in \mathcal{D}_{ext}(X)$ 是主的当且仅当 ψ_D 是线性的；
- $D \in \mathcal{D}_{ext}(X)$ 数值有效当且仅当 ψ_D 是凸的[1]；
- 每个 $D \in \mathrm{Div}(X)$ 都与一个外部除子线性等价。

结合这三项断言可知，任意数值有效除子 $D \in \mathrm{Div}(X)$ 都与一个有效外部除子线性等价，也就是说，它具有非负的凸支集函数。

极点 C_{τ_1}、$C_{\tau_2} \subset X$ 相交，当且仅当 τ_1 和 τ_2 是 $\Sigma_1(X)$ 中的相邻射线。此时唯一的交点在 $\mathbb{T}$的作用下保持不变，记作 p_σ，其中 $\sigma \in \Sigma_2$ 是由 τ_1 和 τ_2围成的扇区。X 在 p_τ 处光滑，当且仅当生成 τ_1 和 τ_2 的本原元素 v_1、$v_2 \in N$ 构成N的一组基。特征格中与 σ 对偶的锥的生成元给出代数群 $\mathbb{T} \to (\mathbb{C}^*)^2$, 的一个同构，并且该同构可延拓为一个“特定的”全纯坐标系 $(x_1, x_2): X \setminus \bigcup_{\tau \neq \tau_1,\ \tau_2} C_\tau \to \mathbb{C}^2$，定义在 p_σ 附近，其中 $C_{\tau_j} = \{x_j = 0\}$。

如果 $p_{\sigma'} = C_{\tau_1'} \cap C_{\tau_2'} \in X$ 是另一个 $\mathbb{T}$-不变点，且 v_1'、$v_2' \in N$ 是生成射线 τ_1'、τ_2'的本原向量，那么关于 p_σ 的特征坐标到关于 $p_{\sigma'}$ 的特征坐标之间的过渡由双有理单项式映射 $(x_1', x_2') = h_A(x_1, x_2) :=$ 给出

[1]回想一下，如果一个除子与任意有效除子的交数均非负，则称其为数值有效

$(x_1^{A_{11}}x_2^{A_{12}}, x_1^{A_{21}}x_2^{A_{22}})$，其中 $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 是将基从 $\{v_1, v_2\}$ 变换到 $\{v_1', v_2'\}$ 的矩阵。无论如何，我们对数映射和 η 的归一化方式是：在（任意）特征坐标中，有

$$\mathrm{Log}(x_1, x_2) = -\log|x_1|v_1 - \log|x_2|v_2 \quad \text{and} \quad \eta = \pm\frac{1}{4\pi^2}\frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1 x_2}. \tag{4}$$

下文中，我们用 $X^\circ := X \setminus \{p_\sigma : \sigma \in \Sigma_2(X)\}$ 表示 X 中 $\mathbb{T}$-不变点的补集。类似地，如果 $C_\tau \subset X$ 是一个极点，我们用 $C_\tau^\circ = C_\tau \cap X^\circ \cong \mathbb{C}^*$ 表示 C_τ 中两个 $\mathbb{T}$- 不变点的补集。

3.1. 环面曲面的逆极限。如果 X 和 Y 是环面曲面，我们用 $\pi_{XY}\colon X \dashrightarrow Y$ 表示通过 X 和 Y 的标记延拓 $\mathrm{id}: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 的双有理映射。对于每个 $\tau \in \Sigma_1(Y) \cap \Sigma_1(X)$，都有 $\pi_{XY}(C_\tau) = C_\tau$；对于每个 $\tau \in \Sigma_1(X) \setminus \Sigma_1(Y)$，都有 $\pi_{XY}(C_\tau) = p_\sigma$，其中 $\sigma \in \Sigma_2(Y)$ 是包含 τ 的唯一扇区。我们记作 $X \succ Y$，并称 X 支配 Y，如果 π_{XY} 是一个态射，即 $\Sigma_1(Y) \subset \Sigma_1(X)$。此时，$\pi_{XY}$ 是在 Y 中 $\mathbb{T}$-不变点的补集 Y° 上的同胚。

由于任意两个环面曲面都存在一个同时支配它们的第三个环面曲面，因此所有环面曲面构成一个偏序为 $\succ$ 的有向集。参见例如 [BFJ, Can1], ，我们因而可以考虑所有环面曲面 X 的逆极限 $\mathbb{T}^\circ$。一个点 $p \in \mathbb{T}^\circ$ 是由一个集合 $\{p_X \in X\}$ 给出的，该集合从每个环面曲面 X 中各取一个点，并满足相容条件 $\pi_{XY}(p_X) = p_Y$，只要 $X \succ Y$ 成立。

我们为 $\mathbb{T}^\circ$ 赋予乘积拓扑，并规定：如果对每个 X，都有 $p_{j,X} \to p_X$，则 $p_j \to p \in \mathbb{T}^\circ$。根据蒂霍诺夫定理，作为紧豪斯多夫空间的逆极限，$\mathbb{T}^\circ$ 是紧的。各个环面曲面 X 上的 $\mathbb{T}$-作用与序关系 $\succ$ 相容，因而提升为 $\mathbb{T}^\circ$ 上的 $\mathbb{T}$ 的连续作用。我们用 $\mathbb{T}^\circ \subset \mathbb{T}^\circ$ 表示不被此作用固定的点。

对于任意给定的环面曲面 X，我们令 $\pi_{\hat{\mathbb{T}}X}: \mathbb{T}^\circ \to X$ 表示将点 p 映射到其代表元 $p_X \in X$的连续满射。根据构造，$\pi_{\hat{\mathbb{T}}X}$ 是 X° 上的同胚，且其逆映射给出一个典范嵌入 $X^\circ \hookrightarrow \mathbb{T}^\circ$。这些嵌入对于不同的环面曲面彼此相容，因此今后我们将 X° 视为 $\mathbb{T}^\circ$的子集；特别地，对于每条有理射线 $\tau \subset N_{\mathbf{R}}$，都有 $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}^\circ$和 $C_\tau^\circ \subset \mathbb{T}^\circ$。以下结论基本上可由上述讨论直接得到。

命题 3.1. $\mathbb{T}^\circ$ 的不变点的补集 $\mathbb{T}^\circ$ 由 $\mathbb{T}^\circ = \bigcup_X X^\circ$给出，其中并集遍历所有环面曲面。特别地，$\mathbb{T}^\circ$ 是一个（非代数的）复曲面。此外，

(1) $\bigcap_X X^\circ = \mathbb{T}$；以及 (2) $\mathbb{T}^\circ \setminus \mathbb{T} = \sqcup_\tau C_\tau^\circ$，其中并集取遍有理射线 $\tau \subset N_{\mathbf{R}}$。

我们将 $\mathbb{T}^\circ$ 中的点称为可实现的；若环面曲面 X 实现了 $p \in \mathbb{T}^\circ$，即 $p \in X^\circ$，则称之为可实现。与环面曲面中的点一样，我们继续将 $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}$ 中的点称为内部点，将 $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}$ 中的点称为外部点。内部点在每个环面曲面中都可实现。可实现的外部点$p \in C_\tau^\circ$在每个满足 $\tau \in \Sigma_1(X)$ 的环面曲面 X 中都可实现。

$\mathbb{T}^\circ$ 中不可实现的点，即 $\mathbb{T}$-不变的点，可按如下方式描述。

命题 3.2. 对于每条有理射线 $\tau \subset N_{\mathbf{R}}$，闭包 $C_\tau := \overline{C_\tau^\circ}$恰好包含两个不同的 $\mathbb{T}$-不变点。对于任意具有 $\tau \in \Sigma_1(X)$ 的环面曲面 X，将 $\pi_{\hat{\mathbb{T}}X}$限制在 C_τ 上所得的映射，是到具有相同名称的 X 的极点上的同胚。

ˆ另一方面， $\mathbb{T}$ 的极点中未包含的 $p_\tau \in \mathbb{T}$ˆ-不变点与无理射线 $\tau \subset N_{\mathbf{R}}$之间存在一一对应关系。也就是说，在每个环面曲面 X 中， $p = p_\tau$ 由由 $\tau \subset \sigma \in \Sigma_2(X)$确定的 $\mathbb{T}$-不变点 p_σ 表示。

ˆ 我们称一个（必然是闭的）子集 $C \subset \mathbb{T}$ 为曲线，如果对于充分支配的环面曲面 X， $C_X := \pi_{\hat{\mathbb{T}}X}(C) \subset X$ 是曲线。也就是说，对于任意环面曲面 Z，存在 $Y \succ Z$ ，使得对所有 $X \succeq Y$， C_X 都是曲线。我们称这样的曲面 X 实现了 C；通常在不易产生混淆时省略下标，并让 C 也表示其在 X 中的代表元。

因此，是极点满足 $\subset \hat{\tau} \in \Sigma_1(X)$ 的曲面 X 所实现的曲线。所有其他 ˆ 曲线 $C \subset \mathbb{T}$ 都是具有非平凡交数 $C \cap \mathbb{T}$ 的内部曲线。内部曲线 C 由每个环面曲面实现，其代表元 $C_X \subset X$ 本身也是内部曲线。不过，这些代表元之间存在显著差异。下面的结论可以通过在内部曲线上反复吹起 $\mathbb{T}$-不变点来归纳证明。

ˆ 命题 3.3. 若 $C \subset \mathbb{T}$ 是内部曲线，则在充分支配的环面曲面 X上，代表元 C_X 不含 $\mathbb{T}$-不变点。在此情形下， $\pi_{\hat{\mathbb{T}}X} : C \to C_X$ 是一个同胚；若 Y 是另一个充分支配的曲面，则限制$\pi_{XY}|_{C_X}$:$C_X \to C_Y$ 是一个同构。

当 C_X中没有 $\mathbb{T}$-不变点时，我们称 X 完全实现了 C。在此情形下， C_X与任意其他曲线 $C' \subset \mathbb{T}$的代表元之间的交数$(C_X \cdot C'_X)_X$不依赖于 X。因此，我们将$(C \cdot C') := (C_X \cdot C'_X)_X$ 写作不带下标的形式。

ˆ 推论 3.4. 设 $C \subset \mathbb{T}$ 是内部曲线， X 是完全实现 C的环面曲面。ˆ 则只有当 $\tau \in \Sigma_1(X)$ 时， C 才与极点 $C_\tau \subset \mathbb{T}$ 相交，并且

$$\sum_{\tau \in \Sigma_1(X)} (C \cdot C_\tau)\, v_\tau = 0 \in N_{\mathbf{R}},$$

ˆ 其中 v_τ生成 $N \cap \tau$。特别地， C至少与两个极点 C_{τ_1}、 $C_{\tau_2} \subset \mathbb{T}$相交；若没有其他极点，则 $\tau_2 = -\tau_1$。

证明。注意， $\mathbb{T}$ 不含紧曲线，因此 C 至少与一条外部曲线相交于 X。所以，除了推论中展示的公式外，其余部分显然。该公式成立，是因为对于每个主因子 $D \in \mathrm{Div}(X)$，($C \cdot D)_X = 0$ ，且外部除子为主因子当且仅当它们具有线性支撑函数 ψ_D： $N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$。□

ˆ 为结束本节，我们指出， $\mathbb{T}$ 中包含 $\mathbb{T}$ 的 $\mathbb{T}$-不变点的曲线只有极点。因此，不包含在任何极点中的 $\mathbb{T}$-不变点，即由无理射线 $\tau \subset N_{\mathbf{R}}$所标记的点，在下文中几乎不起作用。

4. 环面映射

这里我们回顾并拓展关于环面曲面上一类有理自映射的已知事实，该类映射已在 [DL1] 中得到深入研究。回忆 § 3 中， η 表示$\mathbb{T}$ 上的全纯二形式，它在 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$上的限制为哈尔测度。

定义 4.1。环面映射是一个有理映射 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$，满足 $f^*\eta = \rho(f)\eta$，其中某个常数 $\rho(f) \in \mathbf{C}^*$。我们称 $\rho(f)$ 为 f 的行列式。

下面的定理 4.8 表明，环面映射的行列式始终是一个整数；此外，若 f 是双有理的，则该行列式等于 ± 1。容易验证，任意单项式映射 $h_A\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}$ 都是环面映射，且 $\rho(h_A)=\det A$。映射 $f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}$ 若由 $f(x)=xy$ 给出，其中 $y\in\mathbb{T}$，则称为平移。平移是行列式为 $\rho(f)=1$ 的环面映射，并且可扩张为每个环面曲面上的一个自同构。我们将平移与单项式映射的复合（仍为环面映射）称为平移单项式映射。许多平移单项式映射都是双有理的，但事实证明，除了这些映射之外，还存在其他双有理环面映射。

例 4.2。映射 $g\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 在仿射坐标中定义为

$$g(x_1,x_2)=\left(x_1\frac{1-x_1+x_2}{x_1+x_2-1},x_2\frac{1+x_1-x_2}{x_1+x_2-1}\right)$$

是一个行列式为 $\rho(g)=1$ 的环面对合。

参见 [Bla]，其中给出了双有理环面映射群的一个简单表示。环面映射的复合仍是环面映射，因此它们包含由单项式映射和双有理环面映射生成的半群。我们不知道是否存在这个半群之外的环面映射。

如果 $f\colon \mathbb{T}\dashrightarrow\mathbb{T}$ 是环面映射，且 X 和 Y 是环面曲面，那么我们令 $f_{XY}\colon X\dashrightarrow Y$ 表示将 f 延拓为 X 与 Y 之间有理映射的唯一延拓。如果 $X'\succ X$ 和 $Y'\succ Y$ 是其他环面曲面，那么 $f_{X'Y'}$ 和 f_{XY} 与过渡相容；即

$$f_{XY}\circ\pi_{X'X}=\pi_{Y'Y}\circ f_{X'Y'}, \tag{5}$$

在 X' 的扎里斯基开子集上，两边都有定义。因此我们得到一个部分定义的“有理”映射 $f\colon \mathbb{T}\dashrightarrow\mathbb{T}$。

$\hat{}$ 具体而言，设 $p\in\mathbb{T}$ 为一个点，使得对于任意环面曲面 Y，都存在另一个 $\hat{}$ 环面曲面 X，满足 $p_X\notin$ 不定点集(f_{XY})。然后，我们令 $f(p)\in\mathbb{T}$ 为满足 $\hat{}f(p)_Y=f_{XY}(p_X)$ 的点。相容性保证了它与 X 的选择无关。$\hat{}$ 映射 f 对曲线 $C\subset\mathbb{T}$ 的作用类似。也就是说，对于任意环面曲面 Y，我们定义 $\hat{}\hat{}f(C)_Y=f(C_X)$，其中 X 是一个充分支配的环面曲面，使得 C_X 是一条曲线。事实上，$\hat{}$ 限制 $f_{XY}|_{C_X}$ 也给出了一个全纯限制 $f|_C\colon C\to f(C)$。$\hat{}$ f 对曲线和点的作用是一致的，具体来说，若 $C\subset\mathbb{T}$ 是一条曲线，且 $p\in C$ 是一个点，在该点 f 有定义，则 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}f(p)=(f|_C)(p)\in f(C)$。

假设 f 是一般的，这使我们能够对[DL1] 中的一系列观察结果。$\hat{}$

定理 4.3. 设 $f:\mathbb{T}\dashrightarrow\mathbb{T}$ 是一个环面有理映射，X 和 Y 是环面曲面。

(1) 对每条内部曲线 $C\subset X$，要么 $f_{XY}(C)$ 也是一条内部曲线，且 f_{XY} 在 C处非分歧；要么 $C\subset\mathrm{Exc}(f_{XY})$，且 $f_{XY}(C)$ 是 Y的一个外部点。(2) 对每个极点 $C_\tau\subset X$，要么 $f_{XY}(C_\tau)$ 是 Y的一个极点，要么 $C_\tau\subset\mathrm{Exc}(f_{XY})$，且 $f_{XY}(C_\tau)$ 是 Y的一个 $\mathbb{T}$-不变点。(3) 对于充分支配的 $Y'\succ Y$，$\mathrm{Exc}(f_{XY'})$ 中的所有曲线都是内部曲线，且每条曲线的像都包含于 Y'°中。

由该定理的第一个结论可知，f_{XY}的内部例外曲线集合与 X 和 Y无关。我们令 $\mathrm{Exc}(f)\subset\mathbb{T}$ 表示这些曲线的并集，并称其中每一条曲线对 f都是持久例外的。定理 4.3 以及我们对$\hat{}\hat{}\hat{}f\colon \mathbb{T}\dashrightarrow\mathbb{T}$ 的定义直接得出如下结论。

ˆ 推论4.4。设 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是一个环面有理映射。则 Exc(f)由有限条内部曲线组成，且每条曲线的像都是 $\mathbb{T}^\circ \setminus \mathbb{T}$中的一个点。如果 $C \not\subset$ Exc(f)是 $\mathbb{T}$中的另一条曲线，那么 $f(C)$也是一条曲线，并且 $f(C)$是内部曲线（分别为极点）当且仅当 C 是内部曲线（分别为极点）。

着眼于点的像而非曲线，我们还可从 [DL1] 得到以下结果。

定理 4.5。设 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 为环面，且 X 和 Y 为环面曲面，$p \in X$ 为一点。

- 若 $p \notin \mathrm{Exc}(f_{XY}) \cup \mathrm{Ind}(f_{XY})$ 为内部，则 $f_{XY}(p)$ 为内部，且 f_{XY}在 p 附近是局部同构。
- 若 $p \notin \mathrm{Exc}(f_{XY}) \cup \mathrm{Ind}(f_{XY})$ 为外部，则 $f_{XY}(p)$ 也为外部，并且 p是 $\mathbb{T}$-不变的，当且仅当 $f_{XY}(p)$ 是。
- 若 $p \in \mathrm{Ind}(f_{XY})$ 不是 $\mathbb{T}$-不变的，则 $f_{XY}(p)$ 是有限个内部曲线的并。
- 对于充分支配的环面曲面 $X' \succ X$，Ind($f_{X'Y}$) 中没有点是 $\mathbb{T}$-不变的。

ˆ 由该定理的最后两个结论可知，f 在有限子集 Ind(f) $\subset \mathbb{T}^\circ$之外定义良好且连续，我们称其中的元素为 f 的持续不定点。我们将每个 $p \in$Ind(f) 的像定义为：当 X'充分支配时，$f(p) = f_{X'Y}(p)$。

ˆˆ 推论4.6. 设 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 为环面映射。那么对于每个 $p \in$ Ind(f)，像 $f(p)$ 都是有限个内部曲线的并。若 $p \in \mathbb{T} \setminus$ (Ind(f) $\cup$ 例外集(f))，则 p 为内部（或外部，或 $\mathbb{T}$-不变的）当且仅当 $f(p)$ 如此；若 p 为内部，则 f 在 p 附近是局部同构。

下面的结果将用于证明命题4.13

ˆˆˆ 引理4.7。对于任意环面映射 f，我们有 Ind(f) $\subset$例外集(f)。此外，若 $\alpha \in \mathbb{T} \cap$ Ind(f) 是内部的，则

$$\hat{f}(\alpha) \setminus \mathbb{T} \subset \hat{f}(\mathrm{Exc}(\hat{f})). \tag{6}$$

ˆ 另一方面，若 $\alpha \in$Ind(f) $\setminus \mathbb{T}$是外部的，且包含于极点 C_τ 中，则

$$\hat{f}(\alpha) \setminus \mathbb{T} \subset \hat{f}(\mathrm{Exc}(\hat{f})) \cup \hat{f}|_{C_\tau}(\alpha). \tag{7}$$

ˆ 证明。固定一个充分支配的环面曲面 X，使得 X 实现 Ind(f)，并完全实现 f(Ind(f)) 中的每条曲线。投影 $\pi_{\hat{\mathbb{T}}X}\colon \mathbb{T} \to X$ 在 α 和 $f(\alpha)$ 的小邻域上限制为同胚，因此我们可以将 f 和 f_{XX} 视为相同：若 $\Gamma \subset X \times X$ 是 f_{XX} 的图像，且 $\pi_1, \pi_2\colon \Gamma \to X$ 是到定义域和值域的投影，则在一个足够小的邻域 $U \ni \alpha$ 上有ˆ $f = f_{XX} = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$，使得 Ind($f$) $\cap U = \{\alpha\}$，并且任何与 U 相交的持续例外曲线也包含 α。令 $\beta \in f(\alpha) \setminus \mathbb{T}$ 为一个外部点。

ˆ 首先，假设 $\alpha \in$ 不定点集(f) $\cap \mathbb{T}$，我们可以假设 $U \subset \mathbb{T}$。我们有

$$\beta \in \hat{f}(\alpha) = \pi_2(\pi_1^{-1}(\alpha)) \subset \pi_2(\pi_1^{-1}(U)).$$

但是由于 $U \subset \mathbb{T}$和 f是环面的，我们有 $\pi_2(\pi_1^{-1}(U)) \setminus \mathbb{T} \subset$ˆ$f$(例外集($f$)) $\cup$ˆf(不定点集(ˆf)) $\setminus \mathbb{T}$是有限的。特别地，β 不位于 $\pi_2(\pi_1^{-1}(U))$ 的内部。由于 $\pi_1^{-1}(U)$ 是 Γ 中的开集，因此存在一条曲线 $E \subset \Gamma$，它与 $\pi_1^{-1}(U)$ 相交，但并不完全包含于其中，满足

ˆ π_2 将 E 压缩到 β。因此， $\pi_1(E) \subset X$ 是内部的，并且被 f 压缩到 β。ˆˆˆ 因此 $\beta = f($ 例外集 $(f))$，即 (6) 成立。又由于 $\pi_1(E)$ 与 U 相交，我们有 $\alpha \in E \subset$ 例外集 (f)。

ˆ现在假设 $\alpha \in$不定点集$(f) \setminus \mathbb{T}$是外部的，包含于极点 C_τ 中。在这种情况下，我们可以假设 $U \setminus \mathbb{T} \subset C_\tau^\circ$，且 α 是 β 在 $f|_{C_\tau}$ 下位于 U 中唯一可能的原像。上一段的论证再次表明，若 $\beta \in \pi_2(\pi_1^{-1}(U))$ 不是一个ˆ内点，则对于某条包含 α 的持续例外曲线 E 和某个极点 $C_{\tau'} \subset \hat{\mathbb{T}}$，有 $\beta \in f(E) \cap C_{\tau'}^\circ$。另一方面，若 β 是 $\pi_2(\pi_1^{-1}(U))$ 的内点，则后者包含 β 在 $C_{\tau'}$ 中的一个相对邻域 W。由于 f 是环面的，存在有限子集 $S \subset W$，使得ˆ $f^{-1}(W \setminus S) \cap \mathbb{T} = \emptyset$，因而ˆ $f^{-1}(W \setminus S) \subset C_\tau^*$。因此 $A_f(\tau) = \tau'$ 且ˆ$W \subset f|_{C_\tau}(U \cap C_\tau)$。于是必有某个 $p \in U \cap C_\tau$，使得 $\beta = f|_{C_\tau}(p)$，而根据我们对 U 的选取，可得 $p = \alpha$。因此，(7) 成立。特别地，由推论 3.4 可知，ˆˆ $f(\alpha)$ 中至少有一个不同于 $f|_{C_\tau}(\alpha)$ 的点。因此，再次有 $\alpha \in$例外集(f) □

ˆˆ设 $C \subset \mathbb{T}$ 是一条曲线，且不是关于 f 的持久例外曲线。与过渡映射的相容性意味着，对于实现 C 和 f（C）的所有环面曲面 X 和 Y， f_{XY}ˆ在 C 附近的分歧 $\mathrm{Ram}(f, C) := \mathrm{Ram}(f_{XY}, C) \in \mathbb{Z}_{>0}$ 都相同。推论ˆ 4.6 进一步表明，对于内部 C， $\mathrm{Ram}(f, C) = 1$。关于 f 在极点处的分歧及其行为的其他方面，还可以得出更多结论。

定理 4.8（参见 [DL1, 定理 6.18]）。若 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是环面映射，则存在一个由有理射线 $\tau \in N_{\mathbf{R}}$ 构成的有限集 $\Sigma_1(f)$，以及一个连续自映射 $A_f\colon N_{\mathbf{R}} \to N_{\mathbf{R}}$，满足以下性质。

(1) A_f 是“整数的”，即 $A_f(N) \subset N$。(2) 若 $\sigma \subset N_{\mathbf{R}}$ 是一个不包含所有 $\tau \in \Sigma_1(f)$ 的扇区，则其限制 $A_f|_\sigma$ 是线性的，且 $\det A_f|_\sigma = \pm\rho(f)$。ˆˆ (3) 对任意曲线 $C_\tau \subset \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}$，有 $f(C_\tau) = C_{A_f(\tau)}$。(4) 若 v、$v' \in N$ 是生成有理射线 τ、$A_f(\tau) \subset N_{\mathbf{R}}$ 的本原向量，ˆ则 f 关于极点 C_τ 的分歧由下式给出

$$\mathrm{Ram}(\hat{f}, C_\tau) = \frac{\|A_f(v)\|}{\|v'\|},$$

ˆˆˆ和 $f\colon C_\tau^\circ \to C_{A_f(\tau)}^\circ$ 是一个次数为 $|\rho(f)|/\mathrm{Ram}(f, C_\tau)$ 的覆盖映射。因此， f 在任何极点的某个邻域上都具有局部拓扑度 $\rho(f)$。（5） $A_f\colon N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\} \to N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$ 是一个覆盖映射，其次数为 $d_{top}(f)/|\rho(f)|$。

我们将定理 4.8 中的映射 A_f 称为环面映射 f的热带化。热带化具有函子性，即若 $g\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 也是环面的，则 $A_{f\circ g} = A_f \circ A_g$。

ˆ证明。设 X和 Y是环面曲面，其中 X充分支配，使得 $\mathrm{Ind}(f_{XY}) = \mathrm{Ind}(f)$ 不包含任何 $\mathbb{T}$-不变点，并且 X 完整地实现每条持续例外曲线。

固定一个由射线 τ_1、$\tau_2 \in \Sigma_1(X)$ 界定的扇区 $\sigma \in \Sigma_2(X)$。则 f_{XY} 在 p_σ 附近是全纯的，并且对于某个扇区 $\sigma' \in \Sigma_2(Y)$，有 $f_{XY}(p_\sigma) = p_{\sigma'}$。我们的设置还确保，对于每个 $j = 1, 2$，有 f_{XY} 要么将 C_{τ_j} 压缩到 $p_{\sigma'}$，要么其像 $f_{XY}(C_{\tau_j})$ 等于 Y 中包含 $p_{\sigma'}$ 的极点之一。在这两种情况下，我们都可以假设界定 σ' 的射线 τ_1'、τ_2' 按如下方式排序： $f_{XY}(C_{\tau_j}) \subset C_{\tau_j'}^\circ$。因此，如果我们在 $p_\sigma \in X$ 附近使用特征坐标

以及 $p'_\sigma \in Y$，那么 f_{XY} 可表示为

$$(y_1, y_2) = f_{XY}(x_1, x_2) = (x_1^a x_2^b f_1(x_1, x_2), x_1^c x_2^d f_2(x_1, x_2)) \tag{8}$$

其中 $a, d > 0$ 和 $b, c \geq 0$ 是整数，f_1, f_2 是在 (0, 0) 附近全纯且在任一坐标轴 $\{x_j = 0\}$ 上都不恒等于零的有理函数。由于 p_σ 不包含在任何持久例外曲线中，进一步可知，f_1, f_2 在 (0, 0) 的某个邻域内处处不为零。2-形式 η 在任意特征坐标系中都具有相同的表达式，因此经过进一步计算，我们发现方程 $f^*\eta = \rho(f)\eta$ 变为

$$(ad - bc + e(x_1, x_2))\frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1 x_2} = \pm\rho(f)\frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1 x_2},$$

其中 $e(x_1, x_2)$ 是一个在 (0, 0) 处为零的有理函数。因此 e 恒等于零，由此可见 $ad - bc = \pm\rho(f)$。

现在，若 $v_1, v_2 \in N$ 是生成 τ_1, τ_2 的本原向量，那么任意射线 $\tau \subset \overline{\sigma}$ 都由本原向量 $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ 生成，其中 α_1, α_2 为非负整数。也就是说，C_τ 对应于单参数子群 $\gamma_v : t \mapsto t^v := (t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2})$，它属于 $(\mathbb{C}^*)^2$。进一步计算可得

$$f(\gamma(v)) = m(t)t^{Av}$$

其中，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 和 m 在 0 附近全纯且不为零。正如 [DL1], 附录中所指出的，这意味着 $f(C_\tau) = C_{A\tau}$。因此，A_f 在 σ 上由一个矩阵为整数矩阵 A 的线性变换给出，并满足 $\det A = \pm\rho(f)$。前三个结论由 $\Sigma_1(f) := \Sigma_1(X)$ 推出。注意，A_f 的连续性源于以下事实：由 $\Sigma_1(X)$中的射线界定的有限个闭扇形 $\overline{\sigma}$ 覆盖了 $N_{\mathbf{R}}$。

为证明结论 (4)，令 $C_{\tau'} = f(C_\tau)$。我们细化最初的设置，另外要求 $\tau \in \Sigma_1(X)$和 $\tau' \in \Sigma_1(Y)$。我们选择 $\sigma \in \Sigma_2$，使得 $\tau_1 = \tau$ 成为 σ的一条边界射线，并再次令 $p_{\sigma'} = f_{XY}(p_\sigma)$。于是 τ' 必定是 σ'的一条边界射线，并对其编号，使得$\tau' = \tau'_1$。在这种情况下，在特征坐标下，我们有 $f_{XY}(\{x_1 = 0\}) = f_{XY}(C_{\tau_1}) = C_{\tau'_1} = \{y_1 = 0\}$。因此，在 (8) 中，指数 c 消失，从而可见

$$|\rho(f)| = |\text{行列式 } A| = |ad| = \mathrm{Ram}(f_{XY}, \{x_1 = 0\}) \cdot \deg(f_{XY}|_{x_1=0}) = \mathrm{Ram}(\hat{f}, C_{\tau_1}) \cdot \deg(\hat{f}|_{C_{\tau_1}}).$$

结论 (4) 由此以及以下事实得出：(0, 1) 是为 $\{x_1 = 0\}$ 和 $\{y_1 = 0\}$ 中的射线编制索引的本原生成元。

由于 X 中的一般点有 $d_{top}(f)$ 个原像，且任意极点附近的局部拓扑度为 $\hat{}\ |\rho(f)|$，我们看到，$\mathbb{T}$中的每个极点在 $\hat{}f$ 下恰有 $d_{top}(f)/|\rho(f)|$ 个原像。也就是说，$N_{\mathbf{R}}$中的每条有理射线在 A_f 下恰有 $d_{top}/|\rho(f)|$ 个原像。A_f 的线性性仅在有理射线附近失效，因此我们得出，$N_{\mathbf{R}}$ 中的每条无理射线也有$d_{top}(f)/|\rho(f)|$ 个原像。因此 A_f: $N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\} \to N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$是一个次数为$d_{top}(f)/|\rho(f)|$的覆盖映射。□

在继续之前，我们对定理 4.8 的证明作进一步观察。也就是说，在 (8) 中，函数 f_1、f_2 在坐标轴 $\{x_j = 0\}$ 上没有极点或零点，因此，如果 f_j 的极点或零点均不与 $(\mathbb{C}^*)^2$，相交，那么 f_j 是常数。这些极点或零点恰好是 $\mathrm{Exc}(f_{XY})$ 的内部曲线，即它们构成诱导映射 $\hat{}\hat{}\hat{}f : \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 的持久例外集。由此得到以下进一步结论。

ˆ ˆ ˆ 推论 4.9。如果 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是环面的，那么 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 没有持久例外曲线，当且仅当它是一个平移单项式映射。

让我们回到本节开头介绍的例子，分别找出其中的持久例外曲线、不定点和热带化。ˆ ˆ 单项式映射 $h_A\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 是 $\mathbb{T}$的自覆盖。因此，$\mathrm{Exc}(h_A) = \mathrm{Ind}(h_A) = \emptyset$，而且从定理 4.8 的证明中的论证可以直接看出，h_A的热带化是 $A_{h_A} = A$。

容易验证，例 4.2 中双有理环面映射 $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 的内部曲线，也就是持久例外曲线，是连接点 $[1,1,0], [1,0,1], [0,1,1] \in \mathbb{P}^2$ 的直线；作为 $\mathbb{P}^2$上的自映射，g 将这些直线分别映到另外两条直线的交点。由于 g 是一个对合，可知 $\mathrm{Ind}(\hat{g}) = \{[1,1,0], [0,1,0], [0,0,1]\}$。进一步可验证，在三个 $\mathbb{T}$-不变点$[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1] \in \mathbb{P}^2$, 中任意一点附近的特征坐标 (x_1, x_2) 下，我们有 $g(x_1, x_2) = (x_1 f_1, x_2 f_2)$，其中 f_j 在 (0, 0) 附近全纯。因此，$A_g = \mathrm{id}$。这些事实均已在 [DL1] 和 [BDJ]中指出。

形如 $g \circ h_A$ 的复合构成了 [BDJ], 中的核心例子，其中证明了有理曲面映射的第一动力次数可以是超越的。因此我们在此重新讨论这些例子。

例4.10. 设 $f := g \circ h_A\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$，其中 g 是例 4.2 中的对合，而 h_Aˆ ˆ ˆ 是单项式。令 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 为诱导映射。那么

- $A_f = A$;
- $\mathrm{Ind}(\hat{f}) = h_A^{-1}(\mathrm{Ind}(\hat{g}))$ 由三个自由点组成，每个极点 C_τ、$A\tau \in \Sigma_1(\mathbb{P}^2)$、ˆ ˆ以及 $f_A(\mathrm{Ind}(f)) = \mathrm{Exc}(\hat{g})$ 各有一个;
- $\mathrm{Exc}(\hat{f}) = \hat{h}_A^{-1}(\mathrm{Exc}(\hat{g}))$ 由三条内部曲线组成，与任何包含 $\mathrm{Ind}(f)$ 的环面曲面相容，且其像为 $f(\mathrm{Exc}(f)) = \hat{g}(\mathrm{Exc}(\hat{g})) = \mathrm{Ind}(\hat{g})$;

ˆ ˆ ˆ 定义4.11. 环面映射 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是内部稳定的，当且仅当诱导映射 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 满足 ˆ f^n(例外集($\hat{f}$)) ∩不定点集($\hat{f}$) $= \emptyset$对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$均成立。

由定义可知，若 f 是内部稳定的，则

$$\mathrm{Ind}(\hat{f}^n) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \hat{f}^{-j}(\mathrm{Ind}(\hat{f})) \quad \text{and} \quad \mathrm{Exc}(\hat{f}^n) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \hat{f}^{-j}(\mathrm{Exc}(\hat{f})).$$

ˆ 验证内部稳定性的一种方法是证明（如果可能）：若 $C_\tau \subset \mathbb{T}$ 是包含某条持久例外曲线的像的极点，则其正向轨道 $\hat{f}^n(C_\tau)$，$n \geq 0$ 中没有极点包含持久不定点。对于来自 [BDJ] 的映射，这种方法尤其适用。

推论4.12. 假设例4.10中的映射 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\xi & -\mathrm{Im}\,\xi \\ \mathrm{Im}\,\xi & \mathrm{Re}\,\xi \end{pmatrix}$，对应于高斯整数 $\xi = |\xi| e^{2\pi i \theta}$ 的乘法，其中 $\theta \notin \mathbb{Q}$。则 f 在 $\mathbb{T}$ 上是 ˆ 内部稳定的。

证明。由于 θ 是无理数，且 $\Sigma_1(\mathbb{P}^2)$ 中的三条射线均以有理角与水平轴相交，因此对于任意 τ, $\tau' \in \Sigma_1(\mathbb{P}^2)$，都有 $A^n\tau \neq A^m\tau'$，对任意 $n \neq m \in \mathbb{Z}$ 均成立。于是，ˆ稳定性断言由以下事实推出：$\mathrm{Ind}(f)$ 由极点 $C_{A^{-1}\tau}$ 中的自由点组成，

$\tau \in \Sigma_1(\mathbb{P}^2)$；而对于每个 $n \geq 1$，$\hat{}f^n$(例外集($\hat{}f$)) 由极点 $C_{A^{n-1}\tau}, \tau \subset \Sigma_1(\mathbb{P}^2)$ 中的自由点组成。□

下一个结果使我们能够利用环面映射 f 的热带化来界定轨道（$f^n(p)$)逃离 $\mathbb{T}$的速率。

$\hat{}\hat{}$ 命题4.13. 如果 $f: \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是环面的，那么对于 $f(\mathrm{Exc}(f))$ 的任意邻域 U，存在 $R > 0$ 使得

$$\| \mathrm{Log} \circ f(p)\| \leq \|A_f \circ \mathrm{Log}(p)\| + R \quad or \quad f(p) \in U \tag{9}$$

$\hat{}\hat{}$ 对每个 $p \in \mathbb{T} \setminus \mathrm{Exc}(f)$均成立。类似地，对于 $\mathrm{Ind}(f) \setminus \mathbb{T}$ 的任意邻域 V，存在 $R > 0$ 使得

$$\| \mathrm{Log} \circ f(p)\| \geq \|A_f \circ \mathrm{Log}(p)\| - R \quad or \quad p \in V. \tag{10}$$

$\hat{}$ 证明。注意，根据推论4.6和引理4.7，限制 $p \in \mathbb{T} \setminus \mathrm{Exc}(f)$ 蕴含 $\hat{}f(p) = f(p) \in \mathbb{T}$。为了将 f 的行为与 A_f的行为进行比较，我们选择一个充分支配的环面 $\hat{}\hat{}\hat{}$ 曲面 Y，使其实现 $\mathrm{Ind}(f)$ 和 $f(\mathrm{Exc}(f))$ 中的所有点，并且完全 $\hat{}\hat{}\hat{}$ 实现 $\mathrm{Exc}(f)$ 和 $f(\mathrm{Ind}(f))$ 中的所有曲线。然后我们选择 $X \succ Y$，使得另外还满足 $\hat{}\,\mathrm{Ind}(f_{XY}) = \mathrm{Ind}(f)$，即 X 中没有 $\mathbb{T}$-不变点对 f_{XY}而言是不定的。

设 $\sigma \subset \Sigma_2(X)$ 为任意扇区，$\tau_1, \tau_2 \in \Sigma_1(X)$ 为其边界射线。设 (x_1, x_2) 是关于 p_σ 的特征坐标，使得 x_j 在 C_{τ_j}, $j = 1, 2$ 上消失。由于 $p_\sigma \notin \mathrm{Ind}(f_{XY})$，对于某个 $\sigma' \in \Sigma_2(Y)$，我们有 $A_f(\sigma) \subset \sigma'$。因此，若 (y_1, y_2) 是关于 $p_{\sigma'}$ 的 Y 的特征坐标，则如定理 4.8 的证明所示，我们有

$$(y_1, y_2) = f_{XY}(x_1, x_2) = (x_1^a x_2^b f_1(x_1, x_2), x_1^c x_2^d f_2(x_1, x_2))$$

其中 $a, d > 0$ 和 $b, c \geq 0$ 是整数，$f_1, f_2 : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}$ 是有理函数，在 (0, 0) 附近全纯，且在任一坐标轴 $\{x_j = 0\}$ 上都不恒等于零。若 $v_j \subset \tau_j, j = 1, 2$ 生成 $\tau_j \cap N$，而 $v_j' \subset \tau_j'$ 生成 $\tau_j' \cap N$，则 $A_f : \overline{\sigma} \to \sigma'$ 如前所述，由相对于基 v_1, v_2 和 v_1', v_2' 的整数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 给出。因此，由 (4) 可计算出 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$，得到

$$\| \mathrm{Log} \circ f(x) - A_f \circ \mathrm{Log}(x)\| = \| - \log |f_1(x)| v_1' - \log |f_2(x)| v_2'\|. \tag{11}$$

$\hat{}$ f_1 和 f_2 的零点与极点正是 f的持续例外曲线。因此，如果 $\Omega \hat{}$ 是 $\mathrm{Exc}(f)$ 的任意邻域，且 $P \subset X$ 是以 (0, 0) 为中心的任意有界坐标多圆盘，则对于 $P \cap \mathbb{T} \setminus \Omega$上的某个 $R > 0$，(9) 和 (10) 均成立。事实上，X 可由有限个这样的多圆盘覆盖，因此两个方程在整个 $\mathbb{T} \setminus \Omega$上都成立。

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 由于 $f(\mathrm{Exc}(f)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ 以及 f在 $\mathrm{Exc}(f) \setminus \mathrm{Ind}(f)$ 上连续，所以对于 $\mathrm{Exc}(f) \setminus \mathrm{Ind}(f)$ 的任意紧子集中的所有 q，均有 $\lim_{p \to q} \|\mathrm{Log} \circ f(p)\| = \hat{}\,\hat{}\infty$ 一致成立。因此，正如所断言的，在 $\mathrm{Ind}(f)$ 的任意给定邻域 $V \subset \mathbb{T}$ 之外，对于某个$\hat{}\,\hat{}R = R(V) > 0$，(10) 成立。

完成 (9) 的证明要棘手一些。由于 $\hat{}\, f^{-1}(U) = f_{XY}^{-1}(U)$ 包含一个邻域 $\hat{}\,\hat{}$ of 例外集(f) $\setminus$ 不定点集(f)，只需在不定点集(f) 中有限个点 $\alpha \in$ 各自足够小的邻域 $\hat{}U_\alpha$ 上验证所需的界。当 $\alpha \in \mathbb{T}$ 是内部的时，我们可以通过令 $R >$ 对数映射(α) 并选择一个其中所有点都满足 $\hat{}$ 对数映射(p) $< R$ 的邻域，轻易地得到 (9)。因此，我们可以假设不定点集(f) 中的 $\alpha \in$ 是外部的。

重新审视上文对特征坐标的选择，我们选取 $\sigma \in \Sigma_2(X)$ 和 $\tau_j \in \Sigma_1(X)$，使得 C_{τ_1} 是包含 α 的唯一极点，即对于某个 $x_2 \in \mathbb{C}^*$，$\alpha = (0, x_2)$。由于 $\hat{Y}$ 完全实现了 $f(\alpha)$，因此 $A_f(\tau_1) \in \Sigma_1(Y)$ 是界定 σ_1' 的射线之一，记为 τ_1'。因此，在坐标 $\beta := f|_{C_{\tau_1}}(\alpha)$ 下，$= f_{XY}(0, x_2) = (0, y_2)$。给定 $\epsilon > 0$，令 $B_\beta(\epsilon) \subset Y$ 为以 β 为中心的开特选坐标球。于是根据引理4.7，存在 $\delta > 0$ 和 $R > 0$，使得若 $B_\alpha(\delta) \subset X$ 是以 α 为中心的对应球，则

$$f_{XY}(B_\alpha(\delta)) \cap \{\mathrm{Log} < R\} \subset U \cup B_\beta(\epsilon),$$

其中 U 是 (9) 中的开集。因此，只需验证 (9) 中的界仅对 $p \in W := B_\alpha(\epsilon) \cap f_{XY}^{-1}(B_\beta(\epsilon))$ 成立。由于 $\beta \notin \hat{f}(\mathrm{Exc}(\hat{f}))$，我们可以假设 ϵ 足够小，使得 $W \setminus \{\alpha\}$ 与所有持续例外曲线不相交。又由于 $\beta = (0, y_2)$ 且 $y_2 \neq 0$，我们还可以假设 $|f_1|$、$|f_2|$ 和 $|1/f_2|$ 在 $W \setminus \{\alpha\}$ 上都有上界。综上，我们必须证明 $|1/f_1|$ 在 $W \setminus \{\alpha\}$ 上同样有界。

令 $X \dashrightarrow \tilde{X}$ 是一个双有理态射，它消解了 f_{XY} 在 α 处的不定性，并将 f_{XY} 提升为全纯映射 $\tilde{f}\colon \pi^{-1}(B_\alpha(\delta)) \to Y$。因此，$\tilde{W} := \pi^{-1}(B_\alpha(\delta)) \cap \tilde{f}^{-1}(B_\beta(\epsilon))$ 是一个开集，使得 $\pi(\tilde{W}) = W$。于是，f_1 对应的提升 $\tilde{f}_1\colon \pi^{-1}(B_\alpha(\epsilon)) \to \mathbb{P}^1$ 在处处都有定义，因此其零点和极点互不相交。由于 $W \setminus \{\alpha\}$ 避开了~~持续例外曲线，集合 $\{f_1 = 0\} \cap W$ 是紧的，且等于 $\pi^{-1}(\alpha)$ 中有限条曲线的并。然而，$\pi^{-1}(\alpha)$ 上的交形式是负定的，而紧主除子的自交数为零，因此 $\{f_1 = 0\} \cap W$ 必为空集。进一步缩小~~ ϵ，即可保证 $1/|f_1|$ 在 W 上有界。因此 $1/|f_1|$ 在$W \setminus \{\alpha\}$ 上有界，(9) 的证明也就完成了。□

5. Irrational rotation and volume

我们在定理 4.8 中看到，环面映射 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 的热带化 $A_f\colon N_{\mathbf{R}} \to N_{\mathbf{R}}$ 总是将穿孔平面 $N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$ 限制为一个自身覆盖映射，其次数为 $d_{top}(f)|\rho(f)|$。在由~~双有理~~环面映射和单项式映射生成的半群中（也就是说，在我们所知的所有例子中），总有 $\rho(f) = \pm d_{top}(f)$，即 A_f 实际上是一个同胚。在这种情况下，我们得到单位圆 $\{\|v\| = 1\}$ 上诱导的同胚 $\tilde{A}_f\colon v \mapsto A_f(v)/\|A_f(v)\|$。稍微宽泛地使用术语，我们称 A_f 的旋转数为 A_f 的旋转数。我们回顾以下来自 [DL1] 的结果。

定理 5.1（[DL1], 定理 F）。设 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是一个环面曲面映射，且 f 的热带化 A_f 是一个同胚。那么，f 的某个迭代与某个（不一定是环面的）有理曲面 X 上的代数稳定有理映射 $f_X\colon X \dashrightarrow X$ 双有理共轭，当且仅当 A_f 的旋转数是有理数。

特别地，当 A_f 是旋转数为有理数的同胚时，[DDG1] 中的等分布结果——推论 2.11 和 3.5——表明，在将 f 替换为某个迭代之后，曲线的归一化正向与反向像渐近于 f-不变流 T^* 和 T_*，定义在 X上。因此，定理 1.2 和 1.4 讨论的是此前尚未确立任何等分布结果的互补情形。这里，我们通过证明满足定理1.2假设的托里克曲面映射的迭代不会过快地缩小或扩大体积，向证明这些定理迈出了关键一步。简要考察更广泛的背景并引入一些临时术语将有所帮助。

定义 5.2. 设 X 是任意一个赋有光滑体积形式的复射影曲面，且 $R\colon X \dashrightarrow X$ 是一个支配有理映射。给定 $\mu \geq 1$，我们称

- R 的下体积指数为 $\mu \geq 1$，如果存在 $a > 0$，使得对于任意可测的 $S \subset X$，均有 $\operatorname{Vol} R(S) \geq (a \operatorname{Vol} S)^{\mu}$；

若存在 a、$b > 0$，使得 - R 具有动力学下体积指数 $\mu \geq 1$，且

$$\operatorname{Vol} R^n(S) \geq (a \operatorname{Vol} S)^{b\mu^n}. \tag{12}$$

对于任意 $n \geq 0$ 和可测的 $S \subset X$，

类似地，若存在 $a > 0$，使得 $\operatorname{Vol} R(S) \leq a(\operatorname{Vol} S)^{\mu}$，则 R 具有上体积指数 $\mu \leq 1$；若存在 a、$b > 0$，使得对于任意可测的 $S \subset X$，$\operatorname{Vol} R^n(S) \leq a(\operatorname{Vol} S)^{b\mu^n}$，则 $\mu \leq 1$ 具有动力学上体积指数。

动力学上、下体积指数的定义是根据我们的需要量身定制的。因此，常数 a 在这两个定义中所起的作用并不十分对称。注意，上体积指数小于下指数，而且在任何情况下，体积指数都不必是最优的。由于 X 上的不同体积形式在乘法意义下彼此一致可比，体积形式的选择不会影响哪些 μ 是（动力学）上、下体积指数。

命题 5.3. 设 X 是带有光滑体积形式的复射影曲面，且$R\colon X \dashrightarrow X$ 是支配有理映射。那么

(i) R 同时具有上体积指数和下体积指数；(ii) $R\colon X \dashrightarrow X$ 具有动力学下体积指数（分别为上体积指数）μ，当且仅当某个迭代 $R^k\colon X \dashrightarrow X$ 具有动力学下体积指数（分别为上体积指数）μ^k。(iii) 若 $R_1\colon X \dashrightarrow X$ 具有动力学下体积指数（分别为上体积指数）$\mu > 0$，且 $R_2\colon Y \dashrightarrow Y$ 与 R_1双有理共轭，则 R_2 也具有动力学下体积指数（分别为上体积指数）μ。

证明. 设 $\pi\colon X \to X$ 是将 R 提升为全纯映射 $\tilde{R}\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$的双有理态射。那么，对于任意可测 $S \subset X$，$\operatorname{Vol} \pi^{-1}(S) \leq C \operatorname{Vol}(S)$。因此，对全纯映射 $\tilde{R}$应用众所周知的估计，即可推出 R 存在下体积指数。更多详情参见例如 [BLR，第 5], [节，以及FavJ，第 6,7]节。交换 π 与R 的角色即可得到上体积指数。由于上指数的论证类似，我们只对动力学下体积指数证明其余两个结论。

若 $R\colon X \dashrightarrow X$ 的动力学下体积指数为 $\mu \geq 1$，则根据定义，对任意 $k \geq 1$，R^k 的动力学体积指数为 μ^k。反过来，假设 R^k 的动力学下体积指数为 μ^k。也就是说，存在某个 a、$b > 0$，使得对任意可测的 $S \subset X$ 及任意 $m \geq 0$，

$$\operatorname{Vol} R^{mk}(S) \geq (a \operatorname{Vol} S)^{b\mu^{mk}}.$$

既然我们已经证明了第（i）部分，就应用它来找出 $\gamma \geq 1$ 和 $a' > 0$，使得对任意可测的 $S \subset X$，都有 $\operatorname{Vol}(R^r(S)) \geq (a' \operatorname{Vol} S)^{\gamma}$，对任意 $0 \leq r < k$ 均成立。给定任意满足 $0 \leq r < k$ 的整数 $n = km + r \geq 0$，于是有

$$\operatorname{Vol} R^n(S) \geq (a \operatorname{Vol} R^r(S))^{b\mu^{mk}} \geq (a(a' \operatorname{Vol} S)^{\gamma})^{b\mu^{mk}} \leq (a'' \operatorname{Vol} S)^{B\mu^n}, \tag{13}$$

其中 $B = b\gamma$ 且 $a'' = a^{1/\gamma} a'$。因此，μ 是 R 的一个动力学下体积指数。

最后，假设 $\psi\colon X \dashrightarrow Y$ 是双有理的，并将 R_1 共轭到 R_2。假设 μ 是 R_1 的动力学下体积指数，对应的常数为 a、$b > 0$，并令

γ_1、γ_2分别是 ψ和 ψ^{-1}的下体积指数，对应的乘法常数分别为 a_1、$a_2 > 0$。它们存在，因为我们已经证明了第（i）部分。于是，

$$\operatorname{Vol} R_2^n(S) \geq \operatorname{Vol}(\psi(R_1^n(\psi^{-1}(S)))) \geq (a_1(a(a_2\operatorname{Vol} S)^{\gamma_2})^{b\mu^n})^{\gamma_1} \geq (a'\operatorname{Vol} S)^{b'\mu^n}$$

对于任意可测的 $S \subset X$ 以及任意 $n \geq 0$。这里，$b' = b\gamma_1\gamma_2$ 和 $a' = a_2 a^{1/\gamma_2} a^{1/(\gamma_2 b}$) 1 $\leq a_2 a^{1/\gamma_2} a^{1/(\gamma_2 b\mu^n)}$ 1 对所有 $n \geq 0$ 均成立，因为 $\mu \geq 1$。因此，μ 也是 R_2的动力学下体积指数。□

本节的主定理讨论了定理1.2中环面曲面映射的动力学上、下体积指数。注意，根据命题 5.3 的 (iii)，在确定动力学体积指数时，给定的环面映射作用于哪一个环面曲面 X 并不重要。

定理 5.4. 设 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是一个内部稳定的环面映射，其热带化$A_f\colon N_{\mathbf{R}} \to N_{\mathbf{R}}$ 是一个具有无理旋转数的同胚。那么

- 任意 $\mu > \sqrt{d_{top}(f)}$ 都是 f 的动力学下体积指数;
- 任意 $\mu < 1$ 都是 f 的动力学上体积指数。

以下结果以及命题 5.3 的第 (ii) 项允许我们将定理 5.4 中的 f 替换为一个迭代，从而假设对于任意给定的 $\mu > \sqrt{d_{top}(f)}$,

$$\frac{d_{top}(f)}{\mu}\|v\| < \|A_f(v)\| < \mu\|v\|$$

对于所有非零的 $v \in N$。此外，我们指出（参见 [DL1] 推论8.3及其后续讨论），双有理环面映射的热带化 A_f 总是具有有理旋转数。因此，任何满足定理 5.4 假设的映射都具有拓扑次数 $d_{top}(f) \geq 2$。所以，通过选取足够接近 $\sqrt{d_{top}(f)}$ 的 $\mu > \sqrt{d_{top}(f)}$, 我们可以假设

$$\|v\| \leq \|A_f(v)\| < \mu\|v\| \tag{14}$$

对于所有非零的 $v \in N$。

定理 5.5。设 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是环面的，其热带化 $A_f\colon N_{\mathbf{R}} \to N_{\mathbf{R}}$ 是具有无理旋转数的同胚。则

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A_f^n(v)\right\|^{1/n} = \sqrt{d_{top}(f)}$$

在单位圆 $\{\|v\| = 1\}$ 上均匀分布。因此，对于任意 $\mu > \sqrt{d_{top}}$ 和任意曲线 $\hat{C}_\tau \subset \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Ram}(\hat{f}^n, C_\tau)}{\mu^n} = 0.$$

证明。由于诱导的圆周同胚 A_f 的旋转数为无理数，Denjoy定理的一个略微推广版本（见 [ADM，定理 2.5]）告诉我们，它在拓扑上共轭于一个真正的无理旋转。特别地，A_f 是唯一遍历的。因此，若$\varphi\colon N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ 是连续函数 $\varphi(v) := \log \|A_f(\frac{v}{\|v\|})\|$，则我们得到

$$\log \left\|A_f^n(v)\right\|^{1/n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ \tilde{A}_f^j(v)$$

在单位圆上均匀收敛于某个常数 $L \in \mathbf{R}$。因此，对任意 $\epsilon > 0$ ，存在一个指标 N ，使得 $n \geq N$ 蕴含

$$(L - \epsilon)^n < \left\|A_f^n(v)\right\| < (L + \epsilon)^n$$

对单位圆上的所有 v 。回忆一下， A_f 是 1-齐次的，且其雅可比行列式几乎处处等于 $\rho(f)$。此外，由于 A_f 是一个同胚，因此 $\rho(f) = d_{top}(f)$。由此可推得

$$(L - \epsilon)^{2n} \leq d_{top}^n = \pi^{-1} \operatorname{Vol} A_f^n(\{\|v\| \leq 1\}) \leq (L + \epsilon)^{2n}.$$

取 n 次方根并令 $\epsilon \to 0$ ，即可完成第一个断言的证明。

$\hat{}$ 为了推导第二个断言，令 $v_n \in N$ 为生成 $f^n(C_\tau)$ 的本原向量。注意，对所有 n，都有 $\|v_n\| \geq 1$ 。因此，定理 4.8 的第四个结论及前一段内容表明，对于任意 $\tilde{\mu} \in (\sqrt{d_{top}(f)}\ \mu)$，存在 $C = C(\tilde{\mu})$，使得

$$\operatorname{Ram}(\hat{f}^n, C_\tau) = \frac{\left\|A_f^n v_0\right\|}{\|v_n\|} \leq \left\|A_f^n v_0\right\| \leq C\,\|v_0\|\,\tilde{\mu}^n.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Ram}(\hat{f}^n, C_\tau)}{\mu^n} \leq C\,\|v_0\| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\tilde{\mu}}{\mu}\right)^n = 0.$$

□

Th下一个结果不需要假设 A_f 是一个同胚 .

引理5.6. 假设 f： $\mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是环面的，且 A_f 对某个常数$\mu > 1$ 及所有 $v \in N_{\mathbf{R}}$都满足 (14)。设 X 为一个环面曲面， P_σ 为围绕 $\mathbb{T}$-不变点 $p_\sigma \in X$的有界特征坐标双圆盘。

$\hat{}$ $\hat{}$ (1) 存在 $\beta_1 > 0$，并且对于 f(例外集f)的任意邻域 U，存在一个常数 $\alpha_1(U) > 0$，使得若 $p \in P_\sigma \cap \mathbb{T}$对 $1 \leq j \leq n$满足 $f^j(p) \notin U$，且 $f^n(p) \in P_{\sigma'} \cap \mathbb{T}$，则

$$|x_1' x_2'| \geq (\alpha_1 |x_1 y_1|)^{\beta_1 \mu^n}, \tag{15}$$

其中，(x_1, x_2)和(x_1', x_2')分别是 p 和 $f^n(p)$的特征坐标。

(2) 类似地，存在一个常数 $\alpha_2(V) > 0$，并且对于使得若集的任意邻域 V 满足 $f^j(p) \notin V$，且 $f^n(p) \in P_{\sigma'}$，则

$$|x_1' x_2'| \leq \alpha_2^n |x_1 x_2|^{\beta_2}.$$

证明。若 P_σ 是覆盖映射 X 和 $p =$ （x_1， x_2）的有限个特征坐标双圆盘之一，且 $\in P_\sigma$ 是关于 p_σ 的特征坐标表示，则由 (4) 可知

$$c\|\operatorname{Log}(p)\| \leq -\log|x_1| - \log|x_2| \leq C\|\operatorname{Log}(p)\|$$

其中某些常数为 $c, C > 0$ ，它们仅取决于覆盖中的双圆盘。对其取指数并迭代估计（9），可得对任意满足$f^j(p) \notin U$, $1 \leq j \leq n$的 $p \in \mathbb{T}$ ，都有以下界：

$$|x_1' x_2'| \geq e^{-c\|\operatorname{Log}(f^n(p))\|} \geq e^{-\mu^n(c\|\operatorname{Log}(p)\|+A)} \geq (e^A|x_1 x_2|^{c/C})^{\mu^n},$$

其中 $A = R\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{-j}$。因此，第一个结论成立。第二个结论可通过类似的估计得出：用（10）代替（9），并利用假设 $\|A_f(v)\| \geq \|v\|$ 对所有$v \in N_{\mathbf{R}}$均成立：

$$|x_1'x_2'| \leq e^{-C\|\operatorname{Log}(f^n(p))\|} \leq e^{-C(\|\operatorname{Log}(p)\|-Rn)} \leq (e^{CR})^n|x_1x_2|^{C/c}.$$

□

下一个引理及其证明与 [BLR] 中的引理5.2和引理5.6，以及 [FavJ] 中的命题 6.3 类似。

引理5.7. 存在 $c > 0$，使得对于单位双圆盘 $\mathbb{D}^2 \subset \mathbf{C}^2$, 的任意可测子集 S 以及任意 $\gamma \geq 0$, 我们有

$$\int_S |x_1x_2|^\gamma dV_{\text{eucl}} \geq (c\operatorname{Vol} S)^{1+\gamma}.$$

类似地，对于 $-2 < \gamma' < \gamma < 0$，存在 $c(\gamma', \gamma) > 0$，使得对于任意可测$S \subset \mathbb{D}^2$,

$$\int_S |x_1x_2|^\gamma dV_{\text{eucl}} \leq c(\gamma', \gamma)(\operatorname{Vol} S)^{1+\gamma'/2}.$$

证明. 对任意 $\tau \in [0, 1]$，令 $Y_\tau = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{D}^2 : |x_1x_2| \leq \tau\}$。通过直接的极坐标计算可得, 对于任意 $\gamma > -2$，

$$\int_{Y_\tau} |x_1x_2|^\gamma \, dV_{\text{eucl}} = \frac{4\pi^2\tau^{\gamma+2}}{(\gamma+2)^2}\left(1 - (\gamma+2)\log\tau\right) = \frac{4\tau^\gamma}{(\gamma+2)^2}\left(\operatorname{Vol} Y_\tau - \pi^2\tau^2\gamma\log\tau\right),$$

因为令 $\gamma = 0$ 可得特别地，$\operatorname{Vol} Y_\tau = \pi^2\tau^2(1-2$对数映射 $\tau)$。现在给定一个可测集 $S \subset \mathbb{D}^2$, 选取 τ，使得 $\operatorname{Vol} Y_\tau = \operatorname{Vol} S$。那么对于 $\gamma \geq 0$，我们有

$$\int_S |x_1x_2|^\gamma \, dV_{\text{eucl}} \geq \int_{Y_\tau} |x_1x_2|^\gamma \, dV_{\text{eucl}} \geq \frac{4\tau^\gamma \operatorname{Vol} Y_\tau}{(\gamma+2)^2} \geq \frac{4(C\operatorname{Vol} Y_\tau)^{1+\gamma}}{(\gamma+2)^2} \geq (c\operatorname{Vol} S)^{1+\gamma}$$

对于某个与 γ无关的 $c > 0$。在第三个不等式中，我们用了体积 $Y_\tau \leq 2\pi^2 e^{-1/2}\tau$。在最后一个不等式中，我们用了体积 $Y_\tau =$ 体积 S 以及这一事实：$\lim_{\gamma\to\infty}\left(\frac{4}{\gamma+2()^2}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} = 1$。

另一方面，若 $\gamma \in (-2, 0)$，则前两个估计反向成立：

$$\int_S |x_1x_2|^\gamma \, dV_{\text{eucl}} \leq \int_{Y_\tau} |x_1x_2|^\gamma \, dV_{\text{eucl}} \leq \frac{4\tau^\gamma \operatorname{Vol} Y_\tau}{(\gamma+2)^2}.$$

此外，对于任意 $\sigma \in (0, 1)$，容易验证体积 $Y_\tau \leq C(\sigma)\tau^{2\sigma}$，例如 $C(\sigma) := \frac{\pi^2 e^{-\sigma}}{1-\sigma}$。因此，给定 $\gamma' \in (-2, \gamma)$，我们取 $\sigma = \gamma/\gamma'$ 得到

$$\int_S |x_1x_2|^\gamma \, dV_{\text{eucl}} \leq \frac{4(\operatorname{Vol} Y_\tau)^{1+\gamma'/2}}{C(\sigma)^{\gamma/2\sigma}(\gamma+2)^2} = c(\gamma, \gamma')(\operatorname{Vol} S)^{1+\gamma'/2}.$$

□

接下来，我们应用引理5.6和5.7来估计可测子集 $S \subset X$的正向像 $f^n(S)$的体积。由于曲面上的点和曲线的测度为零，我们可以在此处及下文中假设$S \subset \mathbb{T} \setminus \bigcup_{n\geq 1} \operatorname{Exc}(f^n)$。因此，对所有 $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$，都有 $f^n(S) \subset \mathbb{T}$。

引理 5.8。假设在引理5.6中， X 赋有一个光滑体积形式。

ˆ ˆ (1) 存在 $b > 1$，并且对于 f(例外集(f)) 的任意邻域 U，都存在一个常数 $a = a(U) > 0$，使得若 $S \subset X$ 可测，且对所有 $1 \le j \le n$， $f^j(S) \cap U = \emptyset$，则

$$\operatorname{Vol} f^n(S) \ge (a \operatorname{Vol} S)^{b\mu^n}.$$

ˆ (2) 存在 $b < 1$，且对于 Ind(f) 的任意邻域 V，存在常数 $a = a(V) \ge 1$，使得若 $S \subset X$ 可测且 $f^j(S) \cap U = \emptyset$ 对于 $0 \le j < n$，则

$$\operatorname{Vol} f^n(S) \le a^n (\operatorname{Vol} S)^b.$$

我们的证明结合了 [Dil1] 中引理 3.12 的证明、引理5.6中的估计，以及 f 相对于 $dV_{\mathbb{T}} := \eta \wedge \bar{\eta}$ 具有常数雅可比行列式这一事实。请注意，对于定理 5.4 的证明，引理 5.8 两个结论中的常数 b 都不依赖于邻域 U 或 V 的选取，这一点很重要。

证明。若 $p_\sigma \in X$ 是 $\mathbb{T}$-不变的，且 $P_\sigma \subset X$ 是以 p_σ为中心的单位坐标双圆盘，则 X 上给定的体积形式在 $\overline{P_\sigma}$ 上与特征坐标中的欧几里得体积 $dV_{eucl} := |x_1 x_2|^2 dV_{\mathbb{T}}$ 一致可比。因此，我们将按这两种体积相同的情形进行论证。这只会影响结论中常数 a 的取值。

我们首先证明第(1)项。由于 $X = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_2(X)} \overline{P_\sigma}$，我们可以将 S 划分为有限个子集$S_{\sigma,\sigma'} := S \cap P_\sigma \cap f^{-n}(P'_\sigma)$，并且只需关注 Vol $f^n(S_{\sigma,\sigma'})$ 最大的那个子集。也就是说，不失一般性，我们可以假设 $S = S_{\sigma,\sigma'} \subset \overline{P_\sigma}$且 $f^n(S) \subset \overline{P_{\sigma'}}$。令 (x_1, x_2) 和 $(x'_1, x'_2) = f^n(x_1, x_2)$ 分别为 P_σ和 P'_σ上的特征坐标。那么在 S 上有

$$f^{n*} dV_{\mathrm{eucl}} = f^{n*}(|x_1 x_2|^2 \, dV_{\mathbb{T}}) = \rho(f)^{2n} |x'_1 x'_2|^2 \, dV_{\mathbb{T}} = \rho(f)^{2n} \frac{|x'_1 x'_2|^2}{|x_1 x_2|^2} \, dV_{\mathrm{eucl}},$$

因此，引理5.6和5.7给出

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol} f^n(S) &\ge \frac{1}{d_{top}(f)^n} \int_S f^{n*} dV_{\mathrm{eucl}} = \left(\frac{\rho(f)^2}{d_{top}(f)} \right)^n \int_S \frac{|x'_1 x'_2|^2}{|x_1 x_2|^2} \, dV_{\mathrm{eucl}} \\ &\ge \int_S \alpha^{2\beta\mu^n} |x_1 x_2|^{2\beta\mu^n - 2} \, dV_{\mathrm{eucl}} \ge (\alpha c \operatorname{Vol} S)^{2\beta\mu^n}. \end{aligned}$$

因此，命题(1)对 $a = \alpha c$ 和 $b = 2\beta$成立。

第(2)项的证明类似。与前面一样，我们可以假设 $S \subset \overline{P_\sigma}$且 $f^n(S) \subset \overline{P_{\sigma'}}$。由于对于 $0 \le j < n$, $f^j(S) \cap V = \emptyset$，引理5.6给出

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol} f^n(S) &\le \int_S f^{n*} dV_{eucl} = \rho(f)^{2n} \int_S \frac{|x'_1 x'_2|^2}{|x_1 x_2|^2} \, dV_{eucl} \\ &\le (\alpha \rho(f))^{2n} \int_S |x_1 x_2|^{2(\beta-1)} \, dV_{eucl} \le a^n (\operatorname{Vol} S)^b, \end{aligned}$$

其中我们选择 $b \in (\beta, 1)$，然后选择满足 a satisfying $a^n \ge C(\alpha\rho(f))^{2n}$ 的 a，使其对所有 $n \ne 0$ 均成立；这里 $C = C(2b-2, 2\beta-2)$ 是引理5.7 第二个结论中出现的乘法常数。□

引理 5.9. 若 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 如定理 5.4 中所述，则对任意整数 $m \ge 0$，存在 U 的邻域，其中 U 是 f(例外集(f)) 的邻域，以及 V 的邻域，其中 V 是不定点集(f) 的邻域， $\setminus \mathbb{T}$ 使得对任意 $p \in \mathbb{T} \setminus$不定点集($f^m$)

ˆ ˆ ˆ (1) $f^n(p) \in U$至多对 #f(例外集(f)) 次迭代 $0 \le n \le m$;

以及 ˆ ˆ (2) $f^n(p) \in V$至多对 #不定点集(f) 次迭代 $0 \le n \le m$。

ˆ ˆ 证明。 f 内部稳定这一假设意味着， f 的每次迭代 f^n 都在一个依赖于 n、邻近 f(例外集(f)) 的邻域上良定义且连续。 A_f的旋转数为无理数这一假设意味着，对于任意两个极点 C_τ、$C'_\tau \in \mathbb{T}$，至多存在一个 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $f^n(C_\tau) = C'_\tau$。由于 f(例外集(f)) 中的每个点都包含在唯一一个极点中，因此对于任意 q、$q' \in f$(例外集(f))， $f^n(q) = q'$ 至多对一个 $n \in \mathbb{Z}$ 成立。

由此可知，ˆ我们可以为定义良好且连续邻域且对于任意给定的 $q, q' \in \hat{f}$(Exc($\hat{f}$))，ˆ 交集 $f^n(U(q)) \cap U(q')$ 至多对一个 $0 \le n < m$ 非空。取 U 为邻域 $U(q)$ 的并，即得该引理。

ˆ V 的构造类似，但也依赖于 (7)。也就是说，如果 $\alpha \in \mathrm{Ind}(f) \cap C_\tau$ 是一个外部持续不定点，那么 (7) 意味着 $f^n(\alpha) \setminus \mathbb{T} \subset f^n(\mathrm{Exc}(f)) \cup C_{A_f^n(\tau)}$。因此， f 的内部稳定性意味着 ˆ $f^n(\alpha) \cap \left(\mathrm{Ind}(\hat{f}) \setminus \mathbb{T}\right) \subset C_{A_f^n(\tau)}$。同样，由于 A_f 的旋转数为无理数，$C_{A_f^n(\tau)} \cap \mathrm{Ind}(f) \neq \emptyset$ 仅对有限多个 n 成立。□

引理 5.10. 假设 $f : \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 满足定理 5.4 的假设，(14) 中的常数为 $\mu > 1$，且 X 是带有光滑体积形式的环面曲面。

(1) 存在 $b > 0$，并且对任意 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，存在一个常数 $a = a(m) > 0$，使得对任意可测的 $S \subset X$,

$$\mathrm{Vol}(f^m(S)) \ge (a \,\mathrm{Vol}\, S)^{b\mu^m}.$$

(2) 类似地，存在 $0 < \nu < 1$，并且对任意 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，存在一个常数 $A = A(m) \ge 1$，使得

$$\mathrm{Vol}(f^m(S)) \le A(\mathrm{Vol}\, S)^{\nu}.$$

注意，定理 5.4 相当于引理 5.10，其中 a 和 A 不依赖于 m。

证明. 命题 5.3 的第（i）部分给出 $a, \gamma > 0$，使得 Vol $f(S) \ge (a\mathrm{Vol}\ S)^\gamma$。固定 m, ˆ ˆ ˆ ˆ，并令 $U \supset f$(例外集(f)) 满足引理 5.9 的结论。令 $e =\#f$(例外集(f))。将 S 划分为有限个部分 $S_1, \ldots, S_{\ell(m)}$ 后，我们可以假设对每个 S_j，都存在时刻 $0 \le n_1(j) < \cdots < n_e(j) < m$，使得对所有其他 $0 \le n < m$， $f^n(S_j) \cap U = \emptyset$。我们着重考虑满足 Vol $S_j \ge \frac{1}{\ell}$Vol S 最大的部分 S_j。

设 a'、$b' > 0$ 为引理 5.8 中的常数。则

$$\mathrm{Vol}\, f^{n_1}(S_j) \ge (a' \mathrm{Vol}\, S_j)^{b'\mu^{n_1}}.$$

对于 $1 \le k < e$，我们进一步估计

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\, f^{n_{k+1}}(S_j) &\ge (a' \mathrm{Vol}\, f^{n_k+1}(S_j))^{b'\mu^{n_{k+1}-n_k-1}} \ge (a'(a \mathrm{Vol}\, f^{n_k}(S_j))^\gamma)^{b'\mu^{n_{k+1}-n_k-1}} \\ &= (a'' \mathrm{Vol}\, f^{n_k}(S_j))^{b''\mu^{n_{k+1}-n_k}}. \end{aligned}$$

其中 $a'' =(a')^{1/\gamma} a$ 且 $b'' = \gamma b' \mu^{-1}$。类似地，体积 $f^m(S) =(a''$体积 $f^{n_e}(S_j))^{b''\mu^{m-n_e}}$结合这些不等式可得

$$\mathrm{Vol}\, f^m(S) \ge \mathrm{Vol}\, f^m(S_j) \ge (\tilde{a} \mathrm{Vol}\, S_j)^{b'(b'')^e \mu^m} \ge \left(\frac{\tilde{a}}{\ell} \mathrm{Vol}\, S\right)^{\tilde{b}\mu^m},$$

˜，其中某个常数 $\tilde{a}$ 取决于 m，但 $b = b'(b'')^e$ 与 m 无关。

Vol $f^n(S)$ 的上界同样可由引理 5.9 和引理 5.8 中的第 (2) 项推出□

定理 5.4 的证明。我们仅证明动力学下指数的情形。动力学上指数的论证几乎完全相同。

固定 $\mu > \overline{\sqrt{d_{top}}}(f)$ 和 $\sigma \in (\overline{\sqrt{d_{top}}}(f)\ \mu)$。如定理 5.4 的陈述之后所述，我们可以假设，对所有非零 $v \in N_{\mathbf{R}}$，$\|A_f(v)\| < \sigma \|v\|$。令 $b > 0$ 为将 σ 替换为 μ 后应用引理 5.10 得到的（m-独立）常数。选取足够大的 $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$，使得 $b\sigma^m \leq \mu^m$。于是引理 5.10 给出一个常数 $a = a(m) > 0$，使得对于任意可测的 $S \subset X$，我们有

$$\mathrm{Vol}(f^m(S)) \geq (a \,\mathrm{Vol}\, S)^{b\sigma^m} \geq (a \,\mathrm{Vol}\, S)^{\mu^m}. \tag{16}$$

给定 $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$，我们将 $q, r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ 且满足 $0 \leq r < m$ 的情形记为 $n = mq + r$。根据命题 5.3 的第（i）部分，存在 $\gamma = \gamma(m) > 1$ 和 $\hat{a} = \hat{a}(m) > 0$，使得

$$\mathrm{Vol}\, f^r(S) \geq (\hat{a}\mathrm{Vol}\, S)^{\gamma}.$$

对任意 $0 \leq r < m$。将 (16) 迭代 q 次后，我们得到

$$\mathrm{Vol}\, f^n(S) \geq (a'\mathrm{Vol}\, f^r(S))^{(\mu^m)^q} \geq (a'(\hat{a}\mathrm{Vol}\,(S))^{\gamma})^{\mu^n} \geq (a''\mathrm{Vol}\, S)^{b'\mu^n},$$

其中 $a' \equiv a'(m) = a(m)^{\tau}$ 对 $\tau = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu^m)^{-k}$，$a'' = (a')^{1/\gamma}\hat{a}$ 和 $b' = \gamma$成立。特别地，a'' 和 b' 都不依赖于 n。

□

6. Positive closed (1, 1) currents on toric surfaces

本节考察代数环面上的流集 $\mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$，以及通过将环面曲面$X$ 紧化 $\mathbb{T}$上的流限制而得到的 $\mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 子集。根据 Siu], , $\mathcal{D}_{1,1}(X)$ 中的流完全支集于 X 的极点上，当且仅当它属于 $\mathcal{D}_{ext}(X)$，即 X上的外部除子集。与此相反，我们称$\mathcal{D}_{1,1}(X)$ 中的流为内部流，如果它不对 X的任何极点赋予质量。换言之，若 $T \in \mathcal{D}_{1,1}(X)$ 等于其在 $\mathbb{T}$ 上的限制（平凡延拓至 X），则称其为内部流。X 上的内部流构成 $\mathcal{D}_{int}(X) \subset \mathcal{D}_{1,1}(X)$ 的一个稠密但非闭子空间。

命题 6.1. 任意流 $T \in \mathcal{D}_{1,\ 1}(X)$ 都可唯一分解为和 $T = D + T'$，其中 $D \in \mathcal{D}_{ext}(X)$ 是外部除子，$T' \in \mathcal{D}_{int}(X)$ 是内部流。

证明. 由于流 $\mathcal{D}_{1,\ 1}(X)$ 是正流之差构成的，我们不妨假设 T 为正流。由于 $X \setminus \mathbb{T}$ 是极点的有限并，Skoda-El Mir 定理蕴含，限制 $T|_{\mathbb{T}} \in \mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 到 X 的内部子集后，可平凡延拓为 X 上的正闭流 T'，且该流不对任何极点赋予质量。□

内部流的集合独立于底层环面曲面。

命题 6.2. 若 $X \succ Y$ 是环面曲面，则 $\pi_{XY*}\colon\ \mathcal{D}_{int}(X) \to \mathcal{D}_{int}(Y)$ 是一个同构。

证明。令 $\pi = \pi_{XY}$，并令 $T \in \mathcal{D}_{int}(X)$ 为一个内部流。由于 $\pi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$，我们有 $\pi_* T$ 是 Y 上的一个内部流。映射 $\pi_*\colon\ \mathcal{D}_{int}(X) \to \mathcal{D}_{int}(Y)$ 是单射的，因为π 只收缩 X 的极点。反过来，我们通过规定 $\pi^\sharp T$ 为 $\pi^* T$ 的内部部分来定义 $\pi^\sharp\colon\ \mathcal{D}_{int}(Y) \to \mathcal{D}_{int}(X)$。要完成证明，只需证明 $\pi_*\pi^\sharp T = T$。但是由于 π 是一个态射，我们有 $\pi_*\pi^* T = T$；又由于 T 本身不将质量集中在 X 的极点上，我们有 $\pi^* T - \pi^\sharp T$ 仅支集于被 π 收缩的极点上。因此 $\pi_*\pi^\sharp T = \pi_*\pi^* T = T$。□

命题 6.2 的另一种理解方式是， $\mathcal{D}_{int}(X)$ 在限制映射 $\hat{}$ $\mathcal{D}_{int}(X) \to \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 下的像与 X 无关。我们将这个像记为 $\mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$，并将其中的元素称为内部流，而不指明任何特定的曲面。当我们$\hat{}$ 想强调曲面时，会将 $T \in \mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$ 到 X 上的正闭流的平凡延拓记为 T_X。在第 7 节中，我们将把这一记号扩展到对我们称为 $\mathbb{T}$ 上的环面流的更广泛讨论中。现在，我们注意到，上述讨论意味着一个$\hat{}$ 典范同构 $\mathcal{D}_{1,1}(X) \cong \mathcal{D}_{ext}(X) \oplus \mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$。本节其余部分将致力于更好地理解 $\mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$、 $\mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$ 与环面曲面上的上同调类之间的关系。

6.1. $\mathbb{T}$ 上的流与凸函数。若 $\psi\colon N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ 是凸的，则 $\psi \circ \mathrm{Log}\colon \mathbb{T} \to \mathbf{R}$ 是多重次调和的。因此， ψ 确定了一个流 $T = dd^c(\psi \circ \mathrm{Log}) \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$，它在极大紧子群 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}} := \mathrm{Log}^{-1}(0) \subset \mathbb{T}$的“旋转”作用下保持不变。

在这里，我们将部分逆转从凸函数到正流的关联：为每个$T \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$指定一系列三个逐步改进的简单旋转对称近似 T_{ave}, $\bar{T}$, $\bar{T}(X) \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$。对任意流$T \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$，流 T_{ave} 都存在；但 $\bar{T}$ 和 $\bar{T}(X)$的存在要求对 T的势施加增长条件（见下文(17)$^-$）。就我们的目的而言， T 将是最重要的近似。$^-$另一方面，最简单的近似将是 $T(X)$。正如记号所示，它既取决于环面曲面 X 的选择，也取决于给定的流 T。

约定：从此处开始，为了表述清晰，我们通常用下标注明 dd^c 作用于哪个曲面，例如： $dd^c_X : \mathrm{DPSH}(X) \to \mathcal{D}_{1,1}(X)$，其中 $\mathrm{DPSH}(X) \subset L^1(X)$ 表示局部可积函数，且局部等于两个多重次调和函数之差。省略下标时，默认的定义域为 $\mathbb{T}$。

由于 $H^1(\mathbb{T}, \mathcal{O})$ 是平凡的， $\mathbb{T}$ 上的正闭（1,1）流存在全局势 s.

命题 6.3. 对任意 $T \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$，存在 $u \in \mathrm{PSH}(\mathbb{T})$ 使得 $T = dd^c u$。

注意，对每个 $v \in N_{\mathbf{R}}$，集合 $\{x \in \mathbb{T} : \mathrm{Log}(x) = v\}$ 是一个实二维环面，经过平移后与 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$ 等价。给定 $T = dd^c u \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$，我们通过对 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$ 的平移取平均，定义函数 $\psi_u : N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$。也就是说，

$$\psi_u(v) := \int_{\mathrm{Log}(x)=v} u(x)\,\eta.$$

当 $u = \log|P|$ 适用于 P时：若 $\mathbb{T} \to \mathbf{C}$ 是 Laurent 多项式，则 ψ_u 是热带几何中著名的“Ronkin 函数”。一般而言， $\psi_u \circ \mathrm{Log}$ 是 u关于某种（或任意一种）特征坐标的逐坐标平均，因此也是多重次调和的。由此可知， ψ_u 是凸的（特别是连续的）。此外， ψ_u 是仿射函数，当且仅当 u是多重调和的。因此， ψ_u 由 T 唯一确定，但相差一个关于 v的仿射函数；而流

$$T_{ave} := dd^c(\psi_u \circ \mathrm{Log}) \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$$

完全由 T确定。

对于任意凸的 $\psi\colon N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$，该量

$$\mathrm{Growth}(\psi) := \sup_{v \neq 0} \frac{\psi(v) - \psi(0)}{\|v\|} = \limsup_{\|v\| \to \infty} \frac{\psi(v)}{\|v\|} \tag{17}$$

非负，但可能为无穷大。因此，对于所有 $v \in N_{\mathbf{R}}$，

$$|\psi(v)| \leq \mathrm{Growth}(\psi) \cdot \|v\| + |\psi(0)|. \tag{18}$$

正如我们将在下文的定理6.9中看到的，Growth(ψ_u)有限，当且仅当 T 能够延拓为任意环面曲面上的正闭流。

现在，若 $\psi = \psi_u$ 是与$T \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$的势 u 相关联的凸函数，则Growth(ψ_u)取决于 u 以及 T；但由于当 ψ 为仿射函数时Growth(ψ)有限，因此，对于一个势 u，Growth(ψ_u)有限，当且仅当对于所有其他势它都有限。特别地，总可以将Log(x)的一个仿射函数加到 u 上，以确保对所有 v 都有 $\psi_u(v) \geq 0$，且 $\psi(0) = 0$。在这种情况下，Growth(ψ_u)将近乎最小，不超过 T的所有势中可能达到的最小值的两倍。类似地，Growth(ψ_u)取决于 $N_{\mathbf{R}}$ 上的范数选择，但仅相差一个一致的非零乘法常数。同样，通过单项式映射拉回 u，会使Growth(ψ_u)乘以一个与 u无关的非零因子。

命题 6.4. 假设 $\psi\colon N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ 是凸函数，且具有增长 Growth(ψ) $< \infty$。那么 $\lim_{t\to\infty} \psi(tv)/t$ 在 $N_{\mathbf{R}}$ 上正规收敛于满足下列条件的最小凸函数 $\bar{\psi}\colon N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$：

- $\bar{\psi}(tv) = t\bar{\psi}(v)$；
- $\bar{\psi}(v) \geq \psi(v) - \psi(0)$.

对所有 $v \in N_{\mathbf{R}}$ 和 $t \geq 0$均成立。此外，$\bar{\psi} = \psi$ 且 Growth($\bar{\psi}$) = Growth(ψ) = $\max_{\|v\|=1} \psi(v)$。证明。习题。 □

若 $T = dd^c u \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$ 且 Growth(ψ_u) $< \infty$，则称 $\bar{\psi}_u$ 为 T的支撑函数。它仍然在相差一个仿射函数的意义下由 T确定。由凸性可知，我们可以（非唯一地）选取仿射函数，使支撑函数非负。或者，也可以选取仿射函数，使支撑函数在 N 中生成 $\Sigma_1(\mathbf{P}^2)$ 内射线的三个本原向量上取相同的值。后一种支撑函数沿某些射线可能为负，但它由 T唯一、连续且线性地确定。我们将其记为 ψ_T。

我们称

$$\bar{T} := dd^c(\bar{\psi}_u \circ \mathrm{Log}) = dd^c(\bar{\psi}_T \circ \mathrm{Log}) \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$$

$\bar{T}$的齐次化。与 T_{ave}一样，流 T 是旋转不变的，并由 T决定；但如下文将会更加清楚地看到，它更为典范，且其变化方式比 T_{ave}更加稳定。$\bar{T}$。若 $T = \bar{T}$，我们就称 T本身是齐次的。无论如何，$T = T_{ave} = \bar{T}$。在近期反驳 Demailly强化的霍奇猜想的工作中，Babaee 和 Huh [BH] 给出了另一种类似于 T的流的构造；将其限制在我们的情形下，$\bar{T}$通过从支集位于有限个有理射线并集上的热带曲线出发，得到 $\bar{T}_{N_{\mathbf{R}}}$。

对于每个环面曲面 X，我们还将势 u 与 T 对应的除子$D_{u,X} \in \mathcal{D}_{ext}(X)$关联起来，其支撑函数为$\psi_{u,X}$，并由以下条件确定：它在任意射线 $\tau \in \Sigma_1(X)$上与 $\bar{\psi}_u$ 重合。根据构造，$\psi_{u,X}$ 是凸的，因此$D_{u,X}$ 是数值有效的，并满足$\pi_{Y,X}^* D_{u,X} \geq D_{u,Y}$，对任意 $Y \succ X$均成立。齐次流

$$\bar{T}(X) := dd^c(\bar{\psi}_{u,X} \circ \mathrm{Log}) \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$$

$\bar{T}$带有支撑函数 $\psi_{u,X}$ 完全由 T 以及对 X的选择决定。下面的例 6.8 将通过一个具体情形对此进行说明。

命题 6.5。对于任意环面曲面 X，存在一个常数 $C(X) > 1$，使得如果$u \in$ 拟次调和$(\mathbb{T})$具有增长$(\psi_u) < \infty$，那么

$$\bar{\psi}_u \le \bar{\psi}_{u,X} \le C(X)\,\bar{\psi}_u.$$

特别地，增长$(\psi_u,\ X) \le C(X)$ 增长(ψ_u)，且最优常数 $C(X)$ 随 X 递减。最后，存在一些环面曲面 $Y \succ X$，使得最优常数 $C(Y)$ 可以任意接近 1。

证明。上述断言或多或少可直接由 ψ_u 的凸性以及 $\Sigma_1(X)$ 中的射线生成 $N_{\mathbf{R}}$ 作为凸集这一事实得出。最后一个断言成立，是因为对于任意 $\epsilon > 0$，都可以选择 X，使得每个扇区 $\sigma \in \Sigma_2$ 的角宽都小于 ϵ。□

6.2. 有限增长与环面曲面上的平凡延拓。

命题 6.6。设 X 是一个带有体积形式 dV 的环面曲面。那么存在一个常数 C，使得对于任意凸 $\psi\colon N_{\mathbf{R}} \to \mathbb{R}$，均有

$$\int_X |\psi \circ \mathrm{Log}|\, dV \le C(\mathrm{Growth}(\psi) + |\psi(0)|).$$

特别地，$\psi \circ$ 对数映射在 X 上可积，当增长$(\psi) < \infty$ 时。给定（另外）$M > 0$，存在常数 $a, b > 0$，使得当增长$(\psi) \le M$ 时，有

$$\mathrm{Vol}\{p \in X : t \le |\psi \circ \mathrm{Log}(p)|\} \le a e^{-bt}.$$

证明。给定一个扇区 $\sigma \in \Sigma_2(X)$，设 (x_1, x_2) 是关于 $\mathbb{T}$-不变点 p_σ 的特征坐标。由 (18) 立即可知，在这些坐标下有

$$\psi \circ \mathrm{Log}(x_1, x_2) \le |\psi(0)| + C\,\mathrm{Growth}(\psi)\sqrt{(\log|x_1|)^2 + (\log|x_2|)^2},$$

其中 C 仅取决于坐标的选择。将 dV 替换为欧几里得体积，可见右侧可积，并且在任意有界多圆盘 $\{|x_1|, |x_2| \le R\}$ 上满足所需的体积估计。由于在这类多圆盘上，dV 与欧几里得体积一致可比，且有限个这样的多圆盘覆盖 X，故命题得证。□

定理 6.7。设 $T = dd^c u \in \mathcal{D}^+_{1,\,1}(\mathbb{T})$ 满足增长 Growth$(\psi_u) < \infty$，并设 X 是一个环面曲面。那么 $\psi_u \circ$ Log 和 $\psi_u \circ$Log 在 X 上可积。此外，

$$dd^c_X(\psi_u \circ \mathrm{Log}) = T_{ave} - D_{u,X} \quad and \quad dd^c_X(\bar{\psi}_u \circ \mathrm{Log}) = \bar{T} - D_{u,X}. \tag{19}$$

特别地

- $\bar{T}$ 和 T_{ave} 平凡延拓为 $\mathcal{D}^+_{1,\,1}(X)$ 的元素，且二者在 X 中均与 $D_{u,\,X}$ 及（平凡延拓后的）$T(X)$ 上同调等价；
- $\bar{T}$ 到$\mathcal{D}^+_{1,\,1}(X)$的平凡延拓在 X上处处具有连续局部势，除了可能在 $\mathbb{T}$-不变点附近；

  $\bar{T}(X)$到$\mathcal{D}^+_{1,\,1}(X)$的平凡延拓在 X上处处具有连续局部势，且 supp $T(X)$ 不包含任何 $\mathbb{T}$-不变点。

由定理 6.7 的第一项可知，在任意环面曲面上，T 与 T_{ave}（的平凡延拓）是上同调等价的。稍后我们将称这两个流为完全上同调等价。与此相对，流 T（X）通常仅与 T 和 T_{ave} 在 X上上同调等价；见下文例 6.8。

定理 6.7 的证明。我们先证明关于 T 与 ψ_u的断言，并注意到只需在任意极点 $C_\tau \subset X$ 的某个邻域内分别验证即可。给定 $\tau \in \Sigma_1(X)$，我们选取一个相邻扇区 $\sigma \in \Sigma_2(X)$，以及关于 p_σ 的特征坐标（x_1，x_2），使得 $C_\tau = \{x_1 = 0\}$。也就是说，我们将 $\tau \subset N_{\mathbf{R}} \cong \mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R} \cdot (1, 0)$ 识别。由凸性以及 $\bar{\psi}_u$的一次齐次性

$$\lim_{x_1 \to 0} \bar{\psi}_u \circ \mathrm{Log}(x_1, x_2) - \bar{\psi}_u(1, 0) \log |x_1|$$

是 $\log |x_2|$ 的良定义凸函数。因此，$\psi_u \circ \mathrm{Log} - \psi_u(1, 0) \log |x_1|$ 可延拓为在 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$ 上的连续局部势。由此，$\psi_u \circ \mathrm{Log}$ 在 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$ 上局部可积；又由于 $\log |x_1|$ 在 $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ 上是多重调和的，因此 T 可平凡地延拓穿过$C_\tau = \{x_1 = 0\}$，其势除 $(0, 0)$ 外处处连续，即除 $\mathbb{T}$-不变点 p_σ 外处处连续。由于 $\psi_u(1, 0)$ 是 C_τ 在D_u, X中的权，因此 (19) 中右侧的等式在 C_τ的邻域 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$ 内成立。由于 $\tau \in \Sigma_1(X)$ 是任意的，关于 T 和 ψ_u 的结论对整个 X都成立。

转而考虑 ψ_u 并在特征坐标系中工作，我们注意到，根据构造 ψ_u，对任意固定的 x_2，都有

$$\psi_u \circ \mathrm{Log}(x_1, x_2) - \bar{\psi}_u \circ \mathrm{Log}(x_1, x_2) = o(-\log |x_1|)$$

如 $|x_1| \to 0$。因此，$\psi_u \circ \mathrm{Log} - \psi_u \circ \mathrm{Log}$ 可延拓为 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$ 上的局部可积函数，并且 $dd^c(\psi_u \circ \mathrm{Log} - \psi_u \circ \mathrm{Log})$ 在 $\{x_1 = 0\}$上没有支集。(19) 中左侧的等式立即成立。

由于 $T(X)$是齐次的，证明的第一段适用，只需用ψ_u、X和 $T(X)$ 分别替换 ψ_u和 T。因此，$T(X)$ 可平凡延拓至 X，除 $\mathbb{T}$-不变点外处处具有连续局部势，并且 $T(X)$与D_u上同调等价；通过 $dd^c_X(\psi_u, X \circ \mathrm{Log}) = T(X) - D_u, X$。剩下要证明的是定理 6.7 的第三个断言。为此，我们再次在某个 $\mathbb{T}$-不变点$p_\sigma \in X$附近的特征坐标(x_1, x_2)中工作。坐标轴 $\{x_j = 0\}$ 是与射线 $\tau_j \in \Sigma_1(X)$对应的极点，这些射线界定了σ；在隐含的恒等对应 $N \cong \mathbf{Z}^2$, 下，本原向量$(1, 0)$和$(0, 1)$是 τ_1、τ_2的生成元。因此，根据定义，我们有

$$\psi_{u,X}(v) = \psi_u(1, 0)v_1 + \psi_u(0, 1)v_2.$$

对于所有具有非负坐标的 $v \in \mathbf{R}^2$。因此，对于单位双圆盘中的 (x_1, x_2)，有$\psi_u, X \circ \mathrm{Log}(x_1, x_2) = -c_{\tau_1}$对数映射 $|x_1| - c_{\tau_2}$对数映射 $|x_2|$ 恰好是 $-D_u, X$ 的一个局部势。也就是说，$\mathrm{supp}\ T(X)$ 的支集与 p_σ 周围的特征单位双圆盘内部不相交，这就推出了定理 6.7 的最后一个断言。□

例 6.8。令 $\psi(v) = \|v\|$，并设 $u := \psi \circ$对数映射。那么，流 $\bar{T} = dd^c u \in \mathcal{D}^+_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 是齐次的，其支集等于 $\mathbb{T}$。这里我们描述“相关电流”

$$T_1 := \bar{T}(\mathbf{P}^2) \qquad \text{and} \qquad T_2 := \bar{T}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1),$$

在 $\mathbb{T}$ 上，以及它们到 $\mathbf{P}^2$ 的平凡延拓。T_1 和 T_2 的支撑函数 ψ_1 和 ψ_2 分别通过将 ψ 限制到由本原向量集生成的 $\Sigma_1(\mathbf{P}^2)$ 和 $\Sigma_1(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ 中的射线而得到

$$\{(1, 0), (0, 1), (-1, -1)\} \quad \text{and} \quad \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$$

然后在 $\Sigma_2(\mathbf{P}^2)$ 和 $\Sigma_2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ 的每个扇区上作线性延拓。

令 (x_1, x_2) 表示 $\mathbf{P}^2$ 或 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上与由本原向量 (1, 0) 和 (0, 1) 生成的射线相关联的特征坐标。计算可得，$\bar{T}(\mathbf{P}^2) \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$ 的支集无处稠密，且等于

$$\{|x_1| = |x_2| \leq 1\} \cup \{|x_1| \geq |x_2| = 1\} \cup \{|x_2| \geq |x_1| = 1\}$$

并且 $\bar{T}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$ 的支集（不同）且无处稠密，等于

$$\{|x_1| = 1\} \cup \{|x_2| = 1\}.$$

更一般地，若 p_σ 是任意环面曲面 X 上的 $\mathbb{T}$-不变点，且 T 如上所述，则 $\overline{\text{supp}}\, T(X)$ 与以 p_σ 为中心的闭特定坐标双圆盘的交，恰好是该双圆盘的（完整）边界。

根据定理 6.7，两个齐次流 T_1 和 T_2 都平凡地延拓到环面曲面 $\mathbf{P}^2$。不过，这两个延拓彼此并非上同调等价。设 $[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$ 为与 ^{2} 上的特征坐标 $(x_1, x_2) = (\tilde{x}_1/\tilde{x}_0, \tilde{x}_2/\tilde{x}_0)$ 相对应的齐次坐标。那么，将 ψ_1 和 ψ_2 限制到 $\Sigma_1(\mathbf{P}^2)$ 后得到的支撑函数所对应的外部除子为

$$D_1 = (\tilde{x}_1 = 0) + (\tilde{x}_2 = 0) + (\tilde{x}_0 = 0) \quad \text{and} \quad D_2 = (\tilde{x}_1 = 0) + (\tilde{x}_2 = 0) + \sqrt{2}(\tilde{x}_0 = 0).$$

由于 $\deg D_1 = 3 \neq 2 + \sqrt{2} = \deg D_2$，这两个除子在上同调意义下不等价。但根据定理 6.7，我们有 $[T_1] = [D_1]$ and $[T_2] = [D_2]$ in $H^2(\mathbf{P}^2, \mathbf{R})$，因此 T_1 and T_2 在上同调中也不同。

现在我们可以完成对能够平凡延拓到环面紧化的流 $\mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$ 的刻画。

定理6.9. 设 $T \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$ 是 $\mathbb{T}$ 上的正闭 (1, 1) 流，且 $u \in \text{PSH}(\mathbb{T})$ 是 T 的势。则 T 能够平凡延拓到某个/任意环面曲面 X，即 $T \in \mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$，当且仅当 $\text{Growth}(\psi_u)$ 有限。

证明。对于一个方向，假设增长(ψ_u)有限。若 ω 是一个在 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$的作用下不变的 Kähler 形式，那么

$$\|T \wedge \omega\| = \|T_{ave} \wedge \omega\|.$$

根据定理 6.7 T_{ave} 可平凡延拓至 X。也就是说，等式右侧有限，因此我们利用 Skoda-El Mir 判据推得 T 也可平凡延拓至 X。

另一个方向更为实质。假设增长(ψ_u)无限，只需证明存在一个光滑的正形式 ω，定义在 X 上，使得 $T \wedge \omega$ 在 $\mathbb{T}$上具有无限质量。注意，通过将对数映射的一个仿射函数加到 T的势 u 上，我们可以假设凸函数 $\psi = \psi_u$ 在 $N_{\mathbf{R}}$ 上非负，且满足 $\psi(0) = 0$。由于$\Sigma_1(X)$中的射线生成了作为凸集的 $N_{\mathbf{R}}$，且 ψ_u 是凸的，因此，增长$(\psi) < \infty$当且仅当 $\frac{\psi_{(v)}}{\|v\|}$ 在每个 $\tau \in \Sigma_1(X)$上都一致有界。因此，我们可以假设 $\frac{\psi_{(v)}}{\|v\|}$沿某个 $\tau \in \Sigma_1(X)$无界。

令 $\sigma \in \Sigma_2(X)$ 为与 τ 相邻的扇区，并令 (x_1, x_2) 为关于 p_σ 的特征坐标，使得 $C_\tau = \{x_1 = 0\}$。实际上，$\tau = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot (1, 0)$，而我们的无界性假设意味着 $\lim_{v_1 \to \infty} \frac{\psi_{(v_1, 0)}}{v_1} = \infty$。由于 ψ 是凸且非负的，我们更一般地有$\lim_{v_1 \to \infty} \frac{\psi_{(v_1, v_2)}}{v_1} = \infty$，并且该关系在 $v_2 = 0$ 的某个邻域内一致成立。我们将证明，$T_{ave} \wedge dx_2 \wedge d\bar{x}_2$ 在 $(x_1, x_2) = (0, 1)$ 附近具有无限质量。

由构造可知，

$$T_{ave} \wedge \frac{dx_2 \wedge d\bar{x}_2}{2i} = \frac{1}{\pi}\Delta_1(\psi_u \circ \mathrm{Log}) \wedge \left(\frac{dx_2 \wedge d\bar{x}_2}{2i}\right),$$

其中， Δ_1 表示关于 x_1 的分布拉普拉斯算子（视为 x_1 坐标下的测度）。因此，只需对每个固定的 x_2 证明

$$\int_{-v_1<\log|x_1|<0} \Delta_1(\psi_u \circ \mathrm{Log})(x_1, x_2)$$

当 v_1趋于无穷时，.....也趋于无穷。这可利用泊松-延森公式（例如参见[Sib2，定理 A.1.3]）证明，也可通过极坐标计算得到，如下所示。上面的积分等于

$$\int_0^{v_1} \psi_u''(t_1, \log|x_2|)\, dt_1 = \psi_u'(v_1^-, \log|x_2|) - \psi_u'(0^+, \log|x_2|),$$

其中，所有导数均相对于 ψ_u 的第一个参数， $\pm$ 上标用于区分左导数和右导数。由于 ψ_u 是凸的，我们有如下下界

$$\psi_u'(v_1^-, \log|x_2|) > \frac{\psi_u(v_1, \log|x_2|) - \psi_u(0, \log|x_2|)}{v_1}$$

根据假设，当 v_1 趋于 ∞ 时，该量趋于.....。因此，测度 $T \wedge \frac{dx_2 \wedge d\bar{x}_2}{2i}$在 $\{x_1 = 0\}$ 附近的质量无界，正如所述。□

6.3. 环面曲面上的内部流（再探）。正内部流的锥$\mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$在$\mathcal{D}_{1,\,1}(\mathbb{T})$中不是闭的，因为序列$(T_j) \subset \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$可能收敛到$\mathcal{D}^+_{1,\,1}(\mathbb{T})$中的一个极限，而该极限在紧化 X上具有无界质量。即使该序列在$\mathbb{T}$ 和 X上都收敛， X 中的极限也可能支配一个外部除子，因此超出$\mathcal{D}^+_{1,\,1}(\mathbb{T})$中的极限。本节末尾我们将看到，若仅考虑齐次流，情况会更好。

定理6.7和6.9明确指出， $T_{ave}, \bar{T} \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$ 当且仅当 $T \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$。回忆一下，类 $\alpha \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(X)$ 若与任意曲线 $C \subset X$ 的交数非负，则称为数值有效。

推论 6.10. 若 $T \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$，则任意环面曲面 X 上的上同调类 $[T]_X$ 均为数值有效，且等于 T_{ave} 和 T 的上同调类。此外，存在唯一的函数 $\varphi_T \in \mathrm{DPSH}(\mathbb{T})$，使得

- $\int_{\mathbb{T}_{\mathbf{R}}} \varphi_T\, \eta = 0$；且
- φ_T可积，并且在任意环面曲面 X 上满足 $T = T + dd^c_X \varphi_T$。

在推论 6.10 中以及其他地方，我们默认将 X 上的函数 φ 与其拉回 $\varphi \circ \pi_{YX}$ 到任意其他环面曲面 Y 上的函数视为相同。

证明。固定一个环面曲面 X。由于 $\mathbb{T}$ 对自身的作用可延拓为 X 上的作用，且该作用由与恒等映射同伦的自同构给出，因此 T 和 T_{ave} 在 X上上同调等价。同时，定理 6.7 表明， T_{ave} 和 T 在 X 中都与除子群的类上同调等价，其中除子为 $D_{u,\,X}$；由于它具有凸支撑函数 $\psi_{u,\,X}$，故为数值有效。 dd^c-引理给出满足 $dd^c\varphi_X = T - \bar{T}$的 $\varphi_T \in L^1(X)$。紧流形 X上的多重调和函数只有常数，因此按本推论所述进行规范化后， φ_T 是唯一的。

为说明$dd^c_X\varphi_T$与 X无关，我们设 $Y \succ X$。由于 $T - \bar{T}$有 $\pi^*_{YX}T - \pi^*_{YX}\bar{T} = dd^c_Y(\varphi_T \circ \pi_{YX})$ 在 Y上。另一方面，如果我们将 T和 T

连同它们向 Y的平凡延拓考虑，我们有 $T-\pi_{YX}^{*}T$和 $T-\pi_{YX}^{*}T$是由积分得到的流，其支集位于被 π_{YX}压缩的 Y的极点上。由于 T和 T在 Y中也上同调等价，我们看到 $(T-T)$ $-dd_{Y}^{c}(\varphi_{T}\circ\pi_{YX})\in\mathcal{D}_{ext}(Y)$ 与 0 上同调等价，且支集位于 π_{YX}的例外集上。然而，支集包含于 Exc(π_{XY})中的任何非平凡除子都具有负自交数。因此实际上 $T-T=dd_{Y}^{c}(\varphi_{T}\circ\pi_{YX})\equiv dd_{Y}^{c}\varphi_{T}$。□

流 $T\in\mathcal{D}_{int}^{+}(\mathbb{T})$ 的齐次化 $\bar{T}$ 将作为 $[T]$ 的规范性代表元，且独立于曲面-。然而，给定环面曲面上 $\mathbb{T}$-不变点附近的 T 的局部势通常无界，因此要运用多重位势理论中的标准紧性结果来控制 $T-T$ 的相对势 φ_{T}，会有些棘手。以下与此相关的结果足以满足我们下文的需要。

定理6.11. 给定 $M>0$ 以及赋有光滑体积形式的环面曲面 X，存在常数 $a,b>0$，使得对于任意满足具有势 $u\in$的拟次调和函数 PSH($\mathbb{T}$) 且满足增长条件 Growth(ψ_{u}) $\leq M$ 的流 $T\in\mathcal{D}_{int}^{+}(\hat{\mathbb{T}})$，我们有

$$\mathrm{Vol}_{X}\{|\varphi_{T}|\geq t\}\leq ae^{-bt}$$

对于所有 $t\geq 0$。

引理6.12. 对于任意环面曲面 X 和 $M\geq 0$，存在一个齐次内部流- $S(M,X)$，其在 X 上处处具有连续局部势，使得对于任意具有满足增长条件 Growth(ψ_{u}) $\leq M$ 的支撑函数的 $T\in\mathcal{D}_{int}^{+}(\hat{\mathbb{T}})$，有 $S(M,X)\geq T(X)$。

证明。设 $T\in\mathcal{D}_{int}^{+}(\hat{\mathbb{T}})$ 是一个流，其势为 u，且满足增长(ψ_{u}) $\leq M$。固定一条射线 $\tau\in\Sigma_{1}(X)$，并令 $\sigma_{1},\sigma_{2}\in\Sigma_{2}(X)$ 表示 τ 两侧相邻的扇区。于是我们可以选取单位向量 $v_{j}\in\sigma_{j}$, $j=1,2$，使它们的平均值 $v:=\frac{v_{1}+v_{2}}{2}$ 生成 τ。关于 $\psi_{T,\ X}$ 的凸性意味着该量

$$\Delta_{T,\tau}:=\psi_{u,X}(v_{1})+\psi_{u,X}(v_{2})-2\psi_{u,X}(v)$$

是非负的。给定 T 和 X，凸函数 $\psi_{u,\ X}$ 在加上仿射函数后是唯一的。容易验证，该仿射函数对 $\Delta_{T,\ \tau}$ 没有影响，因此它完全独立于势 u 的选择。由凸性可知，我们可以假设 $\psi_{u,\ X}\geq 0$ 在 $N_{\mathbf{R}}$ 上成立，同时允许增长(ψ_{u}) 的上界增至 $2M$。增长($\psi_{u,\ X}$) 也满足相同的上界，因此我们得到

$$\Delta_{T,\tau}\leq 2M+2M-0=4M$$

与 T和 τ无关。因此，存在具有势 $u_{\tau}\in$的 $T_{\tau}\in\mathcal{D}_{int}^{+}(\hat{\mathbb{T}})$PSH($\mathbb{T}$)，满足 Growth($\psi_{u_{\tau}}$) $\leq M$，使得 $\Delta_{T_{\tau},\ \tau}\leq 4M$为极大。

我们设 $S=\sum_{\tau\in\Sigma_{1}(X)}T_{\tau}=dd^{c}$($\psi_{v}$∘对数映射)，其中 $v=\sum_{\tau\in\Sigma_{1}(X)}u_{\tau}$。注意，Growth($\psi_{v}$) $\leq\#\Sigma_{1}(X)\cdot 4M<\infty$，因此 $S\in\mathcal{D}_{int}^{+}(\hat{\mathbb{T}})$。我们声称，$\bar{S}(M,X):=\bar{S}(X)$ 满足该引理的结论。事实上，根据定义，对于任意 $T\in\mathcal{D}_{int}^{+}(\hat{\mathbb{T}})$，有 $\Delta_{\bar{T}(X)\ \tau}=\Delta_{T,\ \tau}$。因此，若 T 具有满足 Growth(u) $\leq M$的势 u，则根据构造，对每个$\tau\in\Sigma_{1}(X)$

$$\Delta_{\bar{S}(X),\tau}=\Delta_{S,\tau}\geq\Delta_{T_{\tau},\tau}\geq\Delta_{T,\tau}=\Delta_{\bar{T}(X),\tau},$$

其中，第一个不等式成立是因为 $\Delta_{T_{\tau'},\tau}\geq 0$ 即使对于不同于 τ的射线 $\tau'\in\Sigma_{1}(X)$ 也是如此。由此可知，$\psi_{v,X}-\psi_{u,X}$ 沿每条射线 $\tau\in\Sigma_{1}(X)$ 都是凸的，因此在整个 $N_{\mathbf{R}}$上都是凸的，即 $S(X)-T(X)\geq 0$。□

定理6.11的证明。给定定理中的 u, T， dd^c-引理给出唯一的函数$\varphi_{T,X} \in L^1(X)$，使得 $T = \bar{T}(X) + dd^c_X \varphi_{T,X}$且$\int_{\text{对数映射}(x)=0} \varphi_{T,X}\, \eta = 0$。由于

$$T - \bar{T}(X) = (T - \bar{T}) + (\bar{T} - \bar{T}(X)) = dd^c_X(\varphi_T + \bar{\psi}_u \circ \mathrm{Log} - \bar{\psi}_{u,X} \circ \mathrm{Log}),$$

φ_T 和$\varphi_{T,\ X}$ 的归一化意味着

$$\varphi_T = \varphi_{T,X} + \bar{\psi}_{u,X} \circ \mathrm{Log} - \bar{\psi}_u \circ \mathrm{Log}\,.$$

在 X上的任何地方。由命题6.5和6.6可知，最后两项满足所需的体积估计。因此，只需针对$\varphi_{T,\ X}$ 而非$^{-}\ \varphi_T$建立所需的体积估计。这样做的优点在于，引理6.12告诉我们$dd^c_X \varphi_{T,\ X} + S(M, X) \geq 0$；也就是说，$\varphi_{T,\ X}{}^{-}$ $^{-}$是 $S(M, X)$-多重次调和的，其中 $S(M, X)$与 T无关，并且在 X上具有连续局部势。

以下引理对于完成证明起着关键作用。

引理 6.13。 $0 \leq \sup \varphi_{T,\ X} \leq C$，其中常数 C依赖于 M和 X，但不依赖于 T。

证明。$\varphi_{T,\ X}$的归一化立即给出 $0 \leq \sup \varphi_{T,\ X}$。对于任意固定的 T，由 X 的紧致性以及 $T(X)$的局部势连续这一事实（定理 6.7）可知，$\sup \varphi_{T,\ X} < \infty$。

固定一个 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$-不变的体积形式 dV，定义在 X 上，并满足 $\int_X dV = 1$。利用Hartogs紧性定理的一个标准论证（见[GZ，第 8] 章）可知，对于任意固定的具有有界局部势的 $S \in \mathcal{D}^+_{1,\ 1}(X)$，集合

$$\{\phi \in L^1(X) : dd^c_X \phi \geq -S \quad \text{and} \quad \sup \phi = 0\}$$

是紧的。

$^{-}$将此应用于 $S = S(M, X)$ 的情形，可得$\|\varphi_{T,\ X} - \sup_X \varphi_{T,\ X}\|_{L^1(X)} \leq C$，其中存在一个与 T 无关的常数 C，从而推出

$$\sup_X \varphi_{T,X} \leq C + \int_X \varphi_{T,X}\, dV.$$

因此，只需证明右侧的积分非正。由于体积形式是 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$ 不变的，只需证明对于每个 $v \in N_{\mathbf{R}}$，平均值

$$h(v) := \int_{\mathrm{Log}(x)=v} \varphi_{T,X}\, \eta$$

$\varphi_{T,\ X}$ 在环面 $\{\mathrm{Log}(x) = v\}$ 上非正。但

$$dd^c_X(h \circ \mathrm{Log}) = T_{ave} - \bar{T}(X) = dd^c_X(\psi_u \circ \mathrm{Log} - \bar{\psi}_{u,X} \circ \mathrm{Log}),$$

$^{-}$ $^{-}$ $^{-}$由此可知，函数 h 与 $\psi_u - \psi_{u,\ X}$只相差一个常数。由于 $h(0) = \psi_u(0) = \psi_{u,\ X}(0)$，我们得到：

$$h = \psi_u - \psi_u(0) - \bar{\psi}_{u,X} \leq \bar{\psi}_u - \bar{\psi}_{u,X} \leq 0.$$

□

利用引理 6.13，我们现在完成定理6.11的证明。它告诉我们，$\varphi_{T,\ X}{}^{-}$的值域落在一个由 $S(M, X)$-多重次调和函数构成的紧族中。定理6.11现在可由 Zeriahi 的工作推出（参见 [Zer，推论 4.3]），该工作对 $\mathbb{C}^n$ 中球上的任意多重次调和函数紧族给出了此类一致估计。□

我们以关于$\mathcal{D}^+_{1,\ 1}(\mathbb{T})$的齐次元素及其支撑函数的一些补充事实，结束本小节。

定理 6.14. 设 $(\bar{T}_j) \subset \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$ 是一列齐次流，且 $\bar{\psi}_j$ 是 T_j 的支撑函数，它们逐点收敛到某个函数 $\psi : N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$。则

- 该收敛实际上在紧子集上一致；
- 极限 ψ 是凸且正齐次的；
- $(\bar{T}_j)$ 在任意环面曲面 X 上弱收敛到齐次流 $\bar{T} \in \mathcal{D}^+_{1,1}$，其支撑函数为 ψ。 $(\mathbb{T})$

反之，若 $(\bar{T}_j)$ 弱收敛到某个流 $\bar{T} \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$，则 $\bar{T}$ 是内部且齐次的，并且支撑函数 $\psi_{\bar{T}_j}$ 在紧集上一致收敛到 $\psi_{\bar{T}}$。

证明。假设支撑函数 ψ_j 逐点收敛到某个极限函数 ψ. 由于在任意由有限个向量 v 生成的凸集 $N_{\mathbf{R}}$ 上，$\psi_j(v) \to \psi(v)$，由凸性和齐次性可知，序列 (ψ_j) 在 $N_{\mathbf{R}}$ 的紧子集上一致有上界。由于极限 ψ 是有限的，再由 ψ_j 的凸性可知，收敛是一致的，且 ψ 是凸的正齐次函数。因此，ψ 是某个齐次流 $\bar{T} \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$ 的支撑函数。在任意固定的环面曲面 X上，定理6.7 告诉我们，$dd^c_X(\psi_j \circ \text{对数映射}) = T_j - D_j$且 $dd^c_X(\psi \circ \text{对数映射}) = T - D$，其中 $D_j, D \in \mathcal{D}_{ext}(X)$的支撑函数由 ψ_j, ψ在 $\Sigma_1(X)$ 中各射线上的限制确定。的一致局部收敛和齐次性意味着 $D_j \to D$。支撑函数的齐次性进一步意味着，在 $L^1(X)$ 中，$\bar{\psi}_j \circ$对数映射 $\to \bar{\psi} \circ$ 对数映射。dd^c_X 的弱连续性继而给出 $T_j - D_j \to T - D$。因此 $T_j \to T$。

现在改为假设 $T_j \to T$ 在 $\mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 中弱收敛。那么存在多重次调和势 $u_j, u \in \mathrm{PSH}(\mathbb{T})$，分别对应 $\bar{T}_j$和 $\bar{T}$，使得 $u_j \to u$在 $L^1_{loc}(\mathbb{T})$ 中成立。由于 $\bar{T}_j$和 $\bar{T}$在 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$的作用下保持不变，我们也可以假设 u_j和 u 同样保持不变。也就是说，$u_j = \psi_j \circ \mathrm{Log}$ 和 $u = \tilde{\psi} \circ \mathrm{Log}$ 是凸函数 $\tilde{\psi}_j, \tilde{\psi} : N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$。$u_j \to u$ 在 L^1_{loc}中的收敛意味着在局部一致收敛。由于同一内部流的两个支撑函数相差一个仿射函数，因此所有 ψ_j 都是正齐次的。于是我们又回到了本证明第一段论证的背景中。□

推论 6.15. 若 $(\bar{T}_j) \subset \mathcal{D}^+_{1,1}$（$\mathbb{T}$）是一个弱收敛的齐次流序列，那么增长（$\psi_{T_j}$）在 j 中一致有界。

推论 6.16. 对任意环面曲面 X，正齐次流的集合在 $\mathcal{D}^+_{1,1}$（X）中是闭的，因此在 $\mathcal{D}^+_{1,1}$（$\mathbb{T}$）中也闭。

7. Toric currents and cohomology classes

论文 [BFJ] 和 [Can1] 开创了这样一种思路：为了更好地理解有理曲面映射 $f : X \dashrightarrow X$ 的动力学，不应只考虑 $H^{1,1}{}_{\mathbf{R}}$（X）上的拉回作用 f^*，还应同时考虑由 X 中点列吹起得到的所有曲面 Y 上的 $H^{1,1}{}_{\mathbf{R}}$（Y）上的作用。本节及下一节将模仿这些论文中的逆极限构造，同时处理（1,1）上同调类和流；但我们不再考虑从例如 $\mathbf{P}^2$, 爆破得到的所有可能曲面，而只关注环面曲面。

如果 $Z \succ Y \succ X$ 全都是环面曲面，那么对于上同调类和流，我们都有 $\pi_{ZX*} = \pi_{YX*}\pi_{ZY*}$ 和 $\pi^*_{ZX} = \pi^*_{ZY}\pi^*_{YX}$。因此，下面的定义是有意义的。

定义 7.1. 环面（Weil）类是一个集合

$$\alpha = \{\alpha_X \in H^{1,1}_{\mathbf{R}}(X) : X \text{ is a toric surface}\}$$

在 $Y \succ X$ 时满足 $\pi_{YX*}\alpha_Y = \alpha_X$。类似地，环面流是一个集合 $T = \{T_X \in \mathcal{D}_{1,1}(X)\}$，同样以环面曲面为索引，并遵循相同的相容性条件。

我们称 α_X 和 T_X 分别为 α 和 T 在 X 上的具体化，并用 $H^1,1\ \mathbf{R}\ (\hat{\mathbb{T}})$ 表示所有环面类组成的 R-^ 向量空间，用 $\mathcal{D}_1,1(\mathbb{T})$ 表示所有环面流组成的空间。对于每个 $T \in \mathcal{D}_1,1(\hat{\mathbb{T}})$，我们关联一个类 $[T] \in H^1,1\ \mathbf{R}\ (\hat{\mathbb{T}})$，其在任意环面曲面 X 上的具体化都是类 $[T_X]_X \in H^1,1\ \mathbf{R}\ (X)$。这是良定义的，因为有理映射的推前保持上同调等价。若一个环面流 T（以及由此延拓得到的其类$[T]$）的所有具体化 T_X 都是正的（分别如此），我们就称其为正的，并在 $T - S$ 为正时记作 $T \geq S$。类似地，若一个类 $\alpha \in H^1,1\ \mathbf{R}\ (\hat{\mathbb{T}})$（以及由此延拓得到的任何代表$\alpha$的 $T \in \mathcal{D}_1,1(\hat{\mathbb{T}})$）的所有具体化都是数值有效的，就称其为数值有效的。

^回忆一下，$\mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$ 是在命题 6.2 的证明之后的段落中定义的。^ 如那里所述，任意内部流 $T \in \mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$ 都是一个环面流，其具体化 $T_X \in \mathcal{D}_{int}(X)$ 由 T 的平凡延拓得到。根据推论 6.10，正的内部流是数值有效的。极点 $C_\tau \subset \mathbb{T}$ 是一个环面流，其具体化 $C_{\tau,X}$ 根据 $\tau \in \Sigma_1(X)$ 是否成立而分别等于 C_τ 或 0。特别地，C_τ 是正的但不是数值有效的，因为在一个充分支配的 X 中有 $C_\tau^2 < 0$。

更一般地，我们称环面流 D 为外部除子，如果对每个环面曲面 X 都有 $D_X \in \mathcal{D}_{ext}(X)$。形式上，我们有

$$D = \sum c_\tau C_\tau,$$

其中求和遍及所有有理射线 $\tau \subset N_{\mathbf{R}}$，并且在 X 上有 $D_X = \sum_{\tau\in\Sigma_1(X)} c_\tau C_\tau$。^令 $\mathcal{D}_{ext}(\mathbb{T})$ 表示所有外部除子的集合。命题 6.1 中的外部/内部直和分解在双有理态射 π_{XY} 的推前下保持不变，因此我们对环面流也得到相同的分解，即 $\mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T}) = \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{T}) \oplus \mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$。

我们将环面曲面 $\hat{X}$ 上外部除子的支撑函数 ψ_D 这一概念推广到任意外部除子 $D \in \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{T})$：规定 ψ_D 是具体化所对应的支撑函数 ψ_{D_X} 的逐点极限。一般而言，ψ_D 仅定义在有理射线上，而非整个 $N_{\mathbf{R}}$上；但当 D 数值有效时，情况会更好。

命题 7.2. 任意 $\alpha \in H^{1,1}\ \mathbf{R}\ (\hat{\mathbb{T}})$ 都能唯一表示为一个外部除子 $D = \sum c_\tau C_\tau$，并满足归一化条件：对于所有 $\tau \in \Sigma_1(\mathbf{P}^2)$，系数 c_τ均相同。^ 此外，对于任意 $D \in \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{T})$，我们有

- D 数值有效，当且仅当 ψ_D 可连续延拓为定义在整个 $N_{\mathbf{R}}$上的凸函数；
- $[D] = 0$ 当且仅当 $\psi_D : N \to \mathbf{R}$ 是线性的；

证明。对于每个环面曲面 X，令 $D_X \in \mathcal{D}_{ext}(X)$ 为代表 α_X 的一个外部除子。若$X \succ \mathbf{P}^2,$，则我们可以给 ψ_{D_X}加上线性函数，使其归一化，从而让 $\psi_{D_X}(v_\tau)$ 对生成 $\Sigma_1(\mathbf{P}^2)$ 中射线的三个本原向量 v_τ 取相同值。于是，D_X 由其在 $H^{1,\ 1}\ \mathbf{R}\ (X)$ 中的类唯一确定。若 $Y \succ X$ 是另一个环面曲面，则 $\pi_{YX*}D_Y$ 也是 α_X 的归一化代表元，因此等于 D_X。因此，外部除子 $\hat{D} = \{D_X\} \in \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{T})$ 代表 α。根据固定环面曲面上外部除子的支撑函数所具有的相应性质，ψ_D 为线性的当且仅当 $\alpha = 0$ 成立，而其为凸的当且仅当 α 数值有效。□

我们在 $H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 和 $\mathcal{D}_{1,\,1}(\hat{\mathbb{T}})$ 上赋予乘积拓扑，并规定：若对每个环面曲面 X，$T_j \to T \in \hat{\mathcal{D}}_{1,\,1}(\mathbb{T})$ 当且仅当 $T_{j,\,X} \to T_X \in \mathcal{D}_{1,\,1}(X)$。于是，将流赋给类的映射 $T \mapsto [T]$ 是连续的。与单个曲面 X上的情形一样，外部 $\hat{}$ 除子构成 $\mathcal{D}_{1,\,1}(\mathbb{T})$ 的一个闭子空间，但内部流不是。因此，当一个 $\hat{}$ 序列 $(T_j) \subset \mathcal{D}_{1,\,1}(\mathbb{T})$ 收敛时，其各项 T_j的内部和外部部分不一定分别收敛。

$\hat{}$ 定义 7.3. 给定 S、$T \in \mathcal{D}_{1,\,1}(\mathbb{T})$ 和环面曲面 X，我们称 S 和 T 在 X 中上同调等价，当且仅当 $[S]_X = [T]_X \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(X)$。若对每个 X 都成立，即 $[S] = [T]$，则称 S 和 T 完全上同调等价。

根据 dd^c-引理，S 和 T 在 X 中上同调等价，当且仅当存在某个 $\varphi_X \in \mathrm{DPSH}(X)$，使得 $S_X - T_X = dd^c\varphi_X$。当 S 和 T 完全上同调等价时，在任何其他环面曲面中，都可以对 $S - T$ 使用本质上相同的势：

$\hat{}$ 命题 7.4. 若 $T \in \mathcal{D}_{1,\,1}(\mathbb{T})$ 完全上同调等价于 0，则存在一个函数$\varphi \in \mathrm{DPSH}(\mathbb{T})$，使得对每个环面曲面 X，都有 $\varphi \in \mathrm{DPSH}(X)$ 且 $T_X = dd^c_X\varphi$。
注意，在积分时，由于 $X \setminus \mathbb{T}$ 是 X 中的零测集，因此将 φ 延拓到 X 本质上是唯一的。我们称 φ 为 T 的势。由紧性可知，它在加上一个常数的意义下唯一。

证明。这与推论 6.10 的证明类似。设 $Y \succ X$，并令 $\pi = \pi_{YX}$。令 $\varphi_X \in L^1(X)$ 为 T_X 的势。一方面，$\varphi_X \circ \pi$ 是 $\pi^* T_X$ 的势。另一方面，由于 $\pi_*\pi^* = \mathrm{id}$，我们有 $\pi^* T_X - T_Y$ 是支集包含于 $\mathrm{Exc}(\pi)$ 且与 0 上同调等价的除子群。唯一满足此条件的除子群是平凡的，因此 $T_Y = \pi^* T_X$。于是 $T_Y := dd^c_Y\varphi$，其中 $\varphi := \varphi_X|_{\mathbb{T}}$。□

定理 6.7 的以下重新表述可由定义立即得出。

$\hat{}$ 定理 7.5. 任意正内部流 $T \in \mathcal{D}_{int}(\mathbb{T})$ 都与其齐次化 $T^{\hat{}}$ 完全上同调等价。此外，若 ψ 是 T 的支撑函数，而 $D \in \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{T})$ 是支撑函数为 ψ 的外部除子 $^{-}$，则 T 与 D 也完全上同调等价 $^{-}$ $^{-}$，并且 $\psi \circ \mathrm{Log}$ 是 $T - D$ 的势。

现在我们可以证明定理1.3，该定理在引言中已陈述。
定理1.3 的证明。若 $\bar{T} \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$ 是齐次的，那么根据推论 6.10，$[\bar{T}] \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 是数值有效的。反之，若 $\alpha \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 是数值有效的，由 $D \in \mathcal{D}_{ext}(\hat{\mathbb{T}})$ 表示，那么根据命题 7.2，D 的支撑函数 ψ_D 是凸的；而定理 7.5 告诉我们，D 与具有相同支撑函数的正齐次流 T 完全上同调等价。$^{-}$也就是说，$[T] = \alpha$。

如果 T' 是另一个满足 $[T'] = \alpha$ 的齐次流，且 ψ 是 T' 的支撑函数 $^{-}$ $^{-}$，那么具有相同支撑函数的外部除子 D' 与 T' 上同调等价，因此也满足 D。由此可知，ψ 与 ψ_D 相差一个线性函数 $h : N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$。$^{-}$ $^{-}$因此，$T - T' = dd^c_{\mathbb{T}}(h \circ \text{对数映射}) = 0$ 在 $\mathbb{T}$ 上成立，进而也在任意环面曲面上成立，因为它们是$^{-}$ $^{-}$内部流。这证明了从正齐次流到环面类的连续映射 $T \mapsto [T]$ 是一个双射。

还需证明，逆映射也连续：它将数值有效类 $\alpha \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 映到其唯一的正 $^{-}$ $\hat{}$ 齐次代表元 T_α。映射 $\alpha \mapsto D_\alpha \in \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{T})$ 将 α

ˆ 映到其归一化代表元 $D_\alpha = \sum c_{\tau,\,\alpha} C_\tau \in \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{T})$，具有如下性质：对每个$\tau \in N$，系数 $c_{\tau,\,\alpha}$ 关于 α 连续。因此，相应的支集 ¯ ¯函数 ψ_α 关于 α 连续，而定理 6.14 表明 $T_\alpha = dd^c(\psi_\alpha \circ$对数映射) 关于 α 也连续。□

注 7.6。重申一下，定理1.3指出，任意数值有效类 $\alpha \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$都由唯一的齐次流 $\bar{T} \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$表示；而对于任意固定的环面曲面 X，每个数值有效类 $\alpha_X \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(X)$都由多个不同的齐次流表示。

给定特定环面曲面上的一个数值有效类 $\alpha_X \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(X)$，表示 α_X 的$T \in \mathcal{D}^+_{1,\,1}(X)$ 的集合是紧的。因此，定理1.3、6.14和7.5推出如下结论。

推论 7.7。设 $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$是一族环面流，$\mathcal{H} \subset H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$是相应的一族环面类。则以下条件等价。

- $\mathcal{T}$在 $\mathcal{D}^+_{1,1}(\hat{\mathbb{T}})$ 中相对紧。
- $\mathcal{H}$ 在 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 中相对紧。
- 存在 $M \geq 0$，使得对于所有 $T \in \mathcal{T}$，Growth(ψ_T) $\leq M$。

根据定义，给定环面类/流的代表元在推前 π_{YX*} 下对于 $Y \succ X$彼此相容。拉回下的相容性则是一个强得多的条件。

定义7.8。若类 $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 由某个特定的环面 ˆ 曲面 X 上的数据决定，即对于所有 $Y \succ X$均有 $\alpha_Y = \pi^*_{YX}\alpha_X$，则称其为卡蒂埃类。同样，若 $T \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 在X上由 $T_Y = \pi^*_{YX}T_X$ 决定，且对于所有 $Y \succ X$ 均成立，则称其为温和的。

根据命题 7.4，类 $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 是卡蒂埃类、由 X 决定，当且仅当表示 α 的某个/任意 ˆ ˆ$T \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 是温和的，并且由 X 决定。极点 $C_\tau \in \mathbb{T}$ 永远不会是温和的。另一方面，对于内部流，我们有以下判据。

命题 7.9。对于内部流 $T \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$ 和环面曲面 X，以下条件等价。

- T 是温和的，在 X 上确定。
- $\nu(T, p_\sigma) = 0$ 对每个 $\mathbb{T}$-不变点 $p_\sigma \in X$。
- $\pi^*_{YX}T_X$对所有 $Y \succ X$ 都在 Y 上是内部的。
- $\psi_{\bar{T}}$在每个扇区 $\sigma \in \Sigma_2(X)$ 上都是线性的。

证明。给定 $Y \succ X$，设 $C_\tau \subset Y$ 是被 π_{YX} 收缩到 $\mathbb{T}$-不变点 $p_\sigma \in X$ 的一个极点。那么引理 2.5 告诉我们，$\pi^*_{YX}T_X$ 当且仅当 C_τ 在 $\nu(T_X, p_\sigma)$ 上 $\neq 0$。特别地，对于每个被 π_{YX} 收缩的极点的像，$T_Y = \pi^*_{YX}T_X$ 当且仅当 $\nu(T_X, p_\sigma) = 0$。前三个条件的等价性由此得出。

为证明其与第四个判据等价，假设 T 是温和的，由 $T_X \in_{H^{1,1}_{\mathbf{R}}}(X)$ 确定。由于 T_X 和 $\bar{T}$ (X) 在 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}(X)$ 中上同调等价，因此，由 $T(X)$ 确定的齐次¯内部环面流与 T完全上同调等价。另一方面，与 T完全上同调等价的齐次内部流只有一个，因此 ¯ ¯ ¯ ¯$T = T(X)$。反过来推理可知，$T = T(X)$ 蕴含 T 是温和的，且由 X确定。□

ˆ 例 7.10. 根据命题 3.3 和 7.9，内部曲线 $C \subset \mathbb{T}$ 总是温和的，在任何完全实现 C 的环面曲面 X 上均可确定。另一方面，齐次

流 $T \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$ 的支撑函数为 $\|\cdot\|$，但它并不温和。事实上，可以在任意环面曲面 X 上验证，对于所有 $\sigma \in \Sigma_2(X)$， $\nu(T, p_\sigma) > 0$。

$\hat{}$ 对于任意环面曲面 X，作为温和流的集合，我们有包含关系 $\mathcal{D}_{1,1}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$。也就是说，给定 $T_X \in \mathcal{D}_{1,1}(X)$，且 X' 是另一个曲面，我们可以选择第三个曲面 Y，它同时支配 X 和 X'，并由 $T_{X'} = \pi^*_{X'X} T_X := \pi_{YX'*}\pi^*_{YX} T_X$ 得到 T_X 在 X' 上的体现。若给定序列中的所有流 T_j 都是温和的，且定义在同一个曲面 X 上，那么 (T_j) 作为环面流序列收敛，当且仅当 $(T_{j,X})$ 在 $\mathcal{D}_{1,1}(X)$ 中收敛。因此，包含关系 $\mathcal{D}_{1,1}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 是到其像上的一个同胚。然而需要注意的是，由于内部流的拉回未必是内部的，这种包含关系并不保持环面流分解为内部和外部部分的结构。

7.1. 托里克类与流的交数和勒隆数。按照[BFJ，我们可以在很大一部分 $H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$上引入一个二次型，使其同时扩展所有环面曲面 X上 $H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(X)$上的交形式。两条关键观察使这成为可能。

首先，在由卡蒂埃类构成的 $H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}$(的子空间上，我们有定义良好的交形式：如果 $\hat{}$ $\mathbb{T}$)由某个曲面 X上的数据确定，那么对于任意其他托里克类 β 以及任意曲面 $Y \succ X$，均有$(\alpha_Y, \beta_Y)_Y = (\alpha_X, \beta_X)_X$。如果 α_0 是由$\mathbf{P}^2$, 中的一条直线确定的卡蒂埃类，那么在任意曲面 $X \succ \mathbf{P}^2$中， α_0 的正交补$\ker \pi_{X\mathbf{P}^2*}$ 上的交形式均为负定。因此，我们可以通过将卡蒂埃类 α $\alpha = c\alpha_0 + \alpha_1$ 分解为平行于 α_0 和与其正交的分支，并规定

$$\|\alpha\|^2 = c^2 - \alpha_1^2.$$

其次，定理 2.1 蕴含 $\alpha_X^2 = (\pi_{YX*}\alpha_Y)^2 \geq \alpha_Y^2$ 对任意 $\alpha \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 以及任意环面曲面 $Y \succ X$ 都成立。令

$$\mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}}) := \{\alpha \in H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}}) : \inf_X \alpha_X^2 > -\infty\}.$$

特别地， $\mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 包含所有卡蒂埃类和所有数值有效类。以下定理总结了基本结果，其证明见 [BFJ] 的第 1.4 和 1.5 节。

定理 7.11. $\mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}}) \subset H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 与配备上述范数的卡蒂埃类的柯西完备化（典范地同构）。此外，卡蒂埃类上的交形式有唯一延拓至 $\mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$，且对所有 $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$，以下结论成立。

- $\alpha^2 =$ 下确界$_X\, \alpha_X^2$。
- 若 α 是卡蒂埃类，且由 X 确定，则 $(\alpha \cdot \beta) = (\alpha_X \cdot \beta_X)_X$。
- 若 $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 是满足 $\alpha^2 \geq 0$ 且 $(\beta \cdot \alpha) = 0$ 的非零类，则 $\beta^2 \leq 0$；当且仅当 α 和 β 互为倍数时，等号成立。
- $\alpha \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 是数值有效的，当且仅当对于所有正的卡蒂埃 β，$(\alpha \cdot \beta) \geq 0$。

$\mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 上的范数拓扑严格强于 $H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 上弱拓扑的（限制），因为除其他原因外，卡蒂埃类在$_{H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}})$ 的弱拓扑下稠密，而 $\mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 是 $H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 的真子集。另一方面，如果 $\alpha = \alpha_X \in_{H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}}(X) \subset \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 是卡蒂埃类，那么 $\mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 上的线性泛函 $\beta \mapsto (\alpha \cdot \beta)$ 可通过 $(\alpha \cdot \beta) := (\alpha_X \cdot \beta_X)$ 连续延拓到整个 $H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$。最后，我们指出，与

BFJ], 中的情形不同， $\mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 这个（不定）希尔伯特空间是可分的，因为不同的环面曲面只有可数多个。

如果 $T \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\hat{\mathbb{T}})$ 且 $p \in \hat{\mathbb{T}}^\circ$ 是一个可实现点，那么我们将 T在 p处的勒隆数 $\nu(T, p)$ 定义为在某个（因而也在任意一个）可实现 p的环面曲面 X 上， T的体现 T_X的勒隆数 $\nu(T_X, p)$。勒隆数还有许多其他性质，其中之一是它们总是非负的。

引理 7.12. 设 X 是一个紧致 K ¨ahler 曲面， $C \subset X$ 是一条曲线，且 $T \in \mathcal{D}^+_{1,1}(X)$ 是一个不对 C 赋质量的流。那么

$$(T \cdot C) \geq \sum_{p \in C} \nu(T, p).$$

证明。我们先证明 $(T \cdot C) \geq 0$。通过分解，我们将问题归结为两种情况： T 不对曲线赋质量，以及 T 是沿曲线 $C' \neq C$的积分流。第一种情况下，Demailly（见 [Dem1]中的推论 6.4）证明了 T 的上同调类是数值有效的；第二种情况下， C' 与 C 横截相交。无论哪种情况，$(T \cdot C) \geq 0$。

ˆ 现在考虑在 $p \in C$ 处对 X 进行爆破，得到 $\pi : X \to X$ 。那么拉回局部势可得

$$\pi^* T = T' + \nu(T, p)E,$$

其中， E 是被 π 收缩的曲线，而 T' 是 T 在 π 下的“严格变换”，也就是说，它是唯一一个在 E 上不带质量且满足 $\pi_* T' = T$ 的正闭流。因此，若 $C' \subset X$ 表示 C 的严格变换，则有

$$T \cdot C = (T \cdot \pi_* C') = (\pi^* T \cdot C') \geq (T' \cdot C') + \nu(T, p) \geq (T' \cdot C')$$

因为 $(E \cdot C') \geq 1$。第一段中的论证再次告诉我们 $(T' \cdot C') \geq 0$。因此，对 T' 重复这一估计，等等，即可完成证明。□

定理 7.13。给定 $T \in \mathcal{D}^+_{int}$（$\hat{\mathbb{T}}$），存在一个仅依赖于 T 的上同调类的 $M > 0$，使得对于充分支配的环面曲面 Y,

$$\sum_{p \in Y \setminus \mathbb{T}} \nu(T_Y, p) < M.$$

证明。固定一个环面曲面 X。 X 上的典范除子为

$$K_X = -\sum_{\tau \in \Sigma_1(X)} C_\tau,$$

因此，引理 7.12 告诉我们

$$(-K_X \cdot T_X) \geq \sum_{\tau \in \Sigma_1(X)} \sum_{p \in C_\tau} \nu(T_X, C_\tau).$$

若 $\pi : Y \to X$ 是 X 在某个 $\mathbb{T}$-不变点 p处的爆破，且 $C = \pi^{-1}(p)$是新的极点，则有 $K_Y = \pi^* K_X + C$（根据伴随公式），并且 $T_Y = \pi^* T_X - \nu(T, p)C$（通过拉回局部势）。因此：

$$0 \leq (-K_Y \cdot T_Y) = (-K_X \cdot T_X) - \nu(T_X, p) \leq (-K_X \cdot T_X).$$

因此，对于任意 $Y \succ X$，我们有

$$\sum_{p \in Y \setminus \mathbb{T}} \nu(T_Y, p) \leq M := (-K_X \cdot T_X).$$

□

7.2. 与 [BFJ] 的关系。除了我们同时考虑流和类这一点外，我们的语境与 [BFJ] 的主要差异在于：对我们而言，一个环面（Weil）类在每个环面曲面 X 上都有一个体现，而 [BFJ] 中的魏尔类则在某个固定基曲面的每个爆破上都有一个体现。姑且设该基曲面为 $\mathbb{P}^2$，，并用 $W(\mathbb{P}^2)$ 表示 [BFJ] 意义下的所有魏尔类的集合。

容易看出，任意 $\tilde{\alpha} \in W(\mathbb{P}^2)$ 都会诱导出一个类 $\mathrm{rs}(\tilde{\alpha}) \in H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}})$，这是通过“限制”得到的。也就是说，当 $X \succ \mathbb{P}^2$ 是一个支配 $\mathbb{P}^2$ 的环面曲面时，我们令 $\mathrm{rs}(\tilde{\alpha})_X = \tilde{\alpha}_X$。对于任何其他环面曲面 Y，我们选择一个同时支配 Y 和 $\mathbb{P}^2$ 的环面曲面 X，并令 $\mathrm{rs}(\alpha)_Y = \pi_{XY*}\tilde{\alpha}_X$。所得限制映射 $\mathrm{rs}: W(\mathbb{P}^2) \to H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}})$ 是线性的、满射且连续的。它保持正类和数值有效类。

为了应用 [BFJ]，的主要结果，限制映射具有一个特定截面 $\mathrm{ex}: H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}}) \hookrightarrow W(\mathbb{P}^2)$ 对我们而言将十分重要。这取决于以下观察：$\mathbb{P}^2$ 的任意爆破都支配一个极大环面曲面。

命题7.14. 如果 $\pi_{\tilde{X}}: \tilde{X} \to \mathbb{P}^2$ 是从一个（非环面）曲面 $\tilde{X}$ 到 $\mathbb{P}^2$，的双有理态射，那么存在一个环面曲面 X 以及一个双有理态射 $\pi_{\tilde{X}X}: \tilde{X} \to X$，使得 ˜ 任意其他从 $\pi_{\tilde{X}Y}: X \to Y$ 到环面曲面 Y 的双有理态射都经过 X 分解，即 $\pi_{\tilde{X}Y} = \pi_{XY} \circ \pi_{\tilde{X}X}$，其中 $\pi_{XY}: X \to Y$ 是一个态射。

证明。这是 [DL1] 中推论5.5 的第二个结论的特例。将 $\pi_{\tilde{X}} = \tau_k \circ \cdots \circ \tau_1$ 分解为爆破 $\tau_j: X_j \to X_{j-1}$ 后， X 的存在性归结为注意到，可以对这些因子排序，使得其中最先的 k' 个是“环面的”，其中心位于前面爆破所生成的曲面上的环面不变点，而其余因子的中心则位于曲面 $X = X_{k'}$ 中出现的非环面不变点。□

给定 $\alpha \in H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}})$，现在我们可以通过规定对任意爆破 $\pi_{\tilde{X}}: \tilde{X} \to \mathbb{P}^2$，有 $\mathrm{ex}(\alpha)_{\tilde{X}} := \pi^*_{\tilde{X}X}\alpha_X$，来定义“延拓” $\mathrm{ex}(\alpha) \in W(\mathbb{P}^2)$；其中 $X \prec \tilde{X}$是被 X支配的极大环面曲面˜。由于 α 在环面曲面上的各种体现 α_X 彼此一致，因此可以验证，$\mathrm{ex}(\alpha)_{\tilde{X}}$ 在 $\mathbb{P}^2$的各次爆破中也彼此一致。显然，$\mathrm{ex}: H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}}) \to W(\mathbb{P}^2)$ 连续且为线性的，满足 $\mathrm{rs} \circ \mathrm{ex} = \mathrm{id}$，并保持正类和数值有效类。

与$\mathbb{T}$$\mathcal{L}^2$(样，我们可以相对于由 $\mathbb{P}^2$, 中的一条直线确定的 Cartier 类 $\tilde{\alpha}_0$，将元素 $\tilde{\alpha} = c\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \in L^2$ 作正交分解；于是 L^2 上的强拓扑由以下范数定义：

$$\|\tilde{\alpha}\| = c^2 - (\tilde{\alpha}_1)^2.$$

由于 $\mathbb{P}^2$ 本身就是环面曲面，因此 $\mathrm{ex}(\alpha_0) = \tilde{\alpha}_0$ 且 $\mathrm{rs}(\tilde{\alpha}_0) = \mathrm{rs}(\mathrm{ex}(\alpha_0)) = \alpha_{0\circ}$

命题 7.15。环面类的延拓限制为一个（强）连续映射 $\mathrm{ex}: \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}}) \to L^2$，它保持交乘积及其相关范数不变。魏尔类的限制限制为一个连续映射 $\mathrm{rs}: L^2 \to \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$，且自交数和范数均不增。最后，对于任意 $\alpha \in \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 和 $\tilde{\beta} \in L^2$，我们有

$$(\alpha \cdot \mathrm{rs}(\tilde{\beta})) = (\mathrm{ex}(\alpha) \cdot \tilde{\beta}).$$

证明。给定类 $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$，设 $\tilde{X} \to \mathbb{P}^2$ 为一次爆破，且 $X \prec \tilde{X}$ 是由 X 支配的极大环面曲面。由于双有理态射的拉回保持交数，我们有

$$(\mathrm{ex}(\alpha)_{\tilde{X}})^2 = (\pi_{\tilde{X}X}^* \alpha_X)^2 = \alpha_X^2.$$

因此 $\mathrm{ex}(\alpha) \in L^2$，且 $\mathrm{ex}(\alpha)^2 = \alpha^2$。类似地，若 $\beta \in \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$，则有 $(\mathrm{ex}(\alpha) \cdot \mathrm{ex}(\beta)) = \alpha \cdot \beta$，因此 ex 关于交数是等距映射。由此可知，若 $\alpha = c\alpha_0 + \alpha_1$ 是 α 相对于 α_0的正交分解，则 $\mathrm{ex}(\alpha) = c\tilde{\alpha}_0 + \mathrm{ex}(\alpha_1)$ 是相对于 $\tilde{\alpha}_0$的正交分解。因此 $\|\mathrm{ex}(\alpha)\| = \|\alpha\|$。特别地，ex 在范数拓扑下连续。

关于映射 rs，对任意 $\tilde{\alpha} \in L^2$，我们有

$$\mathrm{rs}(\tilde{\alpha})^2 = \inf_X \tilde{\alpha}_X^2 \geq \inf_{\tilde{X}} \tilde{\alpha}_{\tilde{X}}^2 = \tilde{\alpha}^2$$

其中，第一个下确界取遍所有环面曲面，第二个下确界取遍 $\mathbb{P}^2$, 的所有爆破；该不等式成立是因为任意环面曲面 X 都被一个同时支配 $\mathbb{P}^2$的环面曲面所支配。特别地，$\mathrm{rs}(L^2) \subset \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$。

现在，若 $\tilde{\alpha} \in L^2$，$\tilde{X} \in \mathcal{L}^2(\hat{\mathbb{T}})$ 是 $\mathbb{P}^2$, 的一次爆破，且 X 是由 X 支配的极大环面曲面，则由投影公式可得

$$(\alpha_X \cdot \mathrm{rs}(\tilde{\beta})_X) = (\alpha_X \cdot \pi_{\tilde{X}X*}\tilde{\beta}_{\tilde{X}}) = (\pi_{\tilde{X}X}^* \alpha_X \cdot \tilde{\beta}_{\tilde{X}}) = (\mathrm{ex}(\alpha)_{\tilde{X}} \cdot \tilde{\beta}_{\tilde{X}}).$$

因此 $(\alpha \cdot \mathrm{rs}(\beta)) = (\mathrm{ex}(\alpha) \cdot \beta)$。

由此可知，若 $\tilde{\alpha} = c\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \in L^2$ 是相对于 $\tilde{\alpha}_0$ 的正交分解，则 $\mathrm{rs}(\tilde{\alpha}) = c\alpha_0 + \mathrm{rs}(\tilde{\alpha}_1)$ 是相对于 α_0 的正交分解。因此

$$\|\mathrm{rs}(\tilde{\alpha})\| = c^2 - \mathrm{rs}(\tilde{\alpha}_1)^2 \leq c^2 - \tilde{\alpha}_1^2 = \|\tilde{\alpha}\|.$$

□

8. Pushforward and pullback by toric maps

本节仍沿用 [BFJ], 的方法，定义并研究环面流和环面流类上自然的拉回与推前作用 f^*, f_*。核心思路是，命题 2.2 使我们能够以一种在不同环面曲面之间保持一致的方式，对环面流和环面流类的具体化进行推前和拉回。我们将首先关注流，而将关于流类的类似讨论的细节留给读者。

推论 8.1。设 f 是一个环面映射，$T \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$，且 $X \succ X$、$Y \succ Y$ 是环面曲面。

(1) 若 $\mathrm{Ind}(f_{XY})$ 中不含 $\mathbb{T}$-不变点，则 $f_{XY*}T_X = \pi_{\tilde{Y}Y*} f_{\tilde{X}\tilde{Y}*} T_{\tilde{X}}$。(2) 若 f_{XY} 不收缩 X的任何极点，则 $\pi_{\tilde{X}X*} f_{\tilde{X}\tilde{Y}}^* T_{\tilde{Y}} = f_{XY}^* T_Y$.

$\mathrm{Ind}(f_{XY})$ 中不含 $\mathbb{T}$-不变点，依据定理 4.5 和 $\mathrm{Ind}(f)$ 的定义，意味着 X实现了 $\mathrm{Ind}(f)$ 和 $\mathrm{Ind}(f_{XY})$ 中的所有点 $=\mathrm{Ind}(f)$。同样，f_{XY} 不收缩任何极点，依据定理 4.3，意味着 $\mathrm{Exc}(f_{XY}) = \mathrm{Exc}(f)$。

证明。假设不定点集(f_{XY})中不含 $\mathbb{T}$-不变点，因此也不含由 $\pi_{\tilde{X}X}$收缩的曲线的像。因此，根据命题 2.2 和不定点集$(\pi_{\tilde{Y}Y}) = \emptyset$，我们推得

$$\pi_{\tilde{Y}Y*} f_{\tilde{X}\tilde{Y}*} T_{\tilde{X}} = f_{\tilde{X}Y*} T_{\tilde{X}} = f_{XY*} \pi_{\tilde{X}X*} T_{\tilde{X}} = f_{XY*} T_X,$$

由此得到第一个断言。对于第二个断言，同理，由于 f_{XY}不收缩任何极点，

$$\pi_{\tilde{X}X*}f^*_{\tilde{X}\tilde{Y}}T_{\tilde{Y}} = f^*_{X\tilde{Y}}T_{\tilde{Y}} = f^*_{XY}(\pi^{-1}_{\tilde{Y}Y})^*T_{\tilde{Y}} = f^*_{XY}\pi_{\tilde{Y}Y*}T_{\tilde{Y}} = f^*_{XY}T_Y.$$

□

推论 8.1 以及定理4.3和4.5的最后结论，使下述定义明确无歧义。

ˆ 定义 8.2. 设 f 是一个环面映射，并设 $T \in \mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$。

• 拉回 $f^*T \in \hat{\mathcal{D}}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 在任意环面曲面 X 上定义如下：选取一个充分支配的环面曲面 ˆY，使得 f_{XY} 不收缩 X 的任何极点，并令 $(f^*T)_X := f^*_{XY}T_Y$；ˆ ˆ

• 推前 $f_*T \in \mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 在任意环面曲面 Y 上定义如下：选取一个充分支配的环面曲面 X，使 Ind(f_{XY}) 不含任何 $\mathbb{T}$-不变点，并令 ˆ$(f_*T)_Y = f_{XY*}T_X$。

ˆ ˆ 命题8.3. 若 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是一个环面映射，且 $T \in \mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 是内部的，则 f^*T 和 ˆf_*T 也都是内部的。

证明。选取环面曲面 X 和 Y，使得 f_{XY} 不会压缩 X 的任何极点。由推论4.4可知， X 中任一极点的像 $f_{XY}(C_\tau)$ 都是 Y 中的极点。因此，如果 T 是内部的，那么 T_Y 不带极点的质量，因此 $(f^*T)_X = f^*_{XY}T_Y$ 也不带极点的质量。于是 f^*T 是内部的。证明 f_*T 是内部的论证类似。□

我们指出，如果 $D \in \mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 是外部除子，那么 f^*D 和 f_*D 不一定也是外部的，因为除子 f^*D 的支集可能落在 Exc(f) 上，而 f_*D 的支集可能落在 f(Ind(f)) 上。

推论 8.4. 如果 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是环面的，那么 f^* 和 f_* 都保持温和流的集合不变。

• 若 $T \in \hat{\mathcal{D}}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 在 X 中是温和的且已确定，并且 f_{XY} 不压缩 X 的任何极点，则 ˆ ˆf_*T 在 Y 中是温和的且已确定，并满足 $(f_*T)_Y = f_{XY*}T_X$。 ˆ

• 若 $T \in \mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 在 Y 中是温和的且已确定，并且 不定点集(f_{XY}) 不包含任何 $\mathbb{T}$-不变的 ˆ ˆ 点，则 f^*T 在 X 中是温和的且已确定，并满足 $(f^*T)_X = (f_{XY})^*T_Y$。

证明。两个断言的论证相似，因此我们只给出第二个断言的细节。给定 $X \succ X$，选择 $Y \succ Y$，使得 $f_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ 不压缩 X 的任何极点。

由于 $f_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ 不压缩极点， $f_{X\tilde{Y}}$ 也不压缩极点。因此我们进一步有 e

$$(\hat{f}^*T)_X = f^*_{X\tilde{Y}}T_{\tilde{Y}} = f^*_{X\tilde{Y}}\pi^*_{\tilde{Y}Y}T_Y = f^*_{XY}T_Y,$$

ˆ 其中，第一个等式根据 f^*T 的定义成立，第二个等式是因为 T 在Y 中已确定，第三个等式则由命题 2.2 以及 不定点集($\pi_{\tilde{Y}Y}$) $= \emptyset$ 这一事实得出。

ˆ为了说明 f^*T 是温和的，并且在 X 中由其确定，请注意

$$(\hat{f}^*T)_{\tilde{X}} = f^*_{\tilde{X}\tilde{Y}}T_{\tilde{Y}} = f^*_{\tilde{X}\tilde{Y}}\pi^*_{\tilde{Y}Y}T_Y = f^*_{\tilde{X}Y}T_Y = \pi^*_{\tilde{X}X}f^*_{XY}T_Y = \pi^*_{\tilde{X}X}(\hat{f}^*T)_X.$$

ˆ ˜这里，第一个等式根据 f^*T的定义和 Y的选取成立；第二个等式成立是因为 T 由 Y决定。第三和第四个等式用到了命题 2.2 以及

以下事实：Ind($\pi_{\tilde{Y}Y}$) $=\emptyset$，而 Ind(f_{XY}) 不含 $\mathbb{T}$-不变点。最后一个等式 ^ ^ ~用到了前面显示的等式。由于对于任意 $X \succ X$，(f^*T) $_{\tilde{X}} = \pi^*_{\tilde{X}X}(f^*T)_X$，我们^可知($f^*T$)由 X决定。□

关于曲面上流和类的推前与拉回，§ 2.2 中的大部分讨论几乎可以直接推广到环面流和类。

命题 8.5. 若 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是环面映射，则

- ^f^*, ^f_*: $\mathcal{D}_{1,\ 1}$(^$\mathbb{T}$) → $\mathcal{D}_{1,\ 1}$(^$\mathbb{T}$) 弱连续，并保持锥 $\mathcal{D}^+_{1,\ 1}$(^$\mathbb{T}$)。^ ^
- 若 $T = dd^c\varphi \in \mathcal{D}_{1,\ 1}(\mathbb{T})$ 完全上同调等价于 0，则 $f^*T = dd^c(\varphi \circ f)$ ^和 $f_*T = dd^c(f_*\varphi)$ 也如此。
- 因此，^ f^*, ^f_*可下降为连续线性算子 ^ f^*, ^f_*: $H^{1,\ 1}_{\mathbf{R}}$(^$\mathbb{T}$) → $H^{1,\ 1}_{\mathbf{R}}$(^$\mathbb{T}$)。
- ^f^*和 ^ f_*保持 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}$(^$\mathbb{T}$) 中的数值有效类集合不变。
- 如果类 $\alpha, \beta \in H^{1,1}_{\mathbf{R}}$(^$\mathbb{T}$) 中至少有一个是卡蒂埃类，则有投影 ^ ^ 公式 ($f^*\alpha \cdot \beta$) = ($\alpha \cdot f_*\beta$)。

命题 2.2 也很容易推广到环面类和流。

命题 8.6. 对于环面映射 f, g，以下条件等价： $\mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$。

- (^f ∘ ^g)* = ^g^* ∘ ^f^*（在 $\mathcal{D}_{1,1}$(^$\mathbb{T}$) 和/或 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}$(^$\mathbb{T}$) 上）；^ ^
- (f_* ∘ ^g)$_*$ = f_* ∘ ^g_*；
- ^g(例外集(^g)) ∩不定点集(^f) $=\emptyset$.

^ ^ ^ ^ ^ 因此，若 f 内部稳定，则对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有($f^n$)* = ($f^*$)^n 且($f^n$)$_*$ = (f_*)^n 。

最后，我们将定理 2.1 推广到环面映射

定理 8.7。对于任意环面映射 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$，由 $\mathcal{E}^-(\alpha) = \hat{f}_*\hat{f}^*\alpha - d_{top}\alpha$给出的连续线性算子 $\mathcal{E}^-\colon H^{1,\ 1}_{\mathbf{R}}$(^$\mathbb{T}$) → $H^{1,\ 1}_{\mathbf{R}}$(^$\mathbb{T}$) 对任意 $\alpha \in H^{1,\ 1}_{\mathbf{R}}$ (^$\mathbb{T}$)满足以下性质。

^ ^ (1) $\mathcal{E}^-(\alpha)$ 是卡蒂埃除子，可由一个支集包含于 f(Ind(f))的除子表示。(2) 只要 α 有效， $\mathcal{E}^-(\alpha)$便是数值有效的。^ ^ (3) 当且仅当对每条曲线 $C \subset f$(Ind(f))，都有 $\mathcal{E}^-(\alpha) = 0(\alpha \cdot C) = 0$。(4) ($\mathcal{E}^-(\alpha) \cdot \alpha) \geq 0$，且当且仅当 $\mathcal{E}^-(\alpha) = 0$时取等号。

我们强调，最后两项中的交数对任意环面类 α^ ^ 都有意义，因为曲线 $C \subset f$(Ind(f)) 表示 Cartier 类，因此对于充分支配的曲面 X，($\alpha \cdot C$) := ($\alpha_X \cdot C_X$)$_X$ 与 X 无关。

^ ^ 证明。由 f^* 和 f_* 的连续性，只需在 α 为 Cartier 类的情形下证明前两个结论。又由于 $\mathcal{E}^-(\alpha)$ 是 Cartier 类，且 f(Ind(f)) 的所有分支都是温和的，因此在证明最后两个结论时，我们同样可以假设 α 是 Cartier 类。

^ ^ ^ 因此，假设 α 是 Cartier 的，我们也有 $f^*\alpha$ 和 $f_*f^*\alpha$ 是 Cartier 的。选取一个充分支配的环面曲面 Y，使得 α、 $f_*f^*\alpha$ 已确定，并且 ^ ^f(Ind(f)) 的所有分支都在 Y 上完全实现。然后选取一个充分支配的环面曲面 X，使得^ ^ Ind(f_{XY}) =Ind(f) $\subset X^\circ$。由推论 8.4 可知， $f^*\alpha$ 在 X 中已确定，且 ^($f^*\alpha$)$_X = f^*_{XY}\alpha_Y$。因此，由定理 2.1

$$(\hat{f}_*\hat{f}^*\alpha)_Y - d_{top}\alpha_Y = (f_{XY*}f^*_{XY} - d_{top})\alpha_Y = \mathcal{E}^-_{XY}(\alpha_Y) \tag{20}$$

对于某个类 $\mathcal{E}^-_{XY}(\alpha_Y)$，它关于 α_Y 线性变化，并由 $f_{XY}(\mathrm{Ind}(f_{XY})) = \hat{}\,\hat{}f(\mathrm{Ind}(f))$ 上的一个除子表示。由于 (20) 左侧仅取决于 Y，$\mathcal{E}^-_Y(\alpha_Y) \equiv \mathcal{E}^-_{XY}(\alpha_Y)$ 与 X 的选取无关。由于 $f_*f^*\alpha - d_{top}\alpha$ 在 Y 中已确定，我们进一步有，对于任意 $Z \succ Y$，相应的类由 $\mathcal{E}^-_Z(\alpha_Z) = \pi^*_{ZY}\mathcal{E}^-_Y(\alpha_Y)$ 给出。因此，取$\mathcal{E}^-(\alpha) \in H^{1,1\,\mathbf{R}}(\hat{}\mathbb{T})$ 为由 $\mathcal{E}^-_Y(\alpha_Y)$ 确定的 Cartier 类，我们得到

$$\hat{f}_*\hat{f}^*\alpha - d_{top}(f)\alpha = \mathcal{E}^-(\alpha).$$

关于 $\mathcal{E}^-(\alpha)$ 的所有其余断言，均由定理 2.1 给出的关于 $\mathcal{E}^-_Y(\alpha_Y)$ 的相应事实推出。不过我们注意到，定理 8.7 的第二个结论比定理 2.1 中的对应结论更强，因为每个不可约分支 $C \subset \hat{}\,\hat{}f(\mathrm{Ind}(f))$ 都是一条内部曲线，表示一个数值有效类，因此只要 α 是（仅仅）有效的，就有 $(\alpha \cdot C) \geq 0$；而 $\mathcal{E}^-(\alpha)$ 一旦有效便是数值有效的。□

8.1. 与 [BFJ] 的比较。我们的推前和拉回定义同样受到 $f^*, f_*\colon W(\mathbf{P}^2) \to W(\mathbf{P}^2)$ 在 [BFJ] 中所给定义的启发。这里我们聚焦于 f^*。从任意一个有理映射 $f\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ 和一个类 $\tilde{\alpha} \in W(\mathbf{P}^2)$ 出发，他们通过选择 Y，使得 $\mathrm{Exc}(f_{XY}) = \emptyset$，并在爆破 $X \to \mathbf{P}^2$ 上定义其体现 $(f^*\tilde{\alpha})_X$，同时规定 $(f^*\tilde{\alpha})_X = f^*_{XY}\tilde{\alpha}_Y$。在我们的环面几何情形下，我们所能做到的最好程度，是使 $\hat{}\,\mathrm{Exc}(f_{XY}) = \mathrm{Exc}(f)$ 仅由持久例外曲线构成。这意味着，除其他事项外，虽然对于 $f^*\colon W(\mathbf{P}^2) \dashrightarrow W(\mathbf{P}^2)$，$(f^n)^* = (f^*)^n$ 自动成立，但对于 $\hat{}\,f^*\colon H^{1,1\,\mathbf{R}}(\hat{}\mathbb{T}) \dashrightarrow H^{1,1\,\mathbf{R}}(\hat{}\mathbb{T})$，只有当 $\hat{}\,f$ 内部稳定时才成立。尽管如此，这两种拉回概念之间仍有某种相容性。

$\hat{}\,\hat{}$ 命题 8.8. 给定一个环面映射 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$，我们有 $f^* = \mathrm{rs} \circ f^* \circ \mathrm{ex}$ 且 $f_* = \mathrm{rs} \circ f_* \circ ex$，其中 f^*, f_* 表示 $W(\mathbf{P}^2)$ 上的推前和拉回。

$\hat{}$ 注意，反向关系 $f^* = \mathrm{ex} \circ f^* \circ \mathrm{rs}$ 通常并不成立。

证明。我们仅详细说明拉回的情形。固定一个类 $\alpha \in H^{1,\,1\,\mathbf{R}}(\hat{}\mathbb{T})$。给定一个环面曲面$X$，设 Y 是另一个环面曲面，使得 f_{XY} 仅收缩持久例外˜曲线。进一步吹起后，我们还可以选择一个（非环面）曲面 $Y \to Y$，使得 $f_{X\tilde{Y}}$ 完全不收缩任何曲线。用由 Y支配的极大环面曲面˜替换 Y 后，仍有 f_{XY} 仅收缩持久例外曲线。根据 $\hat{}$（我们的）定义 $(f^*\alpha)_X = f^*_{XY}\alpha_Y$；而根据 [BFJ] 中拉回的定义以及第 7 节末尾的讨论，

$$\begin{aligned}\mathrm{rs}(f^*\,\mathrm{ex}(\alpha))_X = (f^*\,\mathrm{ex}(\alpha))_X &= f^*_{X\tilde{Y}}\,\mathrm{ex}(\alpha)_{\tilde{Y}} \\ &= f^*_{X\tilde{Y}}\pi^*_{\tilde{Y}Y}\alpha_Y = (\pi_{\tilde{Y}Y} \circ f_{X\tilde{Y}})^*\alpha_Y = f^*_{XY}\alpha_Y = (\hat{f}^*\alpha)_X.\end{aligned}$$

第四个等式由命题 2.2 以及 $\mathrm{Ind}(\pi_{\tilde{Y}Y}) = \emptyset$ 这一事实得出。因此，两种定义得到的结果相同。□

推论 8.9. 若 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是环面的，则算子 $\hat{}\,f^*$、$\hat{}\,f_*$ 在 $H^{1,\,1\,\mathbf{R}}(\hat{}\mathbb{T})$ 上限制为作用于 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 的有界线性算子，并满足

$$(\hat{f}^*\alpha \cdot \beta) = (\alpha \cdot f_*\beta)$$

对所有 $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^2(\hat{}\mathbb{T})$。

证明。$\hat{}\, f^*, \hat{}\, f_*$ 在 $\mathcal{L}^2(\hat{}\,\mathbb{T})$ 上限制为连续算子，这一点由命题 7.15 和 8.8 以及算子 f_*, f^*: $L^2 \to L^2$ 的连续性立即得出（参见 $\hat{}$ [BFJ] 中的命题 2.3）。所示公式由 f^* 和 f_* 的连续性以及命题 8.5 得出，也就是说，当其中一个类是卡蒂埃类时，该公式成立。□

现在，我们可以应用 [BFJ] 的主要结果，为构造与环面映射相关的前向和后向不变流奠定基础。

定理 8.10. 设 $f : \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是一个内部稳定的环面映射。则存在非零数值有效类 α^*, $\alpha_* \in \mathcal{L}^2(\hat{}\,\mathbb{T})$，使得 $\hat{}\, f^*\alpha^* = \lambda_1(f)\alpha^*$ 且 $\hat{}\, f_*\alpha_* = \lambda_1\alpha_*$。若另外 $\lambda_1^2(f) > d_{top}(f)$，则这些类在相差一个常数倍的意义下唯一，并且对任意 $\alpha \in \mathcal{L}^2(\hat{}\,\mathbb{T})$，都有

- 极限$_{n\to\infty}\, \lambda_1^{-n}(\hat{f^n})^*\alpha = (\alpha \cdot \alpha_*)\ \alpha^*$; $\hat{}$
- 极限$_{n\to\infty}\, \lambda_1^{-n}(f^n)_*\alpha = (\alpha \cdot \alpha^*)\ \alpha_*$.

证明。我们仅对这里的类 α^* 给出详细论证。对 α_* 的论证完全相同。 [BFJ] 中的定理 3.2 给出了一个非零数值有效类 $\tilde{\alpha}^* \in W(\mathrm{P}^2)$，使得 $f^*\tilde{\alpha}^* = \lambda_1(f)\tilde{\alpha}^*$。事实上， [DF] 中的定理 4.12 所用的论证表明，可以按如下方式构造 $\tilde{\alpha}^*$。令 $\ell \in \mathrm{P}^2$ 为一条直线。那么，对于任意数值有效类 $\tilde{\alpha} \in W(\mathrm{P}^2)$ 和 $t > \lambda_1$，级数

$$\tilde{\alpha}^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n} f^{n*}\tilde{\alpha}$$

该级数收敛，并且当 t 递减至 $\lambda_1(f)$ 时，有界族 $\tilde{\alpha}^*(t)/(\tilde{\alpha}^*(t) \cdot \ell)$ 的任意极限 $\tilde{\alpha}^*$ 都是具有所需不变性的非零数值有效类。因此，若我们从一个非零数值有效类 $\alpha \in \mathcal{L}^2(\hat{}\,\mathbb{T})$ 出发，并令 $\tilde{\alpha} = \mathrm{ex}(\alpha) \in W(\mathrm{P}^2)$ 为 α 的延拓，则命题 8.8 和内部稳定性给出，在任意环面曲面 X 上，

$$\alpha^*(t) := \mathrm{rs}(\tilde{\alpha}^*(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n}(\hat{f^n})^*\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n}(\hat{f^*})^n\alpha.$$

特别 是，右侧的级数收敛。对两边应用 f^* 可得 s

$$t^{-1}\hat{f^*}\alpha^*(t) = \alpha^*(t) - \alpha.$$

此外，由于 ℓ 在环面曲面 P^2, 中确定了一个类，我们有 $(\tilde{\alpha}^*(t) \cdot \ell) = (\alpha^*(t) \cdot \ell)$；正如 [DF], 中所观察到的，随着 t 递减至 $\lambda_1(f)$，该式趋于无穷。因此，若 $\tilde{\alpha}^*$ 是 $\tilde{\alpha}^*(t)/(\tilde{\alpha}^*(t) \cdot \ell)$ 在 $t \searrow \lambda_1(f)$ 时的任一极限，并令 $\alpha^* := \mathrm{rs}(\tilde{\alpha}^*) \in H^{1,\ 1\mathbf{R}}(\hat{}\,\mathbb{T})$ 为其限制，则由 f^* 的连续性可得

$$\lambda_1^{-1}\hat{f^*}\alpha^* = \alpha^*.$$

这证明了定理的第一个断言。

在附加假设 $\lambda_1(f)^2 > d_{top}(f)$ 下， [BFJ] 中的定理3.5对任意类 $\tilde{\alpha} \in L^2$ 给出

$$\lim_{n\to\infty} f^{n*}\tilde{\alpha}/\lambda_1(f)^n = (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\alpha}_*)\,\tilde{\alpha}^*.$$

取某个类 $\alpha \in \mathcal{L}^2(\hat{}\,\mathbb{T})$ 的 $\tilde{\alpha} = \mathrm{ex}(\alpha)$，我们再次运用内部稳定性和命题 8.8，得出

$$\frac{(\hat{f^*})^n\alpha}{\lambda_1(f)^n} = \frac{(\hat{f^n})^*\alpha}{\lambda_1(f)^n} = \frac{\mathrm{rs}(f^{n*}\tilde{\alpha})}{\lambda_1(f)^n} \to (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\alpha}_*)\ \mathrm{rs}(\tilde{\alpha}^*) = (\alpha \cdot \alpha_*)\,\alpha^*,$$

因为 $\tilde{\alpha} = \mathbf{ex}(\alpha)$ 是 $H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}})$ 中某个类的延拓。 □

我们指出，在更强的假设 $\lambda_1^2(f) > d_{top}(f)$ 下，上述证明可以简化。利用证明的最后一段即可直接得到不变类 α^* （以及 [BFJ，定理 3.5]）。

命题8.11. 设 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 和 $\alpha^*, \alpha_* \in H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}})$ 如定理 8.10 中所述。若 f 的热带化 A_f 是一个具有无理旋转数的同胚，则类 α^* 和 α_* 都不是卡蒂埃。

证明。反设 α^* 是卡蒂埃除子，且由某个环面曲面 X 确定。由于 α^* 非平凡且数值有效，并且 X 上的每个有效除子都线性等价于一个外部除子，因此存在 X 的一个极点 C_τ，使得 $(\alpha_X^* \cdot C_\tau)_X > 0$。由于 A_f 具有无理旋转数，还存在 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\tau' := A_f^{-k}(\tau) \notin \Sigma_1(X)$。那么一方面，$(\alpha^* \cdot \beta)$ 与任意其他类 $\beta \in H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbb{T}})$ 的交数等于 X 中具体化的交数 $(\alpha_X \cdot \beta_X)$。因此 $(\alpha^* \cdot C_{\tau'}) = (\alpha_X \cdot 0) = 0$。

但另一方面，$\hat{f}^k_* C_{\tau'} \geq \deg(\hat{f}^k|_{C_{\tau'}})\, C_\tau$（当且仅当 $\mathrm{Ind}(\hat{f}^k) \cap C_{\tau'} \neq \emptyset$ 时，严格不等式成立），因此

$$(\alpha^* \cdot C_{\tau'}) = \lambda_1^{-k}(\hat{f}^{k*}\alpha^* \cdot C_{\tau'}) \geq \lambda_1^{-k} \deg(f^k|_{C_{\tau'}})(\alpha^* \cdot C_\tau) > 0,$$

其中第一个不等式成立是因为 α^* 是数值有效的。这就构成了我们的矛盾。

正向不变类 α_* 的证明也十分相似，细节留给读者。□

9. Monomial maps and equidistribution

以下关于单项式映射的事实最早由 Favre 观察到。

定理 9.1（[Fav1], 也见 [JW]）。设 $h = h_A : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 是与非奇异线性算子 $A\colon N \to N$ 相关联的单项式映射。则

- $d_{top}(h) = \det A$ 和 $\lambda_1(h)$ 是 A 的特征值绝对值的最大值；
- 特别地，$\lambda_1(h)^2 = d_{top}(h)$ 当且仅当 A 的特征值构成一对共轭复数；
- 存在某个迭代 h^n、$n \leq 6$ 以及一个环面曲面 X，使得 h^n 延拓为代数稳定有理映射，当且仅当 A 的某个幂具有实特征值。

引言中的 [DDG3] 的等分布结果适用于满足定理 9.1 第三个结论的单项式映射。本节中，我们证明一个补充性的等分布结果，适用于第三个结论不成立的情形，即底层矩阵 A 的特征值为 ξ、$\bar{\xi} = |\xi| e^{\pm 2\pi i\theta} \in \mathbb{C}$，且具有相对于 $\pm\theta \in \mathbb{R}$ 的无理辐角。首先，我们证明引言中的定理 1.1。

定理 1.1 的证明。由于 f 是内部稳定的，定理 8.10 表明存在一个数值有效类 $\alpha^* \in H^{1,1_{\mathbf{R}}}(\mathbb{T})$，满足 $\hat{f}^*\alpha^* = \lambda_1(f)\alpha^*$。由推论 8.9 和定理 8.7 可知

$$\lambda_1(f)^2(\alpha^* \cdot \alpha^*) = (\hat{f}^*\alpha^* \cdot \hat{f}^*\alpha^*) = d_{top}(f)(\alpha^* \cdot \alpha^*) + (\mathcal{E}^-(\alpha^*) \cdot \alpha^*).$$

由于 $\lambda_1(f)^2 = d_{top}(f)$，我们看到 $(\mathcal{E}^-(\alpha^*) \cdot \alpha^*) = 0$，因此对于每条 ^ ^ 曲线 $C \subset f$(不定点集(f))，都有 $(C \cdot \alpha^*) = 0$。但任何这样的曲线都是内部的，因此是数值有效的。所以根据定理 7.11$C^2 = 0$， C 的上同调类是 α^* 的倍数。

现在假设 f 不是平移单项式映射。由推论 4.9 可知，至少存在一条对 f而言持久例外的曲线 E。由于 $f(E)$ 是一个点，因此推前 f_*E^ ^ 的支集包含在 $f(\mathrm{Ind}(f))$ 上：

$$\lambda_1(f)(E \cdot \alpha^*) = (E \cdot \hat{f}^*\alpha^*) = (\hat{f}_*E \cdot \alpha^*) \leq M \sum_{C \subset \hat{f}(\mathrm{Ind}(\hat{f}))} (C \cdot \alpha^*) = 0.$$

同样，由于 E 是内部的，可知 E 的类是 α^* 和$E^2 = \alpha^{*2} = 0$的正倍数。

现在令 X 为一个环面曲面，C 是完整的地方 Exc(f) 的所有曲线的并集，$f(\mathrm{Ind}(f))$ 告诉我们，E 的算术亏格是一个非负整数，其值为

$$1 + \frac{1}{2}E \cdot (E + K_X) = 1 + \frac{1}{2}E \cdot K_X = 1 - \frac{1}{2}\sum_{\tau \in \Sigma_1(X)} E \cdot C_\tau \leq 0,$$

因为根据推论 3.4， E 在 X中与至少两条外部曲线相交。因此实际上 $E \cdot K_X = -2$，且 E 的算术亏格为零。这意味着 E 是一条光滑有理曲线，^ 恰好与两个极点 C_{τ_2}、$C_{-\tau_2} \subset \mathbb{T}$相交，且二者都在 X中实现，并且 $(E \cdot C_{\pm\tau_2}) = 1$。

令 $\tau_1 \subset N_{\mathbf{R}}$ 表示另一条有理射线，并选取它使得 $\tau_j \cap N$、 $j = 1$的生成元，2 构成 N的一组基。于是， $\{0\}$、 $\pm\tau_1$、 $\pm\tau_2$ 以及四个互补扇区构成$N_{\mathbf{R}}$中的一个扇，该扇确定了一个环面曲面 X，从而完整实现持久例外曲线 E。将 C_{τ_j} 与 $\{x_j = 0\}$ 对应起来的特征坐标系（x_1、 x_2）扩展为一个同构 $X \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$，将 $C_{-\tau_j}$ 与 $\{x_j = \infty\}$对应起来。我们用这些特征坐标表示其定义域和值域，记 f 为：

$$(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)).$$

曲线 E 是一条竖直直线 $\{x_1 = c\}$，其中某个 $c \in \mathbf{C}^*$，并且由于 E 与 α^* 的某个^倍数上同调等价，不变性 $f^*\alpha^* = \lambda_1\alpha^*$ 意味着 $f_1(x_1, x_2) \equiv f_1(x_1)$ 仅是 x_1 的函数。也就是说， f 是保持竖直纤维化不变的斜积。

写作 $f_1(x_1) = x_1^a g_1(x_1)$，其中 $g_1(0) \neq 0, \infty$，且 $f_2(x_1, x_2) = x_1^b x_2^c g_2(x_1, x_2)$，其中 g_2 沿任一坐标轴 $\{x_j = 0\}$ 都没有零点或极点。将 $f^*\eta = \rho(f)\eta$ 用坐标写出，便得到

$$\rho(f) = ac + x_1 c\frac{g_1'}{g_1} + ax_2\frac{\partial g_2/\partial x_2}{g_2} + x_1x_2\frac{g_1'}{g_1}\frac{\partial g_2/\partial x_2}{g_2}.$$

令 $x_2 = 0$，我们看到 $g_1' \equiv 0$，因此 $\rho(f) = ac$，而 $g_1(x_1) \equiv t \in \mathbf{C}^*$ 是常数。进而可得 $\frac{\partial g_2}{\partial x_2} \equiv 0$，因此 $g_2 = g_2(x_1)$ 仅是 x_1 的函数。简言之， f 的特征坐标表示化简为

$$(x_1, x_2) \mapsto (tx_1^a, x_2^c g(x_1)),$$

其中， a 和 b 是满足 $|ab| = \rho(f)$、 $t \in \mathbf{C}^*$的整数，并且 $g(x_1) = x_1^b g_2(x_1)$是 x_1的有理函数。特别地，$f(\{x_1 = 0\})$要么是 $\{x_1 = 0\}$，要么是 $\{x_1 = \infty\}$。

由于 $f^*\{x_1 = 0\} = |a|\{x_1 = 0\}$，我们推得 $a = \pm\lambda_1(f)$。直接计算可得，典型点 (x_1, x_2) 在 f 下有 $|ac|$ 个原像。因此 $\lambda_1(f)^2 = d_{top}(f) = |ac| = \lambda_1(f)|c|$，即 $c = \pm\lambda_1(f)$。□

以下陈述已在定理 1.1 的证明中指出。

注 9.2. 定理 1.1 的任一结论都表明， A_f f 的热带化是一个同胚。如果 f 是斜积，它会将极点 $\{x_1 = 0\}$ 映射到自身，因此 A_f 固定了标记该极点的射线 τ_1 。因此，在附加假设 A_f 具有无理旋转数的情况下，结论可进一步收窄： f 必须是平移单项式映射。

本节余下部分，我们重点讨论不具备代数稳定模型的单项式映射 $h = h_A$ 。也就是说，我们假设 A 的特征值为 ξ、$\bar{\xi} = |\xi|e^{\pm 2\pi i\theta}$ ，对于$\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$。对于任意这样的 A ，在 $N_{\mathbf{R}}$上存在一个范数 $\|\cdot\|_A$ ，即相对于适当选取的基所定义的欧几里得范数，使得对所有 $v \in N_{\mathbf{R}}$，都有 $\|Av\|_A = |\xi|\|v\|_A$ 。由于该范数是 $N_{\mathbf{R}}$上的凸齐次函数，我们有与之对应的齐次流$\bar{T}_A \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$，其在 $\mathbb{T}$ 上由 $\bar{T}_A := dd^c\|$ 对数映射 $\|_A$给出。由于 $\mathrm{Log} \circ h = A \circ \mathrm{Log}$，齐次流ˆ的拉回在 h 作用下仍保持齐次。特别地，

$$\hat{h}^*\bar{T}_A = dd^c\|\operatorname{Log}\circ h\|_A = dd^c\|A\circ\operatorname{Log}\|_A = |\xi|dd^c\|\operatorname{Log}\|_A = \lambda_1(h)\bar{T}_A.$$

因此， $\bar{T}_A$ 的类 $\alpha^* \in H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 是拉回的主特征向量；根据定理 8.10， ˆ 的存在性得到了保证。事实上，由于 $\mathrm{Ind}(h) = \emptyset$，我们进一步由定理 8.7 得到

$$\lambda_1(h)\hat{h}_*\bar{T}_A = \hat{h}_*\hat{h}^*\bar{T}_A = d_{top}(h)\bar{T}_A = \lambda_1(h)^2\bar{T}_A.$$

ˆ ¯ ¯因此 $h_*T_A = \lambda_1(h)T_A$ 也成立。所以 $\alpha_* = \alpha^*$ 也是推前的主特征向量。

现在我们可以陈述单项式映射的等分布定理。

¯定理 9.3。设 $A : N \to N$ 是一个线性算子，其特征值为 $\xi, \xi \in \mathbf{C}$，且对任意 $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$，有$\xi^n \notin \mathbf{R}$。设 $\bar{T}_A \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\mathbb{T})$ 为相应的齐次流。则对于任意非零温和流 $T \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$，存在 $c^* > 0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\hat{h}^{j*}T}{|\xi|^j} = c^*\bar{T}_A.$$

由于单项式映射保持外部除子，因此在此定理中，要求流 T 为内部流是必要的。我们不知道温和性要求是否也必要。实际上，在证明的结论部分，我们依赖这一要求来确保 $T - T$ 在 $\mathbb{T}$上有一个有上界的势。下面的初步结果——引理 9.4 和 9.5——完全没有用到这一要求。

引理 9.4。定理 9.3 对齐次流 $T = \bar{T} \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$成立。

注意，若定理 9.3 中不进行 C´esaro 平均，则对于任何并非已经是 T_A的倍数的齐次流 T ，此引理都不成立。由于齐次流在 $H^{1,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 中唯一表示数值有效类，因此可见，即使仅在上同调层面，要使定理 9.3 成立，也需要进行 C´esaro 平均。

¯ ¯证明。在 $\mathbb{T}$ 上，对于某个非负齐次凸函数 $\psi : N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$，我们有 $T = dd^c($$\psi\circ$对数映射$)$，因此

$$\hat{h}^{j*}\bar{T} = dd^c(\bar{\psi}\circ\operatorname{Log}\circ h^j) = dd^c(\bar{\psi}\circ A^j\circ\operatorname{Log}).$$

I特别地，ˆ$h^{j*}\bar{T}$ 也是齐次的，并且对于任意 $v \in N_{\mathbf{R}}$ ，我们有

$$|\xi|^{-j}\bar{\psi}(A^jv) = \|v\|_A\cdot\bar{\psi}\left(\frac{A^jv}{\|A^jv\|_A}\right).$$

由于 A 在 $\{\|v\|_A = 1\}$ 上诱导了一个旋转数为无理数的同胚，因此它是唯一遍历的，我们还可以看出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\psi} \left(\frac{A^j v}{\|A^j v\|_A} \right) = c^* > 0$$

对某个常数 $c^* > 0$，关于 v 一致成立。我们得出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\hat{h}^{j*}\bar{T}}{|\xi^j|} = dd^c \left(\|\mathrm{Log}\|_A \cdot \lim_{n\to\infty} \bar{\psi} \left(\frac{A^j \circ \mathrm{Log}}{\|A^j \circ \mathrm{Log}\|_A} \right) \right) = c^* dd^c \|\mathrm{Log}\|_A = c^* \bar{T}_A.$$

□

齐次流的归一化推前所对应的引理 9.4 有类似的证明。然而，定理 9.3 证明的其余部分（包括下一个结果）仅适用于归一化拉回。

引理 9.5。设 $\psi\colon N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ 是一个凸函数，满足 $\mathrm{Growth}(\psi) < \infty$，且 ψ 是其齐次化。那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi \circ A^n - \bar{\psi} \circ A^n}{|\xi|^n} = 0$$

在 $N_{\mathbf{R}}$ 的紧子集上一致成立。

证明。回顾一下，对于任意 $v \in N_{\mathbf{R}}$，ψ 的齐次化定义为 $\bar{\psi}(v) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\psi(tv)$。因此，若令 $t_n := \|A^n v\|_A = |\xi|^n \|v\|_A$ 且 $u_n := t_n^{-1} A^n v$，则 $t_n \nearrow \infty$，于是由命题 6.4 得到

$$\|v\|_A^{-1} \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(A^n v) - \bar{\psi}(A^n v)}{|\xi|^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\psi(t_n u_n)}{t_n} - \bar{\psi}(u_n) \right) = 0.$$

在 $N_{\mathbf{R}}$ 上一致收敛。两边乘以 $\|v\|_A$ 后，我们得到相同的极限，不过仅在 $N_{\mathbf{R}}$的紧子集上一致收敛。□

定理 9.3 的其余证明与 [Sib2] 中引理 1.10.12 的证明相似。

定理 9.3 的证明。固定一个温和流 $T \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$、一个环面曲面 X（在其上 T 有定义），以及 X上的一个 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$-不变的 Kähler 形式 ω。设 T_{ave} 为 T 的旋转平均，T 为 T_{ave}的齐次化。由定理 6.7 和命题 7.9，$T = T(X)$ 在 X中任意一点的某个邻域内都有连续局部势。这意味着我们可以写成 $T - \bar{T} = dd^c\varphi$，其中 $\varphi\colon X \to [-\infty, 0)$ 可积且为负。

只需证明 $|\xi|^{-n} h^{n*}(T - \bar{T}) \to 0$ 属于 $\mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$。我们首先证明这在 $\mathbb{T}$上成立。设 χ 是一个支集位于紧集 $\{\|\text{对数映射}(x)\|_A \le c\} \subset \mathbb{T}$上的光滑 (1, 1) 形式。那么

$$\left|\left\langle h^{n*}(T - \bar{T}), \chi \right\rangle\right| = \left| \int_{\|\mathrm{Log}\|_A < c} (\varphi \circ h^n)\, dd^c \chi \right| \le -C_\omega \|\chi\|_{C^2} \int_{\|\mathrm{Log}\|_A < c} (\varphi \circ h^n)\, \omega^2,$$

其中 $C_\omega > 0$ 仅取决于 Kähler 形式。另一方面，ω^2和对数映射的 $\mathbb{T}_{\mathbf{R}}$-不变性意味着，对于任意 $y \in \mathbb{T}_{\mathbf{R}}$，

$$\int_{\|\mathrm{Log}\|_A < c} (\varphi \circ h^n)\, \omega^2 = \int_{\|\mathrm{Log}\|_A < c} (\varphi_y \circ h^n)\, \omega^2 = \int_{\|\mathrm{Log}\|_A < c} (\varphi_{ave} \circ h^n)\, \omega^2$$

其中 $\varphi_y(x) := \varphi(xy)$ 且 $\varphi_{ave}(x) := \int_{y\in\mathbb{T}_{\mathbf{R}}} \varphi_y(x)\ \eta$。现在，$\varphi_{ave}$ 是 X 上关于 $T_{ave} - \bar{T}^-$ 的势，因此对于某个常数 $B \in \mathbf{R}$，有 φ_{ave} 等于 ψ_{ave}(对数映射(x)) − ψ(对数映射(x)) + B。因此，引理 9.5 意味着

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left\langle |\xi|^{-n} h^{n*}(T - \bar{T}), \chi \right\rangle\right| \leq \lim_{n\to\infty} C_\omega \left\|\chi\right\|_{C^2} \int_{\|\mathrm{Log}\|_A < c} \frac{\varphi_{ave} \circ h^n}{|\xi|^n}\, \omega^2 = 0.$$

也就是说，$\lim |\xi|^{-n} h^{n*}(T - T) = 0$ 在 $\mathbb{T}$ 上。

要说明在 $\mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 中极限仍为零，注意到前面的计算表明，在 $\mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 中，$|\xi|^{-n} h^{n*} T$ 的任意极限点 S 都具有 $S = T_A + S_{ext}$ 这种形式，其中 S_{ext} 是一个有效外部除子。另一方面，根据推论 6.16，$\lim |\xi|^{-n} h^{n*} T$ 的任意极限点都是内部的。因此，由于 T 和 T 完全上同调等价，S^- 和 T_A 也如此。所以 $S_{ext} \geq 0$ 完全上同调于零，因而必为零。□

最后，我们再对定理 9.3 作两点补充。首先，可以将其改述为一种更接近定理1.2的形式，即专门讨论 $\mathbf{P}^2$, 上曲线原像的等分布的定理，不过此时 T_A 的不变性和拉回的收敛性仅在模去外部除子后成立。关于如何从定理 10.1 推出定理1.2，参见第10节的讨论。其次，给定定理 9.3 中的 h 和 $\tau \in \mathbb{T}$，可以验证，平移单项式映射 τh 经由 $\mathbb{T}$ 上的平移与其自身 h 共轭。因此，该定理也适用于平移单项式映射，不过是相对于 T_A 的某个平移而言。

10. Invariant toric currents

本节将证明本文的主要结果，即引言中的定理 1.2 和 1.4。前几节建立的工具使我们能够采用目前已成为代数稳定曲面映射标准做法的论证。首先，我们构造定理 1.2 中的流 T^*。

定理 10.1. 设 $f\colon \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 是一个内部稳定的环面有理映射，其热带化 A_f 是一个具有无理旋转数的同胚。设 $\alpha^*, \alpha_* \in H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 是定理 8.10 结论中与 f 相关联的数值有效类。若 f 不是一个平移单项式映射，则存在 $T^* \in \mathcal{D}_{1,\,1}(\mathbb{T})$，使得对于任意数值有效 $T \in \mathcal{D}_{1,\,1}(\mathbb{T})$，都有

$$\lim \frac{\hat{f}^{n*} T}{\lambda_1(f)^n} = (T \cdot \alpha_*) T^*.$$

因此，T^* 是数值有效且为正的，满足 $f^* T^* = \lambda_1(f) T^*$，并表示类 α^*。

定理结论中要求 T 数值有效，这保证了交集 $(T \cdot \alpha^*)$ 是有限的。例如，当 T 为正且为内部流，或当 T 是由 $\mathbf{P}^2$ 中的一个有效除子确定的温和流时，这一条件便得到满足。

证明。固定一个内部流 $T \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$，使得 $(T \cdot \alpha_*) = 1$。由于 f 是内部稳定的，$T_n := \lambda_1^{-n} f^{n*} T = \lambda_1^{-n} (f^*)^n T$。由于 A_f 具有无理旋转数，且 f 不是平移单项式映射，推论 9.2 告诉我们 $\lambda_1(f)^2 > d_{top}(f)$。因此，由定理 8.10，$\lim [T_n] = \alpha^*$。特别地，$([T_n]) \subset H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$ 是一个相对紧序列。因此，根据推论 7.7，存在 $M > 0$，使得对所有 n，$\mathrm{Growth}(\psi_{T_n}) \leq M$。

由推论 6.10 可知，$T - \bar{T} = T_0 - \bar{T}_0$ 完全上同调于零。因此，由命题 7.4 可知，存在 $\varphi_0 := \varphi_T\colon \mathbb{T} \to \mathbf{R}$，使得 φ 在任意环面曲面上均可积

X 紧化 $\mathbb{T}$ 和 $T - T = dd^c\varphi_0$ 于 X。同样，对于任意 $n > 1$，差$\lambda_1^{-1}(\hat{f}^*\bar{T}_{n-1} - \hat{f}^*\bar{T}_{n-1})$ 完全上同调于零，其势为 $\varphi_n := \varphi_{\lambda_1^{-1}\hat{f}^*\bar{T}_{n-1}} \in L^1(X)$，且与环面曲面 X 的选择无关。由于 $\bar{T}_{n-1}$ 与 $\hat{f}^*\bar{T}_{n-1}$ 完全上同调等价于 T_{n-1}，由定理1.3可知 $f^*T_{n-1} = f^*T_{n-1} = T_n$。因此，

$$dd^c\varphi_n = \lambda^{-1}\hat{f}^*\bar{T}_{n-1} - \bar{T}_n.$$

Thus

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\hat{f}^{n*}T}{\lambda_1^n} = \frac{\hat{f}^{*n}\bar{T}_0 + dd^c\varphi_0 \circ \hat{f}^n}{\lambda_1^n} \\ &= \frac{\hat{f}^{(n-1)*}\bar{T}_1}{\lambda_1^{n-1}} + dd^c\left(\frac{\varphi_1 \circ \hat{f}^{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} + \frac{\varphi_0 \circ \hat{f}^n}{\lambda_1^n}\right) = \dots \\ &= \bar{T}_n + dd^c\sum_{j=0}^{n}\frac{\varphi_{n-j} \circ \hat{f}^j}{\lambda_1^j}. \end{aligned}$$

由于 $[T_n]$ 收敛到 α^*，定理1.3告诉我们，T_n 收敛到表示 α^*的唯一齐次流。因此，要证明序列 (T_n) 收敛，只需证明对于任意固定的环面曲面 X，右侧的和在 $L^1(X)$ 中当 $n \to \infty$时收敛。

一旦固定 X，推论 7.7 和定理6.11便给出常数 a、$b > 0$，使得

$$\mathrm{Vol}\{|\varphi_n| \geq t\} \leq ae^{-bt}$$

对于所有非负的 n 和 t均成立。由定理 5.4，我们还可推出，对于任意 $\mu > \sqrt{d_{top}(f)}$，存在常数 A、$B > 0$，使得

$$\mathrm{Vol}\{|\varphi_n \circ f^m| \geq t\} \leq Ae^{-Bt\mu^{-m}}$$

对于所有非负的 n、m 和 t均成立。由于 $\lambda_1(f)^2 > d_{top}(f)$，我们可以假设 $\lambda_1 > \mu$。因此

$$\int_X \frac{|\varphi_{n-j} \circ f^j|}{\lambda_1^j}\,dV = \frac{1}{\lambda_1^j}\int_0^\infty \mathrm{Vol}\{|\varphi_{n-j} \circ f^j| \geq t\}\,dt \leq \frac{A}{\lambda_1^j}\int_0^\infty e^{-Bt\mu^{-j}}\,dt \leq \frac{A}{B}\left(\frac{\mu}{\lambda_1}\right)^j.$$

因此，$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varphi_{n-j}\circ f^j}{\lambda_1^j}$在 $L^1(X)$ 中收敛，故 $T^* := \lim T_n$ 存在。由于对于所有 n，T_n 都是数值有效且为正的，T^*也如此。该上同调类为 $[T^*] = \lim[T_n] = \alpha^*$。$f^*$的连续性意味着 $f^*T^* = \lambda_1 T^*$。

要证明 T^* 与初始流 T 的选择无关，设 $T' \in \mathcal{D}^+_{1,1}(\hat{\mathbb{T}})$ 是另一个满足 $f^*T' = \lambda_1 T'$ 的数值有效环面流。由于 $\lambda_1(f)^2 > d_{top}(f)$，类 α^* 在相差一个正倍数的意义下是唯一的。因此，T' 与 T^* 完全上同调等价，并且对于某个相对势 φ，我们有$T' - T^* = dd^c\varphi$。由不变性可得

$$T' - T^* = \frac{f^{n*}(T' - T^*)}{\lambda_1^n} = dd^c\frac{\varphi \circ f^n}{\lambda_1^n}$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都成立。但如上所示，$\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{|\varphi\circ f^n|}{\lambda_1^n}\,dV = 0$ 在任意环面曲面 X 上几何收敛。因此实际上 $T' = T^*$。

我们的初始流 T 是内部且为正的假设同样可以省略。若 $T \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{T})$ 是任意的（尤其是不一定不变的）数值有效流，且 $(T \cdot \alpha_*) = 1$，则存在一个齐次流 $\bar{T} \in \mathcal{D}^+_{int}(\hat{\mathbb{T}})$ 完全

$\bar{}$与 T上同调等价。记 $T - T = dd^c\varphi$ 为某个相对势 φ，则对于任意环面曲面 X，我们再次有 $\lambda_1^{-n}\varphi \circ f^n \to 0$属于 $L^1(X)$，因此 $\lambda_1^{-n}\hat{}f^{n*}(T - \bar{T})$ $\to 0$。于是

$$\lim \lambda_1^{-n} \hat{f}^{n*} T = \lim \lambda_1^{-n} \hat{f}^{n*} \bar{T} = T^*.$$

□

定理 10.2。设 f： $\mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{T}$ 和 $T^* \in \mathcal{D}_{1,\ 1}^+(\hat{}\mathbb{T})$ 如定理 10.1 所述。那么，勒隆数 $\hat{}$ $\nu(T^*, p)$ 在所有对于 f 的任意 $\hat{}\hat{}$ 迭代 f^n 均非持续不定的点 $p \in \mathbb{T}^\circ$ 处都为零。因此 T^* 不在曲线上赋质量。

注意，由于每条持续例外曲线的像都是某个极点处的自由点，假设 A_f： $N_{\mathbf{R}} \to N_{\mathbf{R}}$ 是一个关于 0 具有无理旋转数的同胚，可保证没有例外曲线是预周期的。

定理 10.2 的证明。回顾定理 7.13 可知，对于任意环面曲面 X 上的点 p， T^* 的勒隆数 $\nu(p, T^*)$ 存在一个绝对上界 $M\hat{}$。设 $p \in \mathbb{T}^\circ$ 是一个 $\hat{}\hat{}$ 点，使得 p 不是 $\mathbb{T}$-不变的，并且对于任意 $n \geq 0$， $f^n(p)$ $\notin$ Ind(f)。

首先，假设 p 及其整个正向轨道都包含在 $\mathbb{T}$中。由定理 4.5 可知，对每个 $n \in$ Z$_{\geq 0}$， f 在 f^n (p)附近是局部同构。因此

$$\lambda_1^n \nu(T^*, p) = \nu(f^{n*} T^*, p) = \nu(T^*, f^n(p)) \leq M.$$

令 $n \to \infty$，即可得出 $\nu(T^*, p)$ $= 0$。

$\hat{}\hat{}$ 现在假设 $p \in C_\tau \subset X$是某条外部曲线上的一个自由点，但对任意 $n \geq 0$， $f^n(p)$ $\notin$都不属于例外集 Exc(f)。选取一个递增的环面曲面序列 $X_0 = X \prec X_1 \prec \dots$，使得对每个 n，$A_f^n \tau \in \Sigma_1(X_n)$。于是， $p_n := f_{X_{n-1}X_n} \circ \cdots \circ f_{X_0 X_1}(p)$，$n \in$ Z$_{\geq 0}$是极点 $C_{A_{f^n}(\tau)}$ $\subset X_n$中的一个良定义的自由点序列。 $f_{X_0 X_n}^n$ 在 p 附近的局部次数正是包含 p的极点处的分歧 Ram(f^n, τ)。由定理 4.8，这等于$\|A_f^n(\underset{\|v'\|}{v}\|)$，其中 $v' \in N$是生成 $A_f^n(\tau)$的本原向量。因此，引理 2.5 告诉我们

$$\lambda_1^n \nu(T^*, p) = \nu(f^{n*} T^*, p) \leq \frac{\left\|A_f^n(v)\right\|}{\|v'\|} \nu(T^*, f^n(p)) \leq M \frac{\left\|A_f^n(v)\right\|}{\|v'\|}.$$

因此，根据定理 5.5 以及关于 f及其$\hat{}$热带化的假设， $\nu(T^*, p)$ $\leq M \cdot \lim_{n\to\infty} \|A_f^n(\underset{\lambda_1^n\|v'\|}{v}\| = 0)$。由于对每个 $n \geq 0$，Exc(f^n) $\setminus \mathbb{T}$中只有有限多个点，我们推知 T^*在外部曲线 C_τ上没有质量，即 T^*是一个内部流。

最后，考虑 A_f的正具有无理旋转数，但用 f(Exc(f)) $\subset \mathbb{T}^\circ \setminus \mathbb{T}$ 由正向轨道不与 Ind(f)相交的点组成，因此不存在预周期持久例外曲线，即不存在满足 $f^m(E)$ $\in E$ 对某个 $m > 0$ 成立的曲线 $E \subset$ Exc(f)。因此，满足 $f^n(p)$ $\in$Exc(f)的 $n \geq 0$只有有限多个。若 $n = N$ 是其中最大的一个，那么引理 2.5 告诉我们， $\nu(T^*, p)$ $\leq C^{N+1} \nu(T^*, \hat{}f^{N+1}(p))$，其中$\hat{}$ f^{N+1} (p)是某个极点中的一个自由点；由上一段可知， $\nu(T^*, \hat{}f^{n+1}(p))$ $= 0$。□

推论 10.3. 定理 10.1 中的流 T^* 是内部的。对于任意环面曲面 X 和Y，差 $f_{XY}^* T_Y^* - \lambda_1(f) T_X^*$ 是有效除子。

证明. 由于 T^* 不作用于（尤其是外部）曲线，因此它是内部的。

给定环面曲面 X 和 Y，选择 $Y' \succ Y$，使得 $f_{XY'}\colon X \dashrightarrow Y'$ 不会收缩 X的 ˆ 外部曲线。根据定义，我们有 $(f^*T^*)_X = f^*_{XY'}T^*_{Y'}$。由于 $T^*_Y = \pi_{Y'Y*}T_{Y'}$，定理 2.1（应用于 $f = \pi^{-1}_{Y'Y} = \pi_{YY'}$）推出

$$E := \pi^*_{Y'Y}T^*_Y - T^*_{Y'} = \pi^*_{Y'Y}\pi_{Y'Y*}T^*_{Y'} - T^*_{Y'} = \mathcal{E}^-_{\pi_{YY'}}(T^*_Y)$$

是一个有效除子。因此，根据命题 2.2 以及 $\mathrm{Ind}(\pi_{Y'Y}) = \emptyset$ 这一事实，

$$f^*_{XY}T^*_Y = f^*_{XY'}\pi^*_{Y'Y}T^*_Y = f^*_{XY'}(T^*_{Y'} + E) = \lambda_1(f)T^*_X + f^*_{XY'}E.$$

□

推论 10.4。对于任意环面曲面 X 和任意曲线 $C_X \subset X$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{n*}_{XX}C_X}{\lambda_1(f)^n} \to (\alpha_{*X} \cdot C_X)T^*_X.$$

证明。令 $C \in \mathcal{D}^+_{1,\,1}(\hat{}\,\mathbb{T})$ 表示由 C_X在 X中确定的温和环面流。（注意，ˆ 如果 C_X 本身是外部的，那么 C 的支集中将包含 $\mathbb{T}$ 的大多数外部曲线。）选择一个递增的环面曲面序列 $X \prec X_1 \prec X_2 \prec \dots$，使得 $\mathrm{Ind}(f^n_{X_nX})$ 不包含 X_n的任何 $\mathbb{T}$-不变点。根据推论 8.4，我们有 $f^{n*}C$ 在 X_n 上由代表元 $(\hat{}\,f^{n*}C)_{X_n} = f^{n*}_{X_nX}C_X$. 确定。因此，根据命题 2.2 以及 $\pi^{-1}_{X_nX}$不会进一步收缩曲线这一事实，推出

$$f^{n*}_{XX}C_X = (f^n_{X_nX} \circ \pi^{-1}_{X_nX})^*C_X = \pi_{X_nX*}f^{n*}_{X_nX}C_X = \pi_{X_nX*}(\hat{f}^{n*}C)_{X_n} = (\hat{f}^{n*}C)_X.$$

两边同时除以 $\lambda_1(f)^n$，令 $n \to \infty$，并在右侧应用定理 10.1，即可完成证明。□

定理1.2的证明。定理1.2和定理 10.1的假设相同，因此取 T^*，如定理 10.1的结论所述。我们声称，对于 T^* 在 $\mathbf{P}^2$ 中的代表元 $T^*_{\mathbf{P}^2}$，定理1.2的所有结论均成立。事实上，第一个结论由定理 10.2立即得出。第二个结论由 $f^*T^* = \lambda_1(f)T^*$ 以及将推论 10.3应用于 $X = Y = \mathbf{P}^2$立即得出。定理1.2的第三个结论由推论 10.4（取 $X = \mathbf{P}^2$ 和 $C_X = C$）得出。

□

本节其余结果均针对满足定理 10.1的假设且具有小拓扑次数的环面映射，即 $d_{top}(f) < \lambda_1(f)$。

正 (1,1) 流 $T \in \mathcal{D}^+_{1,\,1}(X)$ 是层状且强可逼近的，粗略地说，这意味着它可以从下方由形如 $S = \int \Delta(x)\,\mu(x)$ 的流之和穷尽，其中 $\Delta(x)$ 是受控几何的两两不交圆盘上的积分流，而 μ 是某个与所有 $\Delta(x)$ 横截的圆盘上的正博雷尔测度。我们不需要精确定义，因此不在此给出；这里只指出，层流性一直是研究具有小拓扑次数的复曲面上的有理映射遍历性质的一项重要性质。感兴趣的读者可参阅例如 [Duj1], [Duj2], 和[Duj3]，了解更多背景。

定理 10.5. 如果 f 满足定理 10.1 的假设并且具有小拓扑次数，那么流 T^* 在任意环面曲面上都是层状的，并且强可逼近。

证明。令 X 为任意环面曲面。选取一个嵌入 $\iota: X \hookrightarrow \mathbf{P}^N$，令$C_X = \iota^* H$ 为非常一般超平面 $H \subset \mathbf{C}^N$的拉回。由于与这类曲线相关的完全线性系是无基点的，我们可以假设 C_X 是光滑的，并且与 X的有限多个 $\mathbb{T}$-不变点不相交。因此， C_X 完全实现了一个ˆ 内部曲线 $C \subset \mathbb{T}$。我们还可以进一步假设， C 与 $\bigcup_{n\geq 1} f^n(\mathbf{Exc}(f))$ 中可数多个 ˆ ˆ ˆ 点不相交。于是，对于所有 $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$， $f^{-n}(C)$ 都是一条（不可约）曲线，并且 ˆ ˆ ˆ ˆ supp $f^{n*}C = f^{-n}(C)$。因此在 X 中，我们有 supp $f_{XX}^{n*} C_X = (f^{n*}C)_X = f^{-n}(C)_X$。根据 [DDG1] 中的定理 2.12，层流性和强可逼近性随即成立。注意，尽管该定理的陈述要求 f 是代数稳定的，但这一假设仅用于保证流 T_X^* 的存在，以及它是 $f_{X,\ X}^{n*} C_X/\lambda_1(f^n)$ 的弱极限这一事实。这些事实由定理 10.1 和推论 10.4 保证。 □

从本质上说，拓扑次数较小的有理曲面映射足够接近可逆，因此也可以预期曲线的正向迭代会呈现等分布。

定理 10.6. 若 f 满足定理 10.1 的假设且拓扑次数较小，则存在一个数值有效且内部的环面流 $T_* \in \mathcal{D}_{1,1}^+(\hat{\mathbb{T}})$，使得对于任意其他数值有效流 $T \in \mathcal{D}_{1,1}^+(\hat{\mathbb{T}})$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{f}_*^n T}{\lambda_1(f)^n} = (T \cdot \alpha^*)\, T_*.$$

ˆ 特别地， T_* 是编织的、强可逼近的，并且满足 $f_* T_* = \lambda_1(f) T_*$。

编织的定义与层状且强可逼近的定义完全相同，唯一的区别在于，下逼近中的圆盘 $\Delta(x)$ 允许彼此相交。就我们的结果而言，正向与反向等分布流 T_* 和 T^* 的一个显著区别是，我们不知道 T_* 是否会给曲线赋予正质量。这里我们只证明 T_* 不支配任何外部曲线。

证明。 T_* 的构造与定理 10.1 中 T^* 的构造非常相似。因此，我们只作简要说明。固定一个环面流 $T = T_0 \in \mathcal{D}_{int}^+(\hat{\mathbb{T}})$，使得 $(T \cdot \alpha^*) = 1$，并取一个环面曲面 ˆ ⁻X，令 $T_n = \lambda_1(f)^{-n} f_*^n T$，并记 $T_0 - T_0 = dd^c \varphi_0$，且对所有 $n \geq 1$，

$$\lambda_1(f)^{-1} f_* \bar{T}_{n-1} - \bar{T}_n = dd^c \varphi_n$$

其中相对势 φ_j 在 X上可积。于是，如定理 10.1 的证明中那样

$$T_n = \bar{T}_n + dd^c \sum_{j=1}^{n} \frac{f_*^j \varphi_{n-j}}{\lambda_1^j}.$$

此处，可积函数 φ 的推前 $f_*^j \varphi$ 对几乎处处的 $p \in X$ 定义为 $f_*^j \varphi(p) := \sum_{f^j(q)=p} \varphi(q)$。固定 $\mu < 1$，利用序列 (T_n) 的紧性、定理 5.4 和推论 7.7，可得常数 $A, B > 0$，使得

$$\mathrm{Vol}(\{|f_*^m \varphi_n| \geq t\}) \leq A e^{-Bt(\mu/d_{top})^m}$$

对所有 $n, m, t \geq 0$ 均成立。这里，右侧指数中的 d_{top}^{-m} 是为了计入一般点 p 在 f^m 下的原像个数。有了这一点，便可得到一个上界

$$\int_X \frac{f_*^j \varphi_{n-j}}{\lambda_1^j}\, dV \leq \frac{1}{\lambda_1^j} \int_0^\infty \mathrm{Vol}\left\{p \in X : |f_*^j \varphi_{n-j}(p)| \geq t\right\} dt \leq \frac{A}{B}\left(\frac{d_{top}}{\mu \lambda_1}\right)^j.$$

由于我们假设 f 具有小拓扑次数，因此当 $j \to \infty$时，只要 $\mu < 1$ 足够大，该估计右侧就会几何地收敛到零，这足以证明(T_n)收敛到流$T_* \in \mathcal{D}_{1,\,1}^{+}(\hat{\mathbb{T}})$。必然有 $[T_*] = \alpha_*$ 和$\hat{}$ $f_* T_* = \lambda_1 T_*$；与定理 10.1 的证明类似，可以证明极限 T_* 与初始流 T无关。和前面一样，可以证明，只要初始环面流 T 在 $H^{1,\,1}_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbb{T}})$中表示一个数值有效类，它就不必是正的或内部的。根据定理 10.5 的证明中的相同推理，[DDG1] 中的定理 3.6 表明 T_* 是编织的。

$\hat{}$ 还需证明 T_* 是内部的。为此，固定一条外部曲线 $C_\tau \subset \mathbb{T}$，并设 $T_* \geq a C_\tau$，其中 $a > 0$ 为某个常数。令 $\tau' = A_f^{-1}(\tau)$。那么 $C'_\tau \subset \hat{\mathbb{T}}$ 是唯一一条 $\hat{}$（外部）曲线，使得 $f(C'_\tau) = C_\tau$。令 Y 为实现 C_τ 的环面曲面，并令 X 为实现 $C_{\tau'}$ 的环面曲面，且满足 $\mathrm{Ind}(f_{XY}) = \mathrm{Ind}(f)$ 没有 $\mathbb{T}$-不变点。那么根据推前的定义，我们一方面有

$$a\lambda_1 C_\tau \leq (\lambda_1 T_*)_Y = (\hat{f}_* T_*)_Y = f_{XY*}(T_*)_X.$$

另一方面，C_τ 不包含在 $f_{XY}(\mathrm{Ind}(f_{XY}))$ 中，因为后者仅由内部曲线组成，而 $C_{\tau'}$ 是 X 中唯一满足 $f_{XY}(C'_\tau) = C_\tau$ 的曲线。由于 $f_{XY*} C_{\tau'} = (\deg f_{XY}|_{C_{\tau'}}) C_\tau \leq d_{top} C_\tau$，我们推得 $(T_*)_X \geq a(\lambda_1/d_{top}) C_{\tau'}$。也就是说，$T_* \geq a(\lambda_1/d_{top}) C_{\tau'}$。$\hat{}$ $\hat{}$ 用 f 替换 f^n 重复这一估计，我们得到一列外部曲线 C_n，使得对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都有 $T_* \geq a(\lambda_1/d_{top})^n C_n$。特别地，$T_*$ 沿外部曲线的勒隆数无界，这与定理 7.13 矛盾。因此，T_* 不支配任何外部曲线的正倍数，故必为内部的。□

定理1.4可用与定理1.2由本节前述结果推出相同的方法，由定理 10.5 和 10.6 推出。

References

[ADM] Habibulla Akhadkulov、Akhtam Dzhalilov 和 Dieter Mayer。关于具有两个断点的圆周同胚的共轭。《遍历理论与动力系统》34(2014)，725–741。[Bab] Farhad Babaee。动力学热带化。《几何分析杂志》33(2023)，第74号论文，38页。[BH] Farhad Babaee 和 June Huh。利用热带方法研究正流的广义霍奇猜想。《杜克数学杂志》166(2017)，2749–2813。[BS] Eric Bedford 和 John Smillie。C^2上的多项式微分同胚：流、平衡测度与双曲性。《数学发明》103(1991)，69–99。[BDJ] Jason P. Bell、Jeffrey Diller 和 Mattias Jonsson。一个超越动力次数。《数学学报》225(2020)，第2期，193–225。[Bir22] Richard Birkett。《有理曲面映射的稳定化》。预印本：https://arxiv.org/pdf/2110.00095.pdf[Bla] J´er´emy Blanc。平面上的辛双有理变换。《大阪数学杂志》50(2013)，573–590。[BLR] Pavel Bleher、Mikhail Lyubich 和 Roland Roeder，《DHL 与二维有理动力系统的李–杨–费舍尔零点，II：整体多势论解释》。《几何分析杂志》30，777–833（2020）。[BFJ] S´ebastien Boucksom、Charles Favre 和 Mattias Jonsson。有理曲面映射的次数增长。《杜克数学杂志》141(2008)，519–538。

[Bot] Ana Mar´ıa Botero。环面黎曼-扎里斯基空间上的凸集代数与交理论。《数学学报（英文版）》38(2022)，465–486。[Bro] Hans Brolin。有理函数迭代下的不变集。《数学文献》6(1965)，103–144（1965）。[Can1] Serge Cantat。关于曲面双有理变换群。《数学年刊》（第二辑）174(2011)，299–340。[Dem1] Jean-Pierre Demailly。闭正流的正则化与交理论。《代数几何杂志》1(1992)，361–409。[Dem2]J.P. Demailly。《复解析与微分几何》。https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf[Dil1] Jeffrey Diller。P^2上的双有理映射动力学。《印第安纳大学数学杂志》45(1996)，721–772。[DDG1] Jeffrey Diller、Romain Dujardin 和 Vincent Guedj。小拓扑次数亚纯映射的动力学 I：从上同调到流。《印第安纳大学数学杂志》59(2010)，521–561。[DDG3] Jeffrey Diller、Romain Dujardin 和 Vincent Guedj。小拓扑次数亚纯映射的动力学 II：能量与不变测度。《瑞士数学评论》86(2011)，277–316。[DF] Jeffrey Diller 和 Charles Favre。曲面双亚纯映射的动力学。《美国数学杂志》123(2001)，1135–1169。[DL1] Jeffrey Diller 和 Jan-Li Lin。具有不变亚纯二形式的有理曲面映射。《数学年刊》364(2016)，313–352。[DS1] T.-C. Dinh 和 N. Sibony。全纯映射下向格林流的等分布。《高等师范学院科学年刊》（第4辑），41(2):307–336，2008。[Duj1] Romain Dujardin。$\mathbb{P}^2$中的层状流。《数学年刊》325(2003)，745–765。[Duj2] Romain Dujardin。$\mathbb{P}^2$上层状流的结构性质。《几何分析杂志》15(2005)，25–47。[Duj3] Romain Dujardin。层状流与双有理动力系统。《杜克数学杂志》131(2006)，219–247。[Fav] Charles Favre。二维单项式映射。《密歇根数学杂志》51(2003)，467–475。[Fav1] Charles Favre。关于流的拉回与勒隆数的注记。《法国数学会通报》127(1999)，445–458。[Fav2] C. Favre。有理映射的动力学。博士论文，巴黎南十一大学，奥赛，2000。[FG] C. Favre 和 V. Guedj。多射影空间上有理映射的动力学。《印第安纳大学数学杂志》50（2001），第2期，881–934。[FJ] Charles Favre 和 Mattias Jonsson。C^2的动力紧化。《数学年刊》（第二辑）173(2011)，211–248。[DF] Nguyen-Bac Dang 和 Charles Favre。动力次数的谱解释及其应用。《数学年刊》（第二辑）194(2021)，299–359。[FavJ] C. Favre 和 M. Jonsson。二维复维数中曲线的布罗林定理。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），53(5):1461–1501，2003。[FS] John Erik Fornaess 和 Nessim Sibony。高维复动力学 II。载于《复分析的现代方法》（新泽西州普林斯顿，1992），《数学年刊研究》第137卷，第135–182页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1995。[FLMn] Alexandre Freire、Artur Lopes 和 Ricardo Ma˜n´e。有理映射的不变测度。《巴西数学会通报》14(1983)，45–62。[Ful] William Fulton。《环面簇导论》，《数学年刊研究》第131卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。William H. Roever 几何讲座。[FulSt] William Fulton 和 Bernd Sturmfels。环面簇上的交理论。《拓扑学》36(1997)，335–353。[Gu1] Vincent Guedj。向格林流的等分布。《法国数学会通报》131(3):359–372，2003。[Gu2] Vincent Guedj。亚纯映射迭代下体积的衰减。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），54(7):2369–2386（2005），2004。[GZ] Vincent Guedj 和 Ahmed Zeriahi。退化复 Monge-Amp`ere 方程。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2017。

[HP] John H. Hubbard 和 Peter Papadopol。牛顿法应用于 $\mathbb{C}^2$ 中的两个二次方程，并将其视为全局动力系统。《美国数学会回忆录》，191 (2008)，第 891 号。[JW] Mattias Jonsson 和 Elizabeth Wulcan。单项式映射的稳定化。《密歇根数学杂志》60(2011), 629–660。[Lju] M. Ju. Ljubich。黎曼球面上有理自映射的熵性质。《遍历理论与动力系统》3(1983), 351–385。[MO] John Machacek 和 Nicholas Ovenhouse。实值变异产生的离散动力系统。《实验数学》33:2 (2024年), 261–275。[Pr] F. Protin ´向格林流的等分布。《波兰数学年刊》115 (2015), 第 3 期，201-218。[RS] Alexander Russakovskii 和 Bernard Shiffman。有理映射序列的值分布与复动力学。《印第安纳大学数学杂志》46(1997), 897–932。[Sib2] Nessim Sibony。P^k 的有理映射动力学。载于《复动力学与几何》（里昂，1997），《全景与综述》丛书第 8 卷，第 ix–x、xi–xii、97–185 页。法国数学会，巴黎，1999。[Siu] Yum Tong Siu。与勒隆数相关的集合的解析性及闭正流的延拓。《数学发明》27(1974), 53–156。[T] J. Taflin。 $\mathbb{P}^k$ 的自映射的格林流的等分布速度。《数学进展》227 (2011), 第 5 期，2059-2081。[Zer] Ahmed Zeriahi。多重次调和函数勒隆类的次水平集的体积与容量。《印第安纳大学数学杂志》50(2001), 671–703。

Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA电子邮箱地址: diller.1@nd.edu

IUPUI Department of Mathematics, 402 North Blackford Street room LD270, Indianapo-lis, Indiana 46202-3267, USA电子邮箱地址：roederr@iupui.edu