arXiv:2304.01021v1 [math.AC] 3 Apr 2023

素子复形

ISMAEL AKRAY

Abstract. 1859年，恩斯特·E·库默尔 [7] 引入了素理想的概念；此后，R. McCasland [8]于1983年将这一概念推广到素子模。本文将复形视为模的推广，引入素子复形的概念，并研究其与素子模类似的一些性质。

1. Introduction引言

本文始终假设所有环均为含幺交换环，所有模均为幺模。符号$\sqrt{P}$和 $Ann(P)$分别表示 P的根和湮灭子。E. E. Kummer [7]提出了素理想的概念，之后许多作者都探讨了其性质，如 Krull、Fitting 和 McCoy 等 [6, 5, 9]。环 R 的真理想 P 称为素理想，若对于 a、$b \in R$，$ab \in P$ 蕴含$a \in P$ 或 $b \in P$。换言之，理想 P 是素理想，当且仅当R/P 是整环。E. Noether [10]于1921年引入准素理想的概念：环 R 的真理想 P 称为准素理想，若对于 a、$b \in R$，$ab \in P$蕴含 $a \in P$或$b \in \sqrt{P}$。R. McCasland [8]于1983年将这一概念推广到模论，并引入了素子模：若 N 是 R–模 M的真子模，且对于 $r \in R$ 和 $m \in M$，$rm \in N$ 蕴含 $m \in N$ 或 $r \in (N :_R M) = Ann_R(M/N)$，则称其为素子模。等价地，若 N 是一个准素子模，且其根等于 $(N : M)$，则称其为素子模；其中，若 K 是 M 的真子模，且对于$r \in R$ 和 $m \in M$，$rm \in K$ 蕴含 $m \in K$ 或$r \in \sqrt{(N : M)}$，则称为准素子模（见 [11]）。在环论中，素理想处处发挥着重要作用；同样，素子模在模论中也十分重要。尤其是在诺特模中，准素子模是核心研究对象。

H. Cartan [4] 在 1959年 的一次研讨会上引入了 R–复形的概念。一个 R–复形 $C = (C, d)_{i \in I}$ 是一个序列

2000年数学主题分类。16E05、16P70、11R44。关键词与短语：复形；素子模；素子复形。

$$\cdots \overset{d_{n+2}}{\to} C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \cdots$$

由 R–模 C_n 和 R–态射 d_n 组成，并满足 $d_n d_{n+1} = 0$ 对所有 $n \in I$ [12]。此外，复形 $S = (S_i, d_i)$ 若 $S_i \subseteq C_i$ 且对所有 $i \in I$均有 $d_{i+1}(S_{i+1}) \subseteq S_i$，则称其为复形$R$–($C = (C_i, d_i)$)的子复形，简记为 $S \leq C$。进一步地，若 $S_i \neq C_i$ 对某个 $i \in I$成立，则称 S 是 C的真子复形。我们将满足 $S_i \neq C_i$ 的所有指标 $i \in I$ 的集合记为 P_I。定义复形 $R-C$ 上的零因子集合 $Z_R(C)$（简记为$Z(C)$）为 C各分量上的所有零因子集合之交，即 $Z_R(C) = \cap_{i\in I} Z_R(C_i) = \{r \in R : \text{对某个 } m_i \in C_i, \forall i \in I\}$，有 $rm_i = 0$。此外，复形 $R-C$ 的湮灭子为 $Ann_R(C) = \{r \in R : \text{对所有 } i \in I\}$，有 $rC_i = 0$。因此，若$Ann(C) = Z(C)$，则复形 $R-C$ 的零子复形是素子复形。进一步地，我们将复形 C中子复形S的剩余定义为（$S : C$）$= \cap_{i\in I}$（$S_i : C_i$）$= \{r \in R : rC_i \subseteq S_i, \forall i \in I\}$。每个 R–模 M 都可视为一个复形，其中 $C_0 = M$，且对所有（$i \neq 0$）$\in I$，$C_i = 0$，并且所有态射均为零。这促使我们思考如何将环论和模论中的许多概念引入或推广到 R–复形中。

本文旨在将素性的概念引入并研究于一个更广泛的范畴—— R–复形范畴。若 R–复形 C 的真子复形 S 满足：对于所有 $i \in P_I$，S_i 都是 C_i 的素子模，则称其为素子复形。换言之，复形 C 的真子复形 S 是素的，当且仅当对于每个$i \in I$，$\frac{C_i}{S_i}$ 要么恒等于零，要么是无挠的 $\frac{R}{P_i}$-模，其中$P_i = (S_i : C_i)$。在这种情况下，我们称 S 为 P_i–素子复形。若 R–复形 C 的真子复形 S 满足对所有 $i \in P_I$，S_i 都是准素的，则称其为准素子复形；也就是说，对于所有 $r \in R$、$i \in P_I$ 和 $m \in C_i$，若 $\overline{rm \in S_i}$，则 $m \in S_i$ 或 $r \in \sqrt{(S_i : C_i)}$。等价地，$\frac{C_i}{S_i}$的零因子都是幂零的 $\forall i \in P_I$。在这种情况下，我们称 S 为 P_i–准素，其中 $P_i = \sqrt{(S_i : C_i)}$。显然，R–复形C 的真子复形 S 是素的，当且仅当对于所有非零的 $r \in R$，由 $f =< f_i >: \frac{C}{S} \to \frac{C}{S}$ 定义的链映射$f_i(m + S_i) = rm + S_i$要么是单射，要么是幂零的。

在第二节中，我们确立了关于从素子模到素子复形的最基本定理。首先指出，素子复形的概念有许多等价表述（定理 2.9）。我们证明，对于任意 $i \in P_I$，若 S 是 R–复形 C 的子复形，则它是素的，当且仅当 $(S_i : C_i)$ 是 R 的极大理想（定理 2.10）。此外，对于任意忠实平坦

平坦 R–复形 F，复形 C 的子复形 S 是素的，当且仅当 $F\otimes S$ 是 $F\otimes C$的素子复形（定理 2.17）。最后，我们将素理想避开定理推广到了素子复形的情形（定理 2.20）。

2. Prime subcomplexes

本节将介绍素子复形，并探讨这一概念的一些性质和结果。我们先给出其定义。

定义 2.1. 若复形 R– 的真子复形 S 满足：对于所有 $i\in P_I$， S_i 都是 C_i 的素子模，则称 S 为素子复形。

令 $\mathbb{N}$ 为自然数集合，且 $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$。众所周知，对于任意非幂零元素 $a\in R$，环 R 在乘法子集 $S=\{a^n:\ n\in\mathbb{N}_0\}$ 处的局部化为 $R_{(a)}=\{\frac{r}{a^n}:\ r\in R,n\in\mathbb{N}_0\}=R[\frac{1}{a}]=R[a,\frac{1}{a}]$，这也称为劳朗多项式环。这个局部化环有一个主素理想$<\frac{1}{a}>=\{\frac{r}{a^n}:\ r\in R,n\in\mathbb{N},a\nmid r\}$ 和一个准素理想 $<\frac{1}{a^2}>$。我们分别用 $P_a(R)$ 和 $(\frac{1}{a})P_a(R)$ 表示这些理想。现在，我们在 $\check{C}$ech 复形 [3,5.1.6 Example, pp. 84] 中给出一个关于素子复形和主初级子复形的例子。

例 2.2。整数环 $\mathbb{Z}$ 作为自身上的模，并以整数 3、5 和 7 为依据的 $\check{C}$ech 复形为

$$C^\bullet:\ 0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{d^0}\mathbb{Z}_{(3)}\oplus\mathbb{Z}_{(5)}\oplus\mathbb{Z}_{(7)}\xrightarrow{d^1}\mathbb{Z}_{(35)}\oplus\mathbb{Z}_{(21)}\oplus\mathbb{Z}_{(15)}\xrightarrow{d^2}\mathbb{Z}_{(105)}\to 0$$

其中

$$d^0(n)=(\frac{n}{1},\frac{n}{1},\frac{n}{1})$$

$$d^1((\frac{n_1}{3^{m_1}},\frac{n_2}{5^{m_2}},\frac{n_3}{7^{m_3}}))=(\frac{5^{m_3}n_3}{35^{m_3}}-\frac{7^{m_2}n_2}{35^{m_2}},\frac{3^{m_3}n_3}{21^{m_3}}-\frac{7^{m_1}n_1}{21^{m_1}},\frac{3^{m_2}n_2}{15^{m_2}}-\frac{5^{m_1}n_1}{15^{m_1}})$$

$$d^2((\frac{n_1}{35^{m_1}},\frac{n_2}{21^{m_2}},\frac{n_3}{15^{m_3}}))=\frac{7^{m_3}n_3}{105^{m_3}}-\frac{5^{m_2}n_2}{105^{m_2}}+\frac{3^{m_1}n_1}{105^{m_1}}$$

Then the subcomplex

$$S:0\to 0\xrightarrow{\bar{d^0}}P_3\oplus\mathbb{Z}_{(5)}\oplus\mathbb{Z}_{(7)}\xrightarrow{\bar{d^1}}\mathbb{Z}_{(35)}\oplus\mathbb{Z}_{(21)}\oplus\mathbb{Z}_{(15)}\xrightarrow{\bar{d^2}}\mathbb{Z}_{(105)}\to 0$$

是 $C^\bullet$ 的素子复形，而子复形

$$T:0\to 0\xrightarrow{\bar{d^0}}(\frac{1}{3})P_3\oplus\mathbb{Z}_{(5)}\oplus\mathbb{Z}_{(7)}\xrightarrow{\bar{d^1}}\mathbb{Z}_{(35)}\oplus\mathbb{Z}_{(21)}\oplus\mathbb{Z}_{(15)}\xrightarrow{\bar{d^2}}\mathbb{Z}_{(105)}\to 0$$

是 $C^\bullet$ 的主初级子复形，而不是素子复形。

复形 $C = (C_i, d_i)$ 的真子复形 $S = (S_i, d_i)$ 称为 C 的直和项，如果 $S_i = C_i$ 或 S_i 是 $R-$模 C_i 的直和项，记作 $S \leq_\oplus C$。 $R-$复形 C 的挠子复形 $S = T(C)$ 是一个子复形 $S = \{S_i\}_{i\in I}$，其中，对于所有 $i \in I$，$S_i = T(C_i)$ 是 C_i 的挠子模。若复形 C 满足 $C = T(C)$，则称其为挠复形；若 $T(C)$，则称其为无挠复形，且 $= 0$ 是零复形。

命题 2.3. 无挠复形 C 的每个直和项子复形 S 都是素的。

证明。设 $S = (S_i, d_i)$ 是无挠复形 $C = (C_i, d_i)$ 的直和项。因此，存在一个直和项子复形 T，使得 $C = S \oplus T$，也就是说，对于所有 i，都有 $C_i = S_i \oplus T_i$。假设对于所有 $j \in P_I$，$rm \in S_j$、 $r \in R$，且 $m \in C_j = S_j \oplus T_j$。于是，对于 $a \in S_j$、 $b \in T_j$ 和 $rm - ra = rb \in S_j$，有 $m = a + b$，但 $rb \in T_j$，因此 $rb = 0$，而 M_j 的无挠性表明 $r = 0$ 或 $b = 0$。若 $r = 0$，则 $rM_j = 0 \subseteq S_j$；而 $b = 0$ 意味着 $m = a + 0 \in S_j$。因此， S 是 C 的素子复形。□

复形 C 的子复形 S 若满足 $rC_j \cap S_j = rS_j$，则称其为纯子复形，其中 $r \in R$ 和 $j \in P_I$。现在，我们给出无挠复形中子复形的素性与纯性之间的联系。

命题 2.4. 无挠 $R-$复形 C 的真子复形 S 对所有 $i \in P_I$ 满足 $(S_i : C_i) = 0$ 时是素子复形，当且仅当 S 是 C 的纯子复形。

证明。设 C 的素子复形 S 满足对所有 $i \in P_I$，有 $(S_i : C_i) = 0$。取 $r \in R$ 和 $m \in C_j$，使得 $j \in P_I$。则 S_j 的素性蕴含 $r \in (S_j : C_j) = 0$ 或 $m \in S_j$。在这两种情况下，我们都有 $rS_j = S_j \cap rC_j$，且 S_j 是 C_j 的纯子模。因此， S 是 C 的纯子复形。现在，设 S 是 C 的纯子复形，且对于 $r \in R$ 有 $rm \in S_j$，并且对所有 $j \in P_I$ 有 $m \in C_j$。由幺元 $rC_j \cap S_j = rS_j$，可得 $rm \in rS_j$，因此存在 $n \in S_j$，使得 $rm = rn$，且 $r(m - n) = 0$。 C 的无挠性蕴含 $r = 0$ 或 $m = n$，即 $rC_j \subseteq S_j$ 或 $m \in S_j$。因此， S_j 是 C_j 的素子模，且 S 是 C 的素子复形。□

命题 2.5. 设 R 是一个整环， C 是一个带有 $T(C) \neq C$ 的$R-$复形。那么 $T(C)$ 是 C 的素子复形。

证明。设 $rm \in T(C_j)$ 对于非零的 $r \in R$ 和 $m \in C_j$，存在 $j \in I$使得 $T(C_j) \neq C_j$。由于 $T(C_j)$ 是 C_j 的挠子模，且 R

是一个整环，因此存在非零的 s 属于 R，使得 $srm = 0$满足 $sr \neq 0$。因此 $m \in T(C_j)$，结论得证。□

设 $f: R \to S$ 是一个环同态，且 C 是一个 $S-$复形。于是可以将 C 视为一个 $R-$复形，而 $S-$复形中每个素子复形的逆像 C 都是C 作为 $R-$复形时的一个素子复形。对于 C的主初级子复形 S，S 是素子复形，当且仅当所有真理想（$S_i: C_i$）都是素 $\forall i \in P_I$。因此有如下结果。

命题 2.6. 设 S 是 C 的一个 P_i-主初级子复形，其中包含 C的一个 P_i-素子复形。那么 S 是一个 P_i-素理想。

证明. 考虑 C 的一个 $P_i = (T_i: C_i)-$素子复形 T，其中$T \subset S$，并设 S 为一个$P_i = \sqrt{(S_i : C_i)}-$主初级子复形。为证明 S是 P_i-素子复形，我们必须证明对于所有 $i \in P_I$，$(S_i: C_i)$ 都是素理想。为此，设 $abm \in S_i$，对所有 $m \in C_i$、a、$b \in R$和 $i \in P_I$均成立。S 的准素性给出 $a \in \sqrt{(S_i : C_i)}$ 或 $b \in (S_i: C_i)$。若$a \in \sqrt{(S_i: C_i)} = (T_i: C_i)$，则 $aC_i \subseteq T_i \subseteq S_i$，因此 $a \in (S_i: C_i)$。□

设 P 是 R 的一个素理想，S 是 C的一个子复形。S在 P处的局部化是 $S_P = ((S_i)_P, d_i)$，而 S在 P处的饱和化是子复形 $\mathsf{S}_{\cdot P}(S) = (f^{-1}((S_i)_P)\ \bar{d}_i)$，其中 $f =< f_i >$是由 $f_i: S_i \to (S_i)_P$, $f_i(x) = \frac{x}{1}$定义的自然链映射，适用于 $x \in S_i$。

命题 2.7. 假设 S 是一个 $R-$复形C 的真子复形，且对于所有 $i \in P_I$，$(S_i: C_i) = P_i$ 都是 R 的素理想，并令$P =< P_i >$。那么，S的饱和化 $\mathsf{S}_{\cdot P}(S) = f^{-1}(S_P)$ 是一个素 P_i-，其中

$$(S_P)_i = \begin{cases} S_{iP_i}, & if\ P_i \neq R \\ (C_i)_{P_i}, & otherwise. \end{cases}$$

并且 f 是链映射 $f_i: C_i \to (C_i)_{P_i}$, $f_i(m) = \frac{m}{1}$。

证明。设 $rm \in f^{-1}(S_{iP_i})$，其中 $r \in R, m \in C_i$和 $i \in P_I$。于是 $\frac{rm}{1} \in S_{iP_i}$，因此对 $t \notin P$，有 $trm \in S_i$。若 $r \notin P_i$，则 $f_i(m) = \frac{m}{1} = \frac{trm}{tr} \in S_{iP_i}$且 $m \in f_i^{-1}((S_i)_{P_i})$。因此，$\mathsf{S}_{\cdot P}(S)$ 是 C的一个 P_i-素子复形。□

有限秩自由复形是指其各项均为有限秩自由$R-$模的复形。

定理 2.8. 设 S 是有限秩自由复形 $F = (F_i, d_i)$ 的一个子复形。那么，S 是 P_i- 素子复形，当且仅当对某个 F 的子复形 $T = (N_i + P_iF_i, d_i)$，有 $S = \mathsf{S}_{\cdot P}(T)$，其中 $N = f^{-1}(A)$ 对于 $F_P = ((F_i)_{P_i}, d_i)$ 的一个直和项 A，而典范链映射 $f: F \to F_{P_i}$, $f_i(x) = \frac{x}{1}$, $\forall x \in F_i$。

证明. 显然 $(N_i + P_iF_i : F_i) = P_i$，因此根据命题 2.7，$\mathsf{S}_{\cdot P}(T)$ 是 F 的一个 P_i- 素子复形。现在，设 S 是 F 的一个 P_i- 素子复形。因此，$P_iF_i \subset S_i$，且有链映射 $F \xrightarrow{f} F_P \xrightarrow{g} \frac{F_P}{PF_P}$ 的复合。取 $g_i(S_{iP_i})$ 的一组基 $\{e_1, \cdots e_{v_i}\}$，以及一组元素 $m_1, \cdots, m_{v_i} \in S_{iP_i} \subseteq (F_i)_{P_i}$，使得对 $i = 1, \cdots, v_j$，有 $g_j(m_i) = e_i$，且 $j \in I$。然后可以验证 $(S_i)_{P_i} = (m_1, \cdots, m_{v_i}) + P_iF_{iP_i}$。由于 $P_i(F_i)_{P_i} \subseteq (S_i)_{P_i}$，我们有正合列 $0 \to P_i(F_i)_{P_i} \to S_i \to \frac{S_i}{P_iF_i}(\ )_{P_i} \to 0$。因此，~~中山~~引理保证 $< m_1, \cdots, m_{v_i} >$ 是 F_{iP_i} 的一个直和项。令 $N_i = f_i^{-1}(< m_1, \cdots, m_{v_i} >)$ 且 $N = (N_i, d_i)$。于是，我们有 $S_i \subset N_i + F_i \subset \mathsf{S}_{\cdot P}(N + P_iF)$，并且 $\mathsf{S}_{\cdot P}(C + P_iF)$ 是 F 的一个 P_i- 素子复形。根据 [1, 推论 3]，F 的素子复形与 F_{P_i} 的素子复形之间存在双射对应。由于 $S_P = C_P + P_iF_P$，我们得到 $S = \mathsf{S}_{\cdot P}(C + P_iF)$。

□

据 [2, 第 169 页，例 12], 冯·诺依曼正则环中的每个准素理想都是素理想。因此，冯·诺依曼正则环上的复形的每个主初级子复形都是素子复形。

定理 2.9. 设 S 是一个 $R-$复形C 的真子复形，并且 $(S_i : C_i) = P_i$ 对于 $i \in P_I$成立。则以下断言等价:

(1) S 是 C的素子复形；(2) 商复形 $\frac{C}{S}$ 的每个分量$\frac{C_i}{S_i}$ 都是无挠 $\frac{R}{P_i}-$模；(3) 对于 R的任意理想族 $\{J_i\}_{i \in I}$ 以及 C 的每个子复形 T，若 $J_iT_i \subseteq S_i$，则 $T_i \subseteq S_i$ 或 $J_i \subseteq (S_i : C_i)$，$\forall i \in P_I$；(4) 对所有 $r \in R - P_i$ 和 $i \in P_I$，有 $(S_i : r) = S_i$；(5) $(S_i : J) = S_i$，$\forall i \in P_I$ 以及 R的任意理想 J；(6) 对所有 $m \in C_i - S_i$ 和 $i \in P_I$，$(S_i : m) = P_i$；(7) 对于 C 中满足 $S \subset T$和 $i \in P_I$的所有子复形 $N = (N_i, d_i)$，$(S_i : N_i) = P_i$；(8) $Ass\left(\frac{C_i}{S_i}\right) = \{P_i\}$，$\forall i \in P_I$，其中 $Ass\left(\frac{C_i}{S_i}\right)$ 表示 $\frac{C_i}{S_i}$的伴随素理想集合；(9) $Z_R\left(\frac{C_i}{S_i}\right) = P_i$，$\forall i \in P_I$；(10) $\frac{C}{S}$ 的每个非零子复形 $\frac{T}{S}$ 都具有相同的湮灭子，即 $(T : C) = (S : C)$；(11) 对于 R 的任意理想族 $J =< J_i >$，若 $(S_i : C_i) \subsetneq J_i$，则对 C 的所有满足 $S_i \subsetneq T_i$, $J_iT_i \nsubseteq S_i$, $\forall i \in P_I$的子复形 T 均成立。

证明.（$1 \to 10$）：只需证明，对于任意满足 $m \in C_i - S_i$的 $m + S_i \in \frac{C_i}{S_i}$， Ann（$m + S_i$）=（S_i： C_i）。取 $r \in$（S_i：$< m + S_i >$），得到$rm \in S_i$，由第（1）部分可得 $r \in$（S_i： C_i）。

($10 \to 1$)：设 $rm \in S_i$，对于 $i \in P_I$、$m \in C_i$ S_i 和 $r \in R$。由第 (10) 部分可得 $r \in (S_i :< m + S_i >) = (S_i :\ C_i)$。

($11 \to 3$)：设 $J_iT_i \subseteq S_i$，对于 C 的任意子复形 T 以及理想族 $\{J_i\}_{i\in I}$。令 $A_i = S_i + T_i$ 和 $B_i = J_i + (S_i :\ C_i)$。那么， $T_i \nsubseteq S_i$ 当且仅当 $A_i \nsubseteq S_i$，且 $J_i \nsubseteq (S_i :\ C_i)$ 当且仅当 $B_i \nsubseteq (S_i : C_i)$。因此 $B_iA_i \subseteq S_i$，由第 (10) 部分可知，$T_i \subseteq S_i$ 或 $J_i \subseteq (S_i :\ C_i)$。

其余部分显而易见。 □

定理 2.10. 复形 C 的子复形 S，其中 $P_i =(S_i :C_i)$ 对所有 $i \in P_I$ 都是 R 的极大理想，则是 C 的素子复形。

证明。由假设可知，$\frac{C_i}{S_i}$ 是域$\frac{R}{P_i}$ 上的向量空间，因此是无挠的 $\frac{R}{P_i}$–模。其余结论由定理 2.9 得出。□

推论 2.11。对于 R 的每个满足 $mC \neq C$的极大理想 m， mC是 C的一个素子复形。

推论 2.12。设 $\{m_i\}_{i\in I}$ 是 R的一族极大理想。真子复形 S 是 m_i–素的，当且仅当 $m_iC_i \subseteq S_i$。特别地，若 S 是 C的一个 m_i–素子复形，则 C 中每个包含 S 的真子复形T 都是素的。

若 S 是 R–复形 C 的一个真子复形，并且不存在真子复形严格包含 S，则称 S 为极大子复形；等价地，对于所有 $i \in P_I$， S_i 都是 C_i 的极大子模。在含幺元的交换环中，每个极大理想都是素理想。现在，我们将对此证明子复形的相应结论。

命题 2.13. 假设 S 是复形C的一个极大子复形。那么， S 是 C 的一个素子复形，并且$(S_i : C_i)$是 R的一个极大理想。

证明. 对于 $i \in I$， S_i 是 C_i 的极大子模，当且仅当$\frac{C_i}{S_i}$ 是一个简单的 R–模。因此，$\frac{C_i}{S_i}$ 是一个循环 R–模，记作 $\frac{C_i}{S_i} = Rx_i$， $x_i \in C_i$，并且 $Ann(Rx_i) = Ann(\frac{C_i}{S_i}) =$ $(S_i :\ C_i)$是 R 的一个极大理想，由 [1,命题 3]可得。因此，由命题 2.10 □可知， S 是 C 的一个素子复形。

有限生成复形是指其各项均为有限生成的复形。因此，我们有如下结论。

推论 2.14. 如果 C 是有限生成的 R–复形，那么 C 的每个真子复形都包含于某个素子复形中。

称一个 R–复形 $F = \{F_i, d_i\}_{i\in I}$ 为平坦的，若其所有分量在 R上都是平坦的。

引理 2.15. 设 C 和 F 是 R–复形，且 S 是 C的一个子复形。那么，对于任意 $r \in R$，$F_i \otimes (S_i : r) \subseteq (F_i \otimes S_i : r)$。若 F 是平坦复形，则等号成立。

证明. 设 $f \otimes c \in F_i \otimes (S_i : r)$，其中 $f \in F_i$、$rc \in S_i$ 和 $i \in I$。那么$r(f \otimes c) = f \otimes rc \in F_i \otimes S_i$。现在，假设 F 是平坦的。那么显然 $F_i \otimes \frac{C_i}{S_i} \cong \frac{F_i \otimes C_i}{F_i \otimes S_i}$。此外，

$$0 \to F_i \otimes (S_i : r) \to F_i \otimes C_i \overset{i\otimes f_r}{\to} \frac{F_i \otimes C_i}{F_i \otimes S_i}$$

这说明 $Im(i \otimes f_r) = F_i \otimes (S_i : r) = (F_i \otimes S_i : r)$，$\forall i \in I$。 □

定理 2.16. 设 S 是 $R-$ 复形 C 的素子复形，且 F 是满足 $F \otimes S \neq F \otimes C$ 的平坦 $R-$ 复形。那么，$F \otimes S$ 是 $F \otimes C$ 的素子复形。

证明. 我们利用定理 2.9 中素子复形的等价条件 (4) 来证明此定理。为此，设对于 $i \in P_I$，有 $r \in R$–$(S_i : C_i)$。那么，由 S 的素性和定理 2.9 (4)，可得 $(S_i : r) = S_i$；再由引理 2.15，得到 $(F_i \otimes S_i : r) = F_i \otimes (S_i : r) = F_i \otimes S_i$。因此，再次应用定理 2.9，可得 $F \otimes S$ 是 $F \otimes C$ 的素子复形。□

在 F 是忠实平坦的情况下，定理 2.16 的逆命题成立，也就是说，F 的所有分量都是忠实平坦的。

定理 2.17. 设 S 是 $R-$ 复形 C 的子复形，且 F 是 R 上的忠实平坦复形。那么，S 是 C 的素子复形，当且仅当 $F \otimes S$ 是 $F \otimes C$ 的素子复形。

证明。由于该序列的正合性

$$0 \to F_i \otimes S_i \to F_i \otimes C_i \to 0$$

蕴含该序列的正合性

$$0 \to S_i \to C_i \to 0,$$

因此我们可以假设 $F_i \otimes S_i \neq F_i \otimes C_i$、$\forall i \in P_I$，而定理 2.16 告诉我们，$F \otimes S$ 是 $F \otimes C$ 的素子复形。现在，设 $F \otimes S$ 是 $F \otimes C$ 的素子复形，因此 S 是 C 的真子复形。于是

对于任意 $r \in R-(S_i:C_i)$，$\forall i \in P_I$，我们有 $r \in R-(F_i \otimes S_i : F_i \otimes C_i)$，且引理 2.15 蕴含

$$F_i \otimes (S_i : r) = (F_i \otimes S_i : r) = F_i \otimes S_i$$

由于 F 是忠实平坦复形，我们有 $(S_i : r) = S_i, \forall i \in P_I$。因此，再由定理 2.9 (4)，$S$ 是 C 的素子复形，正如所需。□

推论 2.18. (1) 设 T 是 R 的乘法子集，且 $S=(S_i,d_i)$ 是 $R-$ 复形 $C=(C_i,d_i)$ 的真子复形，其中 $T \cap (S_i:C_i) = \phi, \forall i \in P_I$。那么，$T^{-1}S=(T^{-1}S_i,T^{-1}d_i)$ 是 $T^{-1}C=(T^{-1}C_i,T^{-1}d_i)$ 的素子复形，当且仅当 S 是 C 的素子复形。(2) 设 $T=\{T_i : i \in I\}$ 是 R 的一族乘法子集，且 $S=(S_i,d_i)$ 是 $C=(C_i,d_i)$ 的真子复形，并满足 $(S_i:C_i) \cap T_i = \phi, \forall i \in P_I$。那么，$T^{-1}S=(T_i^{-1}S_i,T_i^{-1}d_i)$ 是 $T^{-1}C=(T_i^{-1}C_i, T_i^{-1}d_i)$ 的素子复形，当且仅当 S 是 C 的素子复形。

证明。证明由定理 2.17 以及 $T^{-1}S=T^{-1}R \otimes S$ 这一事实得出。□

推论 2.19。设 $S=(S_i,d_i)$ 是一个 $R-$复形$C=(C_i,d_i)$ 的素子复形，且 x 是一个不定元。那么 $S[x]=(S_i[x],d_i^*)$ 是 $C[x]=(C_i[x],d_i^*)$ 的一个素子复形，其中 $d_i^*(\sum_{i=1}^n m_i x^i) = \sum_{i=1}^n d_i(m_i)x^i$，对于 $m_i \in S_i$。

证明。证明由 $S[x]=S \otimes R[x]$ 这一事实和定理 2.17 得出。□

现在我们将素理想避开定理推广到素子复形。

定理 2.20。设 T_1、$\cdots$、T_n 是一个 $R-$复形 C 的子复形，并设 S 是 C 的一个素子复形，且满足 $T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_n \subseteq S$。那么存在一个 $i \in \{1,\cdots,n\}$，使得 $T_i \subseteq S$ 或者 $(T_i:C) \subseteq (S:C)$。

证明。反设 $T_1 \nsubseteq S$ and $((T_i)_j : C_j) \nsubseteq (S_j : C_j)$ 对某个 $j \in P_I$ 成立。因此，对所有 $i=1,\cdots,n$，存在 $m \in (T_1)_j - S_j$ and $r_i \in ((T_i)_j : C_j) - (S_j : C_j)$。于是，对 $i \in \{2,\cdots,n\}$，$r_i m \in (T_1)_j \cap (T_i)_j$，所以 $r_1 r_2 \cdots r_n m \in (T_1)_j \cap (T_2)_j \cap \cdots \cap (T_n)_j = (T_1 \cap \cdots \cap T_n)_j \subseteq S_j$。$S$ 的素性表明 $m \in S_j$ or $r_2 r_3 \cdots r_n \in (S_j : C_j)$，这与我们的假设矛盾。□

在论文的最后，我想提到关于这一主题还有许多未解决的问题。例如，可以研究如何

将补充模及其推广推广到 R–复形范畴中。

作者声明不存在利益冲突。

本手稿不包含任何数据。

References

[1] N. Bourbaki，《代数》，Hermann，巴黎，1958年。[2] N. Bourbaki，《交换代数》，Hermann，巴黎，1961年。[3] M.P. Brodmann 和 R.Y. Sharp，《局部上同调：兼论几何应用导论》，第二版，剑桥大学出版社，2013年。[4] H. Cartan，关于分次代数的同调与上同调，Henri Cartan 研讨班，（1958）11(2)：1–20。[5] H. Fitting，非交换环中的素分量分解，《数学年刊》，111（1935），19-40。[6] W. Krull，非交换域中双边理想的理论，《数学杂志》，第28卷（1928），481-503。[7] E. E. Kummer，关于数对比以往更一般的模的同余关系，以及与之相关的一些问题，《纯粹与应用数学杂志》，35（1847），327-367。[8] R. L. McCasland，论素子模，博士论文，德克萨斯大学阿灵顿分校，1983年。[9] N. H. McCoy，一般环中的素理想，《美国数学杂志》，71（4）（1949），823-833。[10]E. Noether，环域中的理想理论，《数学年刊》，83（2）（1921），24–66。[11] E. Noether，环域中的抽象理想理论及其在代数数域和函数域中的应用，《数学年刊》，96（1）（1927）。[12] J. J. Rotman，《同调代数导论》，第二版，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，Springer Science，纽约，2009年。

Mathematics Department, Faculty of Science, Soran University, 44008, Soran, Erbil Kurdistan Region, Iraq电子邮件地址：
akray.ismael@gmail.com, ismael.akray@soran.edu.iq