arXiv:2304.01022v1 [cs.LO] 3 Apr 2023

基于不确定性的知晓如何逻辑

Carlos Areces[1,2] Raul Fervari[1,2,3]AndrésR. Saravia [1,2] Fernando R. Velázquez-Quesada[4]

[1]FAMAF，科尔多瓦国立大学，阿根廷[2]国家科学技术研究委员会（CONICET），阿根廷[3]广东以色列理工学院（GTIIT），中国[4]卑尔根大学，挪威

摘要

我们为多主体认知算子知晓如何提出一种新的语义，该语义基于计划之间的不可区分关系。可以说，我们的方案更接近经典认知逻辑中知道某事模态的标准表述。我们研究了这一新语义与以往方法之间的关系，并表明我们的框架足够一般，能够涵盖这些方法。我们还研究了新语义的逻辑性质。首先，我们定义了一套可靠且完备的公理化系统。其次，我们定义了适当的互模拟概念，并证明了相应定理。最后，我们考察了新逻辑的模型检测和可满足性问题的计算复杂度。

1 引言

认知逻辑（EL；[28, 13]）是一种逻辑形式体系，专为推理通常称为主体的抽象自主实体（例如人、机器人、车辆）的知识而设计。它不仅推动了哲学领域 [25] 对复杂多主体认知概念的形式化研究，也推动了计算机科学领域 [13, 41] 和经济学领域 [47]的相关研究。

标准认知逻辑处理主体关于命题真值的知识（即知道某事这一概念）。因此，它们关注研究如下句子：“主体知道巴黎天气晴朗”或“机器人知道自己正站在墙旁边”。为此，在语义层面，EL公式通常在关系模型 [9, 10]上进行解释：其本质上是标记有向图。论域中的元素（称为状态或可能世界）表示不同的可能情形，并确定主体可能知道或不知道的事实。随后，每个主体的知识由其认知不可区分性关系给出，该关系用于表示其对真值的不确定性：相关状态对于该主体而言被视为不可区分。最后，当且仅当命题 φ 在主体无法与给定状态s 区分的所有状态中均成立（即，在从s可访问的所有状态中均成立）时，才称主体在给定状态s 知道该命题为真 φ 。为了恰当地刻画知识的性质，通常假设不可区分关系是一种等价关系。

尽管简单，这种基于不可区分性的知识表示仍具有若干优势。首先，它刻画了主体的高阶知识（关于自身知识以及其他智能体知识的知识）。此外，由于其普适性，它为研究其他认知概念铺平了道路，例如信念 [28]这一概念。最后，它能够以非常自然的方式表示知识发生变化的行动 [53, 50]。

近年来，其他形式的知识也得到了研究（见 [58]中的讨论）。一些作者采用知道是否[23, 14]这一概念来研究对命题的知识；另一些作者则聚焦于命题知识的理由／辩护，探讨知晓原因 [5, 60]这一概念；还有一些作者考察了更一般的情形，提出了关于知道值 [20, 6, 54]的逻辑。另一种尤其有趣的知识形式，受到哲学和人工智能中不同情境的启发，关注的则是主体的能力：即知晓如何 [15]这一概念。直观地说，如果主体具备能力 ，能够保证在 ψ成立的情况下 φ 成立，那么给定 ψ ，她就知道如何实现 φ。可以说，这一概念尤为重要，因为它为人工智能中的自动规划和战略推理提供了形式化基础。

从历史上看，知晓如何这一概念被视为有别于知道某事，例如 [48]中所提出的观点。人们通常认为，知晓如何体现了智能体为实现某个目标而可能采取的行动或具备的能力。与此同时，大量文献将知晓如何与知识与行动逻辑联系起来（例如见[39, 42, 31, 52, 27]）。然而，这些理论对知晓如何 的表述方式一直受到批评。主要问题在于，简单地结合表示知道某事 与能力 的标准算子（例如见 [51]），似乎无法形成自然的知晓如何 概念（讨论见 [29, 26] ）。

考虑到这些因素， [57, 58, 59] 提出了一种新颖的框架，它基于二元的知晓如何 模态，且该模态并非以知道某事来定义。在语义层面，这种语言也在关系模型上进行解释——在此语境下，这些模型称为标记迁移系统（LTS）。然而，关系不再表示不可区分性，而是描述主体可支配的行动（类似于命题动态逻辑中的做法，例如 [22]）。具体而言，从状态w 到状态u 、标记为a 的边现在表示主体可以执行a 这一行动，将状态w转换为u。在所提出的语义中，当且仅当存在一个“计划”——即满足称为强可执行性（SE）的约束的一系列行动——能够从 ψ 状态到达 φ 状态时，新模态 $\mathrm{Kh}(\psi, \varphi)$ 才成立。直观而言，SE 意味着该计划在标记迁移系统中“万无一失”：它必定从每个 ψ 状态只到达 φ 状态。这种知晓如何 算子的其他变体也采用类似的方法（参见 [32, 34, 16, 56]）。有关这些语义的进一步动机，可参见所引论文。

有意思的是，标记迁移系统并不包含认知成分：其中的关系被解释为行动，因此主体的能力仅根据这些行动能够达成什么来定义。这与标准认知逻辑形成鲜明对比：关系模型提供两类信息，一类是关于给定情境（模型的赋值点）的本体事实，另一类是主体“看待”这一情境的特定方式（包括模型中可用的可能状态，以及主体对这些状态的不可区分关系）。特别是在多智能体场景中，所有主体共享相同的本体信息，但彼此

在对其进行的认知解释上有所不同。如果希望在认知逻辑中映照这一情境，那么似乎很自然地应根据实际情境上的某种不可区分性来定义知晓如何 。这样的扩展模型便能够同时捕捉主体由其可用行动所体现的能力（本体信息），以及由其不确定性所带来的知识（或知识缺失）（认知信息）。

本文探讨了$\mathsf{Kh}_i(\psi, \varphi)$ 的一种新语义，它是知晓如何模态的多主体版本，最初发表于 [3]。这些语义引入了两个思想。第一个也是关键的思想，是采用计划上的认知不可区分性这一概念，其精神与例如策略不可区分性相同，见[30, 8]。其直觉是，在原始的 LTS 语义下，主体可能不知道如何实现目标，唯一原因是没有可用的适当行动。然而，也可以设想这样的情形：知识的缺乏源于另一种原因——主体可能有一个可用的适当计划（她有能力做某事），却无法将它与一个不适当的计划区分开来，也就是说，她无法判断这些计划通常会产生不同的差异结果。差异结果。第 4 节对此作了更深入的讨论。这样一来，这些基于不确定性的标记迁移系统s重新引入了认知不可区分性的概念。

现在，尽管对计划的不可区分性是新语义背后的核心思想，但这一提议还纳入了第二个洞见。我们也可以设想这样一些情形：某些行动虽然在本体论上可用，却并非主体在认知上可访问。造成这种情况的原因可能有很多，其中一个颇具吸引力的解释是，主体可能并未意识到所有可用行动。在这种情况下，主体寻找实现某个目标的计划时，甚至不会考虑那些认知上不可访问的行动。在EL文献中，意识这一概念并不新鲜：它曾被用于解决EL中的逻辑全知问题 [55, 49, 21]，方法是允许主体未意识到所有相关原子命题/公式，从而使其更接近一个“真实的”资源受限行动者（参见 [12]）。

请注意，上述观点符合文献中的一种共识性解读（例如，参见 [24]）：主体知晓如何做某事，意味着她具备相应的能力（即实际做到这件事的本领）；但具备能力并不一定意味着知晓如何做。还需注意，在新语义中，主体不必无法区分某些行动，也不必未意识到其中某些行动。正如我们将证明的，新语义是[57, 59]中原始语义的推广。因此，在新语义中，一个对计划不存在不确定性且充分意识到所有计划的主体，就其知识而言，与原始语义中的主体完全相同。

我们的贡献。我们的工作旨在为如何知道逻辑带来新的见解。具体而言，我们研究了一种新的多智能体语义，用以刻画知晓如何这一概念，并对先前的方案进行了推广 [57, 58, 59, 3]。在模型层面，我们区分了智能体共享的本体信息（或能力）与每个个体智能体各自拥有的认知信息（或意识）。在我们的语义中，知晓如何由后者给出，而非像现有方法那样由前者给出 [57, 58, 59]。此外，我们还全面研究了这一新逻辑的元逻辑性质，并

将其与先前的方法进行比较。我们的贡献可概括如下：

(1) 我们为 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\ \varphi)$（针对 i 这一主体）引入了一种新语义，重新引入了经典 EL 中的认知不可区分性概念。这一维度刻画了每个特定主体对现实世界中可用能力的意识。***(2)*** 基于 [17, 18]中的思想，我们为新语义引入了恰当的互模拟概念。我们证明了一个不变性结果，并给出了有限模型上的 Hennessy-Milner 型定理。

(3) 我们表明，所得逻辑严格弱于 [57, 58, 59] 中的逻辑（正如我们将要讨论的，这反而是一项优势）。尽管如此，通过对模型类施加适当条件，新语义仍足够一般，能够刻画原始提案。除了 [3], 中已确立的两个框架的模型之间的直接对应关系之外，我们还引入了一个同样能够实现这一目标的新的一般模型类。

(4) 我们为所有模型组成的模型类上的该逻辑给出了可靠且完备的公理化。

(5) 我们研究了该逻辑的计算性质。首先，我们通过滤子证明其具有有限模型性质。也就是说，我们说明如何从任意模型出发，构造出一个满足相同公式集的有限模型。通过采用更为审慎的选择论证，可以证明新逻辑的可满足性问题是 NP 完全，而模型检测属于 P类。

本文扩展了 [3] 中介绍的工作。本文提供了详细的讨论与动机说明，并给出了完整证明。此外，关于双模拟、表达能力以及通过滤子获得有限模型的结果，相较于 [3] 均为新的成果。

本文结构如下。 第3节 回顾 [57, 58, 59], 的框架，包括其公理系统。 第4节 介绍 基于不确定性的标记迁移系统，并说明如何用它们来解释 知晓如何 语言的多主体版本。 第5节 介绍一种适当的互模拟概念及相应的对应定理。我们在第6节给出一个可靠且完备的公理系统。 第7节 研究我们的语义与原始提案中的语义之间的对应关系。具体而言，我们展示了两个能够刻画原始语义的不同模型类。 第8节探讨通过滤子实现的有限模型性质（第8.1小节），以及该逻辑的模型检测和可满足性问题的计算复杂度（第8.2小节）。最后，我们在第9节 总结全文，并展望未来的研究方向。

2 文献简述

上一节讨论的关于知晓如何这一概念的思想，始于[57, 58, 59] 取得了成功，并催生了不同的ff研究成果

文献中的研究成果。较早的一项研究是 [34], 它考虑了一种三元模态Kh(ψ, χ, φ), 要求计划的中间状态满足 χ。随后, [32]引入了一种较弱的二元模态Kh^{w}(ψ, φ), 允许计划中止, 并要求这些中止执行所到达的状态也满足目标 φ。最后, [56] 采用了一种语义, 在这种语义下, 给定计划中的中间动作可以被跳过。

介绍这些变体的相关研究也提供了公理系统（有趣的是, 具有可跳过计划的模态所对应的逻辑与原始模态的逻辑相同）。在计算行为方面, 已分别在相关论文中证明, 基本系统、允许中止执行的系统以及具有可跳过计划的系统, 其可满足性问题都是可判定的。然而, 这些系统均未给出复杂度界。最后, [17, 18] （适用于除具有可跳过计划的系统之外的所有系统）和 [56] （适用于具有可跳过计划的系统）中可以找到这些系统的恰当互模拟概念。这些双模拟等价工具有助于研究各系统相对的表达能力。研究表明, 原始二元模态 Kh(ψ, φ) 的表达能力严格弱于具有中间步骤的模态 Kh(ψ, χ, φ), 而这两者与允许中止执行的模态 Kh^{w}(ψ, φ) 均不可比较。此外, [11] 刻画了不同如何知道逻辑的模型检验问题的计算复杂度。具体而言, 研究证明, [57, 58, 59] 中的基本如何知道逻辑的模型检验问题是 PSpace 完全的, 而具有预算约束的一个变体则是 ExpSpace 困难。该研究还考察了计划的其他约束, 具体来说, 是 [3] （本文所研究的逻辑）加入正则性约束和预算后的变体; 其模型检验问题属于 P类。最近, [2], 将知晓如何的框架扩展到道义逻辑情境, 对明知而遵守这一概念进行了形式化。

后续研究探索了新的特征。例如, 一个自然的扩展方向是考察知晓如何与标准知道某事模态之间的交互。在 [16], 中, 本文提出了一种包含这两种模态的单智能体逻辑。与以往的方法不同, 知道如何算子是一个一元局部模态 Kh(φ), 其解释允许分支计划。研究通过公理系统考察了这两类知识之间的交互, 并证明其可满足性问题是可判定的。最近, 这一可判定性结果得到了进一步细化: [33], 通过一种基于表格法的程序, 证明了该可满足性问题是 PSpace 完全的。[37] 为知晓如何模态提供了一种邻域语义, 作为标准关系语义的替代方案。

其他论文将知晓如何和知道某事模态扩展到多主体行为。例如, [43, 45] 在联盟的语境下探讨了这一问题, 即利用该逻辑描述不同的集体知识概念。已知该逻辑的一个片段在表达能力上与 [16] 中的逻辑不可比较（证明使用了互模拟, 相关内容见 [18]）。研究还探讨了该逻辑的其他变体, 包括基于二阶知道如何策略的变体 [44], , 以及带有不确定性程度的知晓如何变体 [46]。每种逻辑都给出了相应的公理系统。

最后, [35]研究了一种用于描述认知规划行为的多智能体知晓如何逻辑。其主要特点是, 通过认知行动模型 [7] 对模型进行更新, 以表示行动的执行。所得逻辑严格弱于 [16] 中的逻辑。

同样，其可满足性问题是可判定的。这项工作在 [38], 中得到扩展，提出了一种用于基于规划的知晓如何的统一方法。更值得注意的是， [36] 建立了规划与知晓如何之间的联系，不仅从 基于规划的知晓如何的角度出发，也反向探讨：基于知晓如何目标的规划问题。为此，作者提出了一种在 P类时间内运行的模型检测算法。

3 知晓如何逻辑

本节回顾 [57, 58, 59] 中 知晓如何 框架的基础知识。

语法与语义。 在全文中，设 Prop 为一个可数的非空命题符号集。

定义 3.1 语言 $\mathrm{L_{Kh}}$ 的公式由以下文法给出

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \mathsf{Kh}(\varphi, \varphi),$$

其中 $p \in \mathrm{Prop}$。布尔常量和其他布尔联结词按通常方式定义。形如 $\mathrm{Kh}(\psi, \varphi)$ 的公式读作“当 ψ 成立时，主体知道如何使 φ 为真”。⊣

在 [57, 58, 59] （以及诸如 [34, 32] 的变体）中，$\mathrm{L_{Kh}}$ 的公式在标记迁移系统上进行解释：这是一种关系模型，其中的关系描述主体可用的状态迁移。在全文中，设 Act 为一个可数无限的（基本）动作名称集合。

定义 3.2（动作与计划） 令 Act^* 为 Act 上所有有限序列构成的集合。Act^* 的元素称为计划，其中 ϱ 是空计划。给定$\sigma \in \mathrm{Act}^*$，令 $|\sigma|$ 为 σ 的长度（注意： $|\varrho| := 0$）。对于计划 σ 和 $0 \leq k \leq |\sigma|$，计划 σ_k 是 σ 截至（并包括）第k个位置的初始片段（其中$\sigma_0 := \varrho$）。对于 $0 < k \leq |\sigma|$，行动 $\sigma[k]$ 是 σ 在第k个位置上的行动。⊣

定义 3.3（标记迁移系统）对于 Prop 和 Act，标记迁移系统（LTS）是一个元组 $\mathrm{S} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \mathrm{V} \rangle$，其中 W 是非空状态集合（也记作 $\mathrm{D}_\mathcal{S}$），$\mathrm{R} = \{\mathrm{R}_a \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W} \mid a \in \mathrm{A}$，其中某个 $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Act}\}$ 是 W 上的二元关系集合，[1] 且 $\mathrm{V} : \mathrm{W} \to 2^{\mathrm{Prop}}$ 是一个标记函数。给定一个 LTS S 和 $w \in \mathrm{D}_\mathcal{S}$，有序对 (S, w) 是一个带指定状态的标记迁移系统（通常省略括号）。⊣

标记迁移系统描述主体的 能力；因此，有时（例如， [57, 58, 59]）它也被称为能力映射。这里我们介绍一些有用的定义。值得注意的是，尽管签名是无限的（因为动作集是一个可数集），模型中的关系可能只针对行动的一个（可能是有限的）子集定义。

定义 3.4 设 $\{\mathrm{R}_a \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W} \mid a \in \mathrm{A}$，其中某个 $\mathrm{A} \subseteq$ 动作集$\}$ 为一个二元关系集合。定义 $\mathrm{R}_\epsilon := \{(w, w) \mid w \in \mathrm{W}\}$，并且对于 $\sigma \in$ 动作集* 以及 $a \in$ 动作集，定义 $\mathrm{R}_{\sigma a} := \{(w, u) \in \mathrm{W} \times \mathrm{W} \mid \exists v \in \mathrm{W}$，使得 $(w, v) \in \mathrm{R}_\sigma$ 且 $(v, u) \in \mathrm{R}_a\}$。取一个计划$\sigma \in$ 动作集*：对于 $u \in \mathrm{W}$，定义 $\mathrm{R}_\sigma(u) := \{v \in \mathrm{W} \mid (u, v) \in \mathrm{R}_\sigma\}$；对于 $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{W}$，定义 $\mathrm{R}_\sigma(\mathrm{U}) := \mathrm{S}_{u \in \mathrm{U}} \mathrm{R}_\sigma(u)$。⊣

[1] 因此，R_a 可能未针对某些行动 $\in \mathrm{Act}$定义。

其核心思想 [57, 58, 59] 是，主体知道如何实现 φ 给定ψ ，当她拥有一个恰当的计划，使她能够从任意一个 ψ 成立的状态到达仅有 φ 成立的状态。因此，关键在于如何理解“恰当”。

定义 3.5（强可执行性）设 $\{R_a \subseteq W \times W \mid a \in A$，其中某个 $A \subseteq Act\}$ 是一个二元关系集合。若且唯若 R_σ 有定义，并且对于每个 $k \in [0 .. |\sigma| - 1]$，$v \in R_{\sigma_k}(u)$ 蕴含 $R_{\sigma[k+1]}(v)$，计划 $\sigma \in Act^*$ 在 $u \in W$ 处是强可执行（SE）的。我们定义集合 $SE(\sigma) := \{w \in W \mid \sigma$ 在w处是 SE 的$\}$。⊣

因此，强可执行性要求计划的每一个部分执行（包括 ϱ）都能完成。有了这一概念，L_{Kh} 中的公式在标记迁移系统上的解释如下。请注意，此处给出的 Kh 模态语义子句等价于原始论文中的表述。

定义 3.6（L_{Kh} 在标记迁移系统上）带指定状态的标记迁移系统 S,w（其中 $S = \langle W,R,V\rangle i$ 是基于 Act 和 Prop 的标记迁移系统）与 L_{Kh} 中的公式（基于 Prop）之间的关系 $\models$ 归纳定义如下：

$S,w \models p$ iff_{def} $w \in V(w)$, $S,w \models \neg\varphi$ iff_{def} $S,w \not\models \varphi$, $S,w \models \varphi \vee \psi$ iff_{def} $S,w \models \varphi$ or $S,w \models \psi$, $S,w \models Kh(\psi,\varphi)$ iff_{def} 存在 $\sigma \in Act^*$ 使得 ***(Kh-1)*** $[\![\psi]\!]^S \subseteq SE(\sigma)$ 且 ***(Kh-2)*** $R_\sigma([\![\psi]\!]^S) \subseteq [\![\varphi]\!]^S$,

其中 $[\![\varphi]\!]^S := \{w \in W \mid S,w \models \varphi\}$（$[\![\varphi]\!]^S$ 的元素有时称为φ-状态）。在语义情形下，$Kh(\psi,\varphi)$中的计划 σ 通常称为 S 中 $Kh(\psi,\varphi)$ 的见证。⊣

因此，在给定的w 处，$Kh(\psi,\varphi)$成立，当且仅当存在一个计划 σ，使得该计划在任意 ψ-状态下执行时，始终能够完成每一次部分执行（条件***(Kh-1)***），并且必定终止于满足 φ 的状态（条件***(Kh-2)***）。由于w 在 Kh 的语义子句中不起任何作用，因此知晓如何 算子具有全局性。所以，$[\![Kh(\psi,\varphi)]\!]^S$ 要么是 D_S，要么是 $\varnothing$。

公理化。 就公理化而言，请注意，全局全称模态 [19]，（解释为在模型的每个状态中都为真）可在 L_{Kh} 中定义为 $A\varphi := Kh(\neg\varphi,\bot)$。以下命题为此提供了依据，其证明依赖于这样一个事实：动作集 Act^* 永远非空（它始终包含 ϱ）。

命题 1（[57]） 设 $\mathcal{S}$，w 是一个有指定状态的 标记迁移系统。那么，

$$\mathcal{S},w \models Kh(\neg\varphi,\bot) \qquad iff \qquad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}} = D_{\mathcal{S}}.$$ ◁

公理系统 $\mathcal{L}^{LTS}$ 如何知识算子 (表1) 展示了全局全称模态 A 与如何知识算子 Kh之间的关系。第一组本质上是关于 A的标准模态系统，并进一步确立了 Kh 是全局的（参见 [57]中的讨论）。第二组公理值得进一步说明。公理 $\mathcal{EMP}$ 指出，如果 $\psi \to \varphi$ 在全局上为真，那么给定 ψ 主体知道如何使 φ 为真。简单来说，全局本体信息会转化为知识。这是因为空计划ϵ 始终可用。公理 $\mathcal{COMP}$ 确立了 Kh 具有组合性：如果给定 ψ 该

区块 L:	$\mathcal{TAUT}$	$\vdash \varphi$ 对于 φ 命题重言式
	$\mathcal{DISTA}$	$\vdash \mathrm{A}(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{A}\varphi \to \mathrm{A}\psi)$
	$\mathcal{TA}$	$\vdash \mathrm{A}\varphi \to \varphi$
	$\mathcal{4KhA}$	$\vdash \mathrm{Kh}(\psi, \varphi) \to \mathrm{AKh}(\psi, \varphi)$
	$\mathcal{5KhA}$	$\vdash \neg\mathrm{Kh}(\psi, \varphi) \to \mathrm{A}\neg\mathrm{Kh}(\psi, \varphi)$
	$\mathcal{MP}$	由 $\vdash \varphi$ 和 $\vdash \varphi \to \psi$ 推得 $\vdash \psi$
	$\mathcal{NECA}$	由 $\vdash \varphi$ 推得 $\vdash \mathrm{A}\varphi$
区块 $\mathrm{L_{LTS}}$: $\mathcal{EMP}$		$\vdash \mathrm{A}(\psi \to \varphi) \to$ 知晓如何(ψ, φ)
	$\mathcal{COMPKh}$	$\vdash (\mathrm{Kh}(\psi, \varphi) \wedge \mathrm{Kh}(\varphi, \chi)) \to \mathrm{Kh}(\psi, \chi)$

表1：相对于标记迁移系统的 $\mathrm{L_{Kh}}$，$\mathrm{L^{LTS}{}_{Kh}}$ 的公理系统。

主体知道如何使 φ 为真；给定 φ，她知道如何使 χ 为真；那么给定 ψ，她就知道如何使 χ 为真。

定理 1（[57]）公理系统 $\mathcal{L}^{\mathrm{LTS}}{}_{\mathrm{Kh}}$（表1）对于 $\mathrm{L_{Kh}}$ 相对于所有标记迁移系统都是可靠且强完备的。◁

第二组公理可能存在争议。首先，人们或许会认为，与$\mathcal{EMP}$所述相反，模型中关于可实现之事的所有全局真理，并不都需要被视为主体的（如何）知识。其次，注意公理$\mathcal{COMPKh}$也蕴含了某种程度的全知：主体可能知道如何在给定 φ 的情况下使 ψ为真，也知道如何在给定 χ的情况下使 φ为真，但仍未想出如何将这两个见证计划组合起来，以确保在给定 χ 的情况下使 ψ为真。这两种性质将在下一节引入的更一般语义中消失。在第7节中，我们将说明，在新语义下进行强理想化后，这些公式如何变得有效。

4 基于不确定性的语义

基于LTS的语义为主体的能力提供了合理的表示：主体知道如何在给定 ψ 的情况下实现 φ，当且仅当存在一个计划，在任何 ψ-状态下执行时，都能始终完成每一次部分执行，并准确无误地终止于满足 φ的状态。不过，有人可能会认为，这种表示带有一定程度的理想化。

设有一个主体缺乏某种能力。在基于LTS的语义中，只有当环境未提供所需的（行动）序列时，才会出现这种情况。然而，有些情况下，尽管存在适当计划，主体却因其他原因而缺乏这种能力。事实上，她可能无法区分适当计划与不适当计划，也就是说，她无法判断这些计划通常会产生不同的结果。例如，考虑一位烤蛋糕的主体。她可能具备使用九种不同混合方法的能力[2]（打发、混合、乳化、切拌、翻拌、

[2] https://www.perfectlypastry.com/the-importance-of-the-mixing-method/

揉捏、过筛、搅拌、打发），她甚至可能知道它们是不同的行动。然而，她可能无法将其中一种与其他方法完全区分开来：她可能没有意识到，它们有时会产生不同的结果。在这种情况下，人们会说，这位主体不知道如何烤蛋糕：有时她能取得好的结果（使用适当的混合方法时），有时则不能。

基本动作之间的不可区分性可以解释上面的例子（其中每种混合方法都是一个基本动作）。不过，也可以设想涉及更一般形式的不可区分性的情形，即计划之间的不可区分性。再来看这位烘焙主体。可以合理地假设，她能够区分“加牛奶”和“加面粉”，但她或许没有意识到这些行动的顺序可能对最终结果产生何种影响。这里的问题并非她无法区分基本动作；而是由于行动顺序被视为无关紧要，两个计划无法区分。最后还有一种可能：主体可能不知道，虽然打开烤箱检查烘焙食品是否做好一次是合理的，但不能过度这样做。在这种情况下，问题在于无法区分执行一次行动与多次执行该行动所产生的效果。因此，对于这样的主体而言，长度不同的计划可能被视为在当前任务中等价。

前面的例子表明，我们可以设计一种更一般的方式来表示主体的能力。这不仅要考虑她可用的计划（标记迁移系统结构），还要考虑她区分不同计划的技能（即计划之间某种形式的不可区分性不可区分性）。正如我们将看到的，这种区分计划的（无）能力也使我们能够为多智能体场景定义一种自然的模型。在这种设定下，智能体共享同一组可供性（由实际环境提供），但其能力各不相同，这取决于她们能否以及在多大程度上区分这些可供性，甚至取决于她们有哪些可供性可用。为进一步说明这一点，请注意，原则上，主体不必对每个可用计划都具有“认知访问”。有些计划对主体来说可能过于陌生或复杂，以至于她可能并未意识到它们。因此，这些计划超出了主体的能力范围；这并非因为她无法将它们与其他计划区分开来，而是因为她根本没有将它们纳入考虑。这类似于对认知概念知道某事的提议：主体可能并未意识到（即，她可能没有考虑到）语言中的每个公式，因此不必知道这些公式确实成立。

定义 4.1（基于不确定性的标记迁移系统）设 Agt 是一个有限的非空智能体集合。对于 Prop、Act 和 Agt，多主体基于不确定性的标记迁移系统（LTS^{U}）是一个元组 $\mathrm{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \sim, \mathrm{Vi} \rangle$，其中 $\langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \mathrm{Vi} \rangle$ 是一个标记迁移系统，而 $\sim$ 为每个主体 $i \in \mathrm{Agt}$ 指定一个定义在非空计划集 $\mathrm{P}_i \subseteq \mathrm{Act}^*$ 上的等价不可区分关系。给定一个标记迁移系统 $^{U}\mathrm{M}$ 和 $w \in \mathrm{D}_{\mathcal{M}}$，有序对 (M, w)（通常省略括号）称为一个带指定状态的标记迁移系统 ^{U}。⊣

直观地说，P_i 是主体 i 可支配的计划集合；其中包含该主体能够使用的计划。与经典认知逻辑类似，$\sim_i \subseteq \mathrm{P}_i \times \mathrm{P}_i$ 描述了主体 i 对其可用计划的不可区分关系。

注释1 以下记法上的改变将简化后续的一些定义，并使其与基于LTS的语义之间的比较更加清晰。

设 hW,R, ∼,Vi 是一个 LTS^U，并取 $\mathrm{i} \in \mathrm{Agt}$；对于一个计划 $\sigma \in \mathrm{P}_i$，令 $[\sigma]_i$ 表示其在 $\sim_i$ 中的等价类（即，$[\sigma]_i := \{\sigma' \in \mathrm{P}_i \mid \sigma \sim_i \sigma'\}$）。每个 $\sim_i$ 与其所诱导的等价类集合 $\mathrm{S}_i := \{[\sigma]_i \mid \sigma \in \mathrm{P}_i\}$之间存在一一对应关系。因此，从现在起，一个 LTS^U 将表示为元组 $\mathrm{hW,R,\{S}_i\}_{i\in\mathrm{Agt}}\mathrm{,Vi}$。注意，每个 S_i都具有以下性质：（1）S_i，$\varnothing$（与 P_i，$\varnothing$一样），（2）若 $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{S}_i$ 且 π_1, π_2，则 $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$（等价类两两不相交），（3）$\mathrm{P}_i = \mathrm{S}\,_{\pi\in\mathrm{S}_i}\pi$（它们的并集恰好是 P_1），以及（4）$\varnothing \notin \mathrm{S}_i$（空集不是一个等价类）。⊣

鉴于她对 Act^*（或者更准确地说，对她的“计划域”$\mathrm{P}_i \subseteq \mathrm{Act}^*$）存在不确定性，主体$i$ 的能力并不取决于单个计划能够实现什么，而是取决于一组计划能够保证什么。

定义 4.2 对于 $\pi \subseteq \mathrm{Act}^*$、$u \in \mathrm{W}$ 和$U \subseteq \mathrm{W}$，定义

$$\mathrm{R}_\pi := \bigcup_{\sigma\in\pi} \mathrm{R}_\sigma, \qquad \mathrm{R}_\pi(u) := \bigcup_{\sigma\in\pi} \mathrm{R}_\sigma(u), \qquad \mathrm{R}_\pi(U) := \bigcup_{u\in U} \mathrm{R}_\pi(u).$$

⊣

现在我们可以将强可执行性的概念推广到计划集合。

定义 4.3（强可执行性）如果计划集合$\pi \subseteq \mathrm{Act}^*$ 在$u \in \mathrm{W}$处满足以下条件：其中每个计划 $\sigma \in \pi$ 在u处都强可执行，则称其在该状态处强可执行。因此，$\mathrm{SE}(\pi) := \mathrm{T}_{\sigma\in\pi}\,\mathrm{SE}(\sigma)$ 是 W 中 π 强可执行的状态集合。⊣

定义 4.4（$\mathbf{Kh}_i$ 标记迁移系统上的^{U}s）令 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$ 为语言 L_{Kh} 的多主体版本，它通过将 Kh 替换为 Kh_i（其中$i \in \mathrm{Agt}$，且 Agt，$\varnothing$）得到。带指定状态的标记迁移系统 $\models \mathrm{M}, w$（其中 $\mathrm{M} = \mathrm{hW, R, \{S}_i\}_{i\in\mathrm{Agt}}\mathrm{, Vi}$ 是基于 Act、Prop 和 Agt 的标记迁移系统）与 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$ 中公式之间的满足关系通过归纳定义。原子和布尔情形与之前相同。对于知晓如何公式，

$\mathrm{M},w \models \mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$ i当且仅当^{def}存在 $\pi \in \mathrm{S}_i$ 使得 ***(Kh-1)*** $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{SE}(\pi)$ 且 ***(Kh-2)*** $\mathrm{R}\pi$ $([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$,
其中 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} := \{w \in \mathrm{W} \mid \mathrm{M},w \models \varphi\}$。在语义情形下，$\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$的计划集 π 通常称为M中$\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$的见证。⊣

值得比较一下定义3.6和定义4.4。和之前一样，$\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$在全局起作用。但现在，我们要求主体$i$拥有一个计划集，并且该计划集在每一个 ψ-状态下都满足强可执行性（条件***(Kh-1)***）。不过，这个计划集仍应像之前的单个计划那样发挥作用：在 ψ-状态下执行时，它应无误地到达满足 φ （条件***(Kh-2)***）的状态。

还需注意，全局全称模态也可以在$\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$ 上的标记迁移系统^{U}中定义。（为此，至关重要的是，正如$_i$， $\varnothing$ 和 $\varnothing \notin \mathrm{S}_i$中所述，注释1。）

命题 2 设$\mathcal{M},w$ 是一个带指定状态的标记迁移系统^U。那么，

$$\textit{there is } i \in \mathsf{Agt} \textit{ with } \mathcal{M}, w \models \mathsf{Kh}_i(\neg\varphi, \bot) \qquad \textit{iff} \qquad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = \mathrm{D}_{\mathcal{M}}.$$

证明。**(⇒)** 假设存在 $\mathrm{i} \in \mathrm{Agt}$，使得 $\mathrm{M}, \mathrm{w} \models \mathrm{Kh}_i(\neg\varphi, \bot)$。那么，存在 $\pi \in \mathrm{S}_i$，使得 (Kh-1) $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{SE}(\pi)$ 且 (Kh-2) $\mathrm{R}\pi([\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}}) \subseteq [\![\bot]\!]^{\mathcal{M}}$。为导出矛盾，假设 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$，$\mathrm{D}_{\mathcal{M}}$，因此存在 $\mathrm{u} \in [\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。那么，条目（Kh-1）蕴含 $\mathrm{u} \in \mathrm{SE}(\pi) = \mathrm{T}_{\sigma\in\pi}\mathrm{SE}(\sigma)$。但是 $\pi \in \mathrm{S}_i$，所以 π，$\varnothing$，也就是说，存在 $\sigma \in \pi$

使得 $u \in SE(\sigma)$；因此，$R_\sigma(u), \varnothing$，所以 $R_\pi(u), \varnothing$，进而 $R_\pi([\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}}), \varnothing$，也就是说，$\varnothing \subset R_\pi([\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}})$。但是，根据条目（Kh-2），$\varnothing \subset R_\pi([\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}}) \subseteq [\![\bot]\!]^{\mathcal{M}}$，即 $\varnothing \subset [\![\bot]\!]^{\mathcal{M}}$，矛盾。因此，$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = D_{\mathcal{M}}$。

（⇐）假设 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = D_{\mathcal{M}}$。那么 $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = \varnothing$，因此对于每个 $\pi \in 2^{Act^*}$，$Kh_i(\neg\varphi, \bot)$ 的语义子句中的 (Kh-1) 都成立。此外，$R_\pi([\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}}) = S\, u_{\in [\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}}} R_\pi(u) = S\, u_{\in\varnothing} R_\pi(u) = \varnothing$，因此对于任何这样的 π，(Kh-2) 也成立。最后，$S_i, \varnothing$（因此存在 $\pi \in S_i$），且 $Agt, \varnothing$（因此存在 $i \in Agt$）；于是，存在 $i \in Agt$，使得 $M, w \models Kh_i(\neg\varphi, \bot)$。■

因此，可以取 $A\varphi := W_{i\in Agt} Kh_i(\neg\varphi, \bot)$（回想一下：Agt 非空且有限），并令 $E\varphi := \neg A\neg\varphi$。

现在，显然，不同主体对自身能力有不同的意识。同时，由于知晓如何模态具有全局性，因此有

$$\mathcal{M}, w \models Kh_i(\psi, \varphi) \text{ if and only if } \mathcal{M}, w \models AKh_i(\psi, \varphi),$$

或者等价地，

$$\mathcal{M}, w \models Kh_j(\neg Kh_i(\psi, \varphi), \bot), \text{ for some agent } j.$$

但这并不意味着主体知道“主体i 知道如何在给定 ψ 的情况下实现 φ。”实际情况只是 $Kh_i(\psi, \varphi)$ 成为一个客观事实，因此，假设其否定自然会导致矛盾。在我们的模型中，状态之间不存在认知不可区分性的概念，因而无法由此形成“知道……”的概念。

最后，有人可能会认为，既然模型具备计划之间认知不可区分性的概念，主体就应当知道某个计划是否能与另一个计划区分开来，或者知道某种行动方案是否可用。然而，知晓如何模态无法谈论这种关系本身，只能谈论一组不可区分计划的存在，以及执行这些计划所产生的效果。

5 双模拟

互模拟是理解形式语言表达能力的重要工具。在 [17, 18],针对 L_{Kh} 的标记迁移系统上的互模拟概念已经被提出。本节将讨论针对 L^{Kh_i} 的标记迁移系统^{U}的类似思想。

首先，介绍一个实用的缩写。

定义 5.1 设 $M = hW, R, \{S_i\}_{i\in Agt}, Vi$ 是一个关于 Prop、Act 和 Agt 的标记迁移系统^U。取计划集 $\pi \in 2^{(Act^*)}$、状态集 U、$T \subseteq W$ 以及主体 $i \in Agt$。

- 记$U \rightrightarrows T$ iff_{def} $U \subseteq SE(\pi)$ 且 $R_\pi(U) \subseteq T$。
- 记 $U \overset{i}{\Longrightarrow} T$ iff_{def} 存在 $\pi \in S_i$ 使得 $U \rightrightarrows T$。

此外，当且仅当存在一个 L^{Kh_i}-公式（命题公式）φ 使得 $U = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$ 时，$U \subseteq W$ 在 M 中是 L^{Kh_i}-可定义的（分别是命题可定义的）。⊣

两个简短的观察。首先，请注意这个缩写如何简化了知晓如何公式的语义子句：$\mathcal{M}, w \models \mathsf{Kh}_i(\psi, \varphi)$ 当且仅当 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} \overset{i}{\Longrightarrow} [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。其次，在基于$\mathrm{LTS}^U$的语义下，$\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$-可定义性蕴含命题可定义性。其证明类似于 [17, 18]，基于LTS的语义情形，Kh_i 能够全局发挥作用这一事实。

命题 3 设$\mathcal{M}$ 是一个标记迁移系统^U。对于所有 $U \subseteq \mathrm{D}_{\mathcal{M}}$，如果 U 是$\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$-可定义的，那么它就是命题可定义的。◁

现在我们引入互模拟的概念。请注意，尽管模型的二元关系集合没有被明确提及，但它是通过抽象关系“$\overset{i}{\Longrightarrow}$”（定义 5.1）来指代的。

定义 5.2（$\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$-互模拟）设 M 和 M′ 是两个标记迁移系统^{U}s，其论域分别为 W 和 W′。取$Z \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W}'$。

- 对于$u \in \mathrm{W}$ 和$U \subseteq \mathrm{W}$，定义

$$Z(u) := \{u' \in \mathrm{W}' \mid uZu'\}, \qquad Z(U) := \bigcup_{u \in U} Z(u).$$

- 对于$u' \in \mathrm{W}'$ 以及$U' \subseteq \mathrm{W}'$，定义

$$Z^{-1}(u') := \{u \in \mathrm{W} \mid uZu'\}; \qquad Z^{-1}(U') := \bigcup_{u' \in U'} Z(u').$$

一个非空的$Z \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W}'$ 称为 M 与 M′之间的 $\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$-互模拟，当且仅当 wZw' 蕴含以下所有条件。

- **原子**：$\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}'(w')$。
- Kh_i**-Zig**：对于任意可由命题定义的$U \subseteq \mathrm{W}$，若$U \overset{i}{\Longrightarrow} T$ 对某个$T \subseteq \mathrm{W}$成立，则存在$T' \subseteq \mathrm{W}'$，使两者均满足

  (B1) $Z(U) \overset{i}{\Longrightarrow} T'$, ***(B2)*** $T' \subseteq Z(T)$.

- Kh_i**-Zag**：对于任意可由命题定义的$U' \subseteq \mathrm{W}'$，若$U' \overset{i}{\Longrightarrow} T'$ 对某个$T' \subseteq \mathrm{W}'$成立，则存在$T \subseteq \mathrm{W}$，使两者均满足

  (B1) $Z^{-1}(U') \overset{i}{\Longrightarrow} T$, ***(B2)*** $T \subseteq Z^{-1}(T')$.

- **A-Zig**：对于W中的每个u，W' 中都存在一个u'，使得uZu'。
- **A-Zag**：对于W' 中的每个u'，W中都存在一个u，使得uZu'。

当 M 与 M′ 之间存在一个 L_{Kh}-互模拟 Z，使得$w \leftrightarrow \mathrm{Z}' w'$ 时，我们记作 $\mathrm{M}, w \leftrightarrow \mathrm{M}', w'$。⊣

Kh_i-Zig 中的两个要求等价于一个要求：$Z(U) \overset{i}{\Longrightarrow} Z(T)$。将它们拆开，是为了更贴近标准双模拟的定义：如果$U$ 有一个“i-后继”T，那么它的“双模拟像”U' 也有一个“i-后继”，即T'（条件$Z(U) \overset{i}{\Longrightarrow} T'$），并且这些后继状态构成“双模拟匹配”（条件$T' \subseteq Z(T)$）。$\mathsf{Kh}_i$-Zag 的情况类似。

为了形式化互模拟的关键性质，我们定义关于 $\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$ 的模型等价这一概念。

定义 5.3（$\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$-等价）两个带指定状态的标记迁移系统^{U}s M, w 和 M', w' 是 $\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$-等价的（记作 $\mathrm{M}, w \,!\, \mathrm{M}', w'$）当且仅当，对于每个 $\varphi \in \mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$，

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \quad \text{iff} \quad \mathcal{M}', w' \models \varphi.$$ ⊣

然后，我们可以陈述 $\leftrightarrow$ 与 ! 之间预期的对应关系。

定理 2（$\mathbf{L^{Kh_i}}$-双模拟等价蕴含 $\mathbf{L^{Kh_i}}$-等价）设 $\mathcal{M},w$ 和 $\mathcal{M}',w'$ 是带指定状态的 标记迁移系统^{U}s。那么，

$$\mathcal{M}, w \leftrightarrows \mathcal{M}', w' \quad implies \quad \mathcal{M}, w \leftrightsquigarrow \mathcal{M}', w'.$$

证明。取 M = hW, R, {S_i}$_{i\in Agt}$, Vi 和 M′ = hW′, R′, {S′ i} $_{i\in Agt}$, V′i。根据给定的 M, w $\leftrightarrows$ M′, w′，存在一个 L^{Kh_i}-互模拟 Z $\subseteq$ (W × W′)，使得 wZw′。L^{Kh_i}-等价性的证明采用对 L^{Kh_i}-公式的结构归纳法。原子命题和布尔算子的情形是标准的，只剩下形如 $Kh_i(\psi,\varphi)$ 的公式。注意，在这种情形下，归纳假设（归纳假设）指出，对于 u $\in$ W、u′ $\in$ W′ 以及 $Kh_i(\psi,\varphi)$ 的子公式 χ，若 uZu′，则 u $\in [\![\chi]\!]^{\mathcal{M}}$ 当且仅当 u′ $\in [\![\chi]\!]^{\mathcal{M}'}$。

假设 $w \in [\![Kh_i(\psi,\varphi)]\!]^{\mathcal{M}}$。那么，根据语义解释，$[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$ $_i\Rightarrow [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。值得注意的是，$Z([\![\chi]\!]^{\mathcal{M}}) = [\![\chi]\!]^{\mathcal{M}'}$ 对 $\chi \in \{\psi,\varphi\}$成立。

(⊆) 如果 $v' \in Z([\![\chi]\!]^{\mathcal{M}})$，那么存在 $v \in [\![\chi]\!]^{\mathcal{M}}$ 使得 vZv'。因此，根据归纳假设，我们有$v' \in [\![\chi]\!]^{\mathcal{M}'}$。

(⊇) 如果 $v' \in [\![\chi]\!]^{\mathcal{M}'}$，那么根据 A 后向条件，存在 v 满足 vZv'；因此，根据归纳假设，我们有$v \in [\![\chi]\!]^{\mathcal{M}}$。所以，$v' \in Z([\![\chi]\!]^{\mathcal{M}})$。

现在给出证明。我们有 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$ i⇛ $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。集合 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$ 显然是 L^{Kh_i}-可定义的，因此也是命题可定义的（命题 3）。接着，根据 Kh_i-Zig 子句，存在 T′ $\subseteq$ W′，使得 (B1) $Z([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}})$ i⇛ T′，且 (B2) T′ $\subseteq Z([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})$。因此，$Z([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}})$ i⇛ $Z([\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}})$，于是根据上述结果，$[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'}$ i⇛ $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}'}$。所以，w′ $\in [\![Kh_i(\psi,\varphi)]\!]^{\mathcal{M}'}$。

从 $w' \in [\![Kh_i(\psi,\varphi)]\!]^{\mathcal{M}'}$ 到 $w \in [\![Kh_i(\psi,\varphi)]\!]^{\mathcal{M}}$ 的方向可通过类似的论证得出，只需改用 A-Zig 和 Kh_i-Zag。■

很容易看出，定理 2 的逆命题在任意模型上并不成立：事实上，[18, 第 2] 节中给出的反例在此同样能说明问题。为了使逆命题成立，我们通常需要将讨论限制在某些特定的模型类上，这些模型类通常称为 Hennessy-Milner 类。在许多模态逻辑中，人们通常只考虑像有限模型：在这些模型中，每个状态上的每个基本关系都只有有限多个后继状态。对于可以定义全局全称模态 A 的语言，例如 L^{Kh_i}，这一要求需要加强，因为每个状态都能（通过 A所对应的关系）到达其他所有状态。例如，我们可以取论域有限的模型类。具体而言，这里我们证明，有限模型类（即论域有限的模型）构成一个 Hennessy-Milner 类。请注意，我们不对模型的不确定性关系（或集合 S_i）施加任何限制。

定理 3（$\mathbf{L^{Kh_i}}$-等价蕴含 $\mathbf{L^{Kh_i}}$-双模拟等价）设 $\mathcal{M},w$ 和 $\mathcal{M}',w'$ 是 有限的 带指定状态的 标记迁移系统^{U}。那么，

$$\mathcal{M}, w \leftrightsquigarrow \mathcal{M}', w' \quad implies \quad \mathcal{M}, w \leftrightarrows \mathcal{M}', w'.$$

证明。 取 M = hW, R, {S_i}$_{i\in Agt}$, Vi 和 M′ = hW′, R′, {S′ $_i$} $_{i\in Agt}$, V′i。策略是证明关系 ! 已经是一个 L^{Kh_i}–互模拟。因此，定义

$$Z := \{(v,v') \in (W \times W') \mid \mathcal{M}, v \leftrightsquigarrow \mathcal{M}', v'\}$$

因此 wZw' 意味着 w 与 w' 满足完全相同的 L^{Kh_i} 公式。为了证明 Z 满足要求，任取一个 $(w,w') \in Z$。

• **原子**。状态 w 与 w' 在所有 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$公式上都一致，因此在所有原子命题上也一致。

• A-Zig。取 $\mathrm{v} \in \mathrm{W}$，并假设（为导出矛盾）不存在满足 vZv' 的 $\mathrm{v}' \in \mathrm{W}'$。那么，根据 Z 的定义，对于每个 $\mathrm{v}'\,\mathrm{i} \in \mathrm{W}' = \{\mathrm{v}'1, \ldots, \mathrm{v}'\mathrm{n}\}$（回忆一下：$\mathrm{M}'$ 是有限的），都存在一个 LKh 公式 $\theta\mathrm{i}$，使得 $\mathrm{M}, \mathrm{v} \vDash \theta\mathrm{i}$，但 $\mathrm{M}', \mathrm{v}'\,\mathrm{i} \nvDash \theta\mathrm{i}$。现在取 $\theta := \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta\mathrm{n}$。显然，$\mathrm{M}, \mathrm{v} \vDash \theta$；然而，对于每个 $\mathrm{v}'\,\mathrm{i} \in \mathrm{W}'$，$\mathrm{M}', \mathrm{v}'\,\mathrm{i} \nvDash \theta$，因为每个 $\mathrm{v}'\,\mathrm{i}$ 都会使“它自己的”合取项 $\theta\mathrm{i}$ 为假。于是，$\mathrm{M}, \mathrm{w} \vDash \mathrm{E}\theta$，但 M'，$\mathrm{w}' \nvDash \mathrm{E}\theta$，这与假设 wZw' 矛盾。

• **A-Zag**。与 A-Zig 的情形类似。

• Kh_i**-Zig**。任取一个命题可定义集 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{W}$（因此，$\psi$ 是命题的），并假设对于某个 $T \subseteq \mathrm{W}$，有 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} \overset{i}{\Longrightarrow} T$。我们需要找到一个 $T' \subseteq \mathrm{W}'$，使其同时满足

$$\textbf{\textit{(B1)}}\ \ Z([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}) \overset{i}{\Rightarrow} T', \qquad\qquad \textbf{\textit{(B2)}}\ \ T' \subseteq Z(T).$$

注意，$Z([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}) = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'}$。对于**(⊇)**，假设 $u' \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'}$。根据 A 后向条件（已在上文证明），存在 $u \in \mathrm{W}$，使得 uZu'；接着，根据 Z 的定义，$u \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$，因此 $u' \in Z([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}})$。对于**(⊆)**，假设 $u' \in Z([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}})$。那么，存在 $u \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$，使得 uZu'；因此，根据 Z 的定义，$u' \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'}$。所以，实际上我们需要一个 $T' \subseteq \mathrm{W}'$，使其同时满足

$$\textbf{\textit{(B1)}}\ \ [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \overset{i}{\Rightarrow} T', \qquad\qquad \textbf{\textit{(B2)}}\ \ T' \subseteq Z(T).$$

现在，考虑两种选择。

(1) 假设 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = \varnothing$。那么，$[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} = Z([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}) = \varnothing$因此，$T' = \varnothing$便能满足要求，因为以下条件成立

$$\textbf{\textit{(B1)}}\ \ \varnothing \overset{i}{\Rightarrow} \varnothing\ (\text{as } \mathrm{S}_i \neq \varnothing), \qquad\qquad \textbf{\textit{(B2)}}\ \ \varnothing \subseteq Z(T).$$

(2) 假设 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$，$\varnothing$。由此得到 T，$\varnothing$（来自 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}\ \mathrm{i}\Longrightarrow \mathrm{T}$），这在后面会派上用场。为了证明存在一个同时满足 (B1) 和 (B2) 的 $\mathrm{T}' \subseteq \mathrm{W}'$，我们用反证法，因此假设不存在同时满足这两个要求的 T'：每个满足 (B1) 的 $\mathrm{T}' \subseteq \mathrm{W}'$ 都不满足 (B2)。换言之，每个满足 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'}\ \mathrm{i}\Longrightarrow \mathrm{T}'$ 的 $\mathrm{T}' \subseteq \mathrm{W}'$，都有一个状态 $\mathrm{v}'\,\mathrm{T}, \in \mathrm{T}'$，它不是某个状态 $\mathrm{v} \in \mathrm{T}$ 的 Z 像（即，对于每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{T}$，$\mathrm{vZv}'\,\mathrm{T}'$ 都不成立）。根据 Z 的定义，后者意味着 T 中的每个状态都能通过一个 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$-公式与这个 $\mathrm{v}'\,\mathrm{T}'$ 区分开来。因此，给定任意满足 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'}\ \mathrm{i}\Longrightarrow \mathrm{T}'$ 的 $\mathrm{T}' \subseteq \mathrm{W}'$，都可以找到一个状态 $\mathrm{v}'\,\mathrm{T}, \in \mathrm{T}'$，使得对于每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{T}$，都存在一个公式 $\theta^{v}\,\mathrm{v}'\,\mathrm{T}'$，满足 $\mathrm{M}, \mathrm{v} \vDash \theta^{v}\,\mathrm{v}'\,\mathrm{T}'$，但 $\mathrm{M}', \mathrm{v}'\,\mathrm{T}' \nvDash \theta^{v}\,\mathrm{v}'\,\mathrm{T}'$。然后，对于每个这样的 T' 中的 $\mathrm{v}'\,\mathrm{T}'$，定义

$$\theta_{T'} := \bigvee_{v \in T} \theta^{v}_{v'_{T'}} \qquad \text{and then} \qquad \theta := \bigwedge_{\{T' \subseteq \mathrm{W}' \mid [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \overset{i}{\Rightarrow} T'\}} \theta_{T'},$$

观察如下。首先，$\theta_{T'}$ 确实是一个公式，因为 W 是有限的，因此 T 也有限。同样重要的是，T、$\varnothing$，因此 $\theta_{T'}$ 不会退化为 $\bot$。其次，θ 也是一个公式，因为 W' 是有限的，因此$\{T' \subseteq \mathrm{W}' \mid [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \overset{i}{\Rightarrow} T'\}$也有限。不过，后一个集合可能为空。这就形成了以下两种情况。

– 假设 $\{T' \subseteq W' \mid [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \mathrm{i}\Rightarrow T'\} = \varnothing$。那么，考虑公式 $\mathrm{Kh}_i(\psi, \top)$。由于 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} \mathrm{i}\Rightarrow T$ 且 $T \subseteq W = [\![\top]\!]^{\mathcal{M}}$，可知 $M, w \models \mathrm{Kh}_i(\psi, \top)$。然而，$M', w' \not\models \mathrm{Kh}_i(\psi, \top)$，因为根据这一情形，不存在满足 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \mathrm{i}\Rightarrow T'$ 的 $T' \subseteq W'$。这与 w 和 w' 的 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$-等价性矛盾。– 假设 $\{T' \subseteq W' \mid [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \mathrm{i}\Rightarrow T'\} \neq \varnothing$。那么，$\theta$ 不会退化为 $\top$。现在注意，每个 $v \in T$ 都满足每个合取项 $\theta_{T'}$ 中与其“自身”对应的析取项 $\theta^{v} v' T'$，因此它满足 θ。于是，$T \subseteq [\![\theta]\!]^{\mathcal{M}}$，进而由 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} \mathrm{i}\Rightarrow T$ 以及 Kh_i-公式具有全局性这一事实，可知 $M, w \models \mathrm{Kh}_i(\psi, \theta)$。然而，对于 $\{T' \subseteq W' \mid [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \mathrm{i}\Rightarrow T'\}$ 中的每个 T'，状态 $v' T'$ 无法与任何状态 $v \in T$ 匹配，因此会使 $\theta_{T'}$ 中的所有析取项都为假，从而使 $\theta_{T'}$ 为假，进而也使 θ 为假。换言之，每个满足 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \mathrm{i}\Rightarrow T'$ 的 $T' \subseteq W'$ 都包含一个状态 $t' T'$，使得 $M', t' T' \not\models \theta$，也就是说，$[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}'} \mathrm{i}\Rightarrow T'$ 蕴含 $T' * [\![\theta]\!]^{\mathcal{M}}$。因此，再次利用 Kh_i-公式具有全局性这一事实，可得 $M', w' \not\models \mathrm{Kh}_i(\psi, \theta)$，这与 w 和 w' 的 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$-等价性矛盾。

- Kh_i-**Zag**。类似于 Kh_i-Zig 情形。 ■

6 公理化

现在，我们针对基于 LTS^U 的语义，为 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$ 提出一个可靠且完备的公理系统。回顾一下，$A\varphi := W \mathrm{i}\in \mathrm{Agt}\, \mathrm{Kh}_i(\neg\varphi, \bot)$，且 $E\varphi := \neg A \neg \varphi$。由此可见，L 中的公式和规则（表1的第一部分）在 LTS^U 下仍然是可靠的（前提是将 Kh 替换为 Kh_i）。它们将构成关于 LTS^U 的 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$ 公理系统的第一部分（表 2 的第一部分）。不过，这还不足以构成一个完备的公理系统。表 2 第二部分中的公理 KhE 和 KhA 正是缺失的部分[3]。

我们应当先讨论新引入的公理。一方面，公理 $\mathcal{KHA}$ 可以受到适用于 $\mathcal{EMP}$ 和 $\mathcal{COMPKH}$ 的一些批评；但在我们看来，程度较轻。它意味着某种程度的理想化，因为它蕴含着：主体的能力在某种意义上对于全局蕴涵是封闭的。另一方面，公理 $\mathcal{KHE}$ 陈述了一个简单而合理的要求：如果 $\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi)$ 并非无关紧要（鉴于 $E\psi$ 成立），那么就应当能够确保 $E\varphi$。

定义系统 $\mathcal{L}^{\mathrm{LTS}^U}{}_{\mathrm{Kh}_i} := \mathcal{L}$（表 2 的第一块表 2）$+ \mathcal{L}_{\mathrm{LTS}^U}$（表 2 的第二块表 2）。现在我们将证明 $\mathcal{L}^{\mathrm{LTS}^U}{}_{\mathrm{Kh}_i}$ 对于 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$ 上的标记迁移系统 ^{U} 是可靠且强完备的。可靠性的证明相当直接，因此我们将重点讨论强完备性。依照 [9, 命题 4。12],策略是：对于任意一个 $\mathrm{L}^{\mathrm{LTS}^U}{}_{\mathrm{Kh}_i}$-相容公式集，构造一个满足它们的标记迁移系统 ^{U}。特别地，定理性、（局部）后承、不一致性和极大

[3] $\mathcal{KHE}$ 和 $\mathcal{KHA}$ 在 LTS 语义下也有效（命题 10）。事实上，下一节将证明，$\mathrm{L}^{\mathrm{LTS}^U}{}_{\mathrm{Kh}_i}$（针对 LTS^U）严格弱于 $\mathrm{L}^{\mathrm{LTS}}{}_{\mathrm{Kh}}$（针对 LTS）。

区块 L:	$\mathcal{TAUT}$	$\vdash \varphi$ 对于 φ 一个命题重言式
	DISTA	$\vdash \mathsf{A}(\varphi \to \psi) \to (\mathsf{A}\varphi \to \mathsf{A}\psi)$
	$\mathcal{TA}$	$\vdash \mathsf{A}\varphi \to \varphi$
	$4\mathcal{KhA}$	$\vdash \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \to \mathrm{AKh}_i(\psi, \varphi)$
	$5\mathcal{KhA}$	$\vdash \neg\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \to \mathrm{A}\neg\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi)$
	$\mathcal{MP}$	由 $\vdash \varphi$ 和 $\vdash \varphi \to \psi$ 推得 $\vdash \psi$
	$\mathcal{NECA}$	由 $\vdash \varphi$ 推得 $\vdash \mathsf{A}\varphi$
区块 $\mathrm{L}_{\mathrm{LTS}^U}$:	$\mathcal{KhE}$	$\vdash (\mathrm{E}\psi \wedge \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi)) \to \mathrm{E}\varphi$
	$\mathcal{KhA}$	$\vdash (\mathrm{A}(\chi \to \psi) \wedge \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \wedge \mathrm{A}(\varphi \to \theta)) \to \mathrm{Kh}_i(\chi, \theta)$

表 2：$\mathrm{L}_{\mathrm{LTS}^U}$ 的公理，关于 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$ 的，针对标记迁移系统^{U}s。

相容集的定义与通常相同[9]。我们将借鉴 [57, 59]中的思想；以下定理将会有所帮助。

命题 *4* 公式 $A\neg\psi \to Kh_i(\psi, \varphi)$（称为 *SCOND*）和 $Kh_i(\bot, \varphi)$（称为 *COND*）均可在 $L^{\mathrm{LTS}^U} Kh_i$ 中导出。也就是说，*(1)* $\vdash A\neg\psi \to Kh_i(\psi, \varphi)$ 和 *(2)* $\vdash Kh_i(\bot, \varphi)$。

证明。(1) 取 $\vdash \mathrm{A}(\psi \to \psi) \to (\mathrm{A}(\bot \to \varphi) \to (\mathrm{Kh}_i(\psi, \bot) \to \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi)))$，这是 KhA 的一个实例。利用 TAUT 和 NECA 可得 $\vdash \mathrm{A}(\psi \to \psi)$；同理可得$\vdash \mathrm{A}(\bot \to \varphi)$。然后，连续应用两次分离规则可得 $\vdash \mathrm{Kh}_i(\psi, \bot) \to \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi)$，根据 A 的定义，这就是 $\vdash \mathrm{A}\neg\psi \to \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi)$。(2) 取 $\vdash \mathrm{A}\neg\bot \to \mathrm{Kh}_i(\bot, \varphi)$，这是前一条目的一个实例。利用 TAUT 和 NECA 可得 $\vdash \mathrm{A}\neg\bot$，因此由分离规则可得 $\vdash \mathrm{Kh}_i(\bot, \varphi)$。 ■

因此，所需标记迁移系统^{U}的定义如下。

定义 6.1 令 $\mathbf{\Phi}$ 为 $\mathrm{L}^{\mathrm{LTS}^U}{}_{\mathrm{Kh}_i}$ 中所有极大 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$-相容公式集（极大一致集，MCS）的集合。对于任意 $\Delta \in \mathbf{\Phi}$，定义

$$\Delta|_{\mathrm{Kh}_i} := \{\xi \in \Delta \mid \xi \text{ 具有 } \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \text{ 的形式}\},$$
$$\Delta|_{\neg\mathrm{Kh}_i} := \{\xi \in \Delta \mid \xi \text{ 具有 } \neg\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \text{ 的形式}\},$$

$\Delta|_{\mathrm{Kh}}$:= 计划集 $_{i\in\mathrm{Agt}}$ $\Delta|_{\mathrm{Kh}_i}$

$\Delta|_{\neg\mathrm{Kh}}$:= 计划集 $_{i\in\mathrm{Agt}}$ $\Delta|_{\neg\mathrm{Kh}_i}$

设 Γ 是 $\mathbf{\Phi}$中的一个集合；我们将定义一个满足其公式的结构。定义一组基本动作 $\mathrm{Act}^\Gamma{}_i := \{\langle\psi, \varphi\rangle \mid \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Gamma\}$，与每个主体 $i \in \mathrm{Agt}$ 相关联，然后取它们的并集 $\mathrm{Act}^\Gamma := \mathrm{S}_{i\in\mathrm{Agt}} \mathrm{Act}^\Gamma{}_i$。注意，对于每个 $i \in \mathrm{Agt}$ 以及每个 $\varphi \in \mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$，$\mathrm{Kh}_i(\bot, \varphi) \in \Gamma$（由 $\mathcal{CON}$ 得出）；由于 Agt 是有限且非空的，这意味着 Act^Γ 是可数的，因此它是一组合适的行动，可用于构建模型。值得注意的是，Act^Γ 确定了一个新的签名。不过，由于语言中的算子无法明确谈论行动的名称，只要基数相同，我们就可以定义一个从 Act^Γ 到任意特定 Act 的映射，从而保留原始签名。

那么，定义在动作集$^\Gamma$、Agt 和命题之上的结构 $\mathrm{M}^\Gamma = \langle \mathrm{W}^\Gamma, \mathrm{R}^\Gamma, \{\mathrm{S}^\Gamma{}_i\}_{i\in\mathrm{Agt}}, \mathrm{V}^\Gamma\rangle$ 如下。

- $\mathrm{W}^\Gamma := \{\Delta \in \mathbf{\Phi} \mid \Delta|_{\mathrm{Kh}} = \Gamma|_{\mathrm{Kh}}\}$.

- $R^{\Gamma}_{\langle\psi,\varphi\rangle} := \bigcup_{i\in \mathsf{Agt}} R^{\Gamma}_{\langle\psi,\varphi\rangle^i}$, with

  $$R^{\Gamma}_{\langle\psi,\varphi\rangle^i} := \{(\Delta_1,\Delta_2) \in W^{\Gamma} \times W^{\Gamma} \mid \mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Gamma, \psi \in \Delta_1, \varphi \in \Delta_2\}.$$

- $S^{\Gamma}_i := \left\{\{\langle\psi,\varphi\rangle\} \mid \langle\psi,\varphi\rangle \in \mathsf{Act}^{\Gamma}_i\right\}$.
- $V^{\Gamma}(\Delta) := \{p \in \mathsf{Prop} \mid p \in \Delta\}$. ⊣

由于 $\Gamma \in \mathbf{\Phi}$，结构 M^{Γ} 属于所需类型，正如下述命题所述。

命题 5 结构 $\mathcal{M}^{\Gamma} = \langle W^{\Gamma}, R^{\Gamma}, \{S^{\Gamma}{}_i\}_{i\in \mathsf{Agt}}, V^{\Gamma}\rangle$ 是一个标记迁移系统[U]。

证明。只需证明每个 $S^{\Gamma}{}_i$ 都在一个非空子集 $2^{(\mathsf{Act}^*)}$ 上定义了一个划分。首先，$\mathcal{CON}^{\mathcal{D}}$ 蕴含 $\mathsf{Kh}_i(\bot,\bot) \in \Gamma$，因此 $\{\bot,\bot\} \in$ 动作集$^{\Gamma}{}_i$，进而 $\{\{\bot,\bot\}\} \in S^{\Gamma}{}_i$；于是，$S \pi\in S_i \pi, \varnothing$。接着，$S_i$ 确实在 $S \pi\in S_i \pi$ 上定义了一个划分：其元素两两不相交（它们是包含不同元素的单元素集合），显然整体穷尽该集合，最后，$\varnothing \notin S^{\Gamma}{}_i$。■

令 $\Gamma \in \mathbf{\Phi}$；以下关于 $\mathcal{M}^{\Gamma}$ 的性质将会很有用（证明与 [59]中的证明类似）。

命题 6 对于任意 Δ_1，$\Delta_2 \in W^{\Gamma}$ 我们有 $\Delta_1|_{\mathsf{Kh}} = \Delta_2|_{\mathsf{Kh}}$。

证明。根据 W^{Γ} 的定义显然成立。 ■

命题 7 取 $\Delta \in W^{\Gamma}$。如果 Δ 有一个 $R^{\Gamma}{}_{\langle\psi,\ \varphi\rangle}$-后继，那么每个满足$\varphi \in \Delta'$ 的 $\Delta' \in W^{\Gamma}$ 都可以从 Δ 经由 $R^{\Gamma}{}_{\langle\psi,\ \varphi\rangle}$ 到达。

证明。如果 Δ 有一个 $R^{\Gamma}\,h_{\psi,\varphi}i$-后继，那么它就有一个对于某个 $i \in \mathsf{Agt}$ 的 $R^{\Gamma}\,h_{\psi,\varphi}i^i$-后继；因此，$\psi \in \Delta$ 且 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Gamma$。于是，每个满足 $\varphi \in \Delta'$ 的 $\Delta' \in W^{\Gamma}$ 都有 $(\Delta,\Delta') \in R^{\Gamma}\,h_{\psi,\varphi}i$，因此也有 $(\Delta,\Delta') \in R^{\Gamma}\,h_{\psi,\varphi}i$。■

命题 8 设 φ 为一个L^{Kh_i}-公式。若对于每个 $\Delta \in W^{\Gamma}$都有 $\varphi \in \Delta$，则对于每个 $\Delta \in W^{\Gamma}$都有$\mathsf{A}\varphi \in \Delta$。

证明。首先，考虑任意 Δ in $W^{\Gamma} \subseteq \mathbf{\Phi}$ 的一些事实。根据定义，$\Delta|_{\mathsf{Kh}} \cup \Delta|_{\neg\mathsf{Kh}}$ 是 Δ 的子集，因此它是一致的。此外：$\Delta|_{\mathsf{Kh}} \cup \Delta|_{\neg\mathsf{Kh}}$的任何极大一致扩张，例如 Δ'，都应满足 $\Delta|_{\mathsf{Kh}} = \Delta'|_{\mathsf{Kh}}$。对于 $(\subseteq)$，注意到 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Delta|_{\mathsf{Kh}}$ 蕴含 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in (\Delta|_{\mathsf{Kh}} \cup \Delta|_{\neg\mathsf{Kh}})$，因此 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Delta'$，即 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Delta'|_{\mathsf{Kh}}$。对于 $(\supseteq)$，使用逆否命题。若 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \notin \Delta|_{\mathsf{Kh}}$，则 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \notin \Delta$，所以 $\neg\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Delta$（因为 Δ 是一个极大一致集）。因此，$\neg\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in (\Delta|_{\mathsf{Kh}} \cup \Delta|_{\neg\mathsf{Kh}})$，从而 $\neg\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Delta'$；因此，$\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \notin \Delta'$（因为 Δ 是一致的），进而 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi) \notin \Delta'|_{\mathsf{Kh}}$。

为证明该命题，假设 $\varphi \in \Delta$ 对每个 $\Delta \in W^{\Gamma}$ 都成立。任取一个 $\Delta \in W^{\Gamma}$，并注意到 $\Delta|_{\mathsf{Kh}} = \Gamma|_{\mathsf{Kh}}$。于是，集合 $\Delta|_{\mathsf{Kh}} \cup \Delta|_{\neg\mathsf{Kh}} \cup \{\neg\varphi\}$ 不一致。否则，它可以扩展为一个极大一致集 $\Delta' \in \mathbf{\Phi}$。根据上一段的结果，这意味着 $\Delta'|_{\mathsf{Kh}} = \Delta|_{\mathsf{Kh}}$，因此 $\Delta'|_{\mathsf{Kh}} = \Gamma|_{\mathsf{Kh}}$，进而 $\Delta' \in W^{\Gamma}$。但根据假设，$\varphi \in \Delta'$；而根据构造，$\neg\varphi \in \Delta'$。这将使 Δ' 不一致，造成矛盾。

因此，鉴于 $\Delta|_{\mathsf{Kh}} \cup \Delta|_{\neg\mathsf{Kh}} \cup \{\neg\varphi\}$ 不一致，应当存在集合 $\{\mathsf{Kh}^{b_1}_{i}(\psi_1,\varphi_1), \ldots, \mathsf{Kh}^{b_n}_{i}(\psi_n,\varphi_n)\} \subseteq \Delta|_{\mathsf{Kh}}$ 和 $\{\neg\mathsf{Kh}^{b'_1}_{i}(\psi'_1,\varphi'_1), \ldots, \neg\mathsf{Kh}^{b'_m}_{i}(\psi'_m,\varphi'_m)\} \subseteq \Delta|_{\neg\mathsf{Kh}}$，使得

$$\vdash \left(\bigwedge_{k=1}^{n} \mathsf{Kh}_{b_k}(\psi_k, \varphi_k) \wedge \bigwedge_{k=1}^{m} \neg \mathsf{Kh}_{b'_k}(\psi'_k, \varphi'_k) \right) \rightarrow \varphi.$$

因此，根据 $\mathcal{NECA}$,

$$\vdash \mathsf{A}\left(\left(\bigwedge_{k=1}^{n} \mathsf{Kh}_{b_k}(\psi_k, \varphi_k) \wedge \bigwedge_{k=1}^{m} \neg \mathsf{Kh}_{b'_k}(\psi'_k, \varphi'_k) \right) \rightarrow \varphi \right)$$

然后，根据 $\mathcal{DISTA}$ 和分离规则，

$$\vdash \mathsf{A}\left(\bigwedge_{k=1}^{n} \mathsf{Kh}_{b_k}(\psi_k, \varphi_k) \wedge \bigwedge_{k=1}^{m} \neg \mathsf{Kh}_{b'_k}(\psi'_k, \varphi'_k) \right) \rightarrow \mathsf{A}\varphi.$$

现在，$\mathsf{Kh}^{b_k}(\psi_k, \varphi_k) \in \Delta|_{\mathsf{Kh}}$ 蕴涵（$4\mathcal{KhA}$和分离规则），从而得到 $\mathsf{AKh}^{b_k}(\psi_k, \varphi_k) \in \Delta$（对每个$k \in [1..n]$）。类似地，$\neg\mathsf{Kh}^{b'k}(\psi'_k, \varphi'_k) \in \Delta|_{\mathsf{Kh}}$ 蕴涵（$5\mathcal{KhA}$和分离规则），从而得到 $\mathsf{A}\neg\mathsf{Kh}^{b'k}(\psi'_k, \varphi'_k) \in \Delta$（对每个$k \in [1..m]$）。因此，

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \mathsf{AKh}^{b_k}(\psi_k, \varphi_k) \in \Delta \qquad \text{and} \qquad \bigwedge_{k=1}^{m} \mathsf{A}\neg\mathsf{Kh}^{b'_k}(\psi'_k, \varphi'_k) \in \Delta$$

因此

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \mathsf{AKh}^{b_k}(\psi_k, \varphi_k) \wedge \bigwedge_{k=1}^{m} \mathsf{A}\neg\mathsf{Kh}^{b'_k}(\psi'_k, \varphi'_k) \in \Delta, \text{ so } \mathsf{A}\left(\bigwedge_{k=1}^{n} \mathsf{Kh}^{b_k}(\psi_k, \varphi_k) \wedge \bigwedge_{k=1}^{m} \neg\mathsf{Kh}^{b'_k}(\psi'_k, \varphi'_k) \right) \in \Delta$$

因此 $\mathsf{A}\varphi \in \Delta$。 ■

命题 9 取 ψ，ψ'，φ' 属于 $\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$。假设每个具有 $\psi \in \Delta$ 的 $\Delta \in \mathrm{W}^\Gamma$ 都有一个$\mathrm{R}^\Gamma\langle \psi', \varphi'\rangle$-后继。那么，对于所有 $\Delta \in \mathrm{W}^\Gamma$，$\mathsf{A}(\psi \rightarrow \psi') \in \Delta$。

证明。任取 $\Delta \in \mathrm{W}^\Gamma$。一方面，如果 $\psi \in \Delta$，那么根据假设，存在某个 Δ'，使得 $(\Delta, \Delta') \in \mathrm{R}^\Gamma\, \mathrm{h}_{\psi',\varphi'}\mathrm{i}$。因此，根据 $\mathrm{R}^\Gamma\, \mathrm{h}_{\psi',\varphi'}\mathrm{i}$ 的定义，$\psi' \in \Delta$，进而（由极大一致性）$\psi \rightarrow \psi' \in \Delta$。另一方面，如果 $\psi \notin \Delta$，那么 $\neg\psi \in \Delta$（同样，由极大一致性），进而 $\psi \rightarrow \psi' \in \Delta$。因此，对每个$\Delta \in \mathrm{W}^\Gamma$，都有 $\psi \rightarrow \psi' \in \Delta$；于是，根据命题 8，对每个 $\Delta \in \mathrm{W}^\Gamma$，$\mathsf{A}(\psi \rightarrow \psi') \in \Delta$。
■

有了这些性质，我们就可以证明 M^Γ 的真值引理。

引理1（$\mathcal{M}^\Gamma$的真值引理） 给定 $\Gamma \in \mathbf{\Phi}$，取 $\mathcal{M}^\Gamma = \langle \mathrm{W}^\Gamma, \mathrm{R}^\Gamma, \{\text{计划集}^\Gamma i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}^\Gamma\rangle$。那么，对每个 $\Theta \in \mathrm{W}^\Gamma$ 以及每个 $\varphi \in \mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$,

$$\mathcal{M}^\Gamma, \Theta \models \varphi \qquad \textit{if and only if} \qquad \varphi \in \Theta.$$

证明。 证明通过对 φ 进行归纳法得出。原子和布尔情形照常处理，因此我们重点讨论知晓如何情形。

情形 $\mathsf{Kh}_i(\psi, \varphi)$。 (⇒) 假设 $\mathrm{M}^\Gamma, \Theta \models \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi)$，并考虑两种情形。

- $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M}^\Gamma} = \varnothing$。那么，每个 $\Delta \in \mathrm{W}^\Gamma$ 都满足 $\Delta \notin [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}^\Gamma}$，这意味着$\psi \notin \Delta$（根据归纳假设），因此 $\neg\psi \in \Delta$（根据极大一致性）。因此，根据命题 8，对于每个 $\Delta \in \mathrm{W}^\Gamma$，$\mathsf{A}\neg\psi \in \Delta$。特别地，$\mathsf{A}\neg\psi \in \Theta$，因此根据 $\mathcal{SCONS}$和 分离规则，$\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Theta$。

- $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}, \varnothing$。由 $\mathcal{M}^\Gamma, \Theta \models \mathrm{Khi}(\psi, \varphi)$，存在 $\{\mathrm{h}\psi', \varphi'\mathrm{i}\} \in$ 计划集$^\Gamma\,\mathrm{i}$，使得 (Kh-1) $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma} \subseteq \mathrm{SE}(\{\mathrm{h}\psi', \varphi'\mathrm{i}\})$ 且 (Kh-2) $R^\Gamma\{\mathrm{h}_{\psi',\varphi'}\mathrm{i}\}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$。

  换言之，存在 $\mathrm{h}\psi', \varphi'\mathrm{i} \in$ 动作集$_a^\Gamma$ 使得

  （**Kh-*1***）对于所有 $\Delta \in W^\Gamma$，若 $\Delta \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$，则 $\Delta \in \mathrm{SE}(\{\mathrm{h}\psi', \varphi'\mathrm{i}\})$，因此 $\Delta \in \mathrm{SE}(\mathrm{h}\psi', \varphi'\mathrm{i})$，从而 Δ 有一个 $R^\Gamma\langle\psi', \varphi'\rangle$-后继。

  （**Kh-*2***）对于所有 $\Delta' \in W^\Gamma$，若 $\Delta' \in R^\Gamma\{\langle\psi', \varphi'\rangle\}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma})$，则 $\Delta' \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$。

  这种情况需要三个部分。

  （1）任取满足 $\psi \in \Delta$ 的 $\Delta \in W^\Gamma$。由归纳假设可得 $\Delta \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$，因此根据条目（Kh-1），$\Delta$ 有一个 $R^\Gamma\,\mathrm{h}_{\psi',\varphi'}\mathrm{i}$-后继。因此，每个满足 $\psi \in \Delta$ 的 $\Delta \in W^\Gamma$ 都有这样的后继；于是由命题 9 可知，对于每个 $\Delta \in W^\Gamma$，$\mathrm{A}(\psi \to \psi') \in \Delta$。特别地，$\mathrm{A}(\psi \to \psi') \in \Theta$。（2）由 $\mathrm{h}\psi', \varphi'\mathrm{i} \in$ 动作集$^\Gamma\,\mathrm{i}$ 可得 $\mathrm{Kh}_i(\psi', \varphi') \in \Gamma$。但是 $\Theta \in W^\Gamma$，因此 $\Theta|_{\mathsf{Kh}} = \Gamma|_{\mathsf{Kh}}$（根据 W^Γ 的定义）。于是，$\mathrm{Kh}_i(\psi', \varphi') \in \Theta$。（3）由于 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}, \varnothing$，存在 $\Delta \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$。根据条目（Kh-1），$\Delta$ 应至少有一个 $R^\Gamma\,\mathrm{h}_{\psi',\varphi'}\mathrm{i}$-后继。于是由命题 7 可知，每个满足 $\varphi' \in \Delta'$ 的 $\Delta' \in W^\Gamma$ 都可以从 Δ 经由 $R^\Gamma\,\mathrm{h}_{\psi',\varphi'}\mathrm{i}$ 到达；换言之，每个满足 $\varphi' \in \Delta'$ 的 $\Delta' \in W^\Gamma$ 都属于 $R^\Gamma\,\mathrm{h}_{\psi',\varphi'}\mathrm{i}(\Delta)$。但是 $\Delta \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$，所以每个满足 $\varphi' \in \Delta'$ 的 $\Delta' \in W^\Gamma$ 都属于 $R^\Gamma\,\mathrm{h}_{\psi',\varphi'}\mathrm{i}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma})$。根据条目（Kh-2），每个满足 $\varphi' \in \Delta'$ 的 $\Delta' \in W^\Gamma$ 都属于 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$。对后者的部分应用归纳假设可得，每个满足 $\varphi' \in \Delta'$ 的 $\Delta' \in W^\Gamma$ 都满足 $\varphi \in \Delta'$。因此，对于每个 $\Delta' \in W^\Gamma$，都有 $\varphi' \to \varphi \in \Delta'$，从而由命题 8 可知，对于每个 $\Delta' \in W^\Gamma$，$\mathrm{A}(\varphi' \to \varphi) \in \Delta'$。特别地，$\mathrm{A}(\varphi' \to \varphi) \in \Theta$。

  因此，$\{\mathrm{A}(\psi \to \psi'), \mathrm{Kh}_i(\psi', \varphi'), \mathrm{A}(\varphi' \to \varphi)\} \subset \Theta$。所以，根据 $\mathcal{KA}$ 和分离规则，$\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Theta$。

(⇐) 假设 $\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Theta$。因此（命题 6），$\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Gamma$，所以 $\mathrm{h}\psi, \varphi\mathrm{i} \in$ 动作集$^\Gamma{}_i$，因此 $\{\mathrm{h}\psi, \varphi\mathrm{i}\} \in$ 计划集$^\Gamma{}_i$。证明的其余部分分为两种情况。

- 假设不存在满足 $\psi \in \Delta$ 的 $\Delta_\psi \in W^\Gamma$。那么，根据归纳假设，不存在满足 $\Delta_\psi \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$ 的 $\Delta_\psi \in W^\Gamma$，也就是说，$[\![\neg\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma} = \mathrm{DW}^\Gamma$。由于 $\mathcal{M}^\Gamma$ 是一个标记迁移系统$\mathcal{U}$（命题 5），由此可得，对于任意$i \in \mathrm{Agt}, \chi \in \mathrm{L}_{\mathsf{Kh}_i}$ 以及 $\Delta \in W^\Gamma$（参见命题 2），$(\mathcal{M}^\Gamma, \Delta) \models \mathrm{Kh}_i(\psi, \chi)$；因此，$(\mathcal{M}^\Gamma, \Theta) \models \mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi)$。
- 假设存在 $\Delta_\psi \in W^\Gamma$，且满足 $\psi \in \Delta_\psi$。下面将证明，计划集 $\{\mathrm{h}\psi, \varphi\mathrm{i}\} \in S^\Gamma{}_i$ 满足这些要求。

  （Kh-1）任取 $\Delta \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$。根据归纳假设，$\psi \in \Delta$。此外，由 $\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Theta$ 和命题 6 可得 $\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Delta$。接着，根据 $R^\Gamma\,\mathrm{h}_{\psi,\varphi}\mathrm{i}^i$ 的定义，每个满足 $\varphi \in \Delta'$ 的 $\Delta' \in W^\Gamma$ 都有 $(\Delta, \Delta') \in R^\Gamma\,\mathrm{h}_{\psi,\varphi}\mathrm{i}^i$，因此也有 $(\Delta, \Delta') \in R^\Gamma\,\mathrm{h}_{\psi,\varphi}\mathrm{i}$。现在注意，由于存在满足 $\psi \in \Delta_\psi$ 的 $\Delta_\psi \in W^\Gamma$，因此应当存在满足 $\varphi \in \Delta_\varphi$ 的 $\Delta_\varphi \in W^\Gamma$。反设不存在满足 $\varphi \in \Delta''$ 的 $\Delta'' \in W^\Gamma$。那么，对于每个 $\Delta'' \in W^\Gamma$，都有 $\neg\varphi \in \Delta''$，因此（由命题 8）对于每个 $\Delta'' \in W^\Gamma$，都有 $\mathrm{A}\neg\varphi \in \Delta''$。特别地，$\mathrm{A}\neg\varphi \in \Delta_\psi$。此外，由 $\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Theta$ 和命题 6 可得 $\mathrm{Kh}_i(\psi, \varphi) \in \Delta_\psi$。

于是，$\mathcal{KE}$（写作 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi) \to (\mathrm{A}\neg\varphi \to \mathrm{A}\neg\psi)$）和 分离规则 可推出 A $\neg\psi \in \Delta_\psi$，进而（根据公理 真值公理）得到 $\neg\psi \in \Delta_\psi$。因此，$\{\psi, \neg\psi\} \subset \Delta_\psi$，这与 Δ_ψ 的一致性相矛盾。

我们继续证明该引理。存在$\Delta_\varphi \in \mathrm{W}^\Gamma$ 且满足 $\varphi \in \Delta_\varphi$，这意味着 $(\Delta, \Delta_\varphi) \in \mathrm{R}^\Gamma\ {}_{\langle\psi,\ \varphi\rangle}$。因此，由于 $\mathrm{h}\psi,\varphi\mathrm{i}$ 是一个基本动作，$\Delta \in \mathrm{SE}(\mathrm{h}\psi, \varphi\mathrm{i})$，于是$\Delta \in \mathrm{SE}(\{\mathrm{h}\psi,\varphi\mathrm{i}\})$。由于$\Delta$ 是 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$中的任意状态，所需的 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma} \subseteq \mathrm{SE}(\{\mathrm{h}\psi,\varphi\mathrm{i}\})$便得证。

(Kh-2) 任取 $\Delta' \in \mathrm{R}^\Gamma\{\mathrm{h}_{\psi,\varphi}\mathrm{i}\}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma})$。那么，存在 $\Delta \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$ 使得 $(\Delta,\Delta') \in \mathrm{R}^\Gamma\ \mathrm{h}_{\psi,\varphi}\mathrm{i}$。根据 R^Γ 的定义，可得 $\varphi \in \Delta'$；因此，由归纳假设，$\Delta' \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$。由于 Δ' 是 $\mathrm{R}^\Gamma\{\mathrm{h}_{\psi,\varphi}\mathrm{i}\}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma})$ 中的任意状态，所需的 $\mathrm{R}^\Gamma\{\mathrm{h}_{\psi,\varphi}\mathrm{i}\}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^\Gamma}$ 便得证。■

最后，我们给出预期的结果。

定理4 公理系统 $\mathcal{L}^{\mathrm{LTS}^U}\mathrm{Kh}_i$ *(表 2)* 对于 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$相对于所有 标记迁移系统^{U}而言是可靠且强完备的。

证明。对于可靠性，只需证明该系统的公理是有效的，并且其规则保持有效性（如前所述，这一点是直接的）。对于完备性，取任意 $\mathrm{L}^{\mathrm{LTS}^U}\mathrm{Kh}_i$ -相容公式集 $\Gamma' \subseteq \mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$。由于 $\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$ 是可数的，Γ' 可通过标准的林登鲍姆构造（参见例如 [9, 引理 4.17]）扩展为极大 $\mathrm{L}^{\mathrm{LTS}^U}\mathrm{Kh}_i$ -相容集 $\Gamma \supseteq \Gamma'$。根据引理1，Γ' 在 M^Γ 处的 Γ是可满足的。M^Γ 是一个标记迁移系统^U（命题 5）这一事实完成了证明。■

典范模型的构造中有一个细节可能令人惊讶：对于给定主体而言，每个不可区分计划集都是单元素集。因此，相对于这一特定模型类，该逻辑也是完备的。另一方面，标记迁移系统^{U}更一般，也更准确地体现了概念角度下的表示。举例来说，我们可以扩展语言，使这种表示也能反映在逻辑中（即，语言可以明确引用计划），或者定义类似公共公告的模态，以细化每个主体的不可区分关系（参见例如 [4]）。

7 表达能力

本节将比较 [57, 58, 59] 中的原始逻辑与本文提出的逻辑。具体而言，我们将首先证明我们的逻辑弱于原始逻辑。随后，我们将探讨两类不同的标记迁移系统^U，在这两类系统下，我们可以精确刻画 [57, 58, 59]的语义。因此，表1中的公理系统对于这两类模型是可靠且完备的。这表明我们的框架推广了基于标记迁移系统的框架。

为了使比较有意义，我们将标记迁移系统^U 的情形限制为单智能体情形：仅有一个模态 Kh，且 P_i 和 S_i没有下标。

所提供的公理系统可用于比较标记迁移系统下的知晓如何概念与 LTS^Us 下的该概念。以下是一个初步观察。

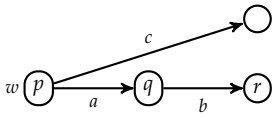
命题 10 *KhE* 和 *KhA* 是 $\mathcal{L}^{\mathrm{LTS}}_{\mathsf{Kh}}$ 的定理。

证明。 $\mathcal{KHE}$ 可改写为 $(\mathsf{Kh}(\psi,\varphi) \wedge \mathsf{A}\neg\varphi) \rightarrow \mathsf{A}\neg\psi$，这是 $\mathcal{COMPKH}$ 在 $\mathcal{L}^{\mathrm{LTS}}_{\mathsf{Kh}}$ (只需展开 A)。对于 $\mathcal{KHA}$，使用 $\mathcal{EMP}$，然后使用$\mathcal{COMPKH}$ [59,命题 2]。 ■

因此，LTS 下的知晓如何 算子至少与其基于 LTS^U 的对应算子同样强：在 LTS^Us 下有效的每个公式，在 LTSs 下也有效。以下事实表明，反过来则不成立。

命题 11 在标记迁移系统^{U}中，公理 *EMP* 和 *COMPKh* 无效。

证明。 考虑下方所示的 LTS^U，右侧展示了主体的计划集合的集合（即计划集 S）。请记住，Kh 是全局起作用的。



$$\mathsf{S} = \left\{ \begin{array}{c} \{a\},\ \{b\} \\ \{ab, c\} \end{array} \right\}$$

对于$\mathcal{EMP}$，注意 $\mathsf{A}(p \rightarrow p)$ 成立；然而，$\mathsf{Kh}(p, p)$ 不成立，因为没有 $\pi \in \mathsf{S}$ 能从p状态到达p状态。更一般地说，$\mathcal{EMP}$ 在 LTSs 上有效，因为空计划 ϱ 处处强可执行，始终可用。然而，在 LTS^U中，主体可能无法使用计划 ϱ（即 $\varrho \notin \mathsf{P}$）；即使可以使用，它也可能与行为不同的其他计划无法区分。

对于$\mathcal{COMPKH}$，注意到 $\mathsf{Kh}(p, q)$ 和 $\mathsf{Kh}(q, r)$ 分别成立，其见证分别为 $\{a\}$ 和 $\{b\}$。然而，不存在仅包含这样的计划的 $\pi \in \mathsf{S}$：从p状态开始执行这些计划时，只会到达r状态。因此，$\mathsf{Kh}(p,r)$ 不成立。更一般地，$\mathcal{COMPKH}$ 在标记迁移系统上有效，因为使前件中的各合取项成立的计划的顺序复合，构成了使后件成立的见证。然而，在标记迁移系统^{U}中，这种复合可能无法实现，或者与其他计划无法区分。■

从这两个观察可以得出，在标记迁移系统^{U}s 下的 Kh 严格弱于在标记迁移系统下的 Kh：引入计划不确定性会改变逻辑。

7.1 一个非常简单的标记迁移系统^{U}类

尽管如此，基于不确定性的框架足够通用，可以捕捉标记迁移系统语义。根据命题 11中的讨论，有一类显而易见的标记迁移系统^U，在这类系统中$\mathcal{EMP}$ 和 $\mathcal{COMPKH}$ 都有效：主体拥有每个计划，且能够区分任意两个计划的标记迁移系统^{U}类。下面，我们将正式定义这一类。

定义 7.1 定义模型类：$\mathbf{M_{NU}} := \{\mathsf{M} \mid \mathsf{M}$ 是一个标记迁移系统^U 且 $\mathsf{S} = \{\{\sigma\} \mid \sigma \in$ 动作集$^*\}\}$。⊣

事实上，对于 $\mathbf{M_{NU}}$ 中的模型，计划 ϱ 是可用的，且可与其他计划区分开（见证 $\mathcal{EMP}$）；由 $\{\sigma_1\} \in \mathsf{S}$ 和 $\{\sigma_2\} \in \mathsf{S}$ 可得 $\{\sigma_1\sigma_2\} \in \mathsf{S}$（见证 $\mathcal{COMPKH}$）。因此，正如下述命题所述，标记迁移系统中的主体恰好是这样一种主体：它能使用每个计划，并且对这些计划没有不确定性且具有完全意识。这个类足以说明基于不确定性的框架如何能够涵盖原有框架。

命题 12 以下性质成立。

(1) 给定 $M_{\mathbf{NU}}$ 中的一个模型 $M = hW,R,S,Vi$，标记迁移系统 $S_{\mathcal{M}} = hW,R,Vi$ 满足 $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]^{S_{\mathcal{M}}}$ 对每个 $\varphi \in L_{\mathsf{Kh}}$。 *(2)* 给定一个标记迁移系统 $S = hW,R,Vi$，令 $S = \{\{\sigma\} \mid \sigma \in Act^*\}$，则模型 $M_S = hW,R,S,Vi$ 属于 $M_{\mathbf{NU}}$，并且满足 $[\![\varphi]\!]^{S} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_S}$ 对每个 $\varphi \in L_{\mathsf{Kh}}$。 ◁

这一对应关系表明，每个标记迁移系统都有一个与之逐点等价的$\mathbf{M_{NU}}$ 中的模型，反之亦然，因此我们得到了一个直接的完备性结果。

定理 5 公理系统 $\mathcal{L}^{\mathrm{LTS}}{}_{\mathsf{Kh}}$ *(表1)* 相对于 $\mathsf{L_{Kh}}$的模型类 $\mathbf{M_{NU}}$是可靠且强完备的。

证明。 关于可靠性，我们考察 表1中的两个部分。对于第一部分，定理4 表明这些公理和规则对所有标记迁移系统^{U}都是可靠的，因此特别地，它们对模型类 $\mathbf{M_{NU}}$中的模型也是可靠的。对于第二部分，条目*(1)* 表明，命题 12中的每个模型都与一个标记迁移系统逐点$\mathbf{M_{NU}}$ 等价于 $\mathsf{L_{Kh}}$，因此（定理 1）这些公理也是可靠的。

要证明 $\mathrm{L}^{\mathrm{LTS}}$ Kh 相对于模型类 $\mathrm{M_{NU}}$是强完备的，我们需要证明：给定 $\Gamma \cup \{\varphi\}$，一个 $\mathrm{L_{Kh}}$中的公式集，$\Gamma \models \varphi$ 蕴含 $\Gamma \vdash \varphi$。设 Γ 是一个相容公式集。根据 [59, 引理 1]，Γ 可以扩展为一个极大一致集Γ'，因此存在一个标记迁移系统 $\mathrm{S}^{\Gamma'}$，使得 $\mathrm{S}^{\Gamma'}$，$\Gamma' \models \Gamma$（注意，典范模型中的状态都是极大一致集）。于是，根据命题 12 的条目 (2)，我们可以得到一个标记迁移系统^U $\mathrm{M}s^{\Gamma'}$，使得 $\mathrm{M}s^{\Gamma'}, \Gamma' \models \Gamma$。此外，根据命题 12 的条目 (2)，我们还知道 $\mathrm{M}s^{\Gamma'}$ 属于 $\mathrm{M_{NU}}$。 ■

7.2 活跃且SE组合的标记迁移系统^{U}s

上文介绍了一个非常简单的模型类，使我们能够在两种语义之间建立直接关系。然而，这一结果多少有些平凡：LTS^Us 通过在计划之间添加不确定性，对 LTSs 进行了推广；而模型类$\mathbf{M_{NU}}$ 则包含那些主体没有不确定性的 LTS^Us。本节余下部分将讨论一个更大且非常一般的类（约束非常宽松），在该类中同样存在这种对应关系。

我们先来介绍一些预备定义。

定义 7.2 设 $\mathrm{M} = \mathrm{hW, R, S, Vi}$ 是一个标记迁移系统^U。

- 集合 $\pi_1, \pi_2 \in 2^{\text{动作集}^*}$ 的组合是由计划组成的集合 $\pi_1\pi_2 \in 2^{\text{动作集}^*}$，定义如下：

$$\pi_1\pi_2 := \{\sigma_1\sigma_2 \in \mathsf{Act}^* \mid \sigma_1 \in \pi_1 \text{ and } \sigma_2 \in \pi_2\}.$$

- 集合 $\pi_1, \pi_2 \in 2^{\text{动作集}^*}$ 在 M 中的*SE* 组合是由计划组成的集合 $\pi_1 \,;\, \pi_2 \in 2^{\text{动作集}^*}$，定义如下：

$$\pi_1 \,;\, \pi_2 := \begin{cases} \pi_1\pi_2 & \text{if } \mathrm{SE}(\pi_1) \neq \varnothing \text{ and } \mathrm{R}_{\pi_1}(\mathrm{SE}(\pi_1)) \subseteq \mathrm{SE}(\pi_2) \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$ ⊣

因此，SE 复合 $\pi_1 \,;\, \pi_2$ 是 π_1 与随后执行的 π_2（即 $\pi_1\pi_2$）的顺序复合，其中 π_1 在模型中的某个状态下强可执行，而 π_2 在所有可通过 π_1 从各状态到达的状态下强可执行

其中 π_1 强可执行。否则， π_1 ； $\pi_2 = \varnothing$。这保证了π_1； π_2 仅包含合适的计划。对于多个计划集合 π_1、.....、 $\pi_k \in$ S，SE 复合 π_1； ··· ； π_k 是计划集合 $\pi_1 \cdots \pi_k$，当且仅当对于所有 $i = 1$、.....、$k - 1$，SE(π_1)，∅且 $R^{\pi_i}(SE(\pi_i)) \subseteq SE(\pi_{i+1})$；否则为 ∅。

下面的引理确立了刚刚定义的 SE 复合的重要性质。这些性质将有助于理解本节其余部分。

引理 2 设 $\mathcal{M} = \langle W、R、S、V\rangle$ 是一个标记迁移系统^U，其中 π_1、.....、$\pi_k \in$S。那么，

(1) $\pi_1 ; \cdots ; \pi_k \neq \varnothing$ *if and only if* $\pi_i ; \pi_{i+1} \neq \varnothing$ *for all* $i = 1, \ldots, k-1$.

(2) π_1； ··· ； π_k，∅ 蕴含SE(π_1) =SE(π_1； ··· ； π_k)。

证明。先考虑从左到右的方向。若 $\pi_1 ; \cdots ; \pi_k$，∅，则 SE(π_1)，∅。此外，对于所有 $i = 1, \ldots, k-1$，若 SE(π_i)，∅，则 SE(π_{i+1})，∅（因为 $R^{\pi_i}(SE(\pi_i)) \subseteq SE(\pi_{i+1})$）。因此，对于所有 $i = 1, \ldots, k-1$，都有 SE(π_i)，∅。根据定义 7.2，对于所有 $i = 1, \ldots, k-1$，我们有 π_i； π_{i+1}，∅。反方向显然成立。

对于第二个，假设 $\pi_1 ; \cdots ; \pi_k$，∅。对于（⊆），用反证法：假设存在 $w \in SE(\pi_1)$，使得 $w \notin SE(\pi_1 ; \cdots ; \pi_k)$。由后者可知，对于某个 $\sigma = \sigma_1$， $w \notin SE(\sigma)$。. . . $\sigma_k \in \pi_1 ; \cdots ; \pi_k$。因此，存在 $d < k$ 以及 $w = v_1, \ldots, v_{d+1} = v$，使得 $v_{i+1} \in R^{\sigma_i}(v_i)$ 且 $v \notin SE(\sigma_{d+1})$。根据假设，$v_1 = w \in SE(\pi_1)$，并且对所有 $i = 1, \ldots, d$，若 $v_i \in SE(\pi_i)$，则有 $v_{i+1} \in SE(\pi_{i+1})$（因为 $v_{i+1} \in R^{\pi_i}(v_i)$ 且 $R^{\pi_i}(SE(\pi_i)) \subseteq SE(\pi_{i+1})$）。因此，$v_{d+1} = v \in SE(\pi_{d+1})$，进而 $v \in SE(\sigma_{d+1})$，这就导出了矛盾。因此，$w \in SE(\pi_1 ; \cdots ; \pi_k)$，从而 SE($\pi_1$) ⊆SE($\pi_1 ; \cdots ; \pi_k$)。方向（⊇）则相当直接。■

现在，我们来看看为了确立与标记迁移系统之间预期的对应关系，标记迁移系统^{U}必须具备哪些关键性质。

定义 7.3 我们称一个标记迁移系统^U M = hW, R, S, Vi为：

- 活跃当且仅当存在 $\pi \in$ S，使得 SE(π) = W，并且对于所有$u,v \in$ W，若$v \in R_\pi(u)$，则 M,$u \leftrightarrow$ M,v。
- SE-组合性当且仅当对于所有 $\pi_1, \pi_2 \in$ S，若 $\pi_1 ; \pi_2$，∅，则存在$\pi \in$ S，使得：

  (1) $R_{\pi_1;\pi_2} \subseteq R_\pi$,***(2)*** $SE(\pi_1 ; \pi_2) \subseteq SE(\pi)$，并且***(3)*** 对于所有 $(w, v) \in R_\pi$，存在 $(w', v') \in R_{\pi_1;\pi_2}$，使得 M, $w \leftrightarrow$ M, w'且 M,$v \leftrightarrow$ M,v'。

我们定义如下模型类 $\mathbf{M_{AC}} :=$ {M | M 是活跃且具有 SE 组合性}。

活跃性确保存在一个计划集合，能够在标记迁移系统中完成空计划 ϱ 所完成的事情；而 SE 组合性确保 S 在一种适当的计划集合复合概念下封闭。采用双模拟等价使我们得到一个稍微更一般的模型类。

下一个引理表明，SE 组合性的要求可以推广到任意数量的计划集合。

引理 3 设 $\mathcal{M} = \langle W, R, S, V\rangle$ 是一个 SE-组合式 标记迁移系统^U，并取 π_1，.....，$\pi_k \in$ S（其中 $k \geq 2$），使得 π_1； .....； ； π_k， ∅。那么，存在 $\pi \in$S，使得：

(1) $R_{\pi_1;\cdots;\pi_k} \subseteq R_\pi$，*(2)* $SE(\pi_1;\cdots;\pi_k) \subseteq SE(\pi)$，且 *(3)* 对所有 $(w, v) \in R_\pi$，存在 $(w', v') \in R_{\pi_1;\cdots;\pi_k}$，使得 $M, w \leftrightarrow M, w'$ 且 $M, v \leftrightarrow M, v'$。

证明。我们对 $k \geq 2$ 进行归纳法，证明 π 的存在；随后将说明这个见证确实能满足要求。基础情形 $k = 2$ 由定义可得，因此取计划集 S 中满足 $\pi_1;\cdots;\pi_k;\pi_{k+1}, \varnothing$ 的计划。根据引理 2，$\pi_2;\cdots;\pi_k;\pi_{k+1}, \varnothing$，因此由归纳假设，存在一个 $\pi' \in S$，使得 (1) $R_{\pi_2;\cdots;\pi_{k+1}} \subseteq R_{\pi'}$，(2) $SE(\pi_2;\cdots;\pi_{k+1}) \subseteq SE(\pi')$，以及 (3) 对所有 $(w, v) \in R_{\pi'}$，均存在 $(w', v') \in R_{\pi_2;\cdots;\pi_{k+1}}$，使得 $M, w \leftrightarrow M, w'$ 且 $M, v \leftrightarrow M, v'$。另请注意，$SE(\pi_1), \varnothing$，且 $R_{\pi_1}(SE(\pi_1)) \subseteq SE(\pi_2) = SE(\pi_2;\cdots;\pi_{k+1}) \subseteq SE(\pi')$（根据 SE 复合的定义、引理 2 以及 π' 的第二个性质）。因此，$\pi_1;\pi', \varnothing$，从而存在一个 $\pi \in S$，使得 (1) $R_{\pi_1;\pi'} \subseteq R_\pi$，(2) $SE(\pi_1;\pi') \subseteq SE(\pi)$，以及 (3) 对所有 $(w, v) \in R_\pi$，均存在 $(w', v') \in R_{\pi_1;\pi'}$，使得 $M, w \leftrightarrow M, w'$ 且 $M, v \leftrightarrow M, v'$。我们将证明 π 就是所需的见证。

对于条目 (1)，取 $(w, v) \in R_{\pi_1};\cdots;\pi_{k+1}$。于是，存在 $u \in W$，使得 $(w, u) \in R_{\pi_1}$ 以及 $(u, v) \in R_{\pi_2};\cdots;\pi_{k+1}$。因此，我们有 $(w, u) \in R_{\pi_1}$ 以及 $(u, v) \in R_{\pi'}$，所以 $(w, v) \in R_{\pi_1;\pi'}$ 从而 $(w, v) \in R_\pi$。

对于条目*(2)*，取$w \in SE(\pi_1;\cdots;\pi_{k+1})$。根据引理 2，$w \in SE(\pi_1)$；根据同一引理，$w \in SE(\pi_1;\pi')$。因此，$w \in SE(\pi)$。

对于条目 (3)，取 $(w, v) \in R_\pi$。于是，存在 $(w', v') \in R_{\pi_1}$；π' 使得 $M, w \leftrightarrow M, w'$ 以及 $M, v \leftrightarrow M, v'$。因此，对于某个 $u' \in W$，有 $(w', u') \in R_{\pi_1}$ 以及 $(u', v') \in R_{\pi'}$。同样，由于 $(u', v') \in R_{\pi'}$，存在 $(u'', v'') \in R_{\pi_2};\cdots;\pi_{k+1}$ 使得 $M, u' \leftrightarrow M, u''$ 以及 $M, v' \leftrightarrow M, v''$。利用 $\leftrightarrow$ 的传递性，存在 $(w', v'') \in R_{\pi_1;\cdots;\pi_{k+1}}$ 使得 $M, w \leftrightarrow M, w'$ 以及 $M, v \leftrightarrow M, v''$。■

有了这些工具，我们将证明，对于每个标记迁移系统，都存在一个与之 L_{Kh}-等价的标记迁移系统^U，它属于 $\mathbf{M_{AC}}$；反之亦然。首先，我们介绍从标记迁移系统^{U}s 到标记迁移系统的映射。

命题 *13* 设 $M = hW, R, S, Vi$ 是 M_{AC} 中、基于 Act 的标记迁移系统^U。取 $Act' := \{a_\pi \mid \pi \in S\}$，然后定义基于 Act' 的标记迁移系统 $S_M = hW, R', Vi$，其中 $R'_{a_\pi} := \{(w, v) \in R_\pi \mid w \in SE(\pi)\}$（因此，$S_M$ 中的基本动作对应于 M 中的 SE 计划集合）。那么，$[\![\varphi]\!]^M = [\![\varphi]\!]^{S_M}$ 对于每个 $\varphi \in L_{Kh}$。

证明。显然，S_M 是一个标记迁移系统。为了得到一个适当的签名，我们可以将 Act′（若它是有限的）扩展为任意一个 Act。

其余部分的证明通过对 L_{Kh} 中的公式进行结构归纳来完成。布尔片段的情形很直接。我们将讨论形如 $Kh(\psi, \varphi)$ 的公式的情形。在此过程中，以下性质会很有用：对于每个 $\pi \in S$，都有 $SE(\pi) = SE(a_\pi)$。事实上，(⊆) 若 $u \in SE(\pi)$，则存在 $v \in W$，使得 $(u, v) \in R_\pi$，因此 $(u, v) \in R'_{a_\pi}$，而由于 a_π 是一个基本动作，故 $u \in SE(a_\pi)$。此外，(⊇) 若 $u \in SE(a_\pi)$，则存在 $v \in W$，使得 $(u, v) \in R'_{a_\pi}$，因此 $u \in SE(\pi)$。

(⊆) 假设 $w \in [\![Kh(\psi, \varphi)]\!]^M$；那么存在同时满足二者的 $\pi \in S$

(Kh-1) $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{SE}(\pi)$ 和 ***(Kh-2)*** $\mathrm{R}_\pi([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$.

我们将使用一个$_\pi$ ∈动作集′作为见证，证明 w ∈ [[Kh(ψ, φ)]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$。首先，为了说明 a$\pi$ 具有正确的性质，假设 v ∈ [[ψ]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$。那么，根据 ∈ [[$\psi$]]$^{\mathcal{M}}$归纳假设，v ∈SE($\pi$)（根据条目（Kh-1））， 因此 v ∈SE(aπ)（由上文讨论的性质）。所以， [[ψ]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$ ⊆ SE(aπ)。其次，为了说明 aπ 完成了所要求的工作，假设 u ∈ R'_{a_π}([[ψ]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$)。那么，根据 ∈ 归纳假设，u $'_{a_\pi}$R[[ψ]]$^{\mathcal{M}}$(∈)，因此根据 R′ 的定义，u ∈ [[φ]]$^{\mathcal{M}}$ Rπ([[ψ]]$^{\mathcal{M}}$)，所以根据条目（Kh-2），u ∈ [[φ]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$，然后根据$'_{a_\pi}$归纳假设，u [[$\psi$]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$。由这两部分可知，w ∈ [[Kh($\psi, \varphi$)]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$。

(⊇) 假设 w ∈ [[Kh(ψ, φ)]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$；那么存在 $\sigma \in (\mathrm{Act}')^*$，满足以下两项

(Kh-1) $[\![\psi]\!]^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}} \subseteq \mathrm{SE}(\sigma)$ and ***(Kh-2)*** $\mathrm{R}'_\sigma([\![\psi]\!]^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$.

主要有两种情况。首先，假设 $\sigma = \varrho$。由于 M 是活跃的，存在 $\pi \in S$，使得 SE(π) = W，并且对所有 u、v ∈ W，若 v ∈ Rπ(u)，则 M,u ↔ M,v。不难证明，这正是我们所需的见证。

其次，假设 σ , ϱ，即 $\sigma = a_{\pi_1} \cdots a_{\pi_k}$，其中 $a_{\pi_i} \in \mathrm{Act}'$ (因此 $\pi_i \in S$)。那么有两种可能。

- 如果 $\pi_1 ; \cdots ; \pi$k = ∅，根据引理 2，存在 i ∈{1, . . . , k − 1}，使得 πi ; πi+1 =∅。那么（根据定义 7.2），要么 SE(πi) = ∅ （因此 SE(aπi) = ∅），要么 Rπi(SE(πi)) * SE(πi+1)（于是存在 v ∈ Rπi(SE(πi))，其中 v ∉ SE(πi+1)，也就是说，存在 u、v ∈ W，使得 u ∈ SE(πi)，(u, v) ∈ Rπi，并且 v ∉ SE(πi+1)；因此，u ∈SE(aπi) [来自第一项], (u, v) ∈ R′aπi [来自第一项和第二项] , 且 v ∉ SE(aπi+1) [来自第三项]; 于是 R′aπi (SE(aπi)) * SE(aπi+1))。两种情况下，我们都有 SE(σ) = SE(a$\pi_1 \cdots$aπk) = ∅，因此 [[ψ]]SM = ∅（根据条目（Kh-1））。根据归纳假设，这意味着 [[ψ]]M = ∅；因此，要得到 w ∈ [[Kh(ψ, φ)]]M，我们只需 S , ∅，而由于 M 是一个 LTSU，这一点成立。

- 若 $\pi_1 ; \cdots ; \pi$k , ∅，我们考虑两种情形。若 [[ψ]]SM = ∅ , 则根据归纳假设， [[ψ]]M = ∅；因此，与前面一样，任意 $\pi \in S$ 都可作为见证。否则，[[ψ]]SM , ∅ 。此时，由于 M 具有 SE 组合性，根据引理 3，存在 $\pi \in S$ 使得 R$_{\pi_1;\cdots;\pi}$k ⊆ R$_\pi$， SE($\pi_1 ; \cdots ; \pi$k) ⊆ SE(π)，并且对于所有满足 (v, u) ∈ R$_\pi$ 的情况，都存在某些 v′、u′ ∈ W，使得 (v′, u′) ∈ R$_{\pi_1;\cdots;\pi}$k，且满足 M，v ↔ M，v′ 以及 M，u ↔ M，u′。下面说明，这个 π 能够胜任。

  对于第一个 Kh 子句，取 w ∈ [[ψ]]$^{\mathcal{M}}$。于是，根据归纳假设，w ∈ [[ψ]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$；根据条目（Kh-1），w ∈SE(a$_{\pi_1} \cdots$a$_{\pi_k}$)。为导出矛盾，假设 w ∉SE($\pi_1;\cdots;\pi_k$)；那么 w ∉ SE($\pi_1$)（根据引理 2），因此 w ∉ SE(a$_{\pi_1}$)，进而 $\mathrm{R}'_{a_{\pi_1}}$(w) = ∅。于是，w ∉SE(a$_{\pi_1} \cdots$a$_{\pi_k}$)，这就产生了矛盾。因此，w ∈SE(π_1 ; $\cdots$; π_k)，因此 w ∈SE(π)（因为 M 具有 SE 组合性）。因此， [[ψ]]$_{\mathcal{M}}$⊆ SE(π)。

  对于第二个 Kh 子句，取 u、v ∈W，使得 v ∈ [[ψ]]$^{\mathcal{M}}$ 且 (v, u) ∈R$_\pi$。根据定义 7.3，存在 (v′, u′) ∈ R$_{\pi_1;\cdots;\pi_k}$，使得 M, v ↔ M, v′ 且 M, u ↔ M, u′。根据定理 2，v′ ∈ [[ψ]]$^{\mathcal{M}}$，因此由归纳假设可得 v′ ∈ [[ψ]]$^{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}}$。根据定义 7.2，u′ ∈(R$_{\pi_1}$ ◦ · · · ◦ R$_{\pi_k}$)(v′)。现在，设 v′ =w$_1$,..., w$_{k+1}$ =u′，且对所有 i = 1, . . . , k，都有 w$_{i+1}$ ∈R$_{\pi_i}$(w$_i$)。由于 w$_1$ ∈ [[ψ]]$^{\mathcal{M}}$，根据 [[ψ]]$^{\mathcal{M}}$ ⊆SE($\pi_1 ; \cdots ; \pi_k$)（已在上一段证明）和引理 2，可得 w$_1$ ∈SE($\pi_1 ; \cdots ; \pi_k$) =SE(π_1)。此外，对于所有 i =1, . . . , k − 1，若 w$_i$ ∈SE(π_i)，由于 R$_{\pi_i}$(SE(π_i)) ⊆SE(π_{i+1})，且 w$_{i+1}$ ∈R$_{\pi_i}$(w$_i$)，则 w$_{i+1}$ ∈SE(π_{i+1})。因此，对于所有 i = 1, . . . , k，都有 w$_i$ ∈SE(π_i)。由于我们假设对所有 i = 1, . . . , k，(w$_i$, w$_{i+1}$) ∈R$_{\pi_i}$，因此有 (w$_i$, w$_{i+1}$) ∈R$^{a_{\pi_i}}$。

因此，$u' \in (R'_{a_{\pi_1}} \circ \cdots \circ R'_{a_{\pi_k}})(v')$。换言之，由于 $v' \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}_M}$，$u' \in R'_{a_{\pi_1}} \cdots a_{\pi_k}([\![\psi]\!]^{\mathcal{S}_M})$。因此，根据条目（Kh-2），可得 $u' \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}_M}$。根据归纳假设，$u' \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$，这意味着 $u \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$（因为 $M, u \leftrightarrow \underline{M}, u'$，且根据定理 2）。因此 $R_\pi([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。综合这两部分，可得 $w \in [\![\mathrm{Kh}(\psi, \varphi)]\!]^{\mathcal{M}}$。

至此，证明完成。 ■

现在我们来证明反方向。由一个标记迁移系统可以得到一个活跃、具有 SE 组合性且逐点等价的标记迁移系统[U]。

命题 *14* 设 $S = \langle W, R, V_i \rangle$ 是 *Act* 上的一个标记迁移系统。取 $Act' := \{a_\sigma \mid \sigma \in Act^* \text{ and } SE(\sigma), \varnothing\}$，然后定义 *Act′* 上的标记迁移系统[U] $M_S = \langle W, R', S', V_i \rangle$，其中 $R'_{a_\sigma} := \{(w, v) \in R_\sigma \mid w \in SE(\sigma)\}$（因此，$M_S$ 中的基本动作是 S 中的强可执行计划），且 $S' := \{\{a_\sigma\} \mid a_\sigma \in Act'\}$。那么，

(1) $\mathcal{M}_S$ 是活跃且具有 SE 组合性的标记迁移系统[U]（即，属于 $\mathbf{M_{AC}}$）；

(2) *for every* $\varphi \in \mathsf{L}_{\mathsf{Kh}}$, $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_S}$.

证明。首先，条目***(1)***。为证明 M_S 是一个标记迁移系统，注意到 $W' = S \pi \in S' \pi$ 非空（$\varrho \in Act^*$ 且 $SE(\varrho) = W$，因此 $\varrho \in Act'$，从而 $\{a_\epsilon\} \in S'$），并且 S' 不包含空集，且其中的元素两两不相交（后两点根据定义成立）。此外，我们可以将 Act'中的元素映射到 Act 中，同时保持相同的签名（因为它们的基数相同）。活跃性显然成立，因为 $\{a_\epsilon\}$ 属于 S'，其行为与 ϱ 完全相同。

对于 SE 组合性，取 $\{a_{\sigma_1}\}, \{a_{\sigma_2}\} \in S'$，使得 $\{a_{\sigma_1}\}; \{a_{\sigma_2}\}, \varnothing$。于是，$\{a_{\sigma_1}\}; \{a_{\sigma_2}\} = \{a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}\}$，此外，$SE(\{a_{\sigma_1}\}), \varnothing$ 且 $R'\{a_{\sigma_1}\}(SE(\{a_{\sigma_1}\})) \subseteq SE(\{a_{\sigma_2}\})$ $(\otimes_1)$。我们需要给出一个满足 SE 组合性条件的 $\pi \in S'$；下面将证明 $\pi = \{a_{\sigma_1\sigma_2}\}$ 能满足要求。为此，注意到 $R'_{a_{\sigma_1}} a_{\sigma_2} = R'_{a_{\sigma_1\sigma_2}}$ 是有用的（证明很直接）。

首先，我们需要证明 $\pi = \{a_{\sigma_1\sigma_2}\}$ 属于 S，这归结为证明 $a_{\sigma_1\sigma_2} \in Act'$，也就是 $SE(\sigma_1\sigma_2), \varnothing$。为此，回想一下，$SE(\{a_{\sigma_1}\}), \varnothing$，因此我们知道 $\{a_{\sigma_1}\}$ 在某个 $u \in W$ 处是强可执行的。此外，由 $R'\{a_{\sigma_1}\}(SE(\{a_{\sigma_1}\})) \subseteq SE(\{a_{\sigma_2}\})$ 可知，任何此类执行都会终止于满足 a_{σ_2} 强可执行的状态。于是，$a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}$ 在 u 处是强可执行的，这意味着 $R'_{a_{\sigma_1}} a_{\sigma_2}(u), \varnothing$。但是 $R'_{a_{\sigma_1}} a_{\sigma_2} = R'_{a_{\sigma_1\sigma_2}}$，所以 $R'_{a_{\sigma_1\sigma_2}}(u), \varnothing$；根据 R' 的定义，这意味着 $u \in SE(\sigma_1\sigma_2)$，也就是说，$SE(\sigma_1\sigma_2), \varnothing$，符合要求。

接下来讨论 SE 组合性条件。第一和第三个条件，即 $R'_{a_{\sigma_1}} a_{\sigma_2} \subseteq R'_{a_{\sigma_1\sigma_2}}$ 和双模拟等价条件，都由 $R'_{a_{\sigma_1}} a_{\sigma_2} = R'_{a_{\sigma_1\sigma_2}}$ 推出。对于第二个条件 $SE(a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}) \subseteq SE(a_{\sigma_1\sigma_2})$，取 $u \in SE(a_{\sigma_1} a_{\sigma_2})$；我们需要证明 $u \in SE(a_{\sigma_1\sigma_2})$。为此，只需证明 $R'_{a_{\sigma_1\sigma_2}}(u), \varnothing$（因为 $a_{\sigma_1\sigma_2}$ 是一个基本动作），也就是说，$R_{\sigma_1\sigma_2}(u), \varnothing$（这意味着 $a_{\sigma_1\sigma_2}$ 存在）且 $u \in SE(\sigma_1\sigma_2)$。现在，假设 $u \in SE(a_{\sigma_1} a_{\sigma_2})$，则意味着 $u \in SE(a_{\sigma_1})$ 且 $R'_{a_{\sigma_1}}(u) \subseteq SE(a_{\sigma_2})$。前者不仅意味着 $R'_{a_{\sigma_1}}(u), \varnothing$（因此 $u \in SE(\sigma_1)$），还意味着 $R'_{a_{\sigma_1}}(u) = R_{\sigma_1}(u)$。由后者以及这一点可得，$R_{\sigma_1}(u) \subseteq SE(a_{\sigma_2})$。但请注意：$v \in SE(a_{\sigma_2})$ 意味着存在 $v' \in R'_{a_{\sigma_2}}(v)$，因此 $v \in SE(\sigma_2)$。于是，$SE(a_{\sigma_2}) \subseteq SE(\sigma_2)$，进而 $R_{\sigma_1}(u) \subseteq SE(\sigma_2)$。接着，后一个结论与 $u \in SE(\sigma_1)$ 一起意味着 $u \in SE(\sigma_1\sigma_2)$（第二个目标），因此根据 SE 的定义，可得 $R_{\sigma_1\sigma_2}(u), \varnothing$（第一个目标）。

对于条目（***2***），证明采用结构归纳法；同样，只讨论 $\mathrm{Kh}(\psi, \varphi)$ 这一情形。

(⊆) 假设 $w \in [\![\mathrm{Kh}(\psi, \varphi)]\!]^{\mathcal{S}}$；那么存在满足以下两项条件的 $\sigma \in$ 动作集*

(Kh-1) $[\![\psi]\!]^{\mathcal{S}} \subseteq \mathrm{SE}(\sigma)$ 和 ***(Kh-2)*** $\mathrm{R}_\sigma([\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}$.

分两种情况。首先，假设 $\mathrm{SE}(\sigma) = \varnothing$。由此，条目 ***(Kh-1)*** 蕴含 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{S}} = \varnothing$，因此 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S} = \varnothing$（根据归纳假设），且对于任意 $\pi \in 2^{(\mathrm{Act}')^*}$，$\mathrm{R}'_\pi([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S}) = \varnothing$。因此，要得到$w \in [\![\mathrm{Kh}(\psi,\varphi)]\!]^{\mathcal{M}_S}$，只需有 $\mathrm{S}', \varnothing$；我们确实有，因为 $\{a_\epsilon\} \in \mathrm{S}'$。

其次，假设 $\mathrm{SE}(\sigma)$，$\varnothing$。那么，$\mathrm{a}_\sigma \in$ 动作集′ 和 $\{\mathrm{a}_\sigma\} \in$ 计划集′；下面将证明这就是我们的见证。对于第一个 Kh 子句，若 $\mathrm{u} \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S}$，则 $\mathrm{u} \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}$（归纳假设），因此 $\mathrm{u} \in \mathrm{SE}(\sigma)$（条目（Kh-1）），这意味着 $\mathrm{R}_\sigma(\mathrm{u})$，$\varnothing$。后两者共同意味着 $\mathrm{R}'_{a_\sigma}(\mathrm{u})$，$\varnothing$（R′的定义），所以 $\mathrm{u} \in \mathrm{SE}(\mathrm{a}_\sigma) = \mathrm{SE}(\{\mathrm{a}_\sigma\})$。因此，$[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S} \subseteq \mathrm{SE}(\{\mathrm{a}_\sigma\})$。对于第二个 Kh 子句，假设 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}'\{\mathrm{a}_\sigma\}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S})$。那么，$\mathrm{u} \in \mathrm{R}'_{a_\sigma}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S})$，因此 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}'_{a_\sigma}([\![\psi]\!]^{\mathcal{S}})$（归纳假设），接着 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}_\sigma([\![\psi]\!]^{\mathcal{S}})$（R′的定义），于是根据条目（Kh-2），$\mathrm{u} \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}$，从而 $\mathrm{u} \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_S}$（归纳假设）。因此，$\mathrm{R}'_\pi([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_S}$。根据这两个子句，$\mathrm{w} \in [\![\mathrm{Kh}(\psi,\varphi)]\!]^{\mathcal{M}_S}$。

(⊇) </style}假设 w $\in [\![\mathrm{Kh}(\psi,\varphi)]\!]^{\mathcal{M}_S}$。那么 S′ 中存在一个满足 Kh 子句的元素；根据 S′ 的定义，这意味着存在 $\{a_\sigma\} \in \mathrm{S}'$（带有 $\sigma \in$ 动作集*），同时满足以下两点

(Kh-1) $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S} \subseteq \mathrm{SE}(\{a_\sigma\})$ and ***(Kh-2)*** $\mathrm{R}'_{\{a_\sigma\}}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_S}$.

下面将证明，σ 是我们的见证。对于第一个 Kh 子句，$\mathrm{u} \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}$ 意味着 $\mathrm{u} \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S}$（归纳假设），因此 $\mathrm{u} \in \mathrm{SE}(\{\mathrm{a}_\sigma\})$（条目（Kh-1）），进而 $\mathrm{R}'_{a_\sigma}(\mathrm{u})$，$\varnothing$，这意味着 $\mathrm{u} \in \mathrm{SE}(\sigma)$（R′ 的定义）。于是，$[\![\psi]\!]^{\mathcal{S}} \subseteq \mathrm{SE}(\sigma)$。对于第二个 Kh 子句，取 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}_\sigma([\![\psi]\!]^{\mathcal{S}})$，则 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}_\sigma([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S})$（归纳假设）。于是，对于某个 $\mathrm{v} \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S}$，有 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}_\sigma(\mathrm{v})$。根据条目（Kh-1），$\mathrm{v} \in \mathrm{SE}(\{\mathrm{a}_\sigma\})$，即 $\mathrm{v} \in \mathrm{SE}(\mathrm{a}_\sigma)$，因此 $\mathrm{R}'_{a_\sigma}(\mathrm{v})$，$\varnothing$，进而 $\mathrm{v} \in \mathrm{SE}(\sigma)$（R′ 的定义）。再结合 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}_\sigma(\mathrm{v})$，可得 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}'_{a_\sigma}(\mathrm{v})$，即 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}'\{\mathrm{a}_\sigma\}(\mathrm{v})$。因此，$\mathrm{u} \in \mathrm{R}'_{a_\sigma}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_S})$，所以 $\mathrm{u} \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_S}$（条目（Kh-2）），进而 $\mathrm{u} \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}$（归纳假设）。于是，$\mathrm{R}_\sigma([\![\psi]\!]^{\mathcal{S}}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}$。由这两个子句可知，$\mathrm{w} \in [\![\mathrm{Kh}(\psi,\varphi)]\!]^{\mathcal{S}}$。■

由这些结果可知，对于 L_{Kh} 在标记迁移系统（表1）上的公理系统，对 L_{Kh} 在活跃且 SE-组合式标记迁移系统上^{U}同样是可靠且完备的。

定理 6 公理系统 $\mathcal{L}^{\mathrm{LTS}}{}_{\mathsf{Kh}}$ （*表1*）相对于类 $\mathbf{M}_{\mathbf{AC}}$是可靠且强完备的。

证明。 论证与定理 5完全相同，只是这次使用命题和命题 14。 13

8 有限模型性质与复杂度

本节致力于研究逻辑 $\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$ 在标记迁移系统^{U}上的计算复杂度。为此，我们将使用模态逻辑中的两种标准工具：滤子和选择法（详情见 [9]）。首先，我们定义一种过滤概念：给定任意模型和一个公式，它使我们能够得到一个有限模型；该模型满足此公式，当且仅当原模型满足该公式。这证明了 $\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$ 的可满足性问题是可判定的。然后，我们定义一个（更专门的）选择函数，它能够从典范模型中提取一个多项式规模模型。因此，我们证明了 $\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$ 的可满足性问题是 NP类完全的（鉴于我们提供了一个运行时间为P类的模型检验算法）。

8.1 通过过滤的有限模型性质

我们首先介绍两种关系；给定公式集合 Σ和模型 M，它们对于定义恰当的过滤概念至关重要。

定义 8.1（Σ-等价）设 $\mathrm{M} = \mathrm{hW,R,\{S_i\}_{i\in Agt},Vi}$ 是一个标记迁移系统（LTS）^{U}，并设Σ 是一个在子公式下封闭的 $\mathrm{L^{Kh_r}}$-公式集合。定义关系 $!_\Sigma \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W}$ 和 $\leftrightarrows_\Sigma \subseteq \mathrm{S}_{\mathrm{Agt}} \times \mathrm{S}^{\mathrm{Agt}}$（其中 $\mathrm{S}^{\mathrm{Agt}} := \mathrm{S}_{i\in\mathrm{Agt}}\mathrm{S}_i$）如下：

$w !_\Sigma v$ iff_{def} 对所有 $\psi \in \Sigma$，$\mathrm{M},w \models \psi$ 当且仅当 $\mathrm{M},v \models \psi$；$\pi \leftrightarrows_\Sigma \pi'$ iff_{def} 对所有 $i \in \mathrm{Agt}$，且 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Sigma, \pi$ 是 M 中 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$ 的见证，当且仅当 π' 是 M 中 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$ 的见证。

注意，$\leftrightsquigarrow_\Sigma$（将$\leftrightsquigarrow$ 推广到定义 5.3 中针对给定公式集合的情形）以及 $\leftrightarrows_\Sigma$ 分别是 W 和 $\mathrm{S}^{\mathrm{Agt}}$上的等价关系。对于$w \in \mathrm{W}$（相应地，$\pi \in 2^{(\mathrm{Act}^*)}$），我们用 $[w]_\Sigma$（相应地，$[\pi]_\Sigma$）表示 w 的（相应地，π 的）Σ-等价类；即，

$$[w]_\Sigma := \{v \in \mathrm{W} \mid w \leftrightsquigarrow_\Sigma v\}; \qquad [\pi]_\Sigma := \{\pi' \in 2^{(\mathrm{Act}^*)} \mid \pi \leftrightarrows_\Sigma \pi'\}.$$

尽管记号 $[_]_\Sigma$ 存在重载，但其参数总能明确区分其具体用法。

定义 8.2 设 $\mathrm{M} = \mathrm{hW, R, \{S_i\}_{i\in Agt}, Vi}$ 是一个标记迁移系统^{U}，并设 Σ是一个对子公式封闭的 $\mathrm{L^{Kh_r}}$-公式集合。对于 $i \in \mathrm{Agt}$，定义 $\mathrm{Act}^\Sigma{}_i := \{a_{[\pi]_\Sigma} \mid \pi \in \mathrm{S}_i$ 是 M 中某个 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Sigma$ 的见证$\}$; 并定义 $\mathrm{Act}^\Sigma := \mathrm{S}_{i\in\mathrm{Agt}} \mathrm{Act}^\Sigma{}_i$。

Act^Σ 定义背后的思想是：对于 M 中为真的每个 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Sigma$，我们都考虑一个行动，用来模仿那些见证 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$ 在 M 中具有可满足性的计划集合 π 的行为。

现在，我们可以定义过滤概念。

定义 8.3（M 通过 Σ进行的滤子）设 $\mathrm{M} = \mathrm{hW, R, \{S_i\}_{i\in Agt}, Vi}$ 是一个标记迁移系统^{U}；设 Σ 是一个对子公式封闭的 $\mathrm{L^{Kh_r}}$-公式集合。若一个标记迁移系统^{U} $\mathrm{M}^f = \mathrm{hW}^f, \mathrm{R}^f, \{\mathrm{S}^f{}_i\}_{i\in\mathrm{Agt}}, \mathrm{V}^f\mathrm{i}$ 是 M 通过 Σ得到的滤子，当且仅当它满足以下条件：

(1) $\mathrm{W}^f := \{[w]_\Sigma \mid w \in \mathrm{W}\}$;***(2)*** $\mathrm{V}^f([w]_\Sigma) := \{p \in \Sigma \mid \mathrm{M}, w \models p\}$;***(3)*** 对于所有 $i \in \mathrm{Agt}$，$a_{[\pi]_\Sigma} \in$ 动作集$^\Sigma{}_i$ 蕴含 $\{a_{[\pi]_\Sigma}\} \in$ 计划集$^f{}_i$；

(4) $\mathrm{S}^f{}_i$是有限的且定义良好（如注释1所述），并且每个 $\pi \in \mathrm{S}^f{}_i$都是有限的；

(5) 对于所有 $\pi \in \mathrm{S}^f{}_i$，如果 π是某个 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Sigma$在 M^f中的见证，那么存在$\pi' \in \mathrm{S}_i$，使得 π' 是 M 中 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$ 的见证；

(6) 若 $(w, v) \in \mathrm{R}\pi$ 且 $a_{[\pi]_\Sigma} \in$ 动作集$^\Sigma{}_i$，则 $([w]_\Sigma, [v]_\Sigma) \in \mathrm{R}^f{}_{a[\pi]_\Sigma}$；

(7) 若 $([w]_\Sigma, [v]_\Sigma) \in \mathrm{R}^f{}_{a[\pi]_\Sigma}$，且 π是 M 中某个 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi) \in \Sigma$的见证，那么$w \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$ 蕴含$v \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。⊣

注意，V^f定义良好：给定 $p \in \Sigma$，如果 $[w]_\Sigma = [v]_\Sigma$ 且 $M, w \models p$，那么 $M, v \models p$。此外，由于 Sfi 根据定义是定义良好的，我们有 M^f是基于动作集$^\Sigma$、命题和 Agt 的标记迁移系统^U。另请注意，若将上文的 (5)、(6) 和 (7) 改为双条件，它们总会定义一个滤子。

定义 8.3 还值得进一步说明。请注意，对于标记迁移系统部分，滤子的定义与基本模态逻辑中的定义类似（例如参见 [9]）。最显著的区别在于关系标记发生了变化，因为我们现在使用 Act^Σ 作为动作名称集，而不是 Act。但这会影响 $S^f{}_i$ 的定义。关系 $\leftrightarrows_\Sigma$ 使我们能够为公式 $Kh_i(\psi, \varphi) \in \Sigma$得到一个有限的见证集，由此还可得出 Act^Σ 以及（连同 $!_\Sigma$）W^f 都是有限的。然而，新的集合 $S^f{}_i$ 是根据一组新的动作名称定义的，因此可能需要考虑无限多个新的可用计划。因此，我们需要说明，$S^f{}_i$ 是满足最小和最大条件的任意有限集，其成员也是有限的，并且该集合定义明确。最后，Act^Σ 可能是有限的，不同于按定义为无限集的原始行动集 Act。不过，这不会给构造带来问题，因为可以将 Act^Σ 扩展为无限集，同时不破坏滤子的有限性（请记住，可达关系定义在行动集的一个可能为有限的子集上）。

定理 7 设 $\mathcal{M} = \langle W, R, \{S_i\}_{i \in Agt}, V\rangle$ 是一个标记迁移系统^U，并设 Σ 是一个对L^{Kh_i}-公式的子公式封闭的集合。那么，对所有 $\psi \in \Sigma$ 以及 $w \in W$，都有$\mathcal{M}, w \models \psi i$当且仅当 $\mathcal{M}f$，$[w]_\Sigma \models \psi$。此外，若 Σ是有限的，则$\mathcal{M}^f$是一个有限模型。

证明。布尔情形的处理符合预期。因此，我们只需证明 $M, w \models Kh_i(\psi, \varphi)$ 当且仅当 M^f，$[w]_\Sigma \models Kh_i(\psi, \varphi)$。

(⇒) 假设 $M \models Kh_i(\psi, \varphi)$：取 $\pi \in S_i$，使得 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} \subseteq SE(\pi)$ 且 $R\pi([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。根据定义，$a_{[\pi]_\Sigma} \in$动作集$^\Sigma i$，因此 $\{a_{[\pi]_\Sigma}\} \in Sfi$。若$[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^f} = \varnothing$，结论显然成立。否则，取 $[w]_\Sigma \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^f}$。根据归纳假设，$w \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$，并且由于 π 在 w 处是 SE，$R\pi(w) \neq \varnothing$。由于 M^f是一个滤子，我们有 $R^{a_{[\pi]_\Sigma}}(w) \neq \varnothing$，且 $\{a_{[\pi]_\Sigma}\}$ 在 $[w]_\Sigma$ 处是 SE。因此，$[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^f} \subseteq SE(\{a_{[\pi]_\Sigma}\})$。

令 $([w]_\Sigma, [v]_\Sigma) \in R^f{}_{a_{[\pi]_\Sigma}}$ 满足 $[w]_\Sigma \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^f}$。根据归纳假设，$w \in [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$。由于$\pi$ 是 M 中 $Kh_i(\psi, \varphi)$ 的一个见证（根据假设），根据 M^f的定义，我们得到 $v \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。再次根据归纳假设，$[v]_\Sigma \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。因此，$R^f{}_{\{a_{[\pi]_\Sigma}\}}([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$。所以，$M^f \models Kh_i(\psi, \varphi)$。

(⇐) 假设 $M^f \models Kh_i(\psi, \varphi)$：令 $\pi \in S_{fi}$满足 $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^f} \subseteq SE(\pi)$ 且 $R\pi([\![\psi]\!]^{\mathcal{M}^f}) \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}^f}$。根据 M^f的定义，由于 π是 M^f中 $Kh_i(\psi, \varphi) \in \Sigma$的一个见证，我们知道存在 $\pi' \in S_i$，使得 π' 是 M 中 $Kh_i(\psi, \varphi)$ 的一个见证。因此，$M \models Kh_i(\psi, \varphi)$。

接下来需要证明 M^f 是有限的。首先注意，W^f 中的元素数量为 2^m，其中 m 是 Σ中公式的数量。根据定义，对于所有$i \in Agt$，$Act^\Sigma{}_i$ 不超过 $Kh_i(\psi, \varphi) \in \Sigma$的数量，因为如果对于某个 $Kh_i(\psi, \varphi)$，存在两组见证 $[\pi]_\Sigma$ 和 $[\pi']_\Sigma$，$[\pi]_\Sigma = [\pi']_\Sigma$。因此，$Act^\Sigma$关于 Σ中 $Kh_i(\psi, \varphi)$ 的数量是多项式级的。最后，根据定义，$S^f{}_i$是有限的。因此，M^f 是有限的。■

最后一个定理指出，L^{Kh_i}中的每个可满足公式都在某个有限模型中可满足。因此，L^{Kh_i} 的可满足性问题是可判定的。下一节将进一步细化这一结果，并给出精确复杂度界。

8.2 基于选择法的复杂度

在这里，我们研究基于标记迁移系统^{U}的语义下，L^{Kh_i} 的可满足性问题的计算复杂度。我们将通过证明多项式规模模型性质，说明该问题属于 NP类。

给定一个公式，我们将证明，可以只选取典范模型中与其求值相关的一部分。选取模型将保留可满足性，而且其规模相对于输入公式的大小是多项式级的。

定义 8.4（选择函数）设 $M^{\Gamma} = hW^{\Gamma}、R^{\Gamma}、\{S^{\Gamma} i\}_{i\in Agt}、V^{\Gamma} i$ 是某个极大一致集 Γ 的典范模型（见定义 6.1）；取 $w \in W^{\Gamma}$ 及公式 $\varphi \in L^{Kh_i}$。定义 $Act^{\varphi} := \{h\theta_1, \theta_2 i \in Act^{\Gamma} \mid Kh_i(\theta_1, \theta_2)$ 是 φ 的子公式$\}$。典范选择函数 $sel^{\varphi} w$ 是一个函数，它以 M^{Γ}、w 和 φ 为输入，返回一个集合 $W' \subseteq W^{\Gamma}$，并满足：

(1) 选择函数$^{\varphi}{}_{w}(p) =$
$\{w\}$;***(2)*** 选择函数$^{\varphi}{}_{w}(\neg\varphi_1) =$
选择函数$^{\varphi}{}_{w}(\varphi_1)$
(3) 选择函数$^{\varphi}{}_{w}(\varphi_1 \vee \varphi_2) =$ 选择函数$^{\varphi}{}_{w}(\varphi_1) \cup$ 选择函数$^{\varphi}{}_{w}($
$\varphi_2)$;
(4) 如果 $[\![Kh_i(\varphi_1, \varphi_2)]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}, \varnothing$ 且 $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}} = \varnothing$: 选择函数$^{\varphi}{}_{w}(Kh_i(\varphi_1, \varphi_2)) = \{w\}$;

(5) 如果 $[\![Kh_i(\varphi_1, \varphi_2)]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}, \varnothing$ 且 $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}, \varnothing$: 选择函数$^{\varphi} w(Kh_i(\varphi_1, \varphi_2)) = \{w_1, w_2\} \cup$选择函数$^{\varphi} w_i(\varphi_1) \cup$选择函数$^{\varphi} w_2(\varphi_2)$，其中 w_1, w_2 满足 $(w_1, w_2) \in R^{\Gamma} h_{\varphi_1,\varphi_2} i$;

(6) 如果 $[\![Kh_i(\varphi_1, \varphi_2)]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}} = \varnothing$ （注意 $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}, \varnothing$）：

对于计划集 π，要么 $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}} * SE(\pi)$，要么 $R^{\Gamma}_{\pi}([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}) * [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$。对于每个$a \in$ 动作集φ:

(a) 如果 $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}} * SE(\{a\})$：我们将 $\{w_1\} \cup$ 选择函数$^{\varphi} w_i(\varphi_1)$ 添加到 $sel^{\varphi} w(Kh_i(\varphi_1, \varphi_2))$ 中，其中 $w_1 \in [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$ 且 $w_1 \notin SE(\{a\})$；(b) 如果 $R^{\Gamma}_{\pi}([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}) * [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$，我们将 $\{w_1, w_2\} \cup$ 选择函数$^{\varphi} w_i(\varphi_1) \cup sel^{\varphi} w_2(\varphi_2)$ 添加到 $sel^{\varphi} w(Kh_i(\varphi_1, \varphi_2))$ 中，其中 $w_1 \in [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$，$w_2 \in R^{\Gamma}_{a}(w_1)$ 且 $w_2 \notin [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$.⊣

现在，我们可以选择一个小模型，同时保持给定公式的可满足性。

定义 8.5（选取模型）令 M^{Γ} 为极大一致集 Γ的典范模型，w 为 M^{Γ}中的一个状态，φ 为一个 L^{Kh_i}-公式。令 $sel^{\varphi}{}_{w}$ 为一个选择函数，我们将由 $sel^{\varphi}{}_{w}$ 选择的模型定义为 $M^{\varphi}{}_{w} = hW^{\varphi}{}_{w}, R^{\varphi}{}_{w}, \{(S^{\varphi}{}_{w})_i\}_{i\in Agt}, V^{\varphi}{}_{w} i$，其中

- $W^{\varphi}_{w} := sel^{\varphi}_{w}(\varphi)$;

• $(R^{\varphi}{}_{w})_{\langle\theta_1,\ \theta_2\rangle} := R^{\Gamma}{}_{\langle\theta_1,\ \theta_2\rangle} \cap (W^{\varphi}{}_{w})^2$ 对每个 $\mathrm{h}\theta_1, \theta_2\mathrm{i}$，$\in$ 动作集$^{\varphi}$;

• $(S^{\varphi}{}_{w})_i := \{\{a\} \mid a \in$ 动作集$^{\varphi}\} \cup \{\{\mathrm{h}\bot, \top\mathrm{i}\}\}$, 对于$i \in \mathrm{Agt}$（且$(R^{\varphi}{}_{w})_{\langle\bot,\top\rangle} := \varnothing$）；

• $V^{\varphi}{}_{w}$ 是 V^{Γ} 在 $W^{\varphi}{}_{w}$上的限制。 ⊣

请注意，尽管 Act$^{\varphi}$ 可以是空集，但每个计划集的集合$(S^{\varphi}{}_{w})_i$ 都非空。此外，Act$^{\varphi}$ 可以扩展为无限行动集，并在适当的签名上定义。因此，$M^{\varphi}{}_{w}$ 是一个标记迁移系统[U]。

命题15 设$\mathcal{M}^{\Gamma}$ 为一个典范模型，w 为$\mathcal{M}^{\Gamma}$ 中的一个状态，且 φ 是一个$\mathrm{L}^{\mathrm{Kh}_i}$-公式。设$\mathcal{M}^{\varphi}\,w$ 为通过选择函数$\mathrm{sel}^{\varphi}\,w$ 选取的模型。那么，$\mathcal{M}^{\Gamma},w \models \varphi$ 蕴含：对于 φ的所有子公式 ψ 以及所有 $v \in W^{\varphi}\,w$，若$\mathcal{M}^{\Gamma},v \models \psi$，则$\mathcal{M}^{\varphi}\,w,v \models \psi$。此外，$\mathcal{M}^{\varphi}\,w$ 的复杂度关于 φ的大小为多项式级。

证明。 证明通过对公式的大小进行归纳法展开：

情形 $\psi = p$：若 $M^{\Gamma},v \models p$，则 $p \in V^{\Gamma}(v)$。由于 $v \in W^{\varphi}{}_{w}$，我们有 $p \in V^{\varphi}{}_{w}(v)$，因此 $M^{\varphi}{}_{w},v \models p$。反方向类似。

情形 $\psi = \neg\psi_1$：若 $M^{\Gamma},w \models \neg\psi_1$，则 $M^{\Gamma},w \not\models \psi_1$。根据归纳假设，$M^{\varphi}{}_{w},w \not\models \psi_1$，因此 $M^{\varphi}{}_{w},w \models \neg\psi_1$。反方向类似。

情形 $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$：若 $M^{\Gamma},v \models \psi_1 \vee \psi_2$，则 $M^{\Gamma},v \models \psi_1$ 或 $M^{\Gamma},v \models \psi_2$。根据归纳假设，$M^{\varphi}{}_{w},v \models \psi_1$ 或 $M^{\varphi}{}_{w},v \models \psi_2$，因此 $M^{\varphi}{}_{w},v \models \psi_1 \vee \psi_2$。反方向类似。

情形 $\psi = \mathrm{Kh}_i(\psi_1, \psi_2)$：假设 M^{Γ}，$v \models \mathrm{Kh}_i(\psi_1, \psi_2)$。我们考虑两种可能：

- $[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma} = \varnothing$。由于 M^{Γ}，$\mathrm{v} \models \mathrm{Khi}(\psi_1, \psi_2)$，因此存在一个 $\pi \in S^{\Gamma}\mathrm{i}$，使得 $\varnothing = [\![\psi_1]\!]M^{\Gamma} \subseteq \mathrm{SEM}^{\Gamma}(\pi)$ 且 $\varnothing = R^{\Gamma}_{\pi}([\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}) \subseteq [\![\psi_2]\!]M^{\Gamma}$。根据归纳假设 $[\![\psi_1]\!]M^{\varphi}\mathrm{w} \subseteq [\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}$。注意，由于 $[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma} = \varnothing$，我们也有 $[\![\psi_1]\!]M^{\varphi}\,\mathrm{w} = \varnothing$。令 $\pi' = \{\mathrm{h}\bot, \top\mathrm{i}\}$，我们知道 $\pi' \in (S^{\varphi}\,\mathrm{w})\mathrm{i}$，且 $(R^{\varphi}\,\mathrm{w})\,\pi'([\![\psi_1]\!]M^{\varphi}\,\mathrm{w}) = \varnothing$。因此，存在一个 $\pi' \in (S^{\varphi}\,\mathrm{w})\mathrm{i}$，使得 $[\![\psi_1]\!]M^{\varphi}\mathrm{w} \subseteq \mathrm{SEM}^{\varphi}\mathrm{w}(\pi')$ 且 $(R^{\varphi}\,\mathrm{w})\,\pi'([\![\psi_1]\!]M^{\varphi}\,\mathrm{w}) \subseteq [\![\psi_2]\!]M$。因此，$M^{\varphi}\,\mathrm{w}$，$\mathrm{v} \models \mathrm{Khi}(\psi_1, \psi_2)$。
- $[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}, \varnothing$：由于 M^{Γ}，$\mathrm{v} \models \mathrm{Khi}(\psi_1, \psi_2)$，因此存在一个 $\pi \in S^{\Gamma}\mathrm{i}$，使得 $[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma} \subseteq \mathrm{SEM}^{\Gamma}(\pi)$，且 $R^{\Gamma}_{\pi}([\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}) \subseteq [\![\psi_2]\!]M^{\Gamma}$。根据真值引理，$\mathrm{Khi}(\psi_1, \psi_2) \in \mathrm{v}$，接着 $\mathrm{Khi}(\psi_1, \psi_2) \in \Gamma$，且 $\mathrm{h}\psi_1, \psi_2\mathrm{i} \in$动作集$_{\Gamma}$。根据 $R^{\Gamma}\,\mathrm{h}_{\psi_1,\psi_2}\mathrm{i}$ 的定义，对于所有 $\mathrm{w} \in [\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}$，都有 $R^{\Gamma}\,\mathrm{h}_{\psi_1,\psi_2}\mathrm{i}(\mathrm{w}) \neq \varnothing$，且 $R^{\Gamma}\,\mathrm{h}_{\psi_1,\psi_2}\mathrm{i}(\mathrm{w}) \subseteq [\![\psi_2]\!]M^{\Gamma}$。因此，$[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma} \subseteq \mathrm{SEM}^{\Gamma}(\{\mathrm{h}\psi_1, \psi_2\mathrm{i}\})$，且 $R^{\Gamma}\mathrm{h}_{\psi_1,\psi_2}\mathrm{i}([\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}) \subseteq [\![\psi_2]\!]M^{\Gamma}$。由于 $[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma} \neq \varnothing$，存在 $\mathrm{w1}$、$\mathrm{w}_2 \in W^{\Gamma}$，使得 $(\mathrm{w1}, \mathrm{w2}) \in R^{\Gamma}\,\mathrm{h}_{\psi_1,\psi_2}\mathrm{i}$。

  注意，根据 $M^{\varphi}\,\mathrm{w}$ 的定义，我们有 $\{\mathrm{h}\psi_1, \psi_2\mathrm{i}\} \in (S^{\varphi}\,\mathrm{w})_i$，且 $(R^{\varphi}\,\mathrm{w})\,\langle\psi_1,\psi_2\mathrm{i}$ 有定义。此外，根据选择函数$^{\varphi}\,\mathrm{w}$ 的定义（条目 (5)），存在 w'_1、$\mathrm{w}'_2 \in W^{\varphi}\,\mathrm{w}$，使得 $(\mathrm{w}'_1, \mathrm{w}'_2) \in (R^{\varphi}\,\mathrm{w})\,\langle\psi_1,\psi_2\mathrm{i}$。令 $\mathrm{v}_1 \in [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\varphi}\,\mathrm{w}} \subseteq [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$（根据归纳假设，该包含关系成立）。于是，我们有 $\mathrm{v}_1 \in \mathrm{SE}^{\mathcal{M}^{\Gamma}}(\{\mathrm{h}\psi_1, \psi_2\mathrm{i}\})$，且 $R^{\Gamma}\mathrm{h}_{\psi_1,\psi_2}\mathrm{i}(\mathrm{v}_1) \subseteq [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$。由于对于所有 $\mathrm{v}_2 \in R^{\Gamma}\mathrm{h}_{\psi_1,\psi_2}\mathrm{i}(\mathrm{v}_1)$，我们有 $\mathrm{v}_2 \in [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$，（特别是 $v_2 = w'_2$），那么 $w'_2 \in (R^{\varphi}{}_{w})\,\langle\psi_1,\psi_2\rangle(v_1)$。因此，$v_1 \in \mathrm{SE}^{\mathcal{M}^{\varphi}{}_{w}}(\{\mathrm{h}\psi_1, \psi_2\mathrm{i}\})$。

为导出矛盾，现在假设 $(R^{\varphi} w)\ \langle\psi_1,\psi_2 i(v_1) = R^{\Gamma} h_{\psi_1,\psi_2} i(v_1) \cap W^{\varphi}\ w * [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\varphi}} w$；并令 $v_2 \in (R^{\varphi} w)\ \langle\psi_1,\psi_2 i(v_1)$ s.t. $v_2 \notin [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\varphi}} w$。于是有 $(R^{\varphi} w)\ \langle\psi_1,\psi_2 i(v_1) \subseteq R^{\Gamma} h_{\psi_1,\psi_2} i(v_1)$，但根据归纳假设也有 $v_2 \notin [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$。因此，$M^{\Gamma}, v \not\models Kh_i(\psi_1, \psi_2)$，这就产生了矛盾。因此，必有 $(R^{\varphi} w)\ \{\langle\psi_1,\psi_2 i\}(v_1) \subseteq [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\varphi}} w$。由于我们已经证明 $[\![\psi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\varphi}} w \subseteq SE^{\mathcal{M}^{\varphi}} w(\{h\psi_1, \psi_2 i\})$ 且 $(R^{\varphi} w)\ \{\langle\psi_1,\psi_2 i\}([\![\psi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\varphi}} w) \subseteq [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\varphi}} w$，所以得出 $M^{\varphi} w, v \models Kh_i(\psi_1, \psi_2)$。

现在假设 $M^{\varphi}{}_{w,v} \models Kh_i(\psi_1, \psi_2)$。同样，我们考虑两种可能：

- $[\![\psi_1]\!]M^{\varphi} w = \varnothing$：由于 $M^{\varphi} w, v \models Khi(\psi_1, \psi_2)$，因此对于某个 $\pi' \in (S^{\varphi} w)i$，有 $\varnothing = [\![\psi_1]\!]M^{\varphi} w \subseteq SEM^{\varphi} w(\pi')$，且 $\varnothing = (R^{\varphi} w)\ \pi'([\![\psi_1]\!]M^{\varphi} w) \subseteq [\![\psi_2]\!] M^{\varphi} w$。我们断言 $[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma} = \varnothing$。否则，若 $M^{\Gamma}, v \models Khi(\psi_1, \psi_2)$，根据选择函数 ${}^{\varphi} w$，条目 (5)，$\varnothing$，则 $(R^{\varphi} w)h_{\psi_1,\psi_2} i$ 有定义，且 $[\![\psi_1]\!]M^{\varphi} w, \varnothing$，这与假设矛盾。若 $M^{\Gamma}, v \not\models Khi(\psi_1, \psi_2)$，则根据选择函数 ${}^{\varphi} w$、条目 条目 (6) 和归纳假设，有 $[\![\psi_1]\!]M^{\varphi} w, \varnothing$，再次产生矛盾。

  令 π 为 $S^{\Gamma}{}_i$ 中任意一组计划；由于 $R^{\Gamma}_{\pi}([\![\psi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}) = \varnothing, [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}} \subseteq SE(\pi)$ 且 $R^{\Gamma}_{\pi}([\![\psi_1]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}) \subseteq [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{M}^{\Gamma}}$。因此，$M^{\Gamma}, v \models Kh_i(\psi_1, \psi_2)$。
- $[\![\psi_1]\!]M^{\varphi} w, \varnothing$：首先，注意到根据 IH，$[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}, \varnothing$。此外，根据 $M^{\varphi} w, v \models Khi(\psi_1, \psi_2)$，可得 $[\![\psi_1]\!]M^{\varphi} w \subseteq SEM^{\varphi} w(\pi')$，且 $(R^{\varphi} w)\ \pi'([\![\psi_1]\!]M^{\varphi} w) \subseteq [\![\psi_2]\!] M^{\varphi} w$，其中某个 $\pi' \in (S^{\varphi} w)i$。为导出矛盾，假设 $M^{\Gamma}, v \not\models Khi(\psi_1, \psi_2)$。这意味着，对于所有 $\pi \in S^{\Gamma} i$，$[\![\psi_1]\!]M^{\Gamma} * SEM^{\Gamma}(\pi)$ 或 $R^{\Gamma}_{\pi}([\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}) * [\![\psi_2]\!]M^{\Gamma}$。此外，根据 Act^{φ} 的定义，对于所有 $\pi = \{a\} \in (S^{\varphi} w)i$，其中 $a \in Act^{\varphi}$，有 $[\![\psi_1]\!] M^{\Gamma} * SEM^{\Gamma}(\pi)$ 或 $R^{\Gamma}_{\pi}([\![\psi_1]\!]M^{\Gamma}) * [\![\psi_2]\!]M^{\Gamma}$；也就是说，对于所有 $a \in Act_{\varphi}$ $[\![\psi_1]\!]$，有 ${}^{\Gamma}M^{\Gamma} * SEM^{\Gamma}(\{a\})$ 或 $R[\![\psi_1]\!]\{a\}({}^{\Gamma}M [\![\psi_2]\!]) * {}^{\Gamma}M_1 \in [\![\psi_1]\!]$。因此，存在 $w^{\Gamma} M_1 \notin$，使得 $w^{\Gamma} SEM_2 \in (a)$；或者存在 $w^{\Gamma} R_2 \notin [\![\psi_2]\!]a\ (w1)$，使得 $w^{\Gamma} M^{\varphi}$。根据 $sel \in w$ 的定义和第 (6) 项，我们为每个 $a\ {}^{\varphi}Act\ \pi$ 添加见证。因此，令 $\in' {}^{\varphi}(S\ \pi w)i$。若 $= ' \perp\{h \top, \varnothing i\}$，则显然可得 $[\![\psi_1]\!], {}^{\varphi} M^{\varphi} w * SEM\pi w(= \varnothing') \pi$。接着，取另一个 $= '\ \in \{a\}$，使得 $a\ {}^{\varphi}Act_1 \in [\![\psi_1]\!]$，并令 $w' {}^{\varphi} M \subseteq [\![\psi_1]\!]w\ {}^{\Gamma}M_1 \notin$。若 $w' {}^{\Gamma}SEM^{\Gamma}(\{a\})$，则 $R = \varnothing a\ (w'\ 1)^{\varphi}$，因而 $(R = \varnothing w)a(w'\ 1)_1 \notin$，所以 $w' {}^{\varphi} SEM_2 \in w(\{a\})$。另一方面，若存在 $w^{\Gamma} R_2 \notin [\![\psi_2]\!]a\ (w'\ 1)$，使得 $w^{\Gamma} M^{\varphi}$，则根据 $sel_2 \in w$ 和 IH，存在 $w' {}^{\varphi} W_2 \in w$，使得 $w' {}^{\Gamma} R_2 \notin [\![\psi_2]\!]a\ (w'\ 1)$ 且 $w' {}^{\varphi} M_2 \in w$；因此，存在 $w' {}^{\varphi}\ (R_2 \notin [\![\psi_2]\!]w)a(w'\ 1)$，使得 $w' {}^{\varphi} M^{\varphi} w$。无论哪种情况，都会推出 $M \not\models w, v\ \psi_1 Khi(\psi_2, {}^{\Gamma})$，与假设矛盾。因此，$M \models, v\ \psi_1 Khi(\psi_2,)$。

注意，选择函数仅针对作为 φ 子公式出现的每个 Kh_i-公式，才从 M^{Γ} 中添加状态；并且每次添加的状态数量关于 $|\varphi|$ 都是多项式级的。因此，$W^{\varphi}{}_w$ 的大小是多项式级的。由于 $(S^{\varphi} w)_i$ 的大小也是多项式级的，$M^{\varphi}{}_w$ 的大小关于 $|\varphi|$ 是多项式级的。最后，标记迁移系统 LTS^U 的定义要求行动集是无限的。显然，我们可以将动作集 Act^{φ} 扩展为无限集。由于定义 3.3将关系定义在行动的某个子集上，这种扩展不会改变 $M^{\varphi}{}_w$ 的大小。■

为了证明 L^{Kh_i} 的可满足性问题属于 NP类，还需要证明模型检测问题属于 P类。

命题 16 $\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$ 的模型检测问题属于 P类。

证明。 给定一个带指定状态的标记迁移系统^{U} $\mathcal{M},w$ 以及一个公式 φ，我们定义一个在多项式时间内运行的自底向上标记算法，用于检查$\mathcal{M},w \models \varphi$是否成立。我们沿用基本模态逻辑K 的相同思路（例如参见[10]）。下面介绍标记迁移系统 $\mathsf{Kh}_i(\psi,\varphi)$上的$^{U}\mathcal{M} = \langle \mathrm{W},\mathrm{R},\mathrm{S},\mathrm{V}\rangle$:

模型检验过程 ModelChecking((M,w), $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$)
实验室($\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$) $\leftarrow \varnothing$;
对于所有 $\pi \in$ 计划集$_i$ **执行**
  kh $\leftarrow$**真**;
  对于所有 $\sigma \in \pi$ **执行**
    对所有$v \in lab(\psi)$ **执行**
      $kh \leftarrow (kh \,\&\, v \in \mathrm{SE}(\sigma) \,\&\, \mathrm{R}_\sigma(v) \subseteq$ 实验室(φ));
    结束循环
  结束循环
  如果 kh**则**
    实验室($\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$) $\leftarrow \mathrm{W}$;
  结束 if
结束 for

由于 S_i 和每个 $\pi \in \mathrm{S}_i$ 都非空，前两个**for** 循环必定会执行。如果$lab(\psi) = \varnothing$，那么公式 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$ 显然为真。否则，只有在满足 $\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$) 可满足性所需的适当条件时，$kh$ 才会保持为真。如果没有任何 π成功，那么$lab(\mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi))$初始化为 $\varnothing$后就不会被覆盖，正如预期的那样。可以在多项式时间内验证 $v \in \mathrm{SE}(\sigma)$和 R_σ。因此，模型检测问题属于 P类。■

由此即可得出可满足性问题的预期结果。

定理8 关于$\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$ 在标记迁移系统^{U}s上的可满足性问题是NP类-完全的。

证明。 困难性可由NP类-完全的命题逻辑（$\mathsf{L}^{\mathsf{Kh}_i}$的一个片段）推出。根据命题 15，每个可满足公式 φ 在 φ上都有一个多项式规模的模型。因此，我们可以猜测一个多项式规模的模型$\mathcal{M}$、w，并验证$\mathcal{M}$、$w \models \varphi$（根据命题 16，这可以在多项式时间内完成）。因此，可满足性问题属于NP类。■

9 总结

本文介绍了一种新的知晓如何模态语义，适用于 [57, 58, 59], 多个智能体。该语义以基于不确定性的标记迁移系统（标记迁移系统^{U}）为基础。我们方案的新颖之处在于，标记迁移系统^{U} 配备了计划之间的不可区分关系。由此，主体的认知不确定性概念——进而定义其认知状态——得以重新引入，使知晓如何更接近经典认知逻辑中的知道某事概念。我们认为，基于标记迁移系统^{U}的语义能够恰当地表征对特定情境中可供性的一种共享且客观的描述，同时也能表征不同的可以及主观的可个人

以及一群智能体的个人能力；仅使用基于标记迁移系统的语义似乎难以做到这一点。

我们证明，[57, 58, 59] 的逻辑可以通过对标记迁移系统施加特定条件得到^{U}；因此，新语义更为一般。具体而言，它为$\mathcal{EMP}$和$\mathcal{COMP}$提供了反例；这两个原则直接将如何知识模态Kh 与全称模态的性质联系起来。事实上，考虑$\mathcal{EMP}$：尽管A($\psi \to \varphi$在标记迁移系统的底层标记迁移系统^{U}中客观成立，但可以认为，主体可能并不知道有哪些行动或计划能将这些事实转化为知识，因此该模型中的Kh(ψ, φ)并不成立。

为了刻画该语言在标记迁移系统^{U}s上的有效式，我们引入一个可靠且强完备的公理系统。

我们还定义了标记迁移系统^{U}s上的一个恰当的互模拟概念，沿用了[17, 18]中提出的思路。我们证明，双模拟等价蕴含公式等价，且有限模型构成一个 Hennessy-Milner 类（即，在有限模型上，公式等价蕴含双模拟等价）。

最后，我们证明，基于 LTS^{U} 语义的多智能体知晓如何逻辑的可满足性问题是 NP 完全的。证明依赖于对典范模型的选择论证，以及模型检测问题具有多项式复杂度这一事实。我们还给出一种滤过技术：对于满足 φ 的任意模型，该技术都能构造出一个满足 φ 的有限模型。

未来工作。未来有若干值得探索的研究方向。首先，我们的框架很容易适用于其他可执行性概念。例如，可以要求集合 π 中只有部分计划具有强可执行性，或者放宽强 可执行性条件，等等。我们还可以探究对计划间不可区分关系的构造施加不同限制所产生的影响。值得研究的是，在这些情况下我们会得到哪些逻辑，以及它们与 LTS 语义之间的关系。

其次，据我们所知，LTS 上知晓如何逻辑的可满足性问题的确切复杂度仍未解决。例如，可以借鉴并改造文献 [40] 中的思路来解决这一问题。

第三，^{U}标记迁移系统语义在多主体情境下，顺理成章地引出了集体知晓如何概念的定义，这与 [13]的思路一致。例如，可以轻松定义一般知晓如何 的概念：$\mathrm{EKh}_G(\psi,\varphi) := \bigvee_{i\in G} \mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$，其含义是“群体 G 中的每个人都知道如何实现 φ 给定 ψ”；而“群体 G 中有人知道如何实现 φ 给定 ψ”则可表示为 $\mathrm{SKh}_G(\psi,\varphi) := \bigvee_{i\in G} \mathrm{Kh}_i(\psi,\varphi)$（例如，[1] 在标准认知逻辑中也采用了类似方法）。诸如分布式知晓如何和共同知晓如何等更复杂的概念，值得进一步探讨。

最后，可以通过修改计划之间不可区分关系的操作来定义刻画认知更新的动态模态（其他动态认知算子也采用这种做法，参见例如 [53]）。这样便能够表达不同形式的通信，例如针对（若干）计划的公开、私人和半私人公告。 [4] 中介绍了一些初步结果。

参考文献

[1] Thomas Ågotnes and Yì N. Wáng. 某人知道。载于Meghyn Bienvenu、Gerhard Lakemeyer和Esra Erdem编，第十八届知识表示与推理原理国际会议会议论文集，*KR 2021*，线上活动，*2021*年*11*月*3*日至*12*日，第2–11页，2021年。[2] Carlos Areces、Valentin Cassano、Pablo F. Castro、Raul Fervari和And- rés R. Saravia。明知遵守的道义逻辑。载于A. Ricci、W. Yeoh、N. Agmon和B. An编，第二十二届自主智能体与多智能体系统国际会议会议论文集，*AAMAS '23*，英国伦敦，*2023*年*5*月*29*日至*6*月*2*日。国际自主智能体与多智能体系统基金会，2023年，即将出版。[3]Carlos Areces、Raul Fervari、Andrés R. Saravia和Fernando R. Velázquez-Quesada。多主体知晓如何逻辑的基于不确定性的语义。载于Joseph Y. Halpern和Andrés Perea编，第十八届理性与知识理论方面会议论文集，*TARK 2021*，中国北京，*2021*年*6*月*25*日至*27*日，第335卷，*EPTCS*，第23–37页，2021年。[4]Carlos Areces、Raul Fervari、Andrés R. Saravia和Fernando R. Velázquez-Quesada。更新知道如何的初步探索。载于Carlos Are- ces和Diana Costa编，动态逻辑：新趋势与应用，第1–16页。Springer International Publishing，2023年。[5] Sergei Artemov。正当化逻辑。《符号逻辑评论》，1(04):477–513，2008年。[6] Alexandru Baltag。知道就是知道变量的取值。载于模态逻辑进展*11*，第135–155页，2016年。[7] Alexandru Baltag、Lawrence S. Moss和Slawomir Solecki。公开公告、共同知识与私人猜疑逻辑。载于*TARK '98*会议论文集，第43–56页。Morgan Kaufmann Publishers Inc.，1998年。[8] Francesco Belardinelli。关于知识与策略的推理：认知策略逻辑。载于Fabio Mogavero、Aniello Murano和Moshe Y. Vardi编，第二届战略推理国际研讨会论文集，*SR 2014*，法国格勒诺布尔，*2014*年*4*月*5*日至*6*日，第146卷，*EPTCS*，第27–33页，2014年。[9] Patrick Blackburn、Marteen de Rijke和Yde Venema。模态逻辑。剑桥大学出版社，2002年11月。[10] Patrick Blackburn和Johan van Benthem。模态逻辑：语义视角。载于模态逻辑手册，第1–84页。爱思唯尔，2006年。[11] Stéphane Demri和Raul Fervari。基于能力的逻辑中带受约束计划的模型检验。载于第三十七届*AAAI*人工智能会议，*AAAI 2023*，美国华盛顿哥伦比亚特区，*2023*年*2*月*7*日至*14*日。AAAI出版社，2023年，即将出版。

[12] Ronald Fagin 和 Joseph Y. Halpern。信念、意识与有限推理。人工智能，34(1):39–76，1988年。[13] Ronald Fagin、Joseph Y. Halpern、Yoram Moses 和 Moshe Y. Vardi。关于知识的推理。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，1995。[14] Jie Fan、Yanjing Wang 和 Hans van Ditmarsch。偶然性与知道是否。《符号逻辑评论》，8(1):75–107，2015年。[15] Jeremy Fantl。知道如何。载于 E. Zalta 编，《斯坦福哲学百科全书》。形而上学研究实验室，斯坦福大学，2021年春季版，2021年。[16] Raul Fervari、Andreas Herzig、Yanjun Li 和 Yanjing Wang。策略性地知道如何。载于 Carles Sierra 编，《第二十六届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI 2017，澳大利亚墨尔本，2017年8月19日至25日》，第1031–1038页。ijcai.org，2017。[17] Raul Fervari、Fernando R. Velázquez-Quesada 和 Yanjing Wang。知晓如何逻辑的互模拟。载于第7届国际研讨会战略推理，*SR 2017*，2017。[18] Raul Fervari、Fernando R. Velázquez-Quesada 和 Yanjing Wang。知晓如何逻辑的互模拟。《符号逻辑评论》，第1–37页，2021年。[19] Valentin Goranko 和 Solomon Passy。使用全称模态：收获与问题。《逻辑与计算杂志》，2(1):5–30，1992年。[20] Tao Gu 和 Yanjing Wang。“知道价值”逻辑作为正规模态逻辑。载于 Lev D. Beklemishev、Stéphane Demri 和 András Maté 编，《模态逻辑进展11：第11届“模态逻辑进展”会议论文集，会议于匈牙利布达佩斯举行，2016年8月30日至9月2日》，第362–381页。College Publications，2016年。[21] J. Y. Halpern 和 R. Pucella。应对逻辑全知：表达力与语用学。人工智能，175(1):220–235，2011。[22] David Harel、Dexter Kozen 和 Jerzy Tiuryn。动态逻辑。麻省理工学院出版社，2000年。[23] Sergiu Hart、Aviad Heifetz 和 Dov Samet。知道是否、知道事实以及状态空间的基数。《经济理论杂志》，70(1):249–256，1996年。[24] Katherine Hawley。成功与知道如何。《美国哲学季刊》，40(1):19–31，2003年。[25] Vincent F. Hendricks。引言：连接主流认识论与形式认识论的8座桥梁。《哲学研究》，128(1):1–5，2006年3月。[26] Andreas Herzig。知识与行动逻辑：批判性分析与挑战。《自主智能体与多智能体系统》，29(5):719–753，2015年。

[27] Andreas Herzig 和 Nicolas Troquard。知道如何进行游戏：行动逻辑中的一致选择。载于 Hideyuki Nakashima、Michael P. Wellman、Gerhard Weiss 和 Peter Stone 编，《第5届自主智能体与多智能体系统国际联合会议（AAMAS 2006），日本函馆，2006年5月8日至12日》，第209–216页。ACM，2006年。[28] Jaakko Hintikka。知识与信念。康奈尔大学出版社，纽约州伊萨卡，1962年。[29] Wojciech Jamroga 和 Thomas Ågotnes。构造性知识：智能体在不完备信息下能够达成什么。《非经典逻辑应用期刊》，17(4):423–475，2007。[30] Wojciech Jamroga 和 Wiebe van der Hoek。知道如何进行游戏的智能体。*Fundamenta Informaticae*，63(2-3):185–219，2004年。[31] Yves Lespérance、Hector J. Levesque、Fangzhen Lin 和 Richard B. Scherl。情境演算中的能力与知晓如何。*Studia Logica*，66(1):165–186，2000年。[32] Yanjun Li。停止即意味着达成：一种较弱的知晓如何逻辑。*Studies in Logic*，9(4):34–54，2017。[33] Yanjun Li。基于简单计划的知晓如何逻辑语义树判定程序。载于 Pietro Baroni、Christoph Benzmüller 和 Yì N. Wáng 编，《逻辑与论证——第4届国际会议，CLAR 2021，中国杭州，2021年10月20日至22日，会议论文集》，《计算机科学讲义》第13040卷，第266–283页。Springer，2021年。[34] Yanjun Li 和 Yanjing Wang。在维持中达成：带有中间约束的知晓如何逻辑。载于 Sujata Ghosh 和 Sanjiva Prasad 编，《逻辑及其应用——第7届印度会议，ICLA 2017，印度坎普尔，2017年1月5日至7日，会议论文集》，《计算机科学讲义》第10119卷，第154–167页。Springer，2017。[35] Yanjun Li 和 Yanjing Wang。通过多步计划实现多智能体知晓如何：一种基于动态认知规划的方法。载于 Patrick Blackburn、Emiliano Lorini 和 Meiyun Guo 编，《逻辑、理性与交互——第7届国际研讨会，LORI 2019，中国重庆，2019年10月18日至21日，会议论文集》，《计算机科学讲义》第11813卷，第126–139页。Springer，2019。[36] Yanjun Li 和 Yanjing Wang。知道如何规划。载于 Joseph Y. Halpern 和 Andrés Perea 编，《第十八届理性与知识理论方面会议论文集，TARK 2021，中国北京，2021年6月25日至27日》，《EPTCS》第335卷，第233–247页，2021年。[37] Yanjun Li 和 Yanjing Wang。知晓如何逻辑的邻域语义。*Synthese*，199(3-4):8611–8639，2021年5月。[38] Yanjun Li 和 Yanjing Wang。基于规划的知晓如何：一种统一方法。人工智能，296，2021年。

[39] John McCarthy 和 Patrick J. Hayes. 从人工智能的角度看若干哲学问题。载于*MachineIntelligence*，第463–502页。爱丁堡大学出版社，1969年。[40] Arne Meier、Michael Thomas、Heribert Vollmer 和 Martin Mundhenk. CTL 和 CTL* 若干片段的可满足性复杂度。计算机科学基础国际期刊，20(5):901–918，2009年。[41] John-Jules Ch. Meyer 和 Wiebe van der Hoek. 面向人工智能与计算机科学的认知逻辑。剑桥大学出版社，纽约，美国，1995年。[42] Robert Moore. 知识与行动的形式理论。载于《常识世界的形式理论》。Ablex 出版公司，1985年。[43] Pavel Naumov 和 Jia Tao. 我们共同知晓如何实现目标：一种知晓如何的认知逻辑（扩展摘要）。载于 Jérôme Lang 编，第十六届理性与知识理论方面会议论文集，*TARK 2017*，英国利物浦，*2017*年*7*月*24*日至*26*日，《EPTCS》第251卷，第441–453页，2017年。[44] Pavel Naumov 和 Jia Tao. 二阶知晓如何策略。载于 Elisabeth André、Sven Koenig、Mehdi Dastani 和 Gita Sukthankar 编，第十七届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集，*AAMAS 2018*，瑞典斯德哥尔摩，*2018*年*7*月*10*日至*15*日，第390–398页。自主智能体与多智能体系统国际基金会，美国南卡罗来纳州里奇兰 / ACM，2018年。[45] Pavel Naumov 和 Jia Tao. 我们共同知晓如何实现目标：一种知晓如何的认知逻辑。人工智能，262:279–300，2018年。[46] Pavel Naumov 和 Jia Tao. 不确定性下的知晓如何。人工智能，276:41–56，2019年。[47] Andrés Perea. 认知博弈论：推理与选择。剑桥大学出版社，剑桥，2012年。[48] Gilbert Ryle. 《心灵的概念：*60*周年纪念版》。Hutchinson & Co，1949年。[49]Robert Stalnaker. 逻辑全知问题（一）。*Synthese*，89(3):425–440，1991年。[50] Johan van Benthem. 《信息与交互的逻辑动力学》。剑桥大学出版社，2011年。[51] Wiebe van der Hoek 和 Alessio Lomuscio. 忽视的代价——迈向无知逻辑。载于第二届自主智能体与多智能体系统国际联合会议，*AAMAS 2003*，*2003*年*7*月*14*日至*18*日，澳大利亚维多利亚州墨尔本，会议论文集，第1148–1149页。ACM，2003年。[52] Wiebe van der Hoek、Bernd van Linder 和 John-Jules Ch. Meyer. 论具有选择能力的主体。*Stud Logica*，66(1):79–119，2000年。

[53] Hans van Ditmarsch、Wiebe van der Hoek 和 Barteld Kooi. 动态认知逻辑。Springer，2007年。[54] Jan van Eijck、Malvin Gattinger 和 Yanjing Wang. 知晓数值与公开检查。载于 Sujata Ghosh 和 Sanjiva Prasad 编，逻辑及其应用——第7届印度会议，*ICLA 2017*，印度坎普尔，2017年1月5日至7日，会议论文集，《计算机科学讲义》第10119卷，第77–90页。Springer，2017年。[55] Moshe Y. Vardi. 论认知逻辑与逻辑全知。载于 Joseph Y. Halpern 编，*TARK*，第293–305页。摩根·考夫曼，1986年。[56] Xun Wang. 一种具有可跳过计划的知晓如何逻辑。载于 Patrick Blackburn、Emiliano Lorini 和 Meiyun Guo 编，逻辑、理性与交互——第7届国际研讨会，*LORI 2019*，中国重庆，2019年10月18日至21日，会议论文集，《计算机科学讲义》第11813卷，第413–424页。Springer，2019年。[57] Yanjing Wang. 一种知晓如何逻辑。载于 Wiebe van der Hoek、Wesley H. Holliday 和 Wen-Fang Wang 编，逻辑、理性与交互——第五届国际研讨会，*LORI 2015*，中国台湾台北，2015年10月28日至31日，会议论文集，《计算机科学讲义》第9394卷，第392–405页。Springer，2015年。[58] Yanjing Wang. 超越“知道某事”：新一代认知逻辑。载于 H. van Ditmarsch 和 G. Sandu 编，*Jaakko Hintikka* 论知识与博弈论语义学，第499–533页。Springer，2018年。[59]Yanjing Wang. 一种目标导向的知晓如何逻辑。*Synthese*，195(10):4419–4439，2018年。[60] Chao Xu、Yanjing Wang 和 Thomas Studer. 一种知晓原因逻辑。*Synthese*，198(2):1259–1285，2021年。