arXiv:2304.01026v1 [math.PR] 3 Apr 2023

具有乘性 Stratonovich 噪声的 $\mathbb{R}^d$ 随机快速对数方程

Ioana Ciotir[1,2], Reika Fukuizumi[2], 和 Dan Goreac[3,4,*]

[1]诺曼底大学、诺曼底鲁昂国立应用科学学院、LMI（EA 3226 - FR CNRS 3335），法国鲁昂 76000，电子邮箱：*ioana.ciotir@insa-rouen.fr*[2]东北大学纯粹与应用数学研究中心、信息科学研究生院，日本，电子邮箱：*fukuizumi@math.is.tohoku.ac.jp*[3]山东大学数学与统计学院，中国山东威海，邮编 264209[4]LAMA、古斯塔夫·埃菲尔大学、UPEM、巴黎东克雷泰伊大学、CNRS，法国马恩河谷 F-77447，电子邮箱：*dan.goreac@univ-eiffel.fr*[*]通讯作者，电子邮箱：dan.goreac@univ-eiffel.fr, dan.goreac@u-pem.fr

2023年4月4日

摘要

本文研究了 $\mathbb{R}^d$ 中 $d \geqslant 3$条件下带有乘性 Stratonovich 噪声的随机快速对数方程解的存在性与唯一性。本文解答了 Barbu-Röckner-Russo [11]一文中遗留的一个临界情形（从本质上说，对应于 ΔX^m条件下的多孔介质算子 $m = 0$）。我们面临若干技术难题，既与对数的退化性质有关，也与问题是在无界区域中处理这一事实有关。首先，逼近的顺序至关重要，且不同于以往的方法。其次，最后一步所需的能量估计（见式（33））只有通过精心选择的斯特拉托诺维奇型噪声校正才能实现。

关键词： 随机快速对数方程；无界区域中的随机偏微分方程；极大单调算子；吉田逼近；乘性 Stratonovich 噪声。

2020 年 MSC 分类：76S05、60H15、35K55。

1 引言

考虑如下形式的非线性扩散过程

$$dX(t) = \Delta \ln(X(t))\, dt \tag{1}$$

其中，$X(t,\xi)$ 是时空坐标 (t,ξ) 对应的正密度。使用威斯康星环形八极等离子体约束装置的实验观测到了这一过程（见 [1]）。Kamimura 和 Dawson 在 [20] 预测了等离子体跨磁场保守扩散（包括镜像效应）的这一时间演化。

同一方程也适用于热化电子云的膨胀，并且也出现在对玻尔兹曼方程的 Carleman 模型进行中心极限定理近似的研究中（见 [13]和 [21]）。该方程的渐近行为已在 [19]中得到研究。

大多数自然现象都呈现出某种变化性，单纯采用确定性方法无法捕捉这种变化。更准确地说，自然系统可以表示为随机扰动模型，而确定性描述则可视为相关随机模型的一个子集。

本文旨在随机演化方程与乘性噪声的框架下分析这类方程，其中动力学方程 (1) 是本文的出发点。

现在我们为这个问题引入合适的框架。考虑欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 Stratonovich 随机微分方程（其含义将在后文予以精确定义），其中 $d \geq 3$ 满足一定条件，其形式如下:

$$\begin{cases} dX_t - \Delta \ln X_t dt = X_t \circ dW_t, & (t,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{2}$$

未知量 $X_t = X(t,\xi)$ 是标准完备、右连续概率基 $\{\Omega\ \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_t, \mathbb{P}\}$ 上的实值随机场，且 W_t 与一个取值于 $\mathscr{H}^{-1}$ 的 Q 维纳过程有关，该过程对应于滤过 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$；其中 Q 是 $\mathscr{H}^{-1}$ 上的非负迹类算子。关于空间 $\mathscr{H}^{-1}$ 的更多细节及其性质，请参见下一节和 [6] 的第 6.2 节。

近年来，非线性方程的随机理论中，漂移系数为 $-\Delta\Psi$ 的情形得到了深入研究，其中 Ψ：由 $\Psi(r) = r^m$ 定义的 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个具有加性噪声和乘性噪声的极大单调算子。

在 $m > 1$ 的情形下，相应的方程描述了慢扩散（多孔介质中的流体动力学）；对于随机情形，其存在性、唯一性、正性以及解的行为已在 [7], [9], [16], [22], [24] 中得到研究。关于确定性情形，参见 [2] 和 [25]。

情形 $m \in (0,1)$ 与多孔介质中理想气体动力学的数学建模相关。关于自组织临界性情形，参见 [14], [10], [17]。$m \in \left[\frac{1}{5}, 1\right)$ 在 [5] 中研究了三维情形下的有限时灭绝。另见 [8]。

在 [15] 中，$m \in (-1, 0)$ 且具有乘性 Itô 噪声结构的情形已得到研究。

对于 $m \leq -1$ 的情形，已经证明，即使在确定性情形下，也不存在具有有限质量的解（见 [25]）。

在 [4] 中，研究了有界域内具有乘性噪声的情形 $\Psi(r) = \log r$。注意，对于正解，这在本质上可视为对应于如下情形：$m = 0$，在 $\operatorname{div}(r^{m-1}\nabla r) = \frac{1}{m}\Delta(r^m)$ 中，因为 $\operatorname{div}(r^{-1}\nabla r) = \Delta(\ln r)$。

关于无界区域内的随机多孔介质方程，目前唯一已知的结果见 [11]，其研究的是带有乘性伊藤噪声的慢扩散情形。

我们研究的是无界区域内的快速对数扩散，其中存在若干技术难点，我们将通过采用若干特定的近似方法来处理这些难点。

更准确地说，第一组主要困难源于对数的性质。由于零不属于 $D(\ln)$，我们无法假设$D(\ln) = \mathbf{R}$。对数扩散特有的另一个问题是，我们既不能假设多项式增长假设，也不能假设强单调性假设。所有这些技术困难都决定了在 λ 中采用一种特定形式的初次逼近，并使用乘性斯特拉托诺维奇噪声。

第二组主要困难源于定义域无界，这带来了包括无法使用Poincaré不等式在内的一系列问题。这一技术问题要求在 ν中采用第二次逼近。

最后，为了在适当的空间中获得一些估计，还需要在 ϵ 中进行第三次逼近。

还需要注意，三次逼近的极限次序经过了严格选择。更确切地说，必须先令 ν 趋于极限，再令 λ 趋于极限，以避免 $\Psi_\lambda(0)$ 收敛到 ∞。与缓慢多孔介质扩散的情形相比，这是一个重要的技术难点。

本文的结构安排如下。引言之后，第二节介绍一些记号以及问题的技术设定。第三节给出解的定义，并证明存在性与唯一性。第四节分几个步骤证明主要结果，各步骤对应于上文介绍的逼近。最后，附录讨论一些技术细节。

为方便读者，我们将在第二节回顾一些基本概念和设定。

2 记号与设定

2.1 函数空间

全文中我们将采用以下记号。

1. 底层空间为 $d \geq 3$ 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$;
2. 基本函数空间为 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)$，由实值 Lebesgue 平方可积函数构成。其范数为 $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}$;

3. 一般而言，对于 $1 < p < \infty$，我们令 $\mathbb{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}^{d'}\right)$ 表示由 $\mathbb{R}^{d'}$ 值 Lebesgue-p 次幂可积函数构成的空间。其范数记为 $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d'})}$。当 $d' = 1$ 时，我们将该空间记为 $\mathbb{L}^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ 相应的实值函数空间;

4. 我们通常会完全省略对底层欧几里得空间的依赖，例如 $\mathbb{R}^d$;

5. $\mathbb{L}^p$-空间上的范数有时简记为 p，即 $\|\cdot\|_p$。这也适用于对偶积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,\ q}$（当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时）以及 Hilbert积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_2 = \langle\cdot,\cdot\rangle_{2,\ 2}$;
6. 空间 $H^1\left(\mathbb{R}^d\right) = H_0^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的非齐次 Sobolev 空间（函数及其一阶偏导数均属于 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$）。其范数为

$$\|u\|_{H^1\left(\mathbb{R}^d\right)} := \|(u,\nabla u)\|_{\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{1+d}\right)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(u^2(\xi)+|\nabla u(\xi)|^2\right)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

7. 对 H^1 的偶空间（枢轴空间为 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$）记作 $H^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$（或简记为 H^{-1}）;
8. $\mathscr{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right)$ 关于 $s \in \mathbb{R}$ 的空间是由 u 上（取实值）的缓增分布构成的齐次 Sobolev 空间，这些分布具有一个 $\mathbb{L}^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 傅里叶分布 $\hat{u}$，并且满足

$$\|u\|_s^2 = \|u\|^2_{\mathscr{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right)} := \int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

9. 对任意 $s \in \mathbb{R}$， $C_{\mathbb{P}}([0,T];\mathscr{H}^s)$ 表示所有 $\mathscr{H}^s$ 值的（$\mathscr{F}_t$）$_t$ 渐进可测过程 $X\colon \Omega \times [0,T] \to \mathscr{H}^s$ 所构成的空间，且满足

$$\mathbb{E}\int_0^T \|X(t)\|_{\mathscr{H}^s}^2 dt < +\infty,$$

并且对于所有紧集 $\mathscr{O}$， X 在 $\mathscr{O}$ 上的实现，在$C([0,T];L^2(\Omega;\mathscr{H}^s(\mathscr{O})))$中有一个连续修正。

注 1. *1.* 空间 H^1 与定义在第 *[24,* 页的空间 $\mathscr{F}_e$ 相关联，并与算子 $L=\triangle$ 相关联，其对应定义域为 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$。伴随的二次型 $\mathscr{E}(u,\ v)\colon=\left\langle\sqrt{-L}u,\ \sqrt{-L}v\right\rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}$ 构成一种扩展的瞬态狄利克雷空间结构，因此有

$$V:=\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)\subset H^{-1}\subset V^* \text{ continuously and densely.} \tag{3}$$

（参见 *[24,* 第 *131],* 页；另见第 *129* 页、式 *(3.1)* 之前段落中的具体例子 *[24,]*。 *)*

2. 若满足 $s<\frac{d}{2}$，则空间 $\mathscr{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right)$ 是一个希尔伯特空间（参见命题 *1.34]* 中的 *[3,* ）。

3. 若 $|s|<\frac{d}{2}$，空间 $\mathscr{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right)$ 和 $\mathscr{H}^{-s}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 是对偶的（参见 *[3,* 命题 *1.36]*）。

$$\langle u,v\rangle_{\left(\mathscr{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right),\mathscr{H}^{-s}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)}=\int_{\mathbb{R}^d}u(\xi)v(\xi)d\xi,\ \forall\,(u,v)\in\mathscr{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right)\times\mathscr{H}^{-s}\left(\mathbb{R}^d\right). \tag{4}$$

4. 以下嵌入成立（关于 $0\le s<\frac{d}{2}$，参见 *[3,* 定理 *1.38*、推论 *1.39]*）。

$$\mathscr{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right)\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2s}}\left(\mathbb{R}^d\right),\ \mathbb{L}^{\frac{2d}{d+2s}}\left(\mathbb{R}^d\right)\subset\mathscr{H}^{-s}\left(\mathbb{R}^d\right)\text{ continuously.} \tag{5}$$

嵌入常数记为 $C_{\mathscr{H}^s\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2s}}}$。假设它们至少为 1，使得

$$\|u\|_{\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2s}}\left(\mathbb{R}^d\right)}\le C_{\mathscr{H}^s\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2s}}}\|u\|_{\mathscr{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

这类常数的显式表达式可见 *[3,* 定理 *1.38]* （证明的最后一行）。

5. 当 $s=1$ 时，$\|\cdot\|_{\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^d)}$ 的一个更便于使用的表达式为

$$\|u\|_{\mathscr{H}^1\left(\mathbb{R}^d\right)}=\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)}.$$

2.2 基与维纳过程

回忆一下， $\mathscr{S}_0\left(\mathbb{R}^d\right)$是指傅里叶变换在原点附近为零的光滑函数（属于施瓦茨空间）构成的空间。已知 $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d)$ 在 $\mathscr{H}^{-1}$ 中稠密（例如，参见 [3, 命题 1.35]）。因此，可以为$\mathscr{H}^{-1}$ 选取一个正交归一基，其元素 $e_k\in C^1\left(\mathbb{R}^d\right)\cap\mathscr{H}^{-1}$ 及其一阶导数均属于 $\mathbb{L}^d\left(\mathbb{R}^d\right)$（要验证所需的可积性，只需回忆这类光滑函数具有线性增长）。特别地，对每个 $k\ge 1$,

$$\mu_k':=\|e_k\|_{\mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)}^2+\|\nabla e_k\|_{\mathbb{L}^d\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)}^2+1<\infty.$$

接下来，考虑一个序列 $(\mu_k)_{k\geq 1}\subset\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$，使得

$$\sum_{1\leq k}\mu_k\mu_k'=\sum_{1\leq k}\mu_k\left(\|e_k\|_\infty^2+\|\nabla e_k\|_d^2+1\right)<\infty. \tag{6}$$

对于这一序列 μ_k，我们关联一个取值于 $\mathscr{H}^{-1}$的 Q 维纳过程，即， Q 是一个非负迹类算子，使得 $Qe_k=\mu_k e_k$ 在 $\mathscr{H}^{-1}$上成立。其形式表示为 $W^Q(t)$,

$$W^Q(t)=\sum_{k\geq 1}\sqrt{\mu_k}\beta_k(t)e_k,\ t\in[0,T],$$

对于某个定义在共同概率空间$(\Omega\ \mathscr{F},\mathbb{P})$上的相互独立的实值布朗运动序列 $\{\beta_k\}_k$。更多细节请参见 [11] 中的注3.3或 [23]中的第2.3节。

2.2.1 关于 $H^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 的标准范数和修正范数

1. 空间 $H^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 通常赋予范数

$$\|u\|_{H^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right)}^2:=\int_{\mathbb{R}^d}\left(1+|\xi|^2\right)^{-1}|\hat{u}(\xi)|^2\ d\xi,$$

或者，同样地，$\|u\|_{H^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right)}^2=\left\|(\mathbb{I}-\triangle)^{-\frac{1}{2}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$。等价地，对于 $\nu>0$，可以考虑

$$\|u\|_{H_\nu^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right)}^2:=\left\|(\nu\mathbb{I}-\triangle)^{-\frac{1}{2}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2;$$

2. **该过程 W 作为 H^{-1} 上的布朗运动和 Itô 微分**

- 考虑 J：由 $J\left(Q^{\frac{1}{2}}u\right)$给出的 $Q^{\frac{1}{2}}\left(\mathscr{H}^{-1}\right)\to H^{-1}:=\sum_{k\geq 1}\sqrt{\mu_k}\left\langle u,\ e_k\right\rangle_{\mathscr{H}^{-1}}e_k$。容易看出这是一个希尔伯特–施密特嵌入。

$$\sum_{k\geq 1}\left\|J(Q^{\frac{1}{2}}e_k)\right\|_{H^{-1}}^2=\sum_{k\geq 1}\mu_k\|e_k\|_{H^{-1}}^2\leq\sum_{k\geq 1}\mu_k\|e_k\|_{\mathscr{H}^{-1}}^2<\infty,$$

倒数第二个不等式是连续嵌入$\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}$ 以及内积相等性的直接结果。

- 对于给定的 $x\in H^{-1}$，噪声系数被视为 $\sigma(x)$：由 $\sigma(x)\left(Q^{\frac{1}{2}}u\right):=\sum_{k\geq 1}\sqrt{\mu_k}\left\langle e_k,\right.$ $\left.u\right\rangle_{\mathscr{H}^{-1}}e_kx$定义的 $Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1}\to H^{-1}$，这是良定义的，因为只要 $\phi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ 且 $\|\phi\|_{H^1}\leq 1$, 简单计算即可得到

$$\|e_kx\|_{H^{-1}}=\sup\left\{\langle x,e_k\phi\rangle_{(H^{-1},H^1)}:\ \|\phi\|_{H^1}\leq 1\right\}\leq\|x\|_{H^{-1}}\sup_{\|\phi\|_{H^1}\leq 1}\|e_k\phi\|_{H^1}.$$

这里,

$$\begin{aligned}\|e_k\phi\|_{H^1}^2=\|e_k\phi\|_{\mathbb{L}^2}^2+\|\nabla(e_k\phi)\|_{\mathbb{L}^2}^2&\leq\left(\|\phi\|_2^2\|e_k\|_\infty^2+\|\nabla e_k\|_{\mathbb{L}^d}^2\|\phi\|_{\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}^2+\|e_k\|_\infty^2\|\nabla\phi\|_2^2\right)\\&\leq\|e_k\|_\infty^2+\|\nabla e_k\|_{\mathbb{L}^d}^2\|\phi\|_{\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}^2\leq\|e_k\|_\infty^2+C_{H^1\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}^2\|\nabla e_k\|_d^2,\end{aligned}$$

（后一个不等式由连续嵌入 $H^1 \subset \mathscr{H}^1 \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}$ 得出），这相当于

$$\|e_k x\|_{H^{-1}}^2 \leq \|x\|_{H^{-1}}^2 \left(\|e_k\|_\infty^2 + C^2_{H^1 \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}} \|\nabla e_k\|_d^2 \right).$$

因此，$\sigma(x) \in \mathscr{L}\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};\ H^{-1}\right)$。此外，

$$\begin{aligned} \|\sigma(x)\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};H^{-1}\right)} &= \sum_{k\geq 1} \left\| \sigma(x)\left(Q^{\frac{1}{2}} e_k\right) \right\|^2_{H^{-1}} = \sum_{k\geq 1} \mu_k \|e_k x\|^2_{H^{-1}} \\ &\leq \|x\|^2_{H^{-1}} \sum_{k\geq 1} \mu_k \left(\|e_k\|_\infty^2 + C^2_{H^1 \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}} \|\nabla e_k\|_d^2 \right). \end{aligned} \tag{7}$$

3. **关于** H^1_ν。

映射 $(0,1] \ni \nu \mapsto \|\cdot\|_{H_\nu^{-1}}(\mathbb{R}^d)$ 是非递增的，而 $(0,1] \ni \nu \mapsto \|\cdot\|_{H_\nu^1}(\mathbb{R}^d)$ 是非递增的。由此还可知，式 (7) 中出现的常数 $C_{H^1_\nu \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}$（在 $\nu = 1$ 的情形下）可以选取为与 $\nu \in (0,1]$ 无关。形式上，若将 $\mathscr{H}^1$ 视为 $\nu = 0$ 的情形（对应于嵌入 $\mathscr{H}^1 \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}$），则对于 $x \in H_\nu^{-1}$

$$\|\sigma(x)\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};H_\nu^{-1}\right)} \leq \|x\|^2_{H_\nu^{-1}} \sum_{k\geq 1} \mu_k \left(\|e_k\|_\infty^2 + C^2_{\mathscr{H}^1 \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}} \|\nabla e_k\|_d^2 \right). \tag{8}$$

4. 同样的论证也可在 $\mathscr{H}^{-1}$ 上展开，从而得到对于 $x \in \mathscr{H}^{-1}$

$$\|\sigma(x)\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};\mathscr{H}^{-1}\right)} \leq \|x\|^2_{\mathscr{H}^{-1}} \sum_{k\geq 1} \mu_k \left(\|e_k\|_\infty^2 + C^2_{\mathscr{H}^1 \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}} \|\nabla e_k\|_d^2 \right). \tag{9}$$

5. 最后，估计式 (8) 和 (9) 对于应用伊藤等距很有用，从而得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left\| \int_0^t \sigma\left(X(s)\right) dW^Q(s) \right\|^2_{\mathbb{H}} \right] &= \sum_{k\geq 1} \mu_k \mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s) e_k\|^2_{\mathbb{H}}\, ds \right] \\ &\leq \left(\sum_{k\geq 1} \mu_k \left(\|e_k\|_\infty^2 + C^2_{\mathscr{H}^1 \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}} \|\nabla e_k\|_d^2 \right) \right) \mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)\|^2_{\mathbb{H}}\, ds \right], \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\mathbb{H} \in \left\{ \mathscr{H}^{-1},\ H^{-1},\ H_\nu^{-1}, \nu \in (0,1) \right\}$。

2.2.2 关于 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$

前面考虑的算子 J为我们提供了一个元素 $J\left(Q^{\frac{1}{2}}u\right) = \sum\limits_{k\geq 1} \sqrt{\mu_k}\, \langle u, e_k \rangle_{\mathscr{H}^{-1}}\, e_k \in \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$。

注意到，对于给定的 $x \in \mathbb{L}^2$,

$$\|e_k x\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|x\|_{\mathbb{L}^2} \|e_k\|_\infty, \tag{11}$$

与之前一样，可得

$$\|\sigma(x)\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};\mathbb{L}^2\right)} \leq \sum_{k\geq 1} \mu_k \left(\|e_k\|_\infty^2 + C^2_{\mathscr{H}^1 \subset \mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}} \|\nabla e_k\|_d^2 \right) \|x\|^2_{\mathbb{L}^2}. \tag{12}$$

2.3 关于 Stratonovich 的一些考量

在空间 $\mathbb{H}(\mathbb{H} \in \{\mathscr{H}^{-1},\ H^{-1},\ H_\nu^{-1}, \nu \in (0,1)\ \ \mathbb{L}^2\})$ 上，考虑方程

$$dX(t) = f(X(t))dt + \sigma(X(t))dW^Q(t) = \sigma(X(t)) \circ dW^Q(t),\ t \in [0,T],$$

结合 Itô 微分和 Stratonovich微分。直观地说，根据 Itô公式（例如[23, 定理 4.2.5]），对于 $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}^2$，可得

$$\begin{aligned}\|X(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|X(0)\|_{\mathbb{H}}^2 &+ 2\int_0^t \left\langle X(s), \sigma(X(s))dW^Q(s)\right\rangle_{\mathbb{H}} \\ &+ \int_0^t \left(2\left\langle f(X(s)), X(s)\right\rangle_{\mathbb{H}} + \|\sigma(X(s)\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};\mathbb{H}\right)}\right) ds.\end{aligned}$$

按照 Stratonovich微分的思路（例如 [18]），我们可以预期

$$d\|X(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = 2\left\langle X(t), \sigma(X(t)) \circ dW^Q(t)\right\rangle_{\mathbb{H}}.$$

因此，只需简单看一眼（10）的第一行，就会想到考察映射 $\mathbb{H} \ni x \mapsto \left(\sqrt{\mu_k}xe_k\right)_{k\geq 1} \in l^2(\mathbb{H})$。它属于 $\mathscr{L}\left(\mathbb{H}; l^2(\mathbb{H})\right)$ 并且，作为一个副结果，该映射

$$\mathbb{H}\times\mathbb{H} \ni (x,y) \mapsto \tilde{f}(x,y) = \sum_{k\geq 1}\mu_k \left\langle xe_k, ye_k\right\rangle_{\mathbb{H}} \in \mathbb{R} \text{ is a bilinear (bounded) form.}$$

与之前一样,

$$\tilde{f}(x,y) \leq \left(\sum_{k\geq 1}\mu_k\left(\|e_k\|_\infty^2 + C^2_{\mathscr{H}^1\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}\|\nabla e_k\|_d^2\right)\right)\|x\|_{\mathbb{H}}\|y\|_{\mathbb{H}}.$$

接下来可以考虑 $\sigma\otimes\sigma\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$，其通过 Riesz同一化定义

$$\left\langle(\sigma\otimes\sigma)(x), y\right\rangle_{\mathbb{H}} = \tilde{f}(x,y) = \left\langle\sigma(x),\sigma(y)\right\rangle_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};\mathbb{H}\right)}. \tag{13}$$

并注意到

$$\|\sigma\otimes\sigma\|_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})} = \|\sigma\|^2_{\mathscr{L}\left(\mathbb{H};\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};\mathbb{H}\right)\right)}. \tag{14}$$

现在显然应当设定（在 Stratonovich 意义下）

$$X(t)\circ dW(t) := \sigma(X(t))\circ dW^Q(t) := X(t)dW(t) + \frac{1}{2}(\sigma\otimes\sigma)(X(t))\,dt. \tag{15}$$

这与注3.3中的 Itô 情形一致，见 [11] 或第2.3节中的 [2 3].

2.4 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ 构造

为实现本文的目的，我们在 $\mathbb{H}$ 中作出上述识别：$= \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$。关于 $\mathscr{H}^{-1}$ 的构造以及与空间 H_ν^{-1} 的相容性的更多内容，见附录5.3，但这些内容不适用于我们的设定。换言之，我们定义

$$(\sigma\otimes\sigma)(x) := \sum_{k\geq 1}\mu_k e_k^2 x. \tag{16}$$

不难验证

$$\begin{cases} \sigma\otimes\sigma\in\mathscr{L}\left(\mathbb{L}^2;\mathbb{L}^2\right),\ \|\sigma\otimes\sigma\|_{\mathscr{L}(\mathbb{L}^2;\mathbb{L}^2)}\leq\sum\limits_{k\geq1}\mu_k\|e_k\|_\infty^2; \\ \langle(\sigma\otimes\sigma)(x),x\rangle_{\mathbb{L}^2}=\|\sigma(x)\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};\mathbb{L}^2\right)}; \\ \|\sigma\otimes\sigma\|^2_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})}\leq\sum\limits_{k\geq1}\mu_k\|e_k\|_\infty^2\left(\|e_k\|_\infty^2+4C^2_{\mathscr{H}^1\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}\|\nabla e_k\|_d^2\right), \end{cases} \tag{17}$$

其中 $\mathbb{H}\in\left\{\mathscr{H}^{-1},H^{-1},H_\nu^{-1},\ \nu\in(0,1]\right\}$。最后一个不等式的推导与前面相同。下面说明 H^{-1} 情形下的推理。若 $\phi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$，则每当 $\|\phi\|_{H^1}\leq1$,

$$\begin{aligned} \left\|e_k^2\phi\right\|_{H^1}^2&=\left\|e_k^2\phi\right\|_{\mathbb{L}^2}^2+\left\|\nabla\left(e_k^2\phi\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\leq\left(\|\phi\|_2^2\|e_k\|_\infty^4+4\|e_k\|_\infty^2\|\nabla e_k\|_{\mathbb{L}^d}^2\|\phi\|^2_{\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}+\|e_k\|_\infty^4\|\nabla\phi\|_2^2\right) \\ &\leq\|e_k\|_\infty^2\left(\|e_k\|_\infty^2+4\|\nabla e_k\|_{\mathbb{L}^d}^2\|\phi\|^2_{\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}\right)\leq\|e_k\|_\infty^2\left(\|e_k\|_\infty^2+4C^2_{H^1\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}\|\nabla e_k\|_d^2\right). \end{aligned}$$

于是,

$$\left\|e_k^2x\right\|_{H^{-1}}^2\leq\|x\|_{H^{-1}}^2\sup_{\|\phi\|_{H^1}\leq1}\left\|e_k^2\phi\right\|_{H^1}\leq\|e_k\|_\infty^2\left(\|e_k\|_\infty^2+4C^2_{H^1\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}\|\nabla e_k\|_d^2\right)\|x\|_{H^{-1}}^2,$$

从而得到该不等式。下面我们设

$$C_0:=C^2_{\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}}\sum_{k\geq1}\mu_k\left(\|e_k\|_\infty^2\vee1\right)\left(\|e_k\|_\infty^2+4C^2_{\mathscr{H}^1\subset\mathbb{L}^{\frac{2d}{d-2}}}\|\nabla e_k\|_d^2\right). \tag{18}$$

3 主要结果

本文将按照下文的定义，证明方程 (2) 的解的存在性和唯一性。

定义 2. 任取 $T>0$。设 $x\in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\cap\mathscr{H}^{-1}$。若 $\mathscr{H}^{-1}$ - 值适应过程 X满足以下条件，则称其为方程 *(2)* 的强解

$X(t,\xi,\omega)>0$, $dt\times d\xi\times d\mathbb{P}$几乎处处成立于
$[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega$，$X\in L^2\left(\Omega\times(0,T)\times\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\cap C_{\mathbb{P}}$
$([0,T];\ \mathscr{H}^{-1})$,$ln\left(X(\cdot)\right)\in L^2\left([0,T]\times\Omega;\ \mathscr{H}^1\right)$，并且

$$\langle X(t),e_j\rangle_2=\langle x,e_j\rangle_2-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\langle\nabla\ln(X),\nabla e_j\rangle_{\mathbb{R}^d}d\xi ds+\left\langle\int_0^tX(s)\circ dW_s,e_j\right\rangle_2$$

对所有 $j\in\mathbb{N}$ 以及所有 $t\in[0,T]$，其中 $\{e_j\}$ 是上述正交归一基。

该方程中关注的对象是在其自然定义域 $\mathbb{R}_+^*:=\{r\in\mathbb{R}$ 上的自然对数函数；$r>0\}$。为便于记号，我们通过如下设定将其扩展为集值函数 $\Psi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\Psi(r)=\begin{cases}\{\ln r\}, & \forall r\in\mathscr{D}(\Psi):=\mathbb{R}_+^*,\\ \emptyset, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

容易注意到，与 Ψ 相关的势函数由（扩展）实值函数 $j\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 给出，

$$j(r):=\begin{cases} r\ln r-r, & \text{if } r\in\mathbb{R}_+^*,\\ 0, & \text{if } r=0,\\ +\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

容易注意到 j 是凸且下半连续的。

注3。 容易看出，我们对解的定义与通常的多孔介质方程解的定义相似。从随机观点来看，它是一个强解；从偏微分方程的角度来看，它是一个变分解。

现在给出本文的主要结果。

定理4。 对于每个满足 $x\ln x-x\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ 且在 $\mathbb{R}^d$ 上几乎处处满足 $x>0$ 的 $x\in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\cap\mathscr{H}^{-1}$，方程 *(2)* 都存在唯一的正解 X，其意义如上面的定义所述。

4 主要结果的证明

步骤1。 正如引言中所述，我们将对该解进行三次逐次近似。

我们首先考虑由 Ψ 的正则化版本驱动的方程。也就是说，固定 $\lambda>0$ 后，我们设

$$\tilde{\Psi}_\lambda(r):=\Psi_\lambda(r)-\Psi_\lambda(0)+\lambda r, \tag{19}$$

对所有 $r\in\mathbb{R}$ 均成立。

如果莫罗定理适用，使得势函数 j 的次微分（即 Ψ）可以通过 j 的下确界卷积的梯度来逼近，记为

$$j_\lambda(r):=\inf_{\bar{r}\in\mathbb{R}}\left\{j\left(\bar{r}\right)+\frac{1}{2\lambda}\left|r-\bar{r}\right|^2\right\},\ \forall\lambda>0,$$

我们可以设 $\Psi_\lambda:=\nabla j_\lambda$，并回顾一下，这对应于 Ψ 的吉田逼近，即

$$\Psi_\lambda=\frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{I}-(\mathbb{I}+\lambda\Psi)^{-1}\right)=\Psi\circ(\mathbb{I}+\lambda\Psi)^{-1},$$

这出现在逼近式 (19) 中。

˜ 在 (19) 的第二项中，引入了 $\Psi_\lambda(0)$，以便得到 $\Psi_\lambda(0)=0$；最后一项则是为了使我们的算子具有强单调性。

我们考虑第一个近似方程

$$\begin{cases} dX_\lambda(t)=\triangle\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_\lambda(t)\right)\ dt\ +\frac{1}{2}\left(\sigma\otimes\sigma\right)\left(X_\lambda(t)\right)\ dt+X_\lambda(t)\ dW(t),\ t\geq 0;\\ X_\lambda(0)=x.\end{cases} \tag{20}$$

步骤 2. 此外，我们还考虑算子 $\triangle$ 的进一步扰动，即 $\triangle-\nu\mathbb{I}$，其中 $\nu>0$ 和 $\mathbb{I}$ 为恒等算子。在适当情况下，我们将省略该 $\mathbb{I}$ 算子，仅记作 $\triangle-\nu$。因此，我们引入

$$\begin{cases} dX_{\lambda,\nu}(t)=(\triangle-\nu)\,\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_{\lambda,\nu}(t)\right)\ dt\ +\frac{1}{2}\left(\sigma\otimes\sigma\right)\left(X_{\lambda,\nu}(t)\right)\ dt+X_{\lambda,\nu}(t)\ dW(t),\ t\geq 0;\\ X_{\lambda,\nu}(0)=x.\end{cases} \tag{21}$$

关于方程 (21) 适定性的论证可由 [23, 第 4] 章得出。为配合 [23, 第 4], 章中的记号，我们方便地记为

$$A := (\triangle - \nu)\,\tilde{\Psi}_\lambda + \frac{1}{2}(\sigma \otimes \sigma) : V := \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to V^*,$$
$$B := \sigma : V \to \mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right); H_\nu^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$

两个确定性算子。在后续推导中，我们还将使用

$$A_\nu := (\triangle - \nu)\,\tilde{\Psi}_\lambda : V := \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to V^*,$$

不含漂移项中的 Stratonovich 项的算子。从这个意义上说，该方程既可以看作由 A 驱动的方程，也可以看作由 A_ν 驱动、受 $\frac{1}{2}\sigma \otimes \sigma$ 漂移项扰动的方程。
吉尔芬德三元组基于包含关系 $V := \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right) \subset H_\nu^{-1} \subset V^*$（另请参见 $\nu = 1$ 情形下备注1中的断言1）。特别地，回顾（见 [23, 例4.1。11] 及后续断言）

$$\langle u, x\rangle_{(V,V^*)} = \langle u, x\rangle_{H_\nu^{-1}} = \left\langle (\nu - \triangle)^{-\frac{1}{2}} u, (\nu - \triangle)^{-\frac{1}{2}} x \right\rangle_2, \tag{22}$$

一旦 $x \in H_\nu^{-1}$（关于这一特别有用的等式，请读者参见 [23, 备注4.1。14], 同时注意我们所用的算子，即 $\triangle - \nu$）。为方便读者，附录5.1中给出了证明的主要要素。根据 [23, 定理4.2。4], , 方程（21）存在唯一解，记为 $X_{\lambda,\ \nu}$ 满足

1. $X_{\lambda,\ \nu}$ 是 $\mathbb{F}$-适应的，且具有连续的 H_ν^{-1}值轨迹;
2. $X_{\lambda,\ \nu} \in \mathbb{L}^2\left([0,T] \times \Omega;\ \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ 因此也属于$\mathbb{L}^2\left([0,T] \times \Omega;\ H_\nu^{-1}\right)$。 3. $\mathbb{E}\left[\text{上确界}_{t\in[0,T]} \left\|X_{\lambda,\ \nu}(t)\right\|_{H_\nu^{-1}}^2\right] < \infty.$

步骤 3。逼近解$X_{\lambda,\ \nu}^\varepsilon$。此时，我们引入以下随机微分方程

$$\begin{cases} dX_{\lambda,\nu}^\varepsilon(t) = -A_\nu^\varepsilon\left(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(t)\right)\ dt\ + \sigma(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(t))\ \circ\ dW^Q(t),\ t \geq 0; \\ X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(0) = x. \end{cases} \tag{23}$$

我们回顾一下，在此情形下，吉田逼近$A_\nu^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathbb{I} - (\mathbb{I} + \varepsilon A_\nu)^{-1}\right)$ 和预解算子 $\mathbb{J}_\varepsilon := (\mathbb{I} + \varepsilon A_\nu)^{-1}$ 在 $H^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 和 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$中均为利普希茨连续。

现在我们将依次对 ε、 ν，最后对 λ取极限。
步骤 4. 对 ε 取极限基于以下结果。

命题 5. 设 $T > 0$ 为一个有限且固定的时间范围。则以下断言成立。

1. 存在一个通用常数 C，仅取决于 T 和 C_0，而不取决于 ε， λ， ν，使得

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\left\|X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(t)\right\|_{H_\nu^{-1}}^2\right] \leq C\left\|x\right\|_{H_\nu^{-1}}^2;\ \mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\left\|X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(t)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\right] \leq C\left\|x\right\|_{\mathbb{L}^2}^2; \\ \mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\left\|X_{\lambda,\nu}(t)\right\|_{H_\nu^{-1}}^2\right] \leq C\left\|x\right\|_{H_\nu^{-1}}^2;\ \underset{0\leq t\leq T}{ess\ sup}\ \mathbb{E}\left[\left\|X_{\lambda,\nu}(t)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\right] \leq C\left\|x\right\|_{\mathbb{L}^2}^2. \end{cases} \tag{24}$$

2. 有收敛关系 $X^{\varepsilon,\ \nu}_{\lambda,\ \nu} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} X_{\lambda,\ \nu}$ 在 $\mathbb{L}^{\infty}\left([0,T]\right.$ 中强收敛；$\mathbb{L}^{2}\left(\Omega\right.$；$\left.H^{-1}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\right)$ 并且在 $\mathbb{L}^{\infty}\left([0,T]\right.$ 中弱收敛；$\mathbb{L}^{2}\left(\Omega\right.$；$\left.\left.\mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\right)\right)$。

3. 若初始数据 x 非负，则解 $X^{\varepsilon,\ \nu}_{\lambda,\ \nu}(t)$ 对所有 $t\in[0,T]$ 均几乎必然保持非负。

为方便读者，我们提供一些证明要点。请注意，因此，若初始数据 x非负，则解 $X_{\lambda,\ \nu}$ 保持非负。

命题 *5* 的证明要点。1. 我们先考察 $H^{-1}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$。

由于在此框架下我们处理的是一个由利普希茨系数驱动的方程 (23)，该解在 $\mathbb{L}^{2}_{\mathbb{F}}\left(\Omega;\ C\left([0,T];\right.\right.$ $\left.\left.H^{-1}(\mathbb{R})\right)\right)$ 中唯一（即一个 $\mathbb{F}$- 适应过程，可视为取值于 C 的平方可积随机变量）。对该过程，对于 $\nu>0$，应用通常的（希尔伯特空间）伊藤公式，可得函数 $\frac{1}{2}\|\cdot\|^{2}_{H^{-1}_{\nu}}$，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(t)\right\|^{2}_{H^{-1}_{\nu}}\\
=&\frac{1}{2}\|x\|^{2}_{H^{-1}_{\nu}}+\int_{0}^{t}\left(\left\langle -A^{\varepsilon}_{\nu}X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(s),X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(s)\right\rangle_{H^{-1}_{\nu}}+\frac{1}{2}\left\langle(\sigma\otimes\sigma)\left(X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(s)\right),X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(s)\right\rangle_{H^{-1}_{\nu}}\right)\,ds\\
&+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\left\|\sigma\left(X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(s)\right)\right\|^{2}_{\mathscr{L}_{2}\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};H^{-1}_{\nu}\right)}ds\\
&+\int_{0}^{t}\left\langle X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(s),\sigma\left(X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(s)\right)dW^{Q}(s)\right\rangle_{H^{-1}_{\nu}}.
\end{aligned}
$$

考虑到算子的单调性，并结合 (10)、(8) 和 (17) 应用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，可得对于 $0\le t\le r\le T$，

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le r}\left\|X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(t)\right\|^{2}_{H^{-1}_{\nu}}\right]\le C\left(\|x\|^{2}_{H^{-1}_{\nu}}+\int_{0}^{r}\mathbb{E}\left[\left\|X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(s)\right\|^{2}_{H^{-1}_{\nu}}\right]ds\right),
$$

再利用 Gronwall不等式即可得出结论。同样的论证也可直接应用于解 $X_{\lambda,\ \nu}$。

2. 现在我们来讨论 $\mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ 中的估计。

由于此时系数是利普希茨连续的，该方程适定，并在 $\mathbb{L}^{2}_{\mathbb{F}}\left(\Omega;\ C\left([0,T];\ \mathbb{L}^{2}(\mathbb{R})\right)\right)$ 中存在一个解。然后，应用 Itô公式计算 $\|\cdot\|^{2}_{\mathbb{L}^{2}}$，并使用标准论证（例如 [10,第 908 页，第 5] 行，保证 $\left\langle A^{\varepsilon}_{\nu}X^{\varepsilon,\ \nu}_{\lambda,\ \nu},X^{\varepsilon,\ \nu}_{\lambda,\ \nu}\right\rangle_{\mathbb{L}^{2}}\ge 0$），可以找到一个通用常数 $C>0$，它仍依赖于 T 和 C_{0}，但与 ε，ν，λ 无关，使得

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left\|X^{\varepsilon}_{\lambda,\nu}(t)\right\|^{2}_{\mathbb{L}^{2}}\right]\le C\left\|x\right\|^{2}_{\mathbb{L}^{2}},\ \forall x\in\mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right),\ \forall t\in[0,T].\tag{25}
$$

.

3. 收敛的证明与 [6, 引理 6.4 中的断言 3]相同。

4. 关于 $\mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ 范数的剩余不等式（涉及 $X_{\lambda,\ \nu}$）可通过令 $\varepsilon\to 0+$ 并取极限得到。下面给出一些细节。沿某个子列，$X^{\varepsilon,\ \nu}_{\lambda,\ \nu}\to X_{\lambda,\ \nu}$，$dt\times\mathbb{P}\times d\xi$ 几乎处处成立于 $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^{d}$。特别地，可得 $X_{\lambda,\ \nu}\in\mathbb{L}^{2}\left(\Omega\times[0,T];\ \mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\right)$。

另一方面，根据第 2 项中的证明，有 $\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathbb{E}\left[\left\|X_{\lambda,\ \nu}^{\varepsilon}(s)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\right] dr \leq C\|x\|_{\mathbb{L}^2}^2$（对所有 $0 \leq a < b \leq T$）。沿上述序列取极限，得到 $\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathbb{E}\left[\|X_{\lambda,\ \nu}(s)\|_{\mathbb{L}^2}^2\right] dr \leq C\|x\|_{\mathbb{L}^2}^2$，对所有 $0 \leq a < b \leq T$ 均成立。于是，对于 $\mathbb{E}\left[\|X_{\lambda,\ \nu}(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2\right]$ 的每个勒贝格点（因此在 $[0,T]$ 上几乎处处），都有 $\mathbb{E}\left[\|X_{\lambda,\ \nu}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2\right] \leq C\|x\|_{\mathbb{L}^2}^2$。

5. 最后，为证明非负性，在 $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 中考虑闭子空间 $K := \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_+)$。显然，投影算子 $\Pi_K(x) = x^+$ ($\mathbb{P}$-a.s.) 是单值的，且距离 $d_K^2(x) = \|x^-\|_{\mathbb{L}^2}^2$ 是正则的。这里，$x^- := -x$ if $x < 0$，若 $x \geq 0$ 则为 0，且 $x^+ := x$ if$x \geq 0$，若 $x < 0$则为 0，因此 $x = x^+ - x^-$。然后，可以应用 [12, Theorem 3.5] 中的结果，得到一个充分条件（参见 [12, Section 4.3]），如下所示

$$-\sum_{k\geq 1}\mu_k\left\|e_k x^-\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 2\left\langle -A_\nu^\varepsilon x + \frac{1}{2}\sigma\otimes\sigma(x), x^-\right\rangle_2 + C\left\|x^-\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \geq 0,$$

对某个 $C > 0$ 以及任意 $x \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$。注意到 $\langle \sigma\otimes\sigma(x)\ x^-\rangle_2 = \sum \mu_k \langle e_k x, e_k x^-\rangle_2 = -\sum \mu_k \|e_k x^-\|_{\mathbb{L}^2}^2$。根据不等式 (11)，只需证明 $\langle A_\nu^\varepsilon x, x^-\rangle_2 \leq C\|x^-\|_{\mathbb{L}^2}^2$（其中某个通用常数为 $C > 0$）。我们回顾一下，$\left\langle (J_\varepsilon x)^-, x^-\right\rangle_2 \leq \|x^-\|_2^2$（见 [6,公式 (2.81)]，使得

$$\begin{aligned}\left\langle A_\nu^\varepsilon x, x^-\right\rangle_2 &= \left\langle \frac{1}{\varepsilon}(x - J_\varepsilon x), x^-\right\rangle_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\left\|x^-\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \left\langle \frac{1}{\varepsilon}J_\varepsilon x, x^-\right\rangle_2 \\ &\leq -\frac{1}{\varepsilon}\left\|x^-\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\langle \frac{1}{\varepsilon}(J_\varepsilon x)^-, x^-\right\rangle_2 \leq 0.\end{aligned}$$

□

步骤 5. 当 $\nu \to 0+$ 时的极限过程基于以下结果。本节还给出一些后续步骤所必需的估计。

命题 6. 对于固定的 $T > 0$，以下结论成立。

1. 对于每个 $\lambda > 0$、$X_{\lambda,\ \nu}$ 当 $\nu \to 0+$ 时，收敛到 X_λ，并且在 $\mathbb{L}^2(\Omega;\ C([0,T];\ H^{-1}))$ 中强收敛；

2. 存在一个与 $\lambda > 0$ 及初始数据 x 无关的通用常数 $C > 0$，使得

$$\begin{cases}(a)\ \mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\|X_\lambda(t)\|_{\mathscr{H}^{-1}}^2\right] \leq C\|x\|_{\mathscr{H}^{-1}}^2; \\ (b)\ ess\ sup\limits_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left[\|X_\lambda(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2\right] \leq C\|x\|_{\mathbb{L}^2}^2.\end{cases} \tag{26}$$

3. 回顾一下，根据假设，初始数据 x 满足 $x\ln x - x \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$。于是，族 $(\Psi_\lambda(X_\lambda))^{\lambda\in(0,1]}$ 在 $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0,T]$ 中一致有界；$\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^d))$ 即

$$\sup_{\lambda\in(0,1]}\|\Psi_\lambda(X_\lambda)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega\times[0,T];\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^d))}^2 \leq C\left(1 + \|x\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^d}(x\ln x - x)(\xi)\,d\xi\right). \tag{27}$$

命题 *6* 的证明。 1. 为避免不必要的复杂性，我们将直接固定 $\lambda > 0$ 并记作$X := X_{\lambda,\ \nu}$ 以及 $Y := X_{\lambda,\ \nu'}$。

$$\begin{aligned} d\ (X-Y)(t) = &\left((\Delta-\nu)\,\tilde{\Psi}_\lambda(X(t)) - \left(\Delta-\nu'\right)\tilde{\Psi}_\lambda(Y(t))\right)\ dt \\ &+ \frac{1}{2}\sigma\otimes\sigma\left(X(t)-Y(t)\right)\ dt + \left(\sigma\left(X(t)-Y(t)\right)\right)\ dW^Q(t). \end{aligned} \tag{28}$$

我们记

$$\begin{aligned} \left((\Delta-\nu)\,\tilde{\Psi}_\lambda(x) - \left(\Delta-\nu'\right)\tilde{\Psi}_\lambda(y)\right) = &(\Delta-1)\left(\tilde{\Psi}_\lambda(x)-\tilde{\Psi}_\lambda(y)\right) \\ &+ (1-\nu)\left(\tilde{\Psi}_\lambda(x)-\tilde{\Psi}_\lambda(y)\right) - \left(\nu-\nu'\right)\tilde{\Psi}_\lambda(y). \end{aligned}$$

鉴于此，对过程 (28) 应用 Itô公式，并利用泛函 $\|\cdot\|^2_{H^{-1}}$ 以及 ˜的严格 λ-单调性 Ψ_λ ，可得

$$\begin{aligned} &\|(X-Y)(t)\|^2_{H^{-1}} + \lambda\int_0^t \|X(s)-Y(s)\|^2_{\mathbb{L}^2}\,ds \\ &\leq \int_0^t \left\{\left|\left\langle \tilde{\Psi}_\lambda(X(s)) - \tilde{\Psi}_\lambda(Y(s)), X(s)-Y(s)\right\rangle_{H^{-1}}\right|\right\} ds \\ &+ \int_0^t \left\{\left|\nu-\nu'\right| \int_0^t \left|\left\langle \tilde{\Psi}_\lambda(Y(s)), X(s)-Y(s)\right\rangle_{H^{-1}}\right|\right\} ds \\ &+ C\int_0^t \|X(s)-Y(s)\|^2_{H^{-1}}\,ds + \left|\int_0^t \left\langle X(s)-Y(s), (\sigma(X(s))-\sigma(Y(s)))\,dW^Q(s)\right\rangle_{H^{-1}}\right| \end{aligned}$$

（同样，常数 C 来自 (10) 和 (17)。）

下面说明如何处理项 $\left|\left\langle \tilde{\Psi}_\lambda(X(s)) - \tilde{\Psi}_\lambda(Y(s))\ X(s)\ -Y(s)\right\rangle_{H^{-1}}\right|$。

˜利用 Ψ_λ 的 Lipschitz连续性，可找到常数 $C>0$ （可能依赖于 $\lambda>0$，但与 $t\leq T$ 以及 ν,ν' 无关），使得

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \tilde{\Psi}_\lambda(x)-\tilde{\Psi}_\lambda(y), x-y\right\rangle_{H^{-1}}\right| &\leq \left\|\tilde{\Psi}_\lambda(x)-\tilde{\Psi}_\lambda(y)\right\|_{\mathbb{L}^2}\|x-y\|_{H^{-1}} \\ &\leq C\|x-y\|_{\mathbb{L}^2}\|x-y\|_{H^{-1}} \\ &\leq \frac{\lambda}{2}\|x-y\|^2_{\mathbb{L}^2} + C\|x-y\|^2_{H^{-1}}. \end{aligned}$$

利用线性界 $\tilde{\Psi}_\lambda$ ，并用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式处理 W^Q 项，可得常数 $C>0$ 的存在（该常数可能依赖于 $\lambda>0$ ，但与 $t\leq T$ 以及 ν,ν' 无关），使得对 $0\leq t\leq r\leq T$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq r}\|(X-Y)(t)\|^2_{H^{-1}}\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^r \|X(s)-Y(s)\|^2_{\mathbb{L}^2}\,ds\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \|X(s)-Y(s)\|^2_{H^{-1}}\,ds\right] + C\left|\nu-\nu'\right|\mathbb{E}\left[\int_0^r \|Y(t)\|^2_{\mathbb{L}^2}\,ds\right]. \end{aligned}$$

T因此，借助 Gronwall不等式以及命题 5 1. 中的估计，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\left(X_{\lambda,\nu}(t)-X_{\lambda,\nu'}(t)\right)\right\|^2_{H^{-1}}\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|X_{\lambda,\nu}(s)-X_{\lambda,\nu'}(s)\right\|_{\mathbb{L}^2}\right] \leq C\left|\nu-\nu'\right|\|x\|_{\mathbb{L}^2}. \tag{29}$$

第一个断言由底层空间的完备性得出。

2. 为了证明极限 X_λ 属于 $\mathscr{H}^{-1}$，可按如下步骤进行。我们回顾一下，由于 (24),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X_{\lambda,\nu}(t)\|^2_{H_\nu^{-1}}\right]\leq C\|x\|^2_{H_\nu^{-1}}.$$

另一方面，由于 $\mu\mapsto\|\cdot\|_{H_\mu^{-1}}$单调不增，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X_{\lambda,\nu}(t)\|^2_{H_\mu^{-1}}\right]\leq C\|x\|^2_{H_\nu^{-1}},\ \forall\nu\leq\mu.$$

固定 $\mu>0$后，根据第一个断言，

$$X_{\lambda,\nu}\to X_\lambda\ as\ \nu\to 0+\quad \text{in}\quad \mathbb{L}^2\left(\Omega;C\left([0,T];H_\mu^{-1}\right)\right) \tag{30}$$

（注意 $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ 和 $\|\cdot\|_{H_\mu^{-1}}$等价）。然后令 $\nu\to 0+$趋于极限，得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X_\lambda(t)\|^2_{H_\mu^{-1}}\right]\leq C\|x\|^2_{\mathscr{H}^{-1}}.$$

最后，注意到

$$\lim_{\mu\to 0+}\sup_{0\leq t\leq T}\|X_\lambda(t)\|_{H_\mu^{-1}}=\sup_{\mu>0+}\sup_{0\leq t\leq T}\|X_\lambda(t)\|_{H_\mu^{-1}}=\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{\mu>0+}\|X_\lambda(t)\|_{H_\mu^{-1}}=\sup_{0\leq t\leq T}\|X_\lambda(t)\|_{\mathscr{H}^{-1}},$$

并且根据单调收敛定理，得到 (26) 中的第一个不等式。
对于第二种情况，利用 $X_{\lambda,\nu}$ 的（某个子序列）几乎必然收敛到 X_λ，再结合 Fatou引理和命题 5 中的上界估计即可。
3. 由于我们关注的是诸如 $|\nabla\Psi_\lambda(X_\lambda)|$ 这样的项，因此引入

$$\Phi_\lambda(x):=\int_{\mathbb{R}^d}\left(j_\lambda\left(x\left(\xi\right)\right)+\frac{\lambda}{2}\left(x(\xi)\right)^2\right)d\xi,\ \forall x\in\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right),$$

使得 $\mathbb{L}^2$ Fréchet 导数作用于 $\Phi_\lambda(x)$ 后得到 $\Psi_\lambda(x)+\lambda x$。

我们对 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ 值过程 X_λ 应用 Itô公式，并结合 Φ_λ （该计算可按照步骤 3 中的方法加以论证），得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Phi_\lambda\left(X_\lambda(t)\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\Phi_\lambda\left(x\right)\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^t\left\langle\Delta\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_\lambda(s)\right),\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)+\Psi_\lambda\left(0\right)\right\rangle_{\mathbb{L}^2}ds\right]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\mu_k\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}X_\lambda(s)\left(\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)+\Psi_\lambda(0)\right)e_k^2d\xi ds\right]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\mu_k\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\tilde{\Psi}'_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)X_\lambda^2(s)e_kd\xi ds\right].
\end{aligned}$$

˜现在我们关注项 $\Psi'_\lambda(X_\lambda(s))$。利用链式法则，容易计算得到

$$\tilde{\Psi}'_\lambda(r) = \lambda + \frac{1}{\lambda + J_\lambda(r)} \tag{31}$$

其中 $J_\lambda(r) = (\mathbb{I} + \lambda\Psi)^{-1}(r)$。
由 (11) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Phi_\lambda\left(X_\lambda(t)\right)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\nabla\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Phi_\lambda(x)\right] + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\mu_k\Big\{\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left(\Psi_\lambda\left(X_\lambda(s)\right) + \lambda X_\lambda(s)\right)X_\lambda(s)e_k^2 d\xi ds\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\frac{X_\lambda^2(s)}{\lambda + J_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)}e_k^2 d\xi\, ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \lambda\left\|X_\lambda(s)e_k^2\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 ds\right]\Big\}.
\end{aligned} \tag{32}$$

我们可以证明

命题 7. 应用 $\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto \Psi_\lambda(r) + \overset{r}{\lambda + J_\lambda(r)} - 2r$ 非正（对于 ~~$\lambda \leq \frac{1}{2}$~~）。命题 7 的证明依赖于一些技术性计算，将在附录中给出。

回到 (32)，对于 $\lambda \leq 1/2$，有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Phi_\lambda\left(X_\lambda(t)\right)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\nabla\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\Phi_\lambda(x)\right] + \sum_{k\geq 1}\mu_k\left\|e_k\right\|_\infty^2(\lambda+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t\left\|X_\lambda(s)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 ds\right].
\end{aligned} \tag{33}$$

根据 (26) (b)，注意到 Φ_λ 有下界，且对于 $\lambda > 0$，$j_\lambda(r) \leq j(r) \leq r\ln r - r$，即可得出我们的结论。 □

步骤 6。 </style}当 $\lambda \to 0+$ 时的极限过渡
作为上一步估计的推论，以下弱收敛成立。

$$\begin{cases}
X_\lambda \underset{\lambda\longrightarrow 0}{\to} X, \text{ weakly-* in } \mathbb{L}^\infty\left([0,T];\mathbb{L}^2\left(\Omega;\mathscr{H}^{-1}\right)\right); \\
X_\lambda \underset{\lambda\longrightarrow 0}{\to} X, \text{ weakly in } \mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega;\mathbb{L}^2\right); \\
\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_\lambda\right) \underset{\lambda\longrightarrow 0}{\to} \eta, \text{ weakly in } \mathbb{L}^2\left([0,T]\times\Omega;\mathscr{H}^1\right).
\end{cases} \tag{34}$$

利用 $\sigma\otimes\sigma$ 在 $\mathscr{H}^{-1}$ 中的线性性和有界性，可以得到极限方程在弱意义下成立

$$\left\langle X(t), e_j\right\rangle_2 = \left\langle x, e_j\right\rangle_2 - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left\langle\nabla\eta(X), \nabla e_j\right\rangle_{\mathbb{R}^d} d\xi ds + \left\langle\int_0^t X(s)\circ dW_s, e_j\right\rangle_2. \tag{35}$$

步骤 7。 最后，仍需证明 $\eta = \Psi(X)$ 在 $\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^d$ 上以 $\mathbb{P}\times\mathscr{L}eb$ 几乎处处意义成立。

这可由以下结果推出。

命题 8. 以下断言成立。

$$\limsup_{\lambda\to 0+}\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\tilde{\Psi}_\lambda\left(X_\lambda(t)(\xi)\right)X_\lambda(t)(\xi)d\xi dt\right]\leq\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\eta(t)(\xi)X(t)(\xi)d\xi dt\right]. \tag{36}$$

证明。首先注意，若 K 是 $\mathbb{R}^d$ 的有界子集，且 $x\in\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ 取非负值，则 $x\mathbf{1}_K\in\mathscr{H}^{-1}$。事实上，首先写作 $x(\xi)\mathbf{1}_K(\xi)=x(\xi)\mathbf{1}_{x(\xi)\leq 1,\ \xi\in K}+x(\xi)\mathbf{1}_{x(\xi)>1,\ \xi\in K}$。然后，令 $p=\frac{2d}{d+2}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(x(\xi)\mathbf{1}_K(\xi)\right)^p d\xi\leq\int_{\mathbb{R}^d}\left(\mathbf{1}_{\xi\in K}+x^2(\xi)\mathbf{1}_{x(\xi)>1}\right)d\xi\leq\mathscr{L}eb(K)+\|x\|_2^2<\infty.$$

因此，$x\mathbf{1}_K\in\mathbb{L}^{\frac{2d}{d+2}}\subset\mathscr{H}^{-1}$。由此可知，若 $Y\in\mathbb{L}^2\left(\Omega\times[0,T];\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$，则 $Y\mathbf{1}_K\in\mathbb{L}^2\left(\Omega\times[0,T];\mathscr{H}^{-1}\right)$。

接下来，对于 $k\geq 1$，令 K 为一个勒贝格测度连续的有界 [1] 集合（即 $\mathscr{L}eb(\partial K)=0$），且包含 e_k 的支集。

那么，若 $x\in\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)\cap\mathscr{H}^{-1}$，则 $x\mathbf{1}_K$ 是 $\mathscr{H}^{-1}$ 值的，并且

$$\langle x\mathbf{1}_K,e_k\rangle_{\mathscr{H}^{-1}}=-\left\langle x\mathbf{1}_K,(-\Delta)^{-1}e_k\right\rangle_2=-\left\langle x,(-\Delta)^{-1}e_k\right\rangle_2=\langle x,e_k\rangle_{\mathscr{H}^{-1}} \tag{37}$$

我们声称，$X_\lambda\mathbf{1}_K$ 在 $\mathbb{L}^2\left(\Omega\times[0,T]\right.$ 中强收敛；$\left.\mathscr{H}^{-1}\right)$ 到 $X\mathbf{1}_K$。

我们进一步指出

1. 若 $x\in\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)\cap H^{-1}$ 且 $y\in\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$，则

$$\langle x\mathbf{1}_K,y\rangle_{H_\mu^{-1}}=\left\langle(\mu\mathbb{I}-\Delta)^{-1}\left(\mathbf{1}_Kx\right),y\right\rangle_2=\int_K(\mu\mathbb{I}-\Delta)^{-1}x(\xi)y(\xi)d\xi.$$

2. 若 x^n 在 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中强收敛到 x，则根据前面相同的论证，$(x^n-x)\mathbf{1}_K$ 在 $\mathbb{L}^{\frac{2d}{d+2}}$ 中收敛到 0（因此也在更大的空间 $\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}$ 中收敛）。
3. 对于 X^n 在 $\mathbb{L}^2\left(\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^d\right.$ 中强收敛到 X 的情形，同样有 $(X_n-X)\mathbf{1}_K$ 在 $\mathbb{L}^2\Big(\Omega\times[0,T]$ 中强收敛到 0；$\left.\mathbb{L}^{\frac{2d}{d+2}}\right)$；

在 H_ν^{-1} 中对 $\left(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon-X_{\lambda',\nu}^\varepsilon\right)\mathbf{1}_K$ 应用 Itô公式。

在此框架下，项 $-A_\nu^\varepsilon\left(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon\right)+A_\nu^\varepsilon\left(X_{\lambda',\nu}^\varepsilon\right)$ 在 $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ 中是一致的，且 $\left(A_\nu^\varepsilon\left(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon\right)+A_\nu^\varepsilon\left(X_{\lambda',\nu}^\varepsilon\right)\right)\mathbf{1}_K$ 属于 $\mathbb{L}^{\frac{2d}{d+2}}\subset\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}$。由此可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left\|\left(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(t)-X_{\lambda',\nu}^\varepsilon(t)\right)\mathbf{1}_K\right\|_{H_\nu^{-1}}^2\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_K\left[\tilde{\Psi}_\lambda\left(\mathbb{J}_\varepsilon\left(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(s)\right)\right)-\tilde{\Psi}_{\lambda'}\left(\mathbb{J}_\varepsilon\left(X_{\lambda',\nu}^\varepsilon(s)\right)\right)\right]\left(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(s)-X_{\lambda',\nu}^\varepsilon\right)d\xi\,ds\right]\\
&\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t\left\|\left(X_{\lambda,\nu}^\varepsilon(s)-X_{\lambda',\nu}^\varepsilon(s)\right)\mathbf{1}_K\right\|_{H_\nu^{-1}}^2ds\right]
\end{aligned}$$

[1] N注意，根据密度论证，我们可以假设 $e_k\in\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d)\cap\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$，并采用 [3 中的记号].

因此，在时间区间 $[a,b]\subset[0,T]$ 上对其积分，并先令$\varepsilon\to 0+$ 再令 $\nu\to 0+$ 取极限（其中每个相关过程都属于 $\mathbb{L}^2$），即可在每个勒贝格点处得到下列不等式（故 $\mathbb{P}$-几乎处处成立）。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\frac{1}{2}\left\|X_\lambda(t)\mathbf{1}_K-X_{\lambda'}(t)\mathbf{1}_K\right\|^2_{\mathscr{H}^{-1}}+\mathbb{E}\int_0^t\int_K\left(\Psi_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)-\Psi_{\lambda'}\left(X_{\lambda'}(s)\right)\right)\left(X_\lambda(s)-X_{\lambda'}(s)\right)d\xi ds\\
&+\mathbb{E}\int_0^t\int_K\left(\lambda X_\lambda(s)-\lambda' X_{\lambda'}(s)\right)\left(X_\lambda(s)-X_{\lambda'}(s)\right)d\xi ds\\
\leq\ & C\mathbb{E}\int_0^t\left\|X_\lambda(s)\mathbf{1}_K-X_{\lambda'}(s)\mathbf{1}_K\right\|^2_{\mathscr{H}^{-1}}ds.
\end{aligned}$$

由于我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\left(\Psi_\lambda\left(X_\lambda\right)-\Psi_{\lambda'}\left(X_{\lambda'}\right)\right)\left(X_\lambda-X_{\lambda'}\right)\\
=\ &\left(\Psi\left(J_\lambda\left(X_\lambda\right)\right)-\Psi\left(J_{\lambda'}\left(X_{\lambda'}\right)\right)\right)\left(J_\lambda\left(X_\lambda\right)-J_{\lambda'}\left(X_{\lambda'}\right)+\lambda\Psi_\lambda\left(X_\lambda\right)-\lambda'\Psi_{\lambda'}\left(X_{\lambda'}\right)\right)\\
\geq\ &-\frac{(\lambda+\lambda')}{2}\left(\left|\Psi_\lambda\left(X_\lambda\right)\right|^2+\left|\Psi_{\lambda'}\left(X_{\lambda'}\right)\right|^2\right),
\end{aligned}$$

由格朗沃尔引理可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\|X_\lambda(t)\mathbf{1}_K-X_{\lambda'}(t)\mathbf{1}_K\right\|^2_{\mathscr{H}^{-1}}\\
\leq\ &\left(\lambda+\lambda'\right)\mathbb{E}\int_0^t\int_K\left(\left|\Psi_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)\right|^2+\left|\Psi_{\lambda'}\left(X_{\lambda'}(s)\right)\right|^2\right)d\xi ds\\
&+\left(\lambda+\lambda'\right)\mathbb{E}\int_0^t\int_K\left(\left|X_\lambda(s)\right|^2+\left|X_{\lambda'}(s)\right|^2\right)d\xi ds.
\end{aligned}$$

注意到

$$\mathbb{E}\int_0^t\int_K\left(\left|\Psi_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)\right|^2+\left|\Psi_{\lambda'}\left(X_{\lambda'}(s)\right)\right|^2\right)d\xi ds<C$$

由Poincaré不等式和（27）可得，因此由（26）可得

$$\mathbb{E}\left\|X_\lambda(s)\mathbf{1}_K-X_{\lambda'}(s)\mathbf{1}_K\right\|^2_{\mathscr{H}^{-1}}\underset{\lambda,\lambda'\to 0}{\longrightarrow}0.$$

特别地，结合（37），这意味着

$$\begin{cases}
\left\langle X_\lambda,e_k\right\rangle_{\mathscr{H}^{-1}}\ \text{converges strongly in}\ \mathbb{L}^2\left(\Omega\times[0,T];\mathbb{R}\right)\ \text{to}\ \left\langle X,e_k\right\rangle_{\mathscr{H}^{-1}};\\
X_\lambda e_k\ \text{converges strongly in}\ \mathbb{L}^2\left(\Omega\times[0,T];\mathscr{H}^{-1}\right)\ \text{to}\ Xe_k.\\
X_\lambda e_k^2\ \text{converges strongly in}\ \mathbb{L}^2\left(\Omega\times[0,T];\mathscr{H}^{-1}\right)\ \text{to}\ Xe_k^2.
\end{cases}\tag{38}$$

为证明 (36)，我们首先对过程X_λ 应用带有 $u\longmapsto\frac{1}{2}\|u\|^2_{\mathscr{H}^{-1}}$ 的伊藤公式，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\|X_\lambda(t)\right\|^2_{\mathscr{H}^{-1}}+\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Psi_\lambda\left(X_\lambda(s)\right)X_\lambda(s)d\xi ds+\lambda\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left|X_\lambda(s)\right|^2d\xi ds\\
\leq\ &\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\|x\right\|^2_{\mathscr{H}^{-1}}+C\mathbb{E}\int_0^t\sum_{k=1}^\infty\mu_k\left\langle X_\lambda\left(s\right),e_k^2X_\lambda\left(s\right)\right\rangle_{\mathscr{H}^{-1}}ds\\
&+C\mathbb{E}\int_0^t\sum_{k=1}^\infty\mu_k\left|X_\lambda\left(s\right)e_k\right|^2_{\mathscr{H}^{-1}}ds.
\end{aligned}$$

对第一项应用 Fatou引理，并在最后一部分使用 (38)，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\|X(t)\right\|_{\mathscr{H}^{-1}}^{2}+\liminf_{\lambda\to 0}\mathbb{E}\int_{0}^{t}\int_{\mathbb{R}^{d}}\Psi_{\lambda}\left(X_{\lambda}(s)\right)X_{\lambda}(s)d\xi ds\\
\leq\ &\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\|x\right\|_{\mathscr{H}^{-1}}^{2}+C\mathbb{E}\int_{0}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k}\left\langle X\left(s\right),e_{k}^{2}X\left(s\right)\right\rangle_{\mathscr{H}^{-1}}ds\\
&+C\mathbb{E}\int_{0}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k}\left|X\left(s\right)e_{k}\right|_{\mathscr{H}^{-1}}^{2}ds.
\end{aligned}$$

另一方面，对满足（35）的解应用伊藤公式，采用相同的范数，并结合前一个关系式，我们得到（36）。

□

¯我们继续证明主要结果。为简单起见，记 $\Psi_{\lambda}(x):=\Psi_{\lambda}(x)+\lambda x$。我们考虑 ϕ_{N} 一个由无限可微的 $[0,1]$ 值函数组成的非递减序列，使得 $\mathbf{1}_{B_{N}}\leq\phi_{N}\leq\mathbf{1}_{B_{N+1}}$ 对每个 $N\geq 1$ 都成立。

$r\mapsto\tilde{j}_{\lambda}(r):=j_{\lambda}(r)+\frac{\lambda}{2}r^{2}$ 的凸性给出

$$\left(\Psi_{\lambda}(x)+\lambda x\right)(x-u)\geq\tilde{j}_{\lambda}(x)-\tilde{j}_{\lambda}(u)$$

对每个（x，u）均成立。

将此不等式应用于一对（X_{λ}，U）（对于过程 $U\in\mathbb{L}^{2}\left(\Omega\times[0,T];\ \mathbb{L}^{2,loc}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\right)$），再乘以非负的 ϕ_{N}（暂时固定 N），并进行积分，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{d}}\bar{\Psi}_{\lambda}\left(X_{\lambda}(t,\xi)\right)\left(X_{\lambda}(t,\xi)-U(t,\xi)\right)\phi_{N}(\xi)d\xi dt\right]\\
&\geq\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{d}}\left(\tilde{j}_{\lambda}\left(X_{\lambda}(t,\xi)\right)-\tilde{j}_{\lambda}(U(t,\xi)\right)\phi_{N}(\xi)d\xi dt\right].
\end{aligned}\tag{39}$$

U 的局部可积性保证了左侧项的一致性。函数 $j_{\lambda}(r)$ 非正，因为 $r\leq 1$；若 $0\leq r\leq 1$，则其下界为 -1。其上界为 $r\ln r$，当 $r\geq 1$ 时呈次二次增长。于是，ϕ_{N} 的有界支集保证了右侧项的一致性。

˜再次由 $0\leq\phi_{N}\leq 1$ 和 $\Psi_{\lambda}(x)x\geq 0$，由 (39) 可得

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\lambda\to 0+}\ \mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{d}}\tilde{\Psi}_{\lambda}\left(X_{\lambda}(t,\xi)\right)X_{\lambda}(t,\xi)d\xi dt\right]\\
&\quad\geq\liminf_{\lambda\to 0+}\ \mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{d}}\bar{\Psi}_{\lambda}\left(X_{\lambda}(t,\xi)\right)X_{\lambda}(t,\xi)\phi_{N}(\xi)d\xi dt\right]\\
&\quad\geq\liminf_{\lambda\to 0+}\ \left\{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{d}}\bar{\Psi}_{\lambda}\left(X_{\lambda}(t,\xi)\right)U(t,\xi)\phi_{N}(\xi)d\xi dt\right]\right.\\
&\quad\left.+\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{d}}\tilde{j}_{\lambda}\left(X_{\lambda}(t,\xi)\right)\phi_{N}(\xi)d\xi dt\right]-\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{d}}\tilde{j}_{\lambda}(U(t,\xi))\phi_{N}(\xi)d\xi dt\right]\right\}.
\end{aligned}\tag{40}$$

我们用 I_{λ}^{k} 表示由 $k\in\{1,2,3\}$ 索引的出现在右侧的三个积分项。

1. 对于第一项 I_λ^1，处理方法如下。
我们回顾一下 $\mathbb{L}^2\left(\Omega \times [0,T]\right.$ 中 $\nabla\tilde{\Psi}_\lambda(X_\lambda) = \nabla\bar{\Psi}_\lambda(X_\lambda)$ 的有界性，以及 ϕ_N 的紧支集。由此，在有界开集 B_{N+1} 上应用庞加莱不等式，可得

$$\lim_{\lambda\to 0+} I_\lambda^1 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \eta(t,\xi)U(t,\xi)\phi_N(\xi)d\xi dt\right].$$

2. 对于 I_λ^3，利用当 $\lambda \to 0+$ 时 $\tilde{j}_\lambda$ 逐点收敛到 j，结合关于 j_λ 的上述界以及 ϕ_N 的有界支集，通过在 $\Omega \times [0,T] \times B_{N+1}$ 上应用勒贝格控制收敛定理，可得

$$\lim_{\lambda\to 0+} I_\lambda^3 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} j(U(t,\xi))\phi_N(\xi)d\xi dt\right].$$

3. 对于剩余项，注意到存在 $\lambda_0 < 1$，使得对每个 $\lambda \le \lambda_0$（以及所有 $x \in \mathbb{R}_+$），均有 $j_\lambda(x) \ge j_{\lambda_0}(x)$。由于平方矩具有关于 λ 的一致有界性，二次项 λX_λ^2 在 $\mathbb{P}\times dt \times d\xi$ 均值下收敛到零。其次，泛函 $x \in \mathbb{L}^2 \mapsto \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} j_{\lambda_0}(x(t,\xi))\phi_N(\xi)d\xi dt\right]$ 是凸的，并且强收敛（因而也弱收敛）下半连续。这是由于 j_{λ_0} 作为实函数连续以及Fatou引理所致。因此，

$$\begin{aligned}\liminf_{\lambda\to 0+} \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} j_\lambda(X_\lambda(t,\xi))\phi_N(\xi)d\xi dt\right] &\ge \liminf_{\lambda\to 0+} \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} j_{\lambda_0}(X_\lambda(t,\xi))\phi_N(\xi)d\xi dt\right] \\ &\ge \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} j_{\lambda_0}(X(t,\xi))\phi_N(\xi)d\xi dt\right].\end{aligned}$$

最后，对 $\lambda_0 > 0$ 取上确界，并利用支配（或单调）收敛定理，即可得出

$$\liminf_{\lambda\to 0+} I_\lambda^2 \ge \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} j(X(t,\xi))\phi_N(\xi)d\xi dt\right].$$

将这三项代入(40)，并回忆(39)成立，我们最终得到 t

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \eta(t,\xi)X(t,\xi)d\xi dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \eta(t,\xi)U(t,\xi)\phi_N(\xi)d\xi dt\right] \\ &\ge \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(j(X(t,\xi)) - j\left(U(t,\xi)\right)\right)\phi_N(\xi)d\xi dt\right] \\ &\ge \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(U(t,\xi))\left(X(t,\xi) - U(t,\xi)\right)\phi_N(\xi)d\xi dt\right],\end{aligned} \tag{41}$$

其中，我们再次使用了 j 的凸性以及次梯度性质 $\Psi(u) \in \partial j(u)$。如果 $\Psi(U)$属于 $\mathbb{L}^2\left(\Omega \times [0,T]\right.$，则右端项是有意义的；$\mathbb{L}^{2,\ loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$。

对于每个 N，$(X+\eta)\ \phi_N$给出一个属于 $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T) \times B_{N+1};\ \mathbb{R})$ 的正则过程。利用 Ψ 在 $\mathbb{R}$ 上的单调性，我们得到该算子的一个 $\mathbb{L}^2$-单调实现。因此，我们得到 Z_N 的存在性，它是一个唯一的 $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0, T) \times B_{N+1};\ \mathbb{R})$-解，满足

$$Z + \Psi(Z) = (X+\eta)\,\phi_N.$$[2]

[2]请读者注意，$Z_N = J_1((X+\eta)\ \phi_N)$，其中 $J_1(r) =: x$ 对所有 $x > 0$，均满足 $x + \ln x = r$。

注意，对所有 $N \leq M$， Z_N和 Z_M在 $\Omega \times (0,T) \times B_N$($\mathbb{P} \times dt \times Leb$-a.s.) 上重合，且 $Z_N \leq Z_M$。其次，请读者注意，方程右端项，即 $(X+\eta)\ \phi_N$，几乎必然有限（在 $\Omega \times (0,T) \times B_N$ 上）；因此，解 Z_N属于 Ψ 的定义域，或者等价地，在 $\Omega \times (0,T) \times B_N$($\mathbb{P} \times dt \times Leb$-a.s.) 上有 $Z_N > 0$。

对于每个 $N \geq 1$，我们定义

$$U_N := Z_N \mathbf{1}_{B_N} + X \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B_N}$$

且 $U := \sup_N Z_N$。容易看出，当限制在 $\Omega \times (0,T) \times B_N$ 上时， $U = Z_N > 0$, $\mathbb{P} \times dt \times Leb$-a.s.。现在显然，$\Psi(U)$ 满足局部可积性（在相关集合 B_N, $\Psi(Z_N) = (X+\eta)\ \phi_N - Z_N$ 上），因此我们可以在 U 的条件下应用 (41)。

请读者注意，在 $B_{N+1}, U + \Psi(U) = X + \eta$ 中， $= X + \eta$ 以几乎处处的方式成立。

利用这一点，结合 ϕ_N 在 B_{N+1} 之外为零这一事实，并对 (41) 重新整理，可得对每个$M \geq 1$, $M \leq N+1$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (X-U)^2 (t)(\xi)\phi_N(\xi) d\xi dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\eta X)(t)(\xi)\left(1-\phi_N(\xi)\right) d\xi dt\right].$$

左侧项关于 N 单调不减。因此，对每个 $M \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (X-U)^2 (t)(\xi)\phi_M(\xi) d\xi dt\right] \leq \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\eta X)(t)(\xi)\left(1-\phi_N(\xi)\right) d\xi dt\right] = 0,$$

该等式是 ηX 可积性的结果。因此， $X = U$ ，从而 $\eta = \Psi(X)$，首先在 $\Omega \times (0,T) \times B_M$ 上以 $\mathbb{P} \times dt \times d\xi$-a.s. 成立，继而在整个空间上成立。根据前面的论证可知， $X = (U =) Z_N > 0$, $\mathbb{P} \times dt \times Leb$-a.s. 在 $\Omega \times (0,T) \times B_N$ 上先成立；随后令 $N \to \infty$，便得到 $X > 0$ 在 $\Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}^d$ 上几乎处处成立。

步骤 8. 解的唯一性是对数函数单调性的标准推论，因此我们省略证明。

5 附录

5.1 方程 21 适定性的证明

方程 *21* 适定性的证明。我们检验 [23, 第 56]

1. 半连续性 参见 [23, 第 56 页，(H1)]对于每个 u、v、$x \in V$， $\theta \mapsto \langle A(u+\theta v)\, x\rangle_{(V^*,V)}$ 连续这一事实可由[23, 第 71 页，(H1)]中的论证得到。事实上，由 (22) 与 (46) 可知，

$$\begin{aligned}
\langle A(u+\theta v), x\rangle_{(V^*,V)} &= \left\langle (\triangle - \nu\mathbb{I})\, \tilde{\Psi}_\lambda(u+\theta v), x\right\rangle_{(V^*,V)} + \frac{1}{2}\left\langle (\sigma\otimes\sigma)(u+\theta v), x\right\rangle_{(V^*,V)} \\
&= -\left\langle \tilde{\Psi}_\lambda(u+\theta v), x\right\rangle_2 + \frac{1}{2}\left(\left\langle (\sigma\otimes\sigma)(u), x\right\rangle_{(V^*,V)} + \theta\left\langle (\sigma\otimes\sigma)(v), x\right\rangle_{(V^*,V)}\right).
\end{aligned}$$

第二项的连续性显而易见。对于第一项，利用 $\tilde{\Psi}_\lambda$ 的线性增长性质，即 $\tilde{\Psi}_\lambda(r) \leq c_\lambda |r|$（其中 $c_\lambda = \lambda + \frac{1}{\lambda}$），结合其连续性，并由勒贝格控制收敛定理得出结论。

2. 弱单调性 参见 [23, 第 56 页, （H2）]
对于 u, $v \in V$, 回顾（22）, 再结合（13）和（8）（将 $\sigma(x)$ 替换为 $\sigma(u) - \sigma(v)$ 后书写）, 可得

$$
\begin{aligned}
&\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{(V^*,V)} + \frac{1}{2}\left\|\sigma(u) - \sigma(v)\right\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};H_\nu^{-1}\right)} \\
=&\left\langle (\triangle - \nu\mathbb{I})\left(\tilde{\Psi}_\lambda(u) - \tilde{\Psi}_\lambda(v)\right), u - v\right\rangle_{(V^*,V)} \\
&+ \frac{1}{2}\left\langle (\sigma\otimes\sigma)(u-v), u - v\right\rangle_{(V^*,V)} + \frac{1}{2}\left\|\sigma(u) - \sigma(v)\right\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};H_\nu^{-1}\right)} \\
\le&\left\langle (\triangle - \nu\mathbb{I})\left(\tilde{\Psi}_\lambda(u) - \tilde{\Psi}_\lambda(v)\right), u - v\right\rangle_{(V^*,V)} + \frac{1}{2}\left\|\sigma\otimes\sigma\right\|_{\mathscr{L}\left(H_\nu^{-1};H_\nu^{-1}\right)}\left\|u - v\right\|^2_{H_\nu^{-1}} \\
&+ \frac{1}{2}\left\|\sigma(u) - \sigma(v)\right\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};H_\nu^{-1}\right)} \\
\le&-\left\langle \tilde{\Psi}_\lambda(u) - \tilde{\Psi}_\lambda(v), u - v\right\rangle_2 + C\left\|u - v\right\|^2_{H_\nu^{-1}} \le C\left\|u - v\right\|^2_{H_\nu^{-1}},
\end{aligned}
$$

其中，最后一个不等式由 $r \mapsto \Psi_\lambda(r)$ 的单调性得出，而 C 由 C_0 确定（参见（17）、（8）和（18））。

3. 强制性 参见 [23, 第 56 页, （H3）]
与前面的计算类似，对于每个 $u \in V = \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle A(u), u\rangle_{(V^*,V)} + \frac{1}{2}\left\|\sigma(u)\right\|^2_{\mathscr{L}_2\left(Q^{\frac{1}{2}}\mathscr{H}^{-1};H_\nu^{-1}\right)} \\
=&-\left\langle \tilde{\Psi}_\lambda(u), u\right\rangle_2 + C\left\|u\right\|^2_{H_\nu^{-1}} \le -\lambda\left\|u\right\|_2^2 + C\left\|u\right\|^2_{H_\nu^{-1}}.
\end{aligned}
$$

˜对于最后一个不等式，注意到 $\Psi_\lambda(r) = \Psi_\lambda(r) - \Psi_\lambda(0) + \lambda r$，并利用 Ψ_λ 的单调性。

4. 有界性 参见 [23, 第 56 页, （H4）]
对于每个 $u \in V$，都有

$$
\left\|Au\right\|_{V^*} = \left\|(\triangle - \nu\mathbb{I})\,\tilde{\Psi}_\lambda(u) + \frac{1}{2}(\sigma\otimes\sigma)(u)\right\|_{V^*} \le \left\|\tilde{\Psi}_\lambda u\right\|_2 + \frac{1}{2}\left\|(\sigma\otimes\sigma)(u)\right\|_{V^*}.
$$

另一方面，利用一个简单的技巧（以及 (14)）可得

$$
\begin{aligned}
\left\|(\sigma\otimes\sigma)u\right\|_{V^*} &= \sup_{v\in V;\ \|v\|_V\le 1}\langle v, (\sigma\otimes\sigma)(u)\rangle_{(V,V^*)} = \sup_{v\in V;\ \|v\|_V\le 1}\langle (\sigma\otimes\sigma)(u), v\rangle_{H_\nu^{-1}} \\
&\le \left\|\sigma\otimes\sigma\right\|_{\mathscr{L}\left(H_\nu^{-1};H_\nu^{-1}\right)}\sup_{v\in V;\ \|v\|_V\le 1}\left\|u\right\|_{H_\nu^{-1}}\left\|v\right\|_{H_\nu^{-1}} \\
&\le \left\|\sigma\otimes\sigma\right\|_{\mathscr{L}\left(H_\nu^{-1};H_\nu^{-1}\right)}\times C^2_{\mathbb{L}^2\subset H_\nu^{-1}}\sup_{v\in V;\ \|v\|_V\le 1}\left\|u\right\|_V\left\|v\right\|_V.
\end{aligned}
$$

因此，再次由 (17) 可得 $\left\|Au\right\|_{V^*} \le (C + c_\lambda)\left\|u\right\|_2$，其中 c_λ 仍是 $r \mapsto \Psi_\lambda(r) - \Psi_\lambda(0) + \lambda r$ 的利普希茨常数。

因此， [23, 定理 4.2.4] 的假设均得到满足。 □

5.2 命题 7 的证明

命题 7 的证明。为此，我们回顾一下， $r = J_\lambda(r)+\lambda \ln J_\lambda(r) \leq J_\lambda(r)+\lambda\left(J_\lambda(r)-1\right)$，从而得到 $J_\lambda(r) \geq \frac{r+\lambda}{1+\lambda}$，$\forall r>0$。

- 第一种情况是 $r \geq 3$。此时， $\Psi_\lambda(r) = {}^{r-J_\lambda(r)}{}_\lambda \leq \frac{r}{\lambda+1}$ 且 ${}^{r}_{\lambda+J_\lambda(r)} < \frac{r}{\lambda+1}$，结论由此得出。

- 现在转而考虑 $r<3$ 的情况。注意， $J_\lambda(r) \leq r$ 若 $r \geq 1$，且 $J_\lambda(r)<1$ 若$r<1$，从而得到 $J_\lambda(r) \leq e^r$, $\forall r>0$。现在考虑函数（ $r>0$时）：

$$\left[\frac{r+\lambda}{1+\lambda}, e^r\right] \ni x \mapsto f(x) := \ln x + \frac{r}{\lambda+x}.$$

导数 $f'(x) = \frac{1}{x} - {}^{r}{}_{(\lambda+x)_2} \geq 0$。事实上，这等价于证明在指定区间上 $x^2+(2\lambda-r)x+\lambda^2 \geq 0$。判别式为 $r^2-4\lambda r$。若 $r \leq 4\lambda$，结论显然。设 $3>r>4\lambda$。我们断言 $\frac{r+\lambda}{1+\lambda} \geq \frac{r-2\lambda+\sqrt{r^2-4\lambda r}}{2}$。这等价于证明 $r(1-\lambda)+2\lambda(2+\lambda) \geq (1+\lambda)\sqrt{r^2-4\lambda r}$；或者，再次通过两边平方并重新排列各项，可得

$$-4\lambda r^2 + 4\lambda\left(3+\lambda\right) r + 4\lambda^2\left(2+\lambda\right)^2 \geq 0,$$

对于 $r \leq 3$, 这是显而易见的。

由此可得 $f(J_\lambda(r)) \leq f\left(e^r\right) = r + \frac{r}{\lambda+e^r} < 2r$，证明至此完成。

□

5.3 在 $\mathscr{H}^{-1}$ 上的 Stratonovich

元素 $e_k \in \mathscr{H}^{-1}$ 构成正交归一基 $e_j \otimes e_k \in \mathscr{H}^{-1} \otimes \mathscr{H}^{-1}$。接着定义 $(\sigma \otimes \sigma)$，这是定义在 $\mathscr{H}^{-1} \otimes \mathscr{H}^{-1}$ 上的迹类算子，其定义为

$$(\sigma \otimes \sigma)\left(e_j \otimes e_k\right) = \mu_k \delta_{j,k}\left(e_j \otimes e_k\right).$$

根据 Riesz 表示定理（针对双线性形式）， $\sigma \otimes \sigma \in \mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1};\ \mathscr{H}^{-1}\right)$。由于 $\mathscr{H}^{-1} \subset H^{-1}$，可得

$$\|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1};H^{-1}\right)} \leq C_{\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}} \|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1};\mathscr{H}^{-1}\right)}. \tag{42}$$

请注意，自然的连续嵌入 $\mathscr{H}^{-1} \subset H_\nu^{-1} \subset H_{\nu'}^{-1} \subset H^{-1}$，对于 $0<\nu \leq \nu' \leq 1$，给出

$$\|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1};H_\nu^{-1}\right)} \leq C_{\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}} \|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1};\mathscr{H}^{-1}\right)}. \tag{43}$$

同样，由于稠密嵌入 $\mathscr{H}^{-1} \subset H^{-1}$， $\sigma \otimes \sigma$ 可延拓为作用于H^{-1} 上的有界线性算子，其范数保持 $\sigma \otimes \sigma \in \mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1}\text{的范数};\ H^{-1}\right)$ 并且，由于 (42) 和 (43),

$$\|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(H^{-1};H_\nu^{-1}\right)} \leq C_{\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}} \|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1};\mathscr{H}^{-1}\right)}. \tag{44}$$

最后，由于 $\|\cdot\|_{H_\nu^{-1}} \geq \|\cdot\|_{H^{-1}}$，对所有 $0<\nu \leq 1$，可得

$$\|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(H_\nu^{-1};H_\nu^{-1}\right)} \leq C_{\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}} \|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1};\mathscr{H}^{-1}\right)}. \tag{45}$$

最后，回想起 $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2} \geq \|\cdot\|_{H^{-1}}$，并考虑基于包含关系$V := \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right) \subset H^{-1}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset V^*$, $\sigma \otimes \sigma \in \mathscr{L}\left(\mathbb{L}^2; V^*\right)$ 的吉尔芬德三元组，以及

$$\|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(\mathbb{L}^2;V^*\right)} \leq C_{\mathscr{H}^{-1}\subset H^{-1}} \|\sigma \otimes \sigma\|_{\mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{-1};\mathscr{H}^{-1}\right)}. \tag{46}$$

致谢

I.C. 的部分经费来自诺曼底大区议会（通过 M2SiNum 项目）以及法国国家研究署资助的项目 ANR-18-CE46-0013 QUTE-HPC 和 COSS：ANR-22-CE40-0010-01。R.F. 感谢日本学术振兴会科研费（JSPS KAKENHI），项目编号 JP19KK0066、JP20K03669。D.G. 感谢中国国家重点研发计划（编号：2018YFA0703900）、中国国家自然科学基金（编号：12031009、11871037）、NSFC-RS（编号：11661130148；NA150344）和 111 计划（编号：B12023）的资助。

参考文献

[1] G.A. Navratil A.B. Ehrhardt、H.R. Garner 和 R.S. Post。悬浮八极场中存在环形场时的跨场扩散与涨落谱。《物理流体》，24((10))，1981年。[2] D. G. Aronson。《多孔介质方程》，第1–46页。施普林格·柏林·海德堡，柏林、海德堡，1986年。[3] Hajer Bahouri、Jean-Yves Chemin 和 Raphaël Danchin。《傅里叶分析与非线性偏微分方程》。施普林格·柏林·海德堡，2011年。[4] Viorel Barbu。乘性高斯噪声下的快速对数方程。《布加勒斯特大学年刊：数学辑》，第2卷，2012年1月。[5] Viorel Barbu、Giuseppe Da Prato 和 Michael Röckner。快速扩散随机多孔介质方程解的有限时灭绝。*arXiv*，2008(0)，2008年。[6] Viorel Barbu、Giuseppe Da Prato 和 Michael Röckner。《随机多孔介质方程》。施普林格国际出版公司，瑞士，2016年。[7] Viorel Barbu、Giuseppe Da Prato 和 Michael Röckner。随机多孔介质方程非负解的存在性与唯一性。《印第安纳大学数学杂志》，第57卷，2007年4月。[8] Viorel Barbu、Giuseppe Da Prato 和 Michael Röckner。线性乘性噪声驱动的快扩散方程解的有限时灭绝。《数学分析与应用杂志》，389(1):147–164，2012年。[9] Viorel Barbu、Giuseppe Da Prato 和 Michael Röckner。一般单调性条件下随机多孔介质方程强解的存在性。《概率论年刊》，37(2):428 – 452，2009年。[10] Viorel Barbu 和 Michael Röckner。随机多孔介质方程与自组织临界性：所有维度下收敛至临界态。《数学物理通讯》，311，2011年2月。[11] Viorel Barbu、Michael Röckner 和 Francesco Russo。$\mathbb{R}^n$中的随机多孔介质方程。《纯粹与应用数学杂志》，103(4):1024–1052，2015年。[12] R. Buckdahn、M. Quincampoix 和 G. Tessitore。无限维空间中带约束的受控随机微分方程。《工业与应用数学学会控制与优化杂志》，47(1):218–250，2008年。

[13] T. Carleman。气体运动论中的数学问题。*Alnquist-Wiksells*，乌普萨拉，1957年。[14] J.M. Carlson、J.T. Chayes、E.R. Grannan 和 G.H. Swindle。沙堆中的自组织临界性：临界现象的性质。《物理评论 *A*》，42(4):2467–2470，1990年。[15] Ioana Ciotir。乘性噪声下随机超快扩散方程解的存在性与唯一性。《澳大利亚数学分析与应用杂志》，452(1):595–610，2017年8月。[16] B. Gess。随机多孔介质方程的有限传播速度。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，45，2012年10月。[17] B. Gess。随机符号快扩散的有限时灭绝与自组织临界性。《数学物理通讯》，335，2013年10月。[18] K. Itô。随机微分。《应用数学与优化》，1(4):374–381，1975年12月。[19] C.J. Holland J.G. Berryman。非线性扩散方程的渐近行为 $n_t = \left(n^{-1} n_x\right)_x$。《数学物理杂志》，23(983)，1982年。[20] T. Kamimura 和 J. M. Dawson。镜像效应对等离子体中对流输运的影响。《物理评论快报》，36:313–316，1976年2月。[21] T.G. Kurtz。非线性算子半群序列的收敛及其在气体运动论中的应用。《美国数学会会刊》，186:259–272，1973年。[22] G. Da Prato、Michael Röckner、B. L. Rozovskii 和 Feng yu Wang。随机广义多孔介质方程的强解：存在性、唯一性与遍历性。《偏微分方程通讯》，31(2):277–291，2006年。[23] Claudia Prévôt 和 Michael Röckner。《随机偏微分方程简明教程》。施普林格·柏林·海德堡，柏林、海德堡，2007年。[24] Jiagang Ren、Michael Röckner 和 Feng-Yu Wang。随机广义多孔介质方程与快扩散方程。《微分方程杂志》，238(1):118–152，2007年。[25] J.L. Vásquez。《非线性扩散方程的平滑与衰减估计》。牛津大学出版社，2006年1月。