与 Borwein 猜想相关的分拆多项式的单峰性

Janet J. W. Dong[1] 和 Kathy Q. Ji[2]

[1,2] 天津大学应用数学中心，中国天津 300072 a

[1]dongjinwei@tju.edu.cn 和 [2]kathyji@tju.edu.cn,

arXiv:2304.01032v1 [math.CO] 3 Apr 2023

摘要。本文旨在通过解析方法证明，对于 $n \geq 0$，多项式 $\prod_{k=0}^{n}(1+q^{3k+1})(1+q^{3k+2})$ 是对称的且具有单峰性。

关键词：单峰、对称性、整数分拆、解析方法

AMS 分类：05A16, 05A17, 05A20

1 引言

近几十年来，多项式（或组合数列）的单峰性研究受到了广泛关注。可用的方法多种多样，从分析方法到拓扑方法，从表示论到概率分析，不一而足。本文通过改进 Odlyzko-Richmond 的方法，证明了式（1.6）中定义的多项式具有单峰性 [13]。回顾一下，多项式

$$a_0 + a_1 q + \cdots + a_N q^n$$

若其系数为整数，且存在 $0 \leq j \leq N$，则称其为单峰的；

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \cdots \geq a_N,$$

若对所有 $0 \leq j \leq N$，均成立，则称其为对称的；

$$a_j = a_{N-j}.$$

参见 [20, 第 124 页，例 50]。众所周知，高斯多项式

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$$

是对称且单峰的，正如 Caylay [7] 于 1856年提出的猜想，并由 Sylvester[22] 于 1878年基于二元型的半不变量予以证实。更多信息请参阅 [6, 12, 14, 16]。

R. C. Entringer 可能是最早采用解析方法研究多项式单峰性的人。通过扩展 van Lint 的论证 [11], , Entringer [9] 证明这些多项式

$$(1+q)^2(1+q^2)^2\cdots(1+q^n)^2$$

当 $n \geq 1$ 时是单峰的。这种方法后来由 Odlyzko 和 Richmond [13] 大幅扩展，用以证明一类形如

$$(1+q^{a_1})(1+q^{a_2})\cdots(1+q^{a_n})$$

当 n 足够大时的近似单峰性，其中 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是正整数的非递减数列。更准确地说，令

$$\prod_{i=1}^{n}(1+q^{a_i}) = \sum_{m=0}^{N} b_n(m)q^m, \qquad \text{where} \quad N = \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{1.1}$$

Odlyzko 和 Richmond 证明，在关于无穷数列的适当条件下（Roth 和 Szekeres [17, 第 241] 页中的条件 (I) 和 (II)），$\{a_i\}$这些多项式（1.1）当 n 足够大时近似单峰，也就是说，当 $n \to \infty$ 时，

$$b_n(A) \leq b_n(A+1) \leq \cdots \leq b_n(K) \geq b_n(K+1) \geq \cdots \geq b_n(N-A), \tag{1.2}$$

其中 A 是某个固定常数，且 $K = N/2$ 或 $K = (N+1)/2$。

当 $a_i = i$ 对于 $1 \leq i \leq n$ 属于 (1.1) 时，Odlyzko 和 Richmond [13] 验证了不等式 (1.2) 对 $A = 1$ 当 $n \geq 60$时成立。可以验证，不等式 (1.2) 对 $A = 1$ 当 $n \leq 59$时也成立。因此，Odlyzko 和 Richmond 得出结论，这些多项式

$$(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n) \tag{1.3}$$

在 $n \geq 1$时是单峰的。多项式 (1.3) 单峰性的首个证明由 Hughes [10] 借助李代数的结果给出。Stanley [19] 利用硬 Lefschetz 定理给出了另一种证明。Stanley [18] 还基于 Dynkin 的一个结果建立了此类问题的一般性结论 [8]。

当 $a_i = 2i-1$ 对于 $1 \leq i \leq n$ 在（1.1）中时，Almkvist [1] 证明不等式（1.2）在 $A = 3$ 当 $n \geq 83$时成立。这导出了多项式

$$(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1}) \tag{1.4}$$

当 $n \geq 27$时为单峰，但 q^2 和 q^{n^2-2} 由 Stanley 提出猜想 [19]。Pak 和 Panova [15] 通过将某些分拆数量之差解释为 S_n的表示的克罗内克系数，证明多项式（1.4）是严格单峰的。

在 [1], Almkvist 还提出了以下猜想。

猜想 1.1（Almkvist）对于偶数 $r \geq 2$ 或奇数 $r \geq 3$ 且满足 $n \geq 11$ 的情形，这些多项式

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1-q^{rk}}{1-q^k} \tag{1.5}$$

是单峰的。

当 $r = 2$时，多项式（1.5）化简为多项式（1.3）。Almkvist [2] 首次通过改进 Odlyzko-Richmond 的方法证明，当 $r = 4$ 时该猜想成立[13]。随后，Almkvist [3] 证明了当 $3 \leq r \leq 20$时，$r = 100$且101。

本文证明了以下多项式的单峰性。

定理 1.2 对于 $n \geq 0$，多项式

$$\prod_{k=0}^{n}(1+q^{3k+1})(1+q^{3k+2}) \tag{1.6}$$

是对称的且单峰。

值得一提的是，Borwein 猜想多项式的系数

$$\prod_{k=0}^{n}(1-q^{3k+1})(1-q^{3k+2})$$

具有 $+--$ 的重复符号模式，这被称为 Borwein 猜想，参见 Andrews [4]。最近，Wang [23] 通过解析方法证明了 Borwein 猜想。

2 预备知识

本节汇集了若干恒等式和不等式，它们将在定理 1.2 的证明中发挥作用。

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \tag{2.1}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \tag{2.2}$$

$$= 1 - 2\sin^2(x), \tag{2.3}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \tag{2.4}$$

$$2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta), \tag{2.5}$$

$$\sin(x) \geq xe^{-x^2/3} \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 2, \tag{2.6}$$

$$\cos(x) \geq e^{-\gamma x^2} \quad \text{for} \quad |x| \leq 1,\ (\gamma = -\log\cos(1) = 0.615626....), \tag{2.7}$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x \quad \text{for} \quad x \geq 0, \tag{2.8}$$

$$|\cos(x)| \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{4}\sin^4(x)\right) \quad \text{for} \quad x \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\left|\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\right| \leq n, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2(kx) = \frac{n}{2} - \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)} + \frac{1}{4}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^4(kx) = \frac{3n}{8} - \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)} + \frac{\sin((2n+1)2x)}{16\sin(2x)} + \frac{3}{16}. \tag{2.12}$$

恒等式（2.1）是欧拉恒等式，参见 [21, 第 4] 页。关于三角函数公式（2.2）–（2.5），请参见 [5, 第 8] 章。不等式（2.6）–（2.10）由 Odlyzko 和 Richmond 证明 [13, 第 81] 页。

尚需证明（2.11）和（2.12）。

（2.11）和（2.12）的证明。首先，由（2.5），我们得到

$$\begin{aligned}
&2\sin(x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)\right) \\
&= \sin(x) + 2\sin(x)\cos(2x) + 2\sin(x)\cos(4x) + \cdots + 2\sin(x)\cos(2nx) \\
&\overset{(2.5)}{=} \sin(x) + (\sin(3x) - \sin(x)) + (\sin(5x) - \sin(3x)) \\
&\quad + \cdots + (\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)) \\
&= \sin((2n+1)x).
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin(x)} - \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

利用（2.3）和（2.13），我们推得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin^2(kx) &\overset{(2.3)}{=} \frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)\\ &\overset{(2.13)}{=} \frac{n}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin(x)}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{n}{2}-\frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)}+\frac{1}{4},\end{aligned}$$

即2.11）。

恒等式2.12）可用相同的方法推导。具体而言，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin^4(kx) &\overset{(2.3)}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\cos(2kx)}{2}\right)^2\\ &\overset{(2.2)}{=} \frac{3n}{8}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)+\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\cos(4kx)\\ &\overset{(2.13)}{=} \frac{3n}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin(x)}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{\sin((2n+1)2x)}{2\sin(2x)}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{3n}{8}-\frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)}+\frac{\sin((2n+1)2x)}{16\sin(2x)}+\frac{3}{16},\end{aligned}$$

这与2.12）一致。证明至此完成。 ∎

3 定理1.2的证明

令 $d_n = 3(n+1)^2$ 并定义

$$B_n(q)=\prod_{k=0}^{n}(1+q^{3k+1})(1+q^{3k+2})=\sum_{m=0}^{d_n}a_n(m)q^m. \tag{3.1}$$

为了证明定理 1.2，我们先证明以下引理。

引理 3.1 若 $n\geq 1$和 $\frac{3n^2}{2}\leq m\leq {}^{3}\,{}_{\frac{(n+1)}{2}}{}^{2}$, 则

$$a_n(m)-a_n(m-1)\geq 0. \tag{3.2}$$

证明。 我们首先证明，对于 3.2， $n \geq 168$ 和 $\frac{3n^2}{2} \leq m \leq {}^{3}\!\!\!

由此可知，(3.2) 对于 $n \geq 168$ 和 $\frac{3n^2}{2} \leq m \leq {}^{3}{(n+1)_2}^{2}$ 成立。 ——

容易看出

$$\frac{\partial}{\partial m} a_n(m) = \frac{2^{2n+4}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin\left((d_n - 2m)\theta\right) \prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta) \cos((3k+2)\theta) \mathrm{d}\theta.$$

令 $d_n - 2m = \mu$，并令

$$I_n(\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin\left(\mu\theta\right) \prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta) \cos((3k+2)\theta) \mathrm{d}\theta.$$

在满足 $\frac{3n^2}{2} \leq m \leq {}^{3}{(n+1)_2}^{2}$，的条件下，我们看到

$$0 \leq \mu = d_n - 2m \leq 6n + 3. \tag{3.5}$$

为证明（3.4），只需证明

$$I_n(\mu) \geq 0 \quad \text{for} \quad n \geq 168 \quad \text{and} \quad 0 \leq \mu \leq 6n+3. \tag{3.6}$$

为此，我们写作

$$\begin{aligned} I_n(\mu) &= \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{6n+4}} + \int_{\frac{\pi}{6n+4}}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \theta \sin\left(\mu\theta\right) \prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta) \cos((3k+2)\theta) \mathrm{d}\theta \\ &= I_n^{(1)}(\mu) + I_n^{(2)}(\mu). \end{aligned}$$

接下来我们证明

$$I_n^{(1)}(\mu) \geq |I_n^{(2)}(\mu)| \quad \text{for} \quad n \geq 168 \quad \text{and} \quad 0 \leq \mu \leq 6n+3, \tag{3.7}$$

这意味着（3.6）。

我们首先计算 $I_n^{(1)}(\mu)$ 的值，其定义为

$$I_n^{(1)}(\mu) := \int_0^{\frac{\pi}{6n+4}} \theta \sin\left(\mu\theta\right) \prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta) \cos((3k+2)\theta) \mathrm{d}\theta. \tag{3.8}$$

当 $0 \leq \theta \leq \frac{1}{3n+2}$ 时，由（3.5），可得

$$0 \leq \mu\theta \leq 2 \text{ and } 0 \leq (3k+1)\theta \leq (3k+2)\theta \leq 1 \text{ for } 0 \leq k \leq n,$$

使得

$$\theta \sin\left(\mu\theta\right) \prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta) \cos((3k+2)\theta)$$

$$\overset{(2.6)\&(2.7)}{\geq} \mu\theta^2 \exp\left(-\frac{\mu^2\theta^2}{3}\right) \exp\left(-\gamma\theta^2 \sum_{k=0}^{n}\left((3k+1)^2+(3k+2)^2\right)\right)$$

$$\geq \mu\theta^2 \exp\left(-\frac{(6n+3)^2\theta^2}{3}\right) \exp\left(-\gamma\theta^2\left(6n^3+18n^2+17n+5\right)\right) \quad (\text{by } 0\leq\mu\leq 6n+3)$$

$$= \mu\theta^2 \exp\left(-\theta^2 n^3\left(\left(\frac{12}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)+\gamma\left(6+\frac{18}{n}+\frac{17}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)\right)\right)$$

$$\geq \mu\theta^2 \exp\left(-cn^3\theta^2\right) \quad (\text{by } n\geq 168), \tag{3.9}$$

其中 $c = 3.\ 832$. 将（3.9）应用于（3.8），我们发现，当 $n \geq 168$ 且 $0 \leq \mu \leq 6n+3$时，

$$\begin{aligned}
I_n^{(1)}(\mu) &= \int_0^{\frac{\pi}{6n+4}} \theta \sin(\mu\theta) \prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta)\cos((3k+2)\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{3n+2}} \theta \sin(\mu\theta) \prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta)\cos((3k+2)\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{3n+2}} \mu\theta^2 \exp\left(-cn^3\theta^2\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \left\{\int_0^{\infty} - \int_{\frac{1}{3n+2}}^{\infty}\right\} \mu\theta^2 \exp\left(-cn^3\theta^2\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu}{2c^{\frac{3}{2}}n^{\frac{9}{2}}}\left(\int_0^{\infty} v^{\frac{1}{2}}e^{-v}\mathrm{d}v - \int_{\frac{cn^3}{(3n+2)^2}}^{\infty} v^{\frac{1}{2}}e^{-v}\mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{\mu}{2c^{\frac{3}{2}}n^{\frac{9}{2}}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{\frac{cn^3}{(3n+2)^2}}^{\infty} v^{\frac{1}{2}}e^{-v}\mathrm{d}v\right).
\end{aligned}$$

注意，当 $n \geq 168$ 时，

$$\frac{cn^3}{(3n+2)^2} \geq \frac{c\cdot 168^3}{(3\times 168+2)^2},$$

so

$$\int_{\frac{cn^3}{(3n+2)^2}}^{\infty} v^{\frac{1}{2}}e^{-v}\mathrm{d}v \leq \int_{\frac{c\cdot 168^3}{(3\times 168+2)^2}}^{\infty} v^{\frac{1}{2}}e^{-v}\mathrm{d}v \leq 1.29\times 10^{-30}.$$

因此，当 $n \geq 168$ 且 $0 \leq \mu \leq 6n+3$ 时，

$$I_n^{(1)}(\mu) \geq \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 1.29\times 10^{-30}}{2\times 3.832^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\mu}{n^{\frac{9}{2}}} \geq \frac{0.8862\mu}{15.2n^{\frac{9}{2}}} \geq \frac{0.0583\mu}{n^{\frac{9}{2}}}. \tag{3.10}$$

现在我们来估计 $I_n^{(2)}(\mu)$ 的值，其定义为

$$I_n^{(2)}(\mu) = \int_{\frac{\pi}{6n+4}}^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin(\mu\theta) \prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta)\cos((3k+2)\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{3.11}$$

当 $\frac{\pi}{6n+4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 时，由式 (2.9)、式 (2.11) 和式 (2.12)，我们推得

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{k=0}^{n} \cos((3k+1)\theta)\cos((3k+2)\theta)\right| \\
&\overset{(2.9)}{\le} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\sin^2((3k+1)\theta)+\sin^2((3k+2)\theta)\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\sin^4((3k+1)\theta)+\sin^4((3k+2)\theta)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{3n+2}\sin^2(k\theta)-\sum_{k=1}^{n}\sin^2(3k\theta)\right)-\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{3n+2}\sin^4(k\theta)-\sum_{k=1}^{n}\sin^4(3k\theta)\right)\right) \\
&\overset{(2.11)\&(2.12)}{=} \exp\left(-\frac{11(n+1)}{16}+\frac{3\sin((6n+5)\theta)}{16\sin(\theta)}-\frac{\sin((6n+5)2\theta)}{64\sin(2\theta)}\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\frac{3\sin((2n+1)3\theta)}{16\sin(3\theta)}+\frac{\sin((2n+1)6\theta)}{64\sin(6\theta)}\right) := E(n).
\end{aligned}$$

我们接下来证明

$$E(n) < \exp\left(-0.163n-0.031\right) \quad \text{for} \quad \frac{\pi}{6n+4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad n \ge 168. \tag{3.12}$$

(3.12) 的证明分为两步。当 $\frac{\pi}{6n+4} \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ 时，利用 (2.8) 和 (2.10)，我们得到

$$\begin{aligned}
E(n) &\le \exp\left(-\frac{11(n+1)}{16}+\frac{3}{16\sin(\theta)}+\frac{1}{64\sin(2\theta)}+\frac{3}{16\sin(3\theta)}+\left|\frac{\sin((2n+1)6\theta)}{64\sin(6\theta)}\right|\right) \\
&\overset{(2.8)\&(2.10)}{\le} \exp\left(-\frac{11(n+1)}{16}+\frac{3}{16\left(\frac{\pi}{6n+4}\left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{6n+4}\right)^2}{6}\right)\right)}+\frac{1}{64\left(\frac{\pi}{3n+2}\left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{3n+2}\right)^2}{6}\right)\right)}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{3}{16\left(\frac{3\pi}{6n+4}\left(1-\frac{\left(\frac{3\pi}{6n+4}\right)^2}{6}\right)\right)}+\frac{2n+1}{64}\right) \quad \left(\text{by } \frac{\pi}{6n+4} \le \theta \le \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

应用

$$1-\frac{\left(\frac{\pi}{6n+4}\right)^2}{6} \ge 1-\frac{\left(\frac{\pi}{3n+2}\right)^2}{6} \ge 1-\frac{\left(\frac{3\pi}{6n+4}\right)^2}{6}$$

于（3.13），我们推导出

$$
\begin{aligned}
E(n) \le \exp\Bigg(& -\frac{42n+43}{64} + \frac{3}{16\left(\frac{\pi}{6n+4}\left(1-\frac{\left(\frac{3\pi}{6n+4}\right)^2}{6}\right)\right)} + \frac{1}{64\left(\frac{\pi}{3n+2}\left(1-\frac{\left(\frac{3\pi}{6n+4}\right)^2}{6}\right)\right)} \\
& + \frac{3}{16\left(\frac{3\pi}{6n+4}\left(1-\frac{\left(\frac{3\pi}{6n+4}\right)^2}{6}\right)\right)}\Bigg) \\
= \exp\Bigg(& -\frac{42n+43}{64} + \frac{33}{128\left(\frac{\pi}{6n+4}\left(1-\frac{\left(\frac{3\pi}{6n+4}\right)^2}{6}\right)\right)}\Bigg) \\
= \exp\Bigg(& -\frac{42n+43}{64} + \frac{33(6n+4)}{128\pi\left(1-\frac{6\pi^2}{(12n+8)^2}\right)}\Bigg).
\end{aligned}
$$

注意，当 $n \ge 168$ 时，

$$
1-\frac{6\pi^2}{(12n+8)^2} \ge 1-\frac{6\pi^2}{(12\times 168+8)^2} = 1-\frac{3\pi^2}{2048288},
$$

因此，当 $\frac{\pi}{6n+4} \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ 和 $n \ge 168$ 时，

$$
\begin{aligned}
E(n) &\le \exp\left(-\frac{42n+43}{64} + \frac{33(6n+4)}{128\pi\left(1-\frac{3\pi^2}{2048288}\right)}\right) \\
&= \exp\left(\left(-\frac{21}{32} + \frac{99}{64\pi\left(1-\frac{3\pi^2}{2048288}\right)}\right)n - \frac{43}{64} + \frac{33}{32\pi\left(1-\frac{3\pi^2}{2048288}\right)}\right) \\
&< \exp\left(-0.163n - 0.343\right). \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

当 $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 时，由（2.10），可推得

$$
\begin{aligned}
E(n) \le \exp\Bigg(& -\frac{11(n+1)}{16} + \frac{3}{16\sin(\theta)} + \left|\frac{\sin((6n+5)2\theta)}{64\sin(2\theta)}\right| + \left|\frac{3\sin((2n+1)3\theta)}{16\sin(3\theta)}\right| \\
& + \left|\frac{\sin((2n+1)6\theta)}{64\sin(6\theta)}\right|\Bigg) \\
\overset{(2.10)}{\le} & \exp\left(-\frac{11(n+1)}{16} + \frac{3}{16\sin(\frac{\pi}{6})} + \frac{6n+5}{64} + \frac{3(2n+1)}{16} + \frac{2n+1}{64}\right) \\
= & \exp\left(-\frac{3}{16}n - \frac{1}{32}\right) < \exp\left(-0.187n - 0.031\right). \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

结合（3.14）和（3.15）可得（3.12）。将（3.12）应用于（3.11），并结合（2.8）和（3.10），可推得当 $n \geq 168$,

$$
\begin{aligned}
|I_n^{(2)}(\mu)| &\overset{(2.8)}{<} \mu \exp\left(-0.163n - 0.031\right) \int_{\frac{\pi}{6n+4}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \mathrm{d}\theta \\
&\leq \frac{\mu\pi^3}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{(6n+4)^3}\right) \exp\left(-0.163n - 0.031\right) \\
&= \frac{\mu\pi^3}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6n+4}\right)\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2(6n+4)} + \frac{1}{(6n+4)^2}\right) \exp\left(-0.163n - 0.031\right) \\
&< \frac{\mu\pi^3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6n+4}\right) \exp\left(-0.163n - 0.031\right) \\
&\overset{(3.10)}{\leq} \frac{\pi^3 n^{\frac{9}{2}}}{4 \times 0.0583}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6n+4}\right) \exp\left(-0.163n - 0.031\right) I_n^{(1)}(\mu).
\end{aligned}
$$

定义

$$
f(n) := \frac{\pi^3 n^{\frac{9}{2}}}{4 \times 0.0583}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6n+4}\right) \exp\left(-0.163n - 0.031\right).
$$

为证明（3.7），还需证明 $f(n) < 1$ 对于 $n \geq 168$成立。我们断言 $f'(n) < 0$ 对于 $n \geq 168$成立。由于 $f(n) > 0$ 对于 $n \geq 168$成立，因此我们有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} f(n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} e^{\ln f(n)} = f(n) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \ln f(n). \tag{3.16}
$$

注意，当 $n \geq 168$ 时，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \ln f(n) &= \frac{9}{2n} + \frac{6}{(3n+1)(6n+4)} - 0.163 \\
&\leq \frac{9}{2 \times 168} + \frac{6}{(3 \times 168 + 1)(6 \times 168 + 4)} - 0.163 < -0.13 < 0.
\end{aligned}
$$

因此，由（3.16）可得 $f'(n) < 0$ 对于 $n \geq 168$ 成立，断言得证。因此，$f(n) \leq f(168) < 0.851$ 在 $n \geq 168$ 时成立。于是，（3.7）成立，故（3.4）成立。这说明（3.2）对 $n \geq 168$ 和 $\frac{3n^2}{2} \leq m \leq {}^3(n+1)_2{}^2$ 成立。使用 ~~Maple~~，我们可以验证（3.2）对 $n < 168$ 和 $\frac{3n^2}{2} \leq m \leq {}^3(n+1)_2{}^2$ 也成立。~~因此~~，引理得证。 ∎

本文最后给出定理 1.2 的证明。

定理的证明 *1.2.* 当 $n \geq 0$时，我们首先证明 $B_n(q)$ 是一个对称多项式。将 q 替换为 q^{-1}，在（3.1）中可推得

$$
B_n(q^{-1}) = \prod_{k=0}^{n} (1 + q^{-(3k+1)})(1 + q^{-(3k+2)})
$$

$$= q^{-d_n} \prod_{k=0}^{n} (1+q^{(3k+1)})(1+q^{(3k+2)})$$

$$= q^{-d_n} B_n(q).$$

也就是说,

$$B_n(q) = q^{d_n} B_n(q^{-1}),$$

由此可知， $B_n(q)$是对称的。

接下来，我们对 n使用归纳法，证明多项式 $B_n(q)$是单峰的。当$n = 0$时，有

$$B_0(q) = (1+q)(1+q^2) = 1+q+q^2+q^3.$$

显然， $B_0(q)$的系数是单峰的。

假设当 $n \geq 1$时， $B_{n-1}(q)$是单峰的，即对于 $n \geq 1$ 和$1 \leq m \leq \lfloor \frac{d_{n-1}}{2} \rfloor$,

$$a_{n-1}(m) \geq a_{n-1}(m-1). \tag{3.17}$$

我们要证明 $B_n(q)$是单峰的。由于 $B_n(q)$是对称多项式，只需证明对于 $n \geq 1$ 和 $1 \leq m \leq \lfloor \frac{d_n}{2} \rfloor$,

$$a_n(m) \geq a_n(m-1). \tag{3.18}$$

注意到

$$B_n(q) = \left(1+q^{3n+1}\right)\left(1+q^{3n+2}\right) B_{n-1}(q),$$

这意味着以下递推关系:

$$a_n(m) = a_{n-1}(m) + a_{n-1}(m-3n-1) + a_{n-1}(m-3n-2) + a_{n-1}(m-6n-3). \tag{3.19}$$

由（3.17）和（3.19）可明显看出， （3.18）对 $n \geq 1$ 和 $1 \leq m \leq \lfloor \frac{d_{n-1}}{2} \rfloor$成立。根据引理 3.1，可知（3.18）对 $n \geq 1$和 $\lceil \frac{d_{n-1}}{2} \rceil \leq m \leq \lfloor \frac{d_n}{2} \rfloor$也成立。因此，我们得出结论： （3.18）对 $n \geq 1$ 和 $1 \leq m \leq \lfloor \frac{d_n}{2} \rfloor$均成立，故 B_n（q）是单峰的。至此，我们完成了定理 1.2的证明。 ∎

致谢。本研究得到了中国国家科学基金的资助。

参考文献

[1] G. Almkvist, 《拆分为互不相等的奇数部分》, 《纯数学与应用代数杂志》38（1985）121–126。

[2] G. Almkvist, 《 $SL(2,C)$的表示与单峰多项式》, 《代数杂志》108（1987）283–309。[3] G. Almkvist, 《关于单峰多项式的一个猜想的证明》, 《数论杂志》32（1989）43–57。[4] G. E. Andrews, 《关于 Peter Borwein 的一个猜想》, 载于《组合学中的符号计算》 Δ_1, 纽约州伊萨卡, 1993年; 《符号计算杂志》20（1995）487–501。[5] A. C. Burdette, 《解析几何与微积分导论》, 学术出版社国际版, 1973年。[6] W. Y. C. Chen 和 I. D. D. Jia, 《二元型的半不变量与西尔维斯特定理》, 《拉马努金杂志》59（2022）297–311。[7] A. Cayley, 《关于量子形式的第二篇回忆录》, 《伦敦皇家学会哲学汇刊》146（1856年）101–126。[8] E. B. Dynkin, 《半单李群线性表示的若干权系》（俄文）, 《苏联科学院院报》71（1950）221–224。[9] R. C. Entringer, 《 m 作为 $\sum_{k=-n}^{n} \epsilon_k k$的表示》, 《加拿大数学通报》11（1968）289–293。[10] J. W. B. Hughes, 《分拆若干定理的李代数证明》, 载于《数论与代数》（H. Zassenhaus 编）, 学术出版社, 纽约, （1977）135–155。[11] J. H. van Lint, 《0表示为 $\sum_{k=-N}^{N} \epsilon_k k$》, 《美国数学会会刊》18（1967）182–184。[12] K. M. O’Hara, 《高斯系数的单峰性：构造性证明》, 《组合理论杂志 A辑》53（1990）29–52。[13] A. M. Odlyzko 和 L. B. Richmond, 《关于若干分拆多项式的单峰性》, 《欧洲组合学杂志》3（1982）69–84。[14] I. Pak 和 G. Panova, 《 q-二项式系数的严格单峰性》, 《巴黎科学院院报》I辑, 数学, 351（2013）415–418。[15] I. Pak 和 G. Panova, 《通过克罗内克积实现单峰性》, 《代数组合杂志》40（2014）1103–1120。[16] R. A. Proctor, 《用线性代数解决两个困难的组合问题》, 《美国数学月刊》89（1982）721–734。[17] K. F. Roth 和 G. Szekeres, 《分拆理论中的若干渐近公式》, 《牛津数学季刊》5(2)（1954）241–259。[18] R. P. Stanley, 《由李代数导出的单峰序列》, 《组合学、表示论与群的统计方法》, 第127–136页, 《纯数学与应用数学讲义》第57卷, Dekker, 纽约, 1980年。

[19] R. P. Stanley, 《群作用于有限偏序集的若干方面》, 《组合理论杂志 A辑》 32 (1982) 132–161。[20] R. P. Stanley, 《组合计数学》, 第1卷, （英文摘要）, 剑桥高等数学研究丛书第49卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997。[21] E. M. Stein 和 R. Shakarchi, 《复分析》, 普林斯顿大学出版社，2003。[22] J. J. Sylvester, 《对迄今尚未证明的不变量基本定理的证明》, 《哲学杂志》5 (1878年) 178–188; 重刊于《数学论文集》第3卷，切尔西，纽约，1973，117–126。[23] C. Wang, 《Borwein 猜想的一个解析证明》, 《数学进展》394 (2022) 论文编号 108028, 共54页。