arXiv:2304.01034v1 [math.DG] 3 Apr 2023

齐性空间上的循环芬斯勒度量

JU TAN 和 MING XU*

Abstract. 本文将循环度量的概念推广到齐性芬斯勒几何。首先，我们证明，若齐性芬斯勒空间 $(G/H, F)$ 同时满足自然约化条件和循环条件，则它必为对称空间。随后，我们证明，平坦或幂零的芬斯勒循环李群必具有阿贝尔李代数。最后，我们展示如何由循环黎曼度量诱导出循环 (α, β) 度量。利用此方法，我们构造了一个 Randers 循环李群。

2010年数学主题分类：53C22, 53C30, 53C60。
关键词：(α, β) 度量，循环李群，循环度量，齐性芬斯勒流形，曲率

1. 引言

如果满足以下性质，我们就称齐性黎曼流形 $(G/H, \mathrm{g})$ 关于给定的约化分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ 是循环的

$$\langle [x, y]_{\mathfrak{m}}, z\rangle + \langle [y, z]_{\mathfrak{m}}, x\rangle + \langle [z, x]_{\mathfrak{m}}, y\rangle = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{m}. \tag{1.1}$$

这里，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是由 G-不变度量 g 确定的 $\mathfrak{m} = T_{eH}(G/H)$ 上的 $\mathrm{Ad}(H)$-不变内积。当 H 是平凡的（此时约化分解必须为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m} = 0 + \mathfrak{g}$）时，我们称循环的 (G, g) 为循环李群。此外，如果 G 是幺模的，我们就将循环条件称为无迹循环条件。

研究循环度量的动机可追溯到 Tricerri-Vanhecke 对齐性结构的分类 [18]。在他们的分类中，有三种基本类型，即$\mathcal{S}_1$、 $\mathcal{S}_2$ 和 $\mathcal{S}_3$。循环条件（无迹循环条件）分别对应类型 $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$（$\mathcal{S}_2$ 。与研究得更为广泛、对应类型 $\mathcal{S}_3$的自然约化度量相比，循环度量具有截然不同、值得探索的性质。

这里简要回顾一些相关进展。Kowalski 和 Tricerri 在 [14] 中研究了无迹循环条件。Gadea、Gon´alez-D´avila 和 Oubi˜na 在 [11], 中研究了无迹循环李群，并在 [10] 中刻画了循环度量和无迹循环度量。在上述文献中，发现的实例相对较少，且仅对低维情形进行了分类 [4, 14]。与此同时，这项研究被推广到齐次伪黎曼几何 [9]。Calvaruso 和 L´opez 对 3 维洛伦兹循环李群进行了分类，并且 4 [5]。Tohidfa 和 Zaeim 对签名类型为 (2, 2) 的循环李群进行了分类 [19]。

本文探讨芬斯勒几何中循环性质的推广，即将（1.1）替换为以下类似形式：

$$\langle [x, y]_{\mathfrak{m}}, z\rangle_y + \langle [y, z]_{\mathfrak{m}}, x\rangle_y + \langle [z, x]_{\mathfrak{m}}, y\rangle_y = 0, \quad \forall x, z \in \mathfrak{m}, y \in \mathfrak{m}\backslash\{0\}. \tag{1.2}$$

这里，基本张量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ 依赖于 y，因此芬斯勒循环条件（1.2）并非多重线性的。尽管这构成了一个重要障碍，我们仍能证明一些性质，并找到一些循环芬斯勒度量的实例。

首先，我们证明

*Ming Xu 是通讯作者。

定理 1.1. 若该齐性芬斯勒流形相对于给定的约化分解是循环的且自然约化的，那么该分解就是嘉当分解，即该齐性芬斯勒流形是对称空间。

定理1.1中的这一现象 [18] 在度量为黎曼度量时已被指出。这意味着，在齐性芬斯勒几何中，循环芬斯勒度量这一子类与自然约化度量子类几乎没有交集；换言之，它们沿着截然不同的方向推广了对称芬斯勒空间。

其次，我们将 [11] 中的命题 5.5 和命题 3.4 推广如下。

定理 1.2. 非阿贝尔幂零李群不允许存在循环左不变芬斯勒度量。

定理 1.3. 若 F 是李群 G 上的左不变循环芬斯勒度量，且具有常旗曲率 $K \equiv 0$，则 G 的李代数是阿贝尔李代数。

最后，我们考虑循环芬斯勒度量的构造。下面的定理表明，循环 Randers 度量和 (α, β) 度量可以由相应的黎曼度量诱导得到。

定理 1.4. 设 G/H 是一个齐性流形，具有给定的约化分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, α 上的 Ad(H)-不变内积，以及 $\beta = \alpha(X, \cdot)$，其中 $X \in \mathfrak{m}\backslash\{0\}$ 是一个 Ad(H)-不变向量。假设 α 和 $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ 分别在 G/H 上诱导出循环黎曼度量和非黎曼齐性道格拉斯度量。那么 $(G/H, F)$ 是循环的，当且仅当

$$\alpha([y,u]_{\mathfrak{m}}, y)[\alpha(y,y)\alpha(X,v) - \alpha(X,y)\alpha(v,y)] = \alpha([y,v]_{\mathfrak{m}}, y)[\alpha(y,y)\alpha(X,u) - \alpha(X,y)\alpha(u,y)]$$

对任意 $u, v, y \in \mathfrak{m}$，下式成立。

作为应用，我们在一些可解李群上构造了左不变的非黎曼循环兰德斯度量。

2. Preliminary in homogeneous Finsler geometry

设 G/H 是一个齐性流形，并赋有约化分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$。这里，约化性意味着该分解在 Ad$(H)$ 作用下不变（这意味着在李代数层面上， $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$）。因此，原点 $o = eH$ 处的切空间 $T_o(G/H)$ 可识别为 $\mathfrak{m}$，从而各向同性作用与 $\mathfrak{m}$ 上的 Ad(H) 作用一致。

任意的 G不变芬斯勒度量 F在 G/H 上，都可由 $F = F(o, \cdot)$ 唯一确定，其中 $F = F$ 是 $\mathfrak{m}$ [6]上的任意 Ad(H)不变闵可夫斯基范数。我们称二元组 $(G/H, F)$ 为齐性芬斯勒流形。例如，齐性 (α, β)度量可由 $\mathfrak{m}$上的闵可夫斯基范数 $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ 确定，其中 α 是 Ad(H)不变的欧几里得范数，$\beta = \alpha(X, \cdot)$ 是某个 Ad(H)不变 $X \in \mathfrak{m}$的 α对偶，而 $\phi(r)$ 是某个正的光滑函数 [8]。

若齐性度量 F 在 G/H 上相对于给定的约化分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$满足以下条件，则称其为自然约化的:

$$\langle [x,u]_{\mathfrak{m}}, v\rangle_y + \langle [x,v]_{\mathfrak{m}}, u\rangle_y + 2C_y([x,y]_{\mathfrak{m}}, u, v) = 0,$$

对于任意 $y \in \mathfrak{m}\backslash\{0\}, x, u, v \in \mathfrak{m}$ [15]。这里

$$\langle u, v\rangle_y = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial s \partial t}|_{s=t=0} F^2(y + su + tv), \quad C_y(u,v,w) = \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}|_{t=0}\langle u, v\rangle_{y+tw}$$

分别是 $\mathfrak{m}$ 上闵可夫斯基范数 F 的基本张量和嘉当张量。关于这种自然约化性的等价定义和描述，参见 [7] 。

对于给定的约化分解，齐性芬斯勒流形（$G/H, F$）上的喷射向量场 η： $\mathfrak{m}\backslash\{0\} \to \mathfrak{m}$ 和联络算子 N： $(\mathfrak{m}\backslash\{0\}) \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$

$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ 分别由以下方程确定 [12],

$$\begin{aligned}\langle\eta(y),u\rangle_y &= \langle y,[u,y]_{\mathfrak{m}}\rangle_y, \quad \forall y\in\mathfrak{m}\backslash\{0\},\\ 2\langle N(y,v),u\rangle_y &= \langle[u,v]_{\mathfrak{m}},y\rangle_y+\langle[u,y]_{\mathfrak{m}},v\rangle_y+\langle[v,y]_m,u\rangle_y\\ &\quad -2C_y(u,v,\eta(y)), \quad \forall y\in\mathfrak{m}\backslash\{0\},u,v\in\mathfrak{m}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

它们有助于给出齐性芬斯勒流形的曲率公式。例如，我们有以下齐性黎曼曲率公式。 [12, 13]。

定理 2.1. 对于李群 G 上的左不变芬斯勒度量 F，黎曼曲率R_y： $\mathfrak{g}=T_eG\to T_eG=\mathfrak{g}$ 对任意 $y\in\mathfrak{g}\backslash\{0\}$ 可表示为

$$R_y(u)=D_\eta N(y,u)-N(y,N(y,u))+N(y,[y,u])-[y,N(y,u)].\tag{2.4}$$

关于一般芬斯勒几何中的曲率，更多细节可见 [3]。

3. Cyclic Finsler metric and its properties

现在我们可以给出芬斯勒循环条件的精确定义。

定义 3.1. 若齐性芬斯勒流形（$G/H,F$）关于给定的约化分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ 满足

$$\langle[x,y]_{\mathfrak{m}},z\rangle_y+\langle[y,z]_{\mathfrak{m}},x\rangle_y+\langle[z,x]_{\mathfrak{m}},y\rangle_y=0, \quad \forall y\in\mathfrak{m}\backslash\{0\},x,z\in\mathfrak{m}.$$

特别地，当 $H=\{e\}$（此时约化分解必为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}=0+\mathfrak{g}$）时，我们称循环的 (G,F) 为（芬斯勒）循环李群。

定理 **1.1** 的证明。设齐性芬斯勒度量 F 关于约化分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ 是自然约化且循环的。任取 $y\in\mathfrak{m}\backslash\{0\}$,$x,z\in\mathfrak{m}$。则由自然约化性可得

$$\langle[x,u]_{\mathfrak{m}},v\rangle_y+\langle[x,v]_{\mathfrak{m}},u\rangle_y+2C_y([x,y]_{\mathfrak{m}},u,v)=0, \quad \forall u,v\in\mathfrak{m}.\tag{3.5}$$

将 $u=y$ 和 $v=z$ 代入（3.5），得到

$$\langle[x,y]_{\mathfrak{m}},z\rangle_y+g_y([x,z]_{\mathfrak{m}},y)=0.\tag{3.6}$$

类似地可得

$$\langle[z,y]_{\mathfrak{m}},x\rangle_y+g_y([z,x]_{\mathfrak{m}},y)=0.\tag{3.7}$$

由循环条件可得

$$\langle[x,y]_{\mathfrak{m}},z\rangle_y+\langle[y,z]_{\mathfrak{m}},x\rangle_y+\langle[z,x]_{\mathfrak{m}},y\rangle_y=0.\tag{3.8}$$

将（3.7）与（3.8）相加，再减去（3.6），得到 $3\langle[z,x]_{\mathfrak{m}},y\rangle_y=0$。因此 $\langle[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}},y\rangle_y=0,\forall y\in\mathfrak{m}\backslash\{0\}$。这只有在 $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$，即 G/H 是对称的情况下才可能成立。 ■

为了证明定理1.2 和定理 1.3，我们需要以下引理。

引理 3.2. 设 (G,F) 是一个芬斯勒循环李群。则有如下结论：

(1) 如果 $y\in\mathfrak{g}\backslash\{0\}$ 满足 $\langle[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],y\rangle_y=0$，则 $\eta(y)=0$ 且 $N(y,\cdot)=-\mathrm{ad}(y)$。此外，在这种情况下，$R_y=-\mathrm{ad}(y)^2$，并且 $\mathrm{ad}(y)$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_y$ 自伴。(2) 任意 $y\in\mathfrak{c}(\mathfrak{g})\backslash\{0\}$ 满足 $\langle[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],y\rangle_y=0$ 和 $R_y\equiv0$。

证明。(1) 由于 $\langle[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],y\rangle_y=0$，我们有 $\eta(y)=0$。由循环条件，我们有

$$\langle[u,y],v\rangle_y-\langle[v,y],u\rangle_y=\langle[u,y],v\rangle_y+\langle[v,u],y\rangle_y+\langle[y,v],u\rangle_y=0,\tag{3.9}$$

因此（2.3）给出

$$\begin{aligned}2\langle N(y,v),u\rangle_y &= \langle[u,v],y\rangle_y+\langle[u,y],v\rangle_y+\langle[v,y],u\rangle_y-2C_y(u,v,\eta(y))\\ &= \langle[u,y],v\rangle_y+\langle[v,y],u\rangle_y=2\langle[v,y],u\rangle_y.\end{aligned}$$

这意味着 $N(y,v) = [v,y], \forall v \in \mathfrak{g}$，即 $N(y,\cdot) = -\mathrm{ad}(y)$。将 $\eta(y) = 0$ 和 $N(y,\cdot) = -\mathrm{ad}(y)$ 代入定理 2.1 中的 (2.4)，即可立即得到 $R_y = -\mathrm{ad}(y)^2$。最后，利用 (3.9)，我们看到 $N(y,\cdot)$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_y$ 是自伴的。

(2) 假设 $y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{g})\backslash\{0\}$。根据循环条件，我们有 $\forall x,z \in \mathfrak{g}$,

$$\langle [z,x],y\rangle_y = \langle [x,y],z\rangle_y + \langle [y,z],x\rangle_y + \langle [z,x],y\rangle_y = 0,$$

即，$\langle [\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\ y\rangle_y = 0$。由引理 3.2 的 (1)，$R_y = -\mathrm{ad}(y)^2 = 0$ 立即可得。 ■

定理 **1.2** 的证明。反过来，假设 G 存在一个左不变循环芬斯勒度量，且其李代数 $\mathfrak{g}$ 非阿贝尔。根据 [12], 中定理 5.1 的证明，存在一个非零的 $y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$，使得 $\mathrm{Ric}(y) = \mathrm{tr}(R_y) > 0$。这与引理 3.2 中的 (2) 矛盾。定理 **1.3** 的证明。假设 (G,F) 是一个芬斯勒循环李群，即 F是定义在 G 上的左不变芬斯勒度量，且相对于约化分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}+\mathfrak{m} = 0+\mathfrak{g}$满足循环条件。我们将通过以下三个断言证明 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的。

断言 I: $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是交换的。

F 的左不变性意味着其嘉当张量和兰德斯伯格张量都有界。因此，可以在此处应用证明阿克巴尔-扎德定理[1] 的论证，来证明 F 局部闵可夫斯基。我们在每个切空间的指标曲面上，按照海森度量所诱导的体积形式，对 F 的基本张量取平均，从而得到 G上的黎曼度量 $\overline{F}$。由于 F 局部闵可夫斯基，$\overline{F}$ 是平坦的。这个平均过程保留基灵向量场和等距变换。因此，$\overline{F}$ 是左 G不变的。根据[17]中的定理 1.5，$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}+\mathfrak{u}$，其中 $\mathfrak{l}$ 是交换子代数，而 $\mathfrak{u}$ 是交换理想。由此可见，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$ 是交换的，这就证明了断言 I。

断言 II: $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$。

反过来，假设 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$。那么存在一个非零向量 $y \in \mathfrak{g}\backslash(\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$，使得 $\langle \mathfrak{c}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}], y\rangle_y = 0$。由于 $g_y([\mathfrak{g},\mathfrak{g}],y) = 0$，我们可以对 F 应用平坦性条件以及引理 3.2 的 (1)，从而得出 $\mathrm{ad}(y)$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_y$ 是自伴的，并且$R_y(v) = -\mathrm{ad}(y)^2 v = 0$ 对任意 $v \in \mathfrak{g}$均成立。于是有

$$\langle \mathrm{ad}(y)v, \mathrm{ad}(y)v\rangle_y = \langle \mathrm{ad}(y)^2 v, v\rangle_y = -\langle R_y(v), v\rangle_y = 0, \quad \forall v \in \mathfrak{g},$$

即 $y \in \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$。这就产生了矛盾，从而证明了断言 II。

断言 III: $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$。

任取 $u \in \mathfrak{g}$ 和 $v \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$。由断言 II，我们有分解 $u = u_1 + u_2$，其中 $u_1 \in \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ 且 $u_2 \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$。由断言 I，$[v,u_2] = 0$, $[v,u] = [v,u_1] + [v,u_2] = 0$。因此可得$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$，这就证明了断言 III。

总结断言 II 和断言 III，我们证明了 $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$，至此证明完成。 ■

4. Construction of cyclic (α,β) metrics

为了证明定理1.4，我们需要以下引理。

引理 4.1. 在保持定理 *1.4* 中所有假设和记号不变的情况下，F 是循环的，当且仅当对任意 u、$v \in \mathfrak{m}$、$y \in \mathfrak{m}\backslash\{0\}$，均满足 $\Phi(r)\cdot\Psi(u,v,y) = 0$，且 $r = {}^{\alpha}_{(X,y)\,\alpha(y,y)^{1/2}}$，~~其中~~

$$\Phi(r) = \phi(r)\phi'(r) - r\phi'(r)^2 - r\phi(r)\phi''(r)$$

and

$$\begin{aligned}\Psi(u,v,y) \;=\; & \alpha(y,[y,u]_{\mathfrak{m}})(\alpha(y,y)\alpha(X,v) - \alpha(y,v)\alpha(X,y)) \\ & +\alpha(y,[v,y]_{\mathfrak{m}})(\alpha(y,y)\alpha(X,u) - \alpha(y,u)\alpha(X,y)).\end{aligned}$$

证明. 对基本张量进行直接计算可知，对任意 $y \in \mathfrak{m}\backslash 0$、 u、 $v \in \mathfrak{m}$,

$$\begin{aligned}
&\langle u,v\rangle_y = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial s\partial t}|_{s=t=0}F^2(y+su+tv)\\
= \;& \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial s\partial t}|_{s=t=0}\left(\alpha(y+su+tv,y+su+tv)\phi(\tfrac{\alpha(X,y+su+tv)}{\sqrt{\alpha(y+su+tv,y+su+tv)}})^2\right)\\
= \;& \phi(r)^2\alpha(u,v)-\phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{\alpha(y,u)\alpha(y,v)\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)^{3/2}}\\
&+\phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{\alpha(y,v)\alpha(X,u)+\alpha(y,u)\alpha(X,v)-\alpha(u,v)\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)^{1/2}}\\
&+(\phi'(r)^2+\phi(r)\phi''(r))(\alpha(X,u)-\tfrac{\alpha(y,u)\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)})(\alpha(X,v)-\tfrac{\alpha(y,v)\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)}).
\end{aligned}\tag{4.10}$$

设

$$\begin{aligned}
&Q_1=\alpha(X,[y,u]_{\mathfrak{m}})\alpha(y,v),\quad Q_2=\alpha(X,[y,u]_{\mathfrak{m}}),\quad Q_3=\alpha(X,[u,v]_{\mathfrak{m}})\alpha(y,y),\\
&Q_4=\alpha(X,[v,y]_{\mathfrak{m}})\alpha(y,u),\quad Q_5=\alpha(X,[v,y]_{\mathfrak{m}}),
\end{aligned}$$

那么由（4.10）可得,

$$\begin{aligned}
\langle[y,u]_{\mathfrak{m}},v\rangle_y &= \alpha([y,u]_{\mathfrak{m}},v)\phi(r)^2-\phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{\alpha(y,[y,u]_{\mathfrak{m}})\alpha(y,v)\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)^{3/2}}\\
&\quad+\phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{Q_1+\alpha(y,[y,u]_{\mathfrak{m}})\alpha(X,v)-\alpha(v,[y,u]_{\mathfrak{m}})\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)^{1/2}}\\
&\quad+(\phi(r)\phi''(r)+\phi'(r)^2)\cdot(Q_2-\tfrac{\alpha(y,[y,u]_{\mathfrak{m}})\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)})\\
&\quad\cdot(\alpha(X,v)-\tfrac{\alpha(y,v)\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)}),
\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
\langle[u,v]_{\mathfrak{m}},y\rangle_y &= \alpha([u,v]_{\mathfrak{m}},y)\phi(r)^2-\phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{\alpha(y,[u,v]_{\mathfrak{m}})\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)^{1/2}}\\
&\quad+\phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{Q_3}{\alpha(y,y)^{1/2}},
\end{aligned}\tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
\langle[v,y]_{\mathfrak{m}},u\rangle_y &= \alpha([v,y]_{\mathfrak{m}},u)\phi(r)^2-\phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{\alpha(y,[v,y]_{\mathfrak{m}})\alpha(y,u)\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)^{3/2}}\\
&\quad+\phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{Q_4+\alpha(y,[v,y]_{\mathfrak{m}})\alpha(X,u)-\alpha(u,[v,y]_{\mathfrak{m}})\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)^{1/2}}\\
&\quad+(\phi(r)\phi''(r)+\phi'(r)^2)\cdot(Q_5-\tfrac{\alpha(y,[v,y]_{\mathfrak{m}})\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)})\\
&\quad\cdot(\alpha(X,u)-\tfrac{\alpha(y,u)\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)}).
\end{aligned}\tag{4.13}$$

α 的循环条件意味着

$$\alpha([y,u]_{\mathfrak{m}},v)+\alpha([u,v]_{\mathfrak{m}},y)+\alpha([v,y]_{\mathfrak{m}},u)=0.$$

由于 F是一个非黎曼道格拉斯度量，因此有 $\alpha([\mathfrak{m},\mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}},X)=0$(参见[2]或 [16])，所以 $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=Q_5=0$。利用这些观察，将（4.11）-（4.13）相加可得

$$\begin{aligned}
&\langle[y,u]_{\mathfrak{m}},v\rangle_y+\langle[u,v]_{\mathfrak{m}},y\rangle_y+\langle[v,y]_{\mathfrak{m}},u\rangle_y\\
= \;& \phi(r)\phi'(r)\cdot\tfrac{\alpha(y,[y,u]_{\mathfrak{m}})(\alpha(y,y)\alpha(X,v)-\alpha(y,v)\alpha(X,y))+\alpha(y,[v,y]_{\mathfrak{m}})(\alpha(y,y)\alpha(X,u)-\alpha(y,u)\alpha(X,y))}{\alpha(y,y)^{3/2}}\\
&-(\phi(r)\phi''(r)+\phi'(r)^2)\tfrac{\alpha(X,y)}{\alpha(y,y)^{1/2}}\cdot\\
&\tfrac{\alpha(y,[y,u]_{\mathfrak{m}})(\alpha(y,y)\alpha(X,v)-\alpha(y,v)\alpha(X,y))+\alpha(y,[v,y]_{\mathfrak{m}})(\alpha(y,y)\alpha(X,u)-\alpha(y,u)\alpha(X,y))}{\alpha(y,y)^{3/2}}\\
= \;& \tfrac{1}{\alpha(y,y)^{3/2}}\cdot\Phi(r)\cdot\Psi(u,v,y).
\end{aligned}$$

因此， F是循环的，即 $\langle[y,u]_{\mathfrak{m}},v\rangle_y+\langle[u,v]_{\mathfrak{m}},y\rangle_y+\langle[v,y]_{\mathfrak{m}},u\rangle_y\equiv 0$，当且仅当 $\Phi(r)\cdot\Psi(u,v,y)\equiv 0$，这就证明了该引理。 ■

现在我们证明定理1 .4, i.e., F 是循环的，当且仅当 $\Psi(u,v,y)\equiv 0$ 。定理 **1.4** 的证明：假设 $\Psi(u,v,y)\equiv 0$，那么引理 4.1 表明 F是循环的。这就证明了定理的一个方向。

假设 F 是循环的。由引理 **4.1**，可得 $\Phi(r)\cdot\Psi(u,v,y)\equiv 0$。注意，当 $|r|\le\alpha(X,X)^{1/2}$ 时， $\Phi(r)$ 不可能恒为零；否则， $\Phi(r)=(\phi(r)(\phi(r)-r\phi'(r)))'\equiv 0$，即对于某个常数 c，有 $\phi(r)^2-r\phi\phi'(r)\equiv c$，该式可容易求解，并给出

解 $\phi(r)\equiv\sqrt{c_1r^2+c_2}$对于某些常数 c_1和 c_2。于是度量 $F=\alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ 是黎曼的，这与我们的假设矛盾。综上，存在一个非空开子集 $\mathcal{U}\subset\mathfrak{m}\backslash\{0\}$，使得 $\Psi(u,\ v,\ y)=0$当 $y\in\mathcal{U}$时成立。由于 $\Psi(u,\ v,\ y)$ 是一个多项式，它必恒等于零。至此，定理 1.4 的另一方向得证。■

现在我们使用定理 1.4 构造一个左不变循环 Randers 度量。

设 G 是一个可解李群。其李代数 $\mathfrak{g}$ 具有一条理想链，

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\supset\mathfrak{g}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_n=0,$$

其中 $\dim\ \mathfrak{g}_i=n-i,\ \forall 0\leq i\leq n$。我们可以找到 $\mathfrak{g}$的一个基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，使得对于每个 i，$\mathfrak{g}_{n-i}=$张成$\{e_1,\cdots,e_i\}$，然后在 $\mathfrak{g}$上取一个内积 $\alpha(\cdot,\cdot)$，使得 $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$。[11] 中的以下命题准确地说明了该 α 何时在 G上诱导出一个左不变循环度量。

命题 4.2. (G,α) 是循环的，当且仅当对每个 i，$\mathrm{ad}(e_i)$ 在 $\mathfrak{g}_{n-i}$ 上是自伴的；等价地，$[e_i,e_j]=c_{ij}^ke_k$ 中的系数 c_{ij}^k 满足 $c_{ik}^j=c_{jk}^i,\ \forall 1\leq i<j<k\leq n$。

根据命题4.2，$(G,\ \alpha)$是循环的，当

$$[e_i,e_j]=0,1\leq i<j\leq n-1,\quad [e_n,e_i]=ae_i,1\leq i\leq n-1,$$

其中 a 是一个正数。我们选择 $X=ce_n$，其中 $c\in(-1,1)\backslash\{0\}$，且 $\beta=\langle X,\cdot\rangle$。于是 $F=\alpha+\beta$在 G上诱导出一个左不变 Randers 度量。它是一个非黎曼道格拉斯度量，因为 $\alpha(X,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])=0$ [2, 6]。计算表明，对于任意一般的 u,v,y，

$$\frac{\alpha(y,y)\alpha(X,u)-\alpha(X,y)\alpha(u,y)}{\alpha([y,u],y)}=-\frac{c}{a}=\frac{\alpha(y,y)\alpha(X,v)-\alpha(X,y)\alpha(v,y)}{\alpha([y,v],y)},$$

即 α 满足定理1.4中的方程，因此 F 是循环的。使用相同的 α 和 β，可以类似地构造左不变循环的 $(\alpha,\ \beta)$ 度量。

致谢。本文受到国家自然科学基金（编号：12001007、12131012、11821101）、北京市自然科学基金（编号：1222003）和安徽省自然科学基金（编号：1908085QA03）的资助。

References

[1] H. Akbar-Zadeh，《关于具有常截面曲率的芬斯勒空间》，比利时皇家科学院公报，LXXXIV 卷，第 5 ´ 1988 281 322 4 系列（），-。H. An 和 S. Deng，《齐性流形上的不变（，）[2] α β 度量》，《数学月刊》154（2008），89-102。5，6[3] D. Bao、S.S. Chern 和 Z. Shen，《黎曼-芬斯勒几何导论》，施普林格，纽约，2000。3[4] L. Bieszk，《 $\mathcal{F}_2$类五维李代数的分类》，《数学论证》30（2）（1997）403-424。1 [5] G. Calvaruso 和 M. Castrill´on-L´opez，《循环洛伦兹李群》，《几何奉献》181（1）（2016）119-136。1 [6] 2012 2, 6 S. Deng，《齐性芬斯勒空间》，施普林 [7] 格，纽约，。S. Deng 和 Z. Hou，《自然约化齐性芬斯勒空间》。《数学手稿》131（1-2）（2010）215-229。2 [8] 240 2013 194 226 2 S. [9] ˜ Deng 和 Z. Hu，《齐性 Randers 空间的曲率》，《数学进展》（）-。P.M. Gadea 和 J.A. Oubina：《齐性伪黎曼结构与齐性近拟厄米结构》，《休斯敦数学杂志》 18 3 1992 449 465 1（）（）-。P.M. Gadea、J.C. [10] ´ ´ ˜ Gonzalez-Davila 和 J.A. Oubina，《循环齐性黎曼流形》，《纯粹与应用数学年鉴》 195 2016 1619 1637 1（）-。P.M. Gadea、J.C. Gonzalez-Davila 和 J.A. Oubi˜na，《循环度量 [11] ´ ´ 李群》。《数学月刊》176（2）（2015）219-239。1，2，6[12] L. Huang，《李群上左不变芬斯勒度量的里奇曲率》。《以色列数学杂志》207（2015），第 2, 783 792 3, 4 -期。L. Huang，《齐性芬斯勒空间的基本方程》。《微 [13] 分几何及其应用》40（2015），187-208。3[14] O. Kowalski 和 F. Tricerri：《具有 $n\leq 4$ 维、存在 $\mathcal{F}_2$类齐性结构的黎曼流形》，载于：《数学研讨会讲座》，巴里大学，第222卷，Laterza，巴里（1987）24页。1

[15] 57, 2007 1421 1433 2 D.
[16] α β 27 5 2015 3149 3165
Latifi，齐性芬斯勒空间上的齐性测地线。《J.Geom. Phys.》（），-。H. Liu 和 S. Deng，齐性，型道格拉斯度量。《数学论坛》（）（），-。5
[17] 21 1976 293 329 4 J. Milnor，李群
[18]
上左不变度量的曲率，《数学进展》（），-。F. Tricerri 和 L. Vanhecke，黎曼流形上的齐性结构。伦敦数学会讲义系列 83, 1983 1, 2 剑桥大学出版社，剑桥（）
[19]
A. Tohidfar 和 A. Zaeim，关于四维伪黎曼循环齐性流形，《李理论杂志》31（2021），第1期，169-187。1(Ju Tan) School of Microelectronics and Data Science Anhui University of Technology Maan- , , , shan 243032 P.R. China
, *Email address*: tanju2007@163.com(Ming Xu) School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048, P.R.China*Email address*: mgmgmgxu@163.com