正特征下从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k)的表示

Ryuji Tanimoto

摘要

设 k 是特征为正的代数闭域 p。本文对从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k)的表示进行分类，并据此对从 $\mathbb{G}_a$ 到 SL(3, k)的基本表示进行分类。

arXiv:2304.01038v1 [math.RT] 3 Apr 2023

0 引言

设 k 是代数闭域，令 $\mathbb{G}_a$ 表示 k 的加法群，令 $\mathbb{G}_m$ 表示 k的乘法群。特殊线性群 SL(2, k) 具有如下升链

$$\mathbb{G}_a \xhookrightarrow{\iota^+} B \subset \mathrm{SL}(2,k)$$

子群，其中 B 是由以下方式定义的 SL(2, k) 的博雷尔子群

$$B := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in \mathrm{SL}(2,k) \;\middle|\; c = 0 \right\}$$

且 $\iota^+ \colon \mathbb{G}_a \hookrightarrow B$ 是由以下方式定义的同态

$$\iota^+(t) := \left(\begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

显然， B 同构于 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$，其中 $\mathbb{G}_a$ 是 $\mathbb{G}_m$ 的半直积。

给定一个从 SL(2, k) 到 SL(n, k) 的表示，我们自然得到一个从 B 到 SL(n, k) 的表示，同时也得到一个从 $\mathbb{G}_a$ 到 SL(n, k) 的表示。反过来，给定一个从$\mathbb{G}_a$ 到 SL(n, k) 的表示 u，我们要问 u 能否扩展为一个表示 $\varphi \colon B \to$ SL(n, k)；若存在这样的 φ，我们还要进一步问 φ 能否扩展为一个表示$\psi \colon$ SL(2, k) $\to$ SL(n, k)。若 k 的特征为零，则任意表示 $u \colon \mathbb{G}_a \to$ SL(n, k) 都可以扩展为表示 $\psi \colon$ SL(2, k) $\to$ SL(n, k)。然而，若 k 的特征大于或等于 3，Fauntleroy [1] 找到了一个三维表示$u \colon \mathbb{G}_a \to$ SL(3, k)，使得 u 无法扩展为任何表示 $\psi \colon$ SL(2, k) $\to$ SL(3, k)。这个有趣的表示意味着，即使我们成功地分类了从 SL(2, k) 到 SL(n, k) 的表示（$n \geq 3$），也无法获知正特征下从 $\mathbb{G}_a$ 到 SL(n, k) 的所有表示。正特征下对从 $\mathbb{G}_a$ 到 SL(n, k) 的表示进行分类是一个复杂的问题。目前，对于 $n = 1$为 2、3、4、5 的情形，我们可以给出正特征下从 $\mathbb{G}_a$ 到 SL(n, k) 的若干相互重叠的分类（参见 [2, 3, 4]）。除此之外，正特征下对从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(n, k) 的表示进行分类仍是一个待解决的问题。

2020年数学主题分类。主要分类号 20G05；次要分类号 15A21。关键词和短语：代数群、表示

本文对正特征下从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k) 的表示进行分类p （见定理 2.3 和推论 2.4），并据此对满足以下条件的表示 $u:\ \mathbb{G}_a \to$ SL(3, k) 进行分类: u 可扩展为表示 ψ : SL(2, k) $\to$ SL(3, k)（见定理 4.1 和推论 4.2）。因此，对每个 $p \geq 2$，我们都能找到新的三维表示u: $\mathbb{G}_a \to$ SL(3, k)，使得 u 无法扩展为任何表示 ψ: SL(2, k) $\to$ SL(3, k)（见推论 4.3）。

记号与定义

从现在起直到本文最后一节，我们假设 k 的特征 p 为正。令 $k[T]$ 为 k上的一元多项式环。若多项式环 $k[T]$ 中的多项式 $f(T)$可以写成以下形式，则称其为 p-多项式: $f(T)$

$$f(T) = \sum_{i \geq 0} a_i \, T^{p^i} \qquad (\, a_i \in k \quad \text{for all} \quad i \geq 0\,).$$

令 $\mathfrak{P}$ 表示所有 p-多项式构成的集合。

本文中，我们考虑 k 上的代数群（特别是 $\mathbb{G}_m$、 $\mathbb{G}_a$、 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$、SL(2, k)）及其作为代数群的表示。我们简单地用 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 代替 $\mathbb{G}_a \rtimes_\sigma \mathbb{G}_m$，其中同态 $\sigma:\ \mathbb{G}_m \to \mathrm{Aut}_k(\mathbb{G}_a),\ z \mapsto \sigma_z$ 定义为对所有 $t \in \mathbb{G}_a$， $\sigma_z(t) := z^2\, t$ ； 而 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 中元素 (t_1, z_1)、(t_2, z_2) 的乘积定义为:

$$(t_1, z_1) \cdot (t_2, z_2) := (\, t_1 + \sigma_{z_1}(t_2),\ z_1\, z_2\,).$$

我们可以将半直积 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 识别为 SL(2, k) 中由所有 SL(2, k) 的上三角矩阵组成的博雷尔子群 B。事实上，考虑从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 B 定义的同构

$$(t,\ z) \mapsto \begin{pmatrix} z & t\, z^{-1} \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \right).$$

对于代数群 G，如果存在 GL(n, k) 中的正则矩阵 P，使得对于所有 $g \in G$， $P^{-1}\, \rho_1(g)\ P = \rho_2(g)$，则称两个表示 $\rho_1:\ G \to$ GL(n, k) 和 $\rho_2:\ G \to$GL(n, k) 等价。我们也称 G 到 SL(n, k) 的两个表示 $\rho_1:\ G \to$ SL(n, k) 和 $\rho_2:\ G \to$SL(n, k) 等价，如果存在 GL(n, k) 中的正则矩阵 P，使得对于所有 $g \in G$， $P^{-1}\, \rho_1(g)\ P = \rho_2(g)$。

设 R 是一个交换环。对于 n、 $n' \geq 1$，我们用 Mat$_{n,\ n'}(R)$ 表示所有元素均属于 R 的 $n \times n'$ 矩阵所构成的集合。特别地，当 $n = n'$ 时，我们用 Mat(n, R) 代替 Mat$_{n,\ n'}(R)$。对于矩阵 $A \in$ Mat(n, R)，我们用 ${}^{\top}A$ 表示 A 的转置。对于 R 中的元素 $d_i (1 \leq i \leq n)$，我们用 diag($d_1, \ldots, d_n$) 表示 Mat(n, R) 中的对角矩阵，其 (i, i) 项对所有 $1 \leq i \leq n$ 均为 d_i， 即,

$$\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

1 预备知识

1.1 $\mathbb{G}_m$的表示

引理 1.1. 设 $h:\ \mathbb{G}_m \to \mathbf{GL}(n,k)$ 是 $\mathbb{G}_m$ 的一个表示。则存在一个 $\mathbf{GL}(n,k)$ 中的正则矩阵 P，使得对于所有 $z \in \mathbb{G}_m$,

$$P^{-1}\,h(z)\,P = \mathrm{diag}(\,z^{\ell_1},\,z^{\ell_2},\,\ldots,\,z^{\ell_n}\,) \qquad (\,\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_n\,).$$

证明。证明很直接。 Q.E.D.

引理 1.2. 设 $h:\ \mathbb{G}_m \to \mathbf{GL}(n,k)$ 和 $h':\ \mathbb{G}_m \to \mathbf{GL}(n,k)$ 是 $\mathbb{G}_m$ 的表示，其形式为

$$\begin{cases} h(z) = \mathrm{diag}(\,z^{\ell_1},\,z^{\ell_2},\,\ldots,\,z^{\ell_n}\,) & (\,\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_n\,), \\ h'(z) = \mathrm{diag}(\,z^{\ell'_1},\,z^{\ell'_2},\,\ldots,\,z^{\ell'_n}\,) & (\,\ell'_1 \geq \ell'_2 \geq \cdots \geq \ell'_n\,). \end{cases}$$

假设 h 与 h'等价。那么我们有

$$(\,\ell_1,\,\ell_2,\,\ldots,\,\ell_n\,) = (\,\ell'_1,\,\ell'_2,\,\ldots,\,\ell'_n\,).$$

证明。设 $V := k^{\oplus n}$ 是维数为 n 的列空间。对于任意整数 ℓ，我们令 W_ℓ 和W'_ℓ 为 V的子空间，定义如下:

$$\begin{aligned} W_\ell &:= \{\,v \in V \mid h(z)\,v = z^\ell\,v \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{G}_m\,\}, \\ W'_\ell &:= \{\,v \in V \mid h'(z)\,v = z^\ell\,v \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{G}_m\,\}. \end{aligned}$$

由于 h与 h'等价，存在一个 $\mathbf{GL}(n,k)$ 的正则矩阵 P，使得对于所有 $z \in \mathbb{G}_m$，$P^{-1}h(z)\,P = h'(z)$。对于任意整数 ℓ 以及任意 $v \in V$，我们有

$$\begin{aligned} v \in W_\ell \quad &\Longleftrightarrow \quad h(z)\,v = z^\ell\,v \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{G}_m \\ &\Longleftrightarrow \quad Ph'(z)P^{-1}\,v = z^\ell\,v \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{G}_m \\ &\Longleftrightarrow \quad h'(z)P^{-1}\,v = z^\ell\,P^{-1}\,v \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{G}_m \\ &\Longleftrightarrow \quad P^{-1}\,v \in W'_\ell. \end{aligned}$$

因此 W_ℓ 与 W'_ℓ同构。因此我们可以得到所需的等式。 Q.E.D.

1.2 从 $\mathbb{G}_a$ 到 $\mathbf{SL}(3,k)$ 的表示

在本小节 1.1 中，我们给出了从 $\mathbb{G}_a$ 到 $\mathbf{SL}(3,k)$ 的表示的分类。为陈述这一分类，我们先准备以下六个集合 $\mathcal{U}_{[3]}$, $\mathcal{U}^-_{[3]}$, $\mathcal{A}_{(1,2)}$, $\mathcal{A}_{(2,1)}$, $\mathcal{A}^-{}_{(1,\ 2)}$、 $\mathcal{A}^-{}_{(2,\ 1)}$。

对于 $p \geq 3$，我们将所有形如以下形式的仿射 k-簇之间的态射 $u:\ \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(3,k)$ 的集合记为 $\mathcal{U}_{[3]}$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & \frac{\lambda}{2}\,\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t) \\ 0 & 1 & \lambda\,\alpha_1(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1(T) \in \mathfrak{P}\backslash\{0\}, & \alpha_2(T) \in \mathfrak{P} \\ \lambda \in k\backslash\{0\} \end{pmatrix}.$$

显然， $\mathcal{U}_{[3]}$ 的任意元素都是 $\mathbb{G}_a$ 的表示。

对于 $p \geq 3$，我们将由下式定义的集合记为 $\mathcal{U}^-_{[3]}$

$$\mathcal{U}^-_{[3]} := \left\{ u^- : \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there exists } u \text{ of } \mathcal{U}_{[3]} \text{ such that} \\ u^-(t) = {}^\top u(t) \text{ for all } t \in \mathbb{G}_a \end{array} \right\}.$$

显然，$\mathcal{U}_{[3]}^{-}$ 的任意元素都是 $\mathbb{G}_a$ 的一个表示。

对于 $p \geq 2$，我们用 $\mathcal{A}_{(1,2)}$ 表示所有形如 $u : \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(3,k)$ 的仿射 k-簇的态射的集合

$$u(t) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \big(\alpha_1(T), \alpha_2(T) \in \mathfrak{P}\big).$$

显然，$\mathcal{A}_{(1,2)}$ 中的任意元素都是 $\mathbb{G}_a$ 的表示。

对于 $p \geq 2$，我们用 $\mathcal{A}_{(2,1)}$ 表示所有形如 $u : \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(3,k)$ 的仿射 k-簇的态射的集合

$$u(t) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha_2(t) \\ 0 & 1 & \alpha_1(t) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \big(\alpha_1(T), \alpha_2(T) \in \mathfrak{P}\big).$$

显然，$\mathcal{A}_{(2,1)}$ 中的任意元素都是 $\mathbb{G}_a$ 的表示。

对于 $p \geq 2$，我们用 $\mathcal{A}^{-}{}_{(1,\ 2)}$ 和 $\mathcal{A}^{-}{}_{(2,\ 1)}$ 表示由下式定义的集合

$$\mathcal{A}_{(1,2)}^{-} := \left\{ u^{-} : \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there exists } u \text{ of } \mathcal{A}_{(2,1)} \text{ such that} \\ u^{-}(t) = {}^{\top}u(t) \text{ for all } t \in \mathbb{G}_a \end{array} \right\}$$

and

$$\mathcal{A}_{(2,1)}^{-} := \left\{ u^{-} : \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there exists } u \text{ of } \mathcal{A}_{(1,2)} \text{ such that} \\ u^{-}(t) = {}^{\top}u(t) \text{ for all } t \in \mathbb{G}_a \end{array} \right\}.$$

显然，$\mathcal{A}^{-}{}_{(1,\ 2)}$ 和 $\mathcal{A}^{-}{}_{(2,\ 1)}$ 中的任意元素都是 $\mathbb{G}_a$ 的表示。

引理 1.3. 设 $u : \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(n,k)$ 是一个表示。则以下断言 (1) 和 (2) 成立：

(1) 存在一个表示 $u^* : \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(n,k)$，使得 u^* 等价于 u，且对每个 $t \in \mathbb{G}_a$，$u^*(t)$ 都是上三角矩阵。

(2) 存在一个表示 $u_* : \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(n,k)$，使得 u_* 等价于 u，且对每个 $t \in \mathbb{G}_a$，$u_*(t)$ 都是下三角矩阵。

证明。参见 [3, 引理 1.8]。 Q.E.D.

我们知道以下关于 $\mathbb{G}_a$ 到 $\mathbf{SL}(3,k)$ 的表示的分类：

引理 1.4. 设 $u : \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(3,k)$ 是仿射 k-簇之间的一个态射，并且对每个 $t \in \mathbb{G}_a$，$u(t)$ 都是上（分别为下）三角矩阵。则以下断言 (1) 和 (2) 成立：

(1) 若 $p = 2$，则 $u : \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(3,k)$ 是 $\mathbb{G}_a$ 的表示，当且仅当 $u \in \mathcal{A}_{(1,2)} \cup \mathcal{A}_{(2,1)}$（分别为 $u \in \mathcal{A}^{-}{}_{(1,\ 2)} \cup \mathcal{A}^{-}{}_{(2,\ 1)}$）成立。(2) 若 $p \geq 3$，则 $u : \mathbb{G}_a \to \mathbf{SL}(3,k)$ 是 $\mathbb{G}_a$ 的表示，当且仅当 $u \in \mathcal{U}_{[3]} \cup \mathcal{A}_{(1,2)} \cup \mathcal{A}_{(2,1)}$（分别为 $u \in \mathcal{U}_{[3]}^{-} \cup \mathcal{A}^{-}{}_{(1,\ 2)} \cup \mathcal{A}^{-}{}_{(2,\ 1)}$）。

证明。参见 [4, 定理 6.1]。 Q.E.D.

1.3 从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(n,k) 的表示

设 $n \geq 1$，并设 $\varphi\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(n,k)$ 是从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(n,k) 的一个表示。我们可以定义一个表示 $h_\varphi\colon \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(n,k)$，它将 $\mathbb{G}_m$ 映射到 SL(n,k)，定义如下:

$$h_\varphi(z) := \varphi \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

我们可以将从 $\mathbb{G}_a$ 到 SL(n,k) 的表示 $u_\varphi\colon \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(n,k)$ 定义为

$$u_\varphi(t) := \varphi \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

引理 1.5. 设 $\varphi\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}(n,k)$ 是一个具有如下形式的表示

$$h_\varphi(z) = \mathrm{diag}(\, z^{\ell_1},\, z^{\ell_2},\, \ldots,\, z^{\ell_n}\,) \qquad (\,\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_n\,).$$

设 $\lambda_i (1 \leq i \leq N)$ 是满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N = n$ 且.....的正整数

$$\overbrace{\ell_1 = \cdots = \ell_{\lambda_1}}^{\lambda_1} > \overbrace{\ell_{\lambda_1+1} = \cdots = \ell_{\lambda_1+\lambda_2}}^{\lambda_2} > \cdots > \overbrace{\ell_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{N-1}+1} = \cdots = \ell_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{N-1}+\lambda_N}}^{\lambda_N}.$$

将 $u_\varphi(t)$ 写成

$$u_\varphi(t) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1}(t) & \cdots & A_{1,N}(t) \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{N,1}(t) & \cdots & A_{N,N}(t) \end{array}\right), \qquad A_{i,j}(t) \in \mathrm{Mat}_{\lambda_i,\lambda_j}(k) \qquad (\,1 \leq i,j \leq N\,).$$

那么对于所有 $1 \leq j < i \leq N$，都有 $A_{i,\,j}(t) = 0$；并且对于所有 $1 \leq i \leq N$，$A_{i,\,i}(t) = I_{\lambda_i} \in \mathrm{Mat}(\lambda_i, k)$。特别地，对于任意 $t \in k$，矩阵 $u_\varphi(t)$ 是一个上三角矩阵。

证明。由于

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix},$$

我们有

$$\mathrm{diag}(z^{\ell_1}, \ldots, z^{\ell_n}) \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1}(t) & \cdots & A_{1,N}(t) \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{N,1}(t) & \cdots & A_{N,N}(t) \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1}(z^2 t) & \cdots & A_{1,N}(z^2 t) \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{N,1}(z^2 t) & \cdots & A_{N,N}(z^2 t) \end{array}\right) \mathrm{diag}(z^{\ell_1}, \ldots, z^{\ell_n}).$$

比较上述等式两边的第 (d,e) 个子矩阵，我们有

$$z^{\ell_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{d-1}+1}}\, A_{d,e}(t) = A_{d,e}(z^2 t)\, z^{\ell_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{e-1}+1}}.$$

若 $e < d$，则 $\ell_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{e-1}+1} > \ell_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{d-1}+1}$，从而 $A_{d,e}(t) = O$；若 $d = e$，则 $A_{d,e}(t) \in \mathrm{Mat}(\lambda_d, k)$。因此，每个 $A_{d,d}\colon \mathbb{G}_a \to \mathrm{GL}(\lambda_d, k)$ 都是 $\mathbb{G}_a$ 的常值表示。因此 $A_{d,d}(t) = I_{\lambda_d}$。证毕

1.4 SL(2, k) 的表示

设 $n \geq 1$, 令 G 为 k 上的代数群, 并设 $\psi : \mathrm{SL}(2,k) \to G$ 是 k 上的代数群同态。我们可以定义一个同态 $h_\psi : \mathbb{G}_m \to G$, 如下:

$$h_\psi(z) := \psi \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

我们可以将同态 $u_\psi : \mathbb{G}_a \to G$ 定义为

$$u_\psi(t) := \psi \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们可以将同态 $u_\psi^- : \mathbb{G}_a \to G$ 定义为

$$u_\psi^-(s) := \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

设 $\psi : \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{GL}(n,k)$ 是 $\mathrm{SL}(2,k)$ 的一个表示。设 $V := k^{\oplus n}$ 为 n 维列向量空间。因此, 表示 ψ 给出了 $\mathrm{SL}(2,k)$ 在 V 上的线性作用。对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}$, 我们将 V_ℓ 记为由 V 定义的子空间

$$V_\ell := \left\{ v \in V \;\middle|\; h_\psi(z)\, v = z^\ell\, v \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{G}_m \right\}.$$

显然, 当且仅当 $V = V_0$ 时, h_ψ 是平凡的。

引理 1.6. 设 $\psi : \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{GL}(n,k)$ 是一个表示。则以下断言 (1) 和 (2) 成立:

(1) $V = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} V_\ell$.

(2) 令

$$J := \psi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

为从 V 到其自身的 k-线性同构。于是有 $J^2 = -\mathrm{id}_V$, 并且对所有 $\ell \in \mathbb{Z}$, 都有 $J(V_\ell) = V_{-\ell}$。特别地, V_ℓ 和 $V_{-\ell}$ 这两个 k-向量空间同构, 即,

$$V_\ell \cong V_{-\ell}.$$

证明。断言 (1) 和 (2) 的证明是显然的。 Q.E.D.

引理 1.7. 设 $\psi : \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{GL}(n,k)$ 是一个表示。那么我们有 $\psi(\mathrm{SL}(2,k)) \subset \mathrm{SL}(n,k)$。

证明。V 具有满足以下条件 (1) 和 (2) 的分解:

(1) $V = V_{m_1} \oplus V_{m_2} \oplus \cdots \oplus V_{m_r}$ $(m_1 > m_2 > \cdots > m_r)$。
(2) 对所有 $i \in \{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$, $V_i \neq 0$。

由引理 1.6 可知，对所有 $1 \le i \le r$，$m_i = -m_{r-i+1}$，且对所有 $1 \le i \le r$，$\dim_k V_{m_i} = \dim_k V_{m_{r-i+1}}$。因此，对所有 $z \in \mathbb{G}_m$，我们有

$$\det h_\psi(z) = \prod_{i=1}^{r} z^{m_i \, \dim_k V_{m_i}} = z^d,$$

其中

$$d := \sum_{i=1}^{r} m_i \, \dim_k V_{m_i}.$$

Then

$$\begin{aligned} 2\,d &= \sum_{i=1}^{r} m_i \, \dim_k V_{m_i} + \sum_{i=1}^{r} (-m_{r-i+1}) \, \dim_k V_{m_{r-i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{r} m_i \, \dim_k V_{m_i} - \sum_{i=1}^{r} m_i \, \dim_k V_{m_i} \\ &= 0, \end{aligned}$$

这意味着 $\det\ h(z) = 1$。令 $D(a)$ 为 $\mathrm{SL}(2,k)$ 中由下式定义的仿射开子集

$$D(a) := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in \mathrm{SL}(2,k) \;\middle|\; a \neq 0 \right\}.$$

对于 $D(a)$ 中的任意元素 $\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)$，我们有

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{array} \right),$$

这意味着

$$\det\ \psi \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) = 1.$$

因此，$\psi(D(a)) \subset \mathrm{SL}(n,k)$。由于 ψ 是连续映射，我们有

$$\psi(\overline{D(a)}) \subset \overline{\mathrm{SL}(n,k)}$$

从而得到所需的包含关系 $\psi(\mathrm{SL}(2,k)) \subset \mathrm{SL}(n,k)$。 Q.E.D.

引理 1.8. 设 $\psi\colon \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{GL}(n,k)$ 是一个具有如下形式的表示

$$h_\psi(z) = \mathrm{diag}(\, z^{\ell_1}, \, z^{\ell_2}, \, \ldots, \, z^{\ell_n} \,) \qquad (\, \ell_1 \ge \ell_2 \ge \cdots \ge \ell_n \,).$$

设 $\lambda_i (1 \le i \le N)$ 为满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N = n$ 和

$$\begin{aligned} &\overbrace{\ell_1 = \cdots = \ell_{\lambda_1}}^{\lambda_1} > \overbrace{\ell_{\lambda_1+1} = \cdots = \ell_{\lambda_1+\lambda_2}}^{\lambda_2} > \cdots \\ &\qquad > \overbrace{\ell_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{N-1}+1} = \cdots = \ell_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{N-1}+\lambda_N}}^{\lambda_N}. \end{aligned}$$

那么，以下断言 (1) 和 (2) 成立：

(1) 将 $u_\psi(t)$ 写作

$$u_\psi(t)=\left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1}(t) & \cdots & A_{1,N}(t) \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{N,1}(t) & \cdots & A_{N,N}(t) \end{array}\right), \qquad A_{i,j}(t)\in \mathrm{Mat}_{\lambda_i,\lambda_j}(k) \qquad (1\le i,j\le N).$$

于是，对于所有 $1\le j<i\le N$，$A_{i,j}(t)=0$；并且对于所有 $1\le i\le N$，$A_{i,i}(t)=I_{\lambda_i}\in \mathrm{Mat}(\lambda_i,k)$。特别地，对于任意 $t\in k$，矩阵 $u_\psi(t)$ 是上三角矩阵。

(2) 将 $u_\psi^-(s)$ 写成

$$u_\psi^-(s)=\left(\begin{array}{c|c|c} B_{1,1}(s) & \cdots & B_{1,N}(s) \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{N,1}(s) & \cdots & B_{N,N}(s) \end{array}\right), \qquad B_{i,j}(s)\in \mathrm{Mat}_{\lambda_i,\lambda_j}(k) \qquad (1\le i,j\le N).$$

于是，对于所有 $1\le j<i\le N$，$B_{i,j}(s)=0$；并且对于所有 $1\le i\le N$，$B_{i,i}(t)=I_{\lambda_i}\in \mathrm{Mat}(\lambda_i,k)$。特别地，对于任意 $s\in k$，矩阵 $u_\psi^-(s)$ 是下三角矩阵。

证明。参见引理 1.5 的证明。 Q.E.D.

引理 1.9。设 $\psi\colon \mathrm{SL}(2,k)\to \mathrm{GL}(n,k)$ 是一个表示，且 u_ψ 是平凡的。那么 u_ψ^- 是平凡的，且 h_ψ 也平凡。

证明。注意到

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{for all} \quad t\in \mathbb{G}_a.$$

将 ψ 应用于上述等式，得到

$$\psi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\psi\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\psi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{for all} \quad t\in \mathbb{G}_a,$$

由此得到，对于所有 $t\in \mathbb{G}_a$，$u^-(t)=I_n$。

注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{1+\gamma} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1+\gamma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{for all} \quad \gamma\in k\backslash\{-1\}.$$

将 ψ 应用于上述等式，得到对于所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，$I_n\cdot I_n=I_n\cdot h_\psi(1+\gamma)\cdot I_n$。因此，$h_\psi$ 是平凡的。证毕。

引理 1.10。设 G 是定义在 k 上的代数群。设 $\psi_i\colon \mathrm{SL}(2,k)\to G\,(i=1,2)$ 是满足以下条件 (1) 和 (2) 的代数群态射：

(1) 对于任意 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,k)$，等式 $\psi_1\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\psi_2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 成立。

(2) *For any* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,k)$, *the equality* $\psi_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}=\psi_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$ *holds true.*

那么我们有 $\psi_1=\psi_2$。

证明。任取一个 SL(2, k) 中的矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$。在 $a = 0$ 的情形下，我们有$b\,c = -1$ 并且

$$\begin{aligned}
\psi_1\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \psi_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\psi_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi_1\begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & b \end{pmatrix} \\
&= \psi_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\psi_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi_2\begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & b \end{pmatrix} \\
&= \psi_2\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

在 $a \neq 0$的情形下，我们有如下等式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\psi_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \psi_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}\psi_1\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\psi_1\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \psi_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}\psi_2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\psi_2\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \psi_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

2 从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k)的表示

2.1 从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k)的表示分类候选

引理 2.1. 设 φ : $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(3, k)是一个表示，且 h_φ 具有如下形式

$$h_\varphi(z) = \mathrm{diag}(\, z^{\ell_1},\, z^{\ell_2},\, z^{\ell_3}\,) \qquad (\,\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ell_3\,).$$

则以下断言 (1)、(2)、(3)成立:

(1) 假设 $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$。

(1.1) 如果 $u_\varphi \in \mathcal{U}_{[3]}$，其中 $p \geq 3$，那么我们可以将 u_φ 表示为

$$u_\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & c_1\, t^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,\lambda\, c_1^2\, t^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & \lambda\, c_1\, t^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\,c_1 \in k\backslash\{0\},\quad \lambda \in k\backslash\{0\},\quad e_1 \geq 0\,),$$

$h_\varphi(z)$ 中出现的 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 的 (ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3) 三元组为

$$(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3) = (2\,p^{e_1},\ 0,\ -2\,p^{e_1})$$

以及表示 φ 为

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & c_1\, a^{p^{e_1}}\, b^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,\lambda\, c_1^2\, b^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & \lambda\, c_1\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{pmatrix}.$$

（1.2）若 $u_\varphi \in \mathcal{A}_{(1,2)}$ 其中 $p \geq 2$，则我们可以将 u_φ 表示为

$$u_\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & c_1\, t^{p^{e_1}} & c_2\, t^{p^{e_2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\, c_1, c_2 \in k, \quad e_1, e_2 \geq 0\,),$$

并且，我们可以通过区分以下四种情况来表示 φ：(1.2.a)、(1.2.b)、(1.2.c)、(1.2.d)：

(1.2.a) 若 $c_1 = 0$ 且 $c_2 = 0$，则 $\ell_1 > 0 > \ell_3$ 且

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\, \ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\, \ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

(1.2.b) 若 $c_1 \neq 0$ 且 $c_2 = 0$，则 $\ell_1 - \ell_2 = 2\,p^{e_1}$、$\ell_1 > 0 > \ell_3$ 且

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & c_1\, a^{\ell_2 + p^{e_1}}\, b^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\, \ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & c_1\, a^{p^{e_1}}\, b^{p^{e_1}}\, d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\, \ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

(1.2.c) 若 $c_1 = 0$ 且 $c_2 \neq 0$，则 $\ell_1 - \ell_3 = 2\,p^{e_2}$、$\ell_1 > 0 > \ell_3$ 且

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\, a^{p^{e_2}}\, b^{p^{e_2}}\, d^{-\ell_3} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\, \ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\, a^{p^{e_2}}\, b^{p^{e_2}}\, d^{-\ell_3} \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\, \ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

(1.2.d) 若 $c_1 \neq 0$ 且 $c_2 \neq 0$，则有

$$(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3) = \left(\frac{2\,p^{e_1} + 2\,p^{e_2}}{3},\quad \frac{-4\,p^{e_1} + 2\,p^{e_2}}{3},\quad \frac{2\,p^{e_1} - 4\,p^{e_2}}{3}\right).$$

因此，$\ell_1 > 0$、$\ell_2 \geq 0$、$\ell_3 < 0$ 且 $e_2 > e_1 \geq 0$。并且，我们可以将 φ 表示为

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & c_1\, a^{\ell_1}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} & c_2\, a^{\ell_1}\, b^{p^{e_2}}\, d^{p^{e_2}} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

（1.3）若 $u_\varphi \in \mathcal{A}_{(2,1)}$ 其中 $p \geq 2$，则我们可以将 u_φ 表示为

$$u_\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_2\, t^{p^{e_2}} \\ 0 & 1 & c_1\, t^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\, c_1, c_2 \in k, \quad e_1, e_2 \geq 0\,),$$

我们可以通过区分以下四种情况来表示 φ：（1.3.a）、（1.3.b）、（1.3.c）、（1.3.d）：

（1.3.a）如果 $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$, 那么 $\ell_1 > 0 > \ell_3$ 和

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

(1.3.b) 若 $c_1 \neq 0$ 且 $c_2 = 0$, 则 $\ell_2 - \ell_3 = 2\,p^{e_1}$、$\ell_1 > 0 > \ell_3$ 且

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & c_1\,a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & c_1\,a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

(1.3.c) 若 $c_1 = 0$ 且 $c_2 \neq 0$, 则 $\ell_1 - \ell_3 = 2\,p^{e_2}$、$\ell_1 > 0 > \ell_3$ 且

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

(1.3.d) 若 $c_1 \neq 0$ 且 $c_2 \neq 0$, 则有

$$(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3) = \left(\frac{-2\,p^{e_1} + 4\,p^{e_2}}{3},\quad \frac{4\,p^{e_1} - 2\,p^{e_2}}{3},\quad \frac{-2\,p^{e_1} - 2\,p^{e_2}}{3}\right).$$

因此, $\ell_1 > 0$、$\ell_2 \leq 0$、$\ell_3 < 0$ 和 $e_2 > e_1 \geq 0$。并且我们可以将 φ 表示为

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & d^{-\ell_2} & c_1\,a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

(2) 假设 $\ell_1 = \ell_2 > \ell_3$。则有 $u_\varphi \in \mathcal{A}_{(2,1)}$, 我们可以将 u_φ 表示为

$$u_\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_2\,t^{p^{e_2}} \\ 0 & 1 & c_1\,t^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\,c_1, c_2 \in k,\quad e_1, e_2 \geq 0\,),$$

以及 我们可以通过区分以下四种情况来表示 φ：(2.a)、(2.b)、(2.c)、(2.d):
w

(2.a) 若 $c_1 = 0$ 且 $c_2 = 0$, 则 $\ell_1 = \ell_2 > 0 > \ell_3$ 且

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_1} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

(2.b) 若 $c_1 \neq 0$ 且 $c_2 = 0$, 则 $\ell_2 - \ell_3 = 2\,p^{e_1}$、 $\ell_1 = \ell_2 > 0 > \ell_3$ 且

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_1} & c_1\, a^{\ell_1}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

(2.c) 若 $c_1 = 0$ 和 $c_2 \neq 0$, 则 $\ell_1 - \ell_3 = 2\,p^{e_2}$、 $\ell_1 = \ell_2 > 0 > \ell_3$ 和

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\, a^{\ell_1}\, b^{p^{e_2}}\, d^{p^{e_2}} \\ 0 & a^{\ell_1} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

(2.d) 若 $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 \neq 0$, 则

$$p = 3, \qquad e_1 = e_2 \geq 1, \qquad (\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3) = (2\,p^{e_1-1},\ 2\,p^{e_1-1},\ -4\,p^{e_1-1}),$$

and

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1-1}} & 0 & c_2\, a^{2\,p^{e_1-1}}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} \\ 0 & a^{2\,p^{e_1-1}} & c_1\, a^{2\,p^{e_1-1}}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{4\,p^{e_1-1}} \end{pmatrix}.$$

(3) 假设 $\ell_1 > \ell_2 = \ell_3$。 则有 $u_\varphi \in \mathcal{A}_{(1,2)}$, 我们可以将 u_φ 表示为

$$u_\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & c_1\, t^{p^{e_1}} & c_2\, t^{p^{e_2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\,c_1, c_2 \in k, \quad e_1, e_2 \geq 0\,),$$

并且, 我们可以将 φ 分为以下四种情形来表示: (3.a)、(3.b)、(3.c)、(3.d):

(3.a) 若 $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$, 则 $\ell_1 > 0 > \ell_2 = \ell_3$ 和

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_2} \end{pmatrix}.$$

(3.b) 若 $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 = 0$, 则 $\ell_1 - \ell_2 = 2\,p^{e_1}$、 $\ell_1 > 0 > \ell_2 = \ell_3$ 和

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & c_1\, a^{\ell_1}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_2} \end{pmatrix}.$$

(3.c) 若 $c_1 = 0$ 且 $c_2 \neq 0$, 则 $\ell_1 - \ell_3 = 2\,p^{e_2}$、 $\ell_1 > 0 > \ell_2 = \ell_3$ 且

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\, a^{\ell_1}\, b^{p^{e_2}}\, d^{p^{e_2}} \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_2} \end{pmatrix}.$$

(3.d) 若 $c_1 \neq 0$ 且 $c_2 \neq 0$, 则

$$p = 3, \qquad e_1 \geq 1, \qquad (\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3) = (4\,p^{e_1-1},\ -2\,p^{e_1-1},\ -2\,p^{e_1-1}),$$

and

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{4\,p^{e_1-1}} & c_1\, a^{4\,p^{e_1-1}}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} & c_2\, a^{4\,p^{e_1-1}}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} \\ 0 & d^{2\,p^{e_1-1}} & 0 \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1-1}} \end{pmatrix}.$$

(4) 假设 $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$。 那么 u_φ 是 $\mathbb{G}_a$的平凡表示, 而 φ 是 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$的平凡表示。

2.1.1 引理 2.1 的断言 (1) 的证明

2.1.1.1 (1.1) 将 φ应用于等式

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z^2\,t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix},$$

我们有

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & \frac{\lambda}{2}\,\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t) \\ 0 & 1 & \lambda\,\alpha_1(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(z^2\,t) & \frac{\lambda}{2}\,\alpha_1(z^2\,t)^2 + \alpha_2(z^2\,t) \\ 0 & 1 & \lambda\,\alpha_1(z^2\,t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix}. \qquad (*) \end{aligned}$$

比较等式 (∗) 两边的第 (1, 2) 个元素，得到 $z^{\ell_1}\,\alpha_1(t) = \alpha_1(z^2\,t)\,z^{\ell_2}$。因此 $z^{\ell_1-\ell_2}\,\alpha_1(t) = \alpha_1(z^2\,t)$。所以，$\alpha_1(t)$ 是一个 p-单项式。我们可以将 $\alpha_1(t)$ 表示为 $\alpha_1(t) = c_1\,t^{p^{e_1}}(c_1 \in k\backslash\{0\},\, e_1 \geq 0)$。因此，$\ell_1 - \ell_2 = 2\,p^{e_1}$。比较等式 (∗) 两边的第 (2, 3) 个元素，得到 $z^{\ell_2}\,\lambda\,\alpha_1(t) = \lambda\,\alpha_1(z^2\,t)\,z^{\ell_3}$，这意味着 $\ell_2 - \ell_3 = 2\,p^{e_1}$。比较等式 (∗) 两边的第 (1, 3) 个元素，得到 $z^{4\,p^{e_1}}\alpha_2(t) = \alpha_2(z^2\,t)$。所以，$\alpha_2(t)$ 是一个 p-单项式。我们可以将 $\alpha_2(t)$ 表示为 $\alpha_2(t) = c_2\,t^{p^{e_2}}(c_2 \in k,\, e_2 \geq 0)$。因此，$c_2\,z^{4\,p^{e_1}}\,t^{p^{e_2}} = c_2\,z^{2\,p^{e_2}}\,t^{p^{e_2}}$，这意味着 $c_2 = 0$ （因为 $p \geq 3$）。从而 u 具有所需的形式。

由于 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$，我们有 $(\ell_2 + 2\,p^{e_1}) + \ell_2 + (\ell_2 - 2\,p^{e_1}) = 0$，从而得到 $\ell_1 = 2\,p^{e_1}$, $\ell_2 = 0$, $\ell_3 = -2\,p^{e_1}$。

现在，u_φ 和 (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) 具有所需形式。因此，我们可以将 φ 表示为所需形式。事实上，

$$\begin{aligned} \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_1\,(\frac{b}{a})^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,\lambda\,c_1^2\,(\frac{b}{a})^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & \lambda\,c_1\,(\frac{b}{a})^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & c_1\,a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,\lambda\,c_1^2\,b^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & \lambda\,c_1\,b^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.1.2 (1.2) 我们有

$$\begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(z^2\,t) & \alpha_2(z^2\,t) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

比较等式 (∗) 两边的第 (1, 2) 个元素，得到 $z^{\ell_1}\,\alpha_1(t) = \alpha_1(z^2\,t)\,z^{\ell_2}$。因此，对于某些 $c_1 \in k$ 和 $e_1 \geq 0$，有 $\alpha_1(t) = c_1\,t^{p^{e_1}}$。若 $c_1 \neq 0$，则 $\ell_1 - \ell_2 = 2\,p^{e_1}$。比较上述等式 (∗) 两边的第 (1, 3) 个元素，得到 $z^{\ell_1}\,\alpha_2(t) = \alpha_2(z^2\,t)\,z^{\ell_3}$。因此，对于某些 $c_2 \in k$ 和 $e_2 \geq 0$，有 $\alpha_2(t) = c_2\,t^{p^{e_2}}$。若 $c_2 \neq 0$，则 $\ell_1 - \ell_3 = 2\,p^{e_2}$。因此，$u_\varphi$ 具有所需形式。

由于 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ 且 $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$，我们有 $\ell_1 > 0$ 且 $\ell_3 < 0$。

We 通过区分以下四种情形来表示 φ： (1.2.a)、(1.2.b)、(1.2.c)、(1.2.d)：

(1.2.a) $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$。
(1.2.b) $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 = 0$。
(1.2.c) $c_1 = 0$ 和 $c_2 \neq 0$。
(1.2.d) $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 \neq 0$。

在情形 (1.2.a) 中，φ 已经具有所需形式。在情形 (1.2.b) 中，

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c_1\,(\frac{b}{a})^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & c_1\,a^{\ell_1-p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & c_1\,a^{\ell_2+p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & c_1\,a^{\ell_2+p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & c_1\,a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}}\,d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

在情形 (1.2.c) 中，

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_2\,(\frac{b}{a})^{p^{e_2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{\ell_1-p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{\ell_3+p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

在情形 (1.2.d) 中，由于 $\ell_1+\ell_2+\ell_3 = 0$，我们有 $\ell_1 = (2\,p^{e_1}+2\,p^{e_2})/3$, $\ell_2 = (-4\,p^{e_1}+2\,p^{e_2})/3$, $\ell_3 = (2\,p^{e_1}-4\,p^{e_2})/3$。由于 $\ell_1-\ell_3 > \ell_1-\ell_2$，我们有 $e_2 > e_1$。由于 $p^{e_2} \geq 2\,p^{e_1}$，我们有 $\ell_2 \geq 0$。因此，我们可以将 φ 表示为所需形式。

2.1.1.3 (1.3) 我们有

$$\begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_2(t) \\ 0 & 1 & \alpha_1(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_2(z^2\,t) \\ 0 & 1 & \alpha_1(z^2\,t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

比较上述等式（$*$）两边的 (1,3) 项，可得 $z^{\ell_1}\,\alpha_2(t) = \alpha_2(z^2\,t)\;z^{\ell_3}$。因此，对于某些 $c_2 \in k$ 和 $e_2 \geq 0$，有 $\alpha_2(t) = c_2\,t^{p^{e_2}}$。若 $c_2 \neq 0$，则 $\ell_1 - \ell_3 = 2\,p^{e_2}$。

比较上述等式（$*$）两边的 (2, 3) 项，可得 $z^{\ell_2}\,\alpha_1(t) = \alpha_1(z^2\,t)\; z^{\ell_3}$。因此，对于某些 $c_1 \in k$ 和 $e_1 \geq 0$，有 $\alpha_1(t) = c_1\,t^{p^{e_1}}$。若 $c_1 \neq 0$，则 $\ell_2 - \ell_3 = 2\,p^{e_1}$。因此，$u_\varphi$ 具有所需的形式。

由于 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ 和 $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$，我们有 $\ell_1 > 0$ 和 $\ell_3 < 0$。
我们通过区分以下四种情形来表示 φ：(1.3.a)、(1.3.b)、(1.3.c)、(1.3.d):

(1.3.a) $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$。
(1.3.b) $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 = 0$。
(1.3.c) $c_1 = 0$ 和 $c_2 \neq 0$。
(1.3.d) $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 \neq 0$。

在情形(1.3.a)中，φ 已经具有所需形式。在情形(1.3.b)中，

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_1\,(\frac{b}{a})^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & c_1\,a^{\ell_2 - p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & c_1\,a^{\ell_3 + p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & c_1\,a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & c_1\,a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

在情形(1.3.c)中，

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_2\,(\frac{b}{a})^{p^{e_2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{\ell_1 - p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{\ell_3 + p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & c_2\,a^{p^{e_2}}\,b^{p^{e_2}}\,d^{-\ell_3} \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

在情形 (1.3.d) 中，由于 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$，我们有 $\ell_1 = (-2\,p^{e_1} + 4\,p^{e_2})/3$, $\ell_2 = (4\,p^{e_1} - 2\,p^{e_2})/3$, $\ell_3 = (-2\,p^{e_1} - 2\,p^{e_2})/3$。由于 $\ell_1 - \ell_3 > \ell_2 - \ell_3$，我们有 $e_2 > e_1$。由于 $p^{e_2} \geq 2\,p^{e_1}$，我们有$\ell_2 \leq 0$。因此，我们可以将 φ 表示为所需的形式。

2.1.2 引理 2.1 中断言 (2) 的证明

由引理 1.5 可知 $u \in \mathcal{A}_{(2,1)}$。因此，我们有

$$\begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_2(t) \\ 0 & 1 & \alpha_1(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_2(z^2 t) \\ 0 & 1 & \alpha_1(z^2 t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix}.$$

与情形 (1.3) 一样，对于每个 $i = 1, 2$，我们可以将 α_i 表示为 $\alpha_i(t) = c_i t^{p^{e_i}}$，其中 $c_i \in k$ 和 $e_i \geq 0$ 满足某些条件。此外，若 $c_2 \neq 0$，则有 $\ell_1 - \ell_3 = 2p^{e_2}$；若$c_1 \neq 0$，则有 $\ell_2 - \ell_3 = 2p^{e_1}$。因此，$u_\varphi$ 具有所需的形式。

由于 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ 和 $\ell_1 = \ell_2 > \ell_3$，我们有 $\ell_1 = \ell_2 > 0$ 和 $\ell_3 < 0$。

我们通过区分以下四种情形来表示 φ：(2.a)、(2.b)、(2.c)、(2.d):

(2.a) $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$。

(2.b) $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 = 0$。

(2.c) $c_1 = 0$ 和 $c_2 \neq 0$。

(2.d) $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 \neq 0$。

在情形 (2.a) 中，φ 已经具有所需形式。

在情形 (2.b) 和 (2.c) 中，我们可以将 φ 表示为所需形式。

在情形 (2.d) 中，我们有 $2p^{e_2} = \ell_1 - \ell_3 = \ell_2 - \ell_3 = 2p^{e_1}$，这意味着 $e_1 = e_2$。由于 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$，我们有 $3\ell_3 = -4p^{e_1}$，这意味着 $p = 3$ 和 $e_1 \geq 1$。因此 $\ell_3 = -4p^{e_1 - 1} = -4 \cdot 3^{e_1 - 1}$ 和 $\ell_1 = \ell_3 + 2p^{e_1} = -4p^{e_1 - 1} + 2p^{e_1} = 2 \cdot 3^{e_1 - 1}$。所以，我们可以将 φ 表示为所需形式。

2.1.3 引理 2.1 的断言 (3) 的证明

由引理 1.5 可知 $u_\varphi \in \mathcal{A}_{(1,2)}$。因此，我们有

$$\begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(z^2 t) & \alpha_2(z^2 t) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix}.$$

与情形 (1.2) 一样，对于每个 $i = 1, 2$，我们都可以将 α_i 表示为 $\alpha_i(t) = c_i t^{p^{e_i}}$，其中 $c_i \in k$ 和 $e_i \geq 0$ 满足某些条件。此外，当 $c_1 \neq 0$ 时，我们有 $\ell_1 - \ell_2 = 2p^{e_1}$；当 $c_2 \neq 0$ 时，我们有 $\ell_1 - \ell_3 = 2p^{e_2}$。因此，$u_\varphi$ 具有所需的形式。

由于 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ 和 $\ell_1 > \ell_2 = \ell_3$，我们有 $\ell_1 > 0$ 和 $\ell_2 = \ell_3 < 0$。

我们通过分别讨论以下四种情形 (3.a)、(3.b)、(3.c)、(3.d) 来表示 φ：

(3.a) $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$。

(3.b) $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 = 0$。

(3.c) $c_1 = 0$ 和 $c_2 \neq 0$。

(3.d) $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 \neq 0$。

在情形 (3.a) 中，φ 已经具有所需形式。

在情形 (3.b) 和 (3.c) 中，我们可以将 φ 表示为所需形式。

在 (3.d) 的情形下，我们有 $2p^{e_1} = \ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - \ell_3 = 2p^{e_2}$，这意味着 $e_1 = e_2$。由于 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$，我们有 $3\ell_1 = 4p^{e_1}$，这意味着 $p = 3$ 和 $e_1 \geq 1$。因此 $\ell_1 = 4p^{e_1 - 1}$、$\ell_2 = -2p^{e_1 - 1}$ 和 $\ell_3 = -2p^{e_1 - 1}$。所以，我们可以将 φ 表示为所需的形式。

2.1.4 引理 2.1 的断言 (4) 的证明

由引理 1.5 可知，u_φ 是平凡的。由于 $\ell_1+\ell_2+\ell_3=0$ 和 $\ell_1=\ell_2=\ell_3$，我们有 $\ell_1=\ell_2=\ell_3=0$。因此 φ 是平凡的。

2.1.5 关于 (1.2.d) 和 (1.3.d) 中的特征 p

引理 2.2. 设 p 为素数。设 e_1 和 e_2 为满足 $e_2>e_1\geq 0$ 的整数。当且仅当以下条件 (1) 和 (2) 之一成立时，$(2\,p^{e_1}+2\,p^{e_2})/3$ 是整数：

(1) $p=3$。

(2) $p\equiv -1$ （模 3）且 $e_1-e_2\equiv 1$ （模 2）。

证明。证明很直接。 Q.E.D.

2.2 从 $\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k) 的表示分类

我们可以通过区分以下情形来定义表示 $\varphi^*:\ \mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to$ SL(3, k)：(1)*、(2)*、(3)*、(4)* （这些情形对应于引理 2.1 中的情形 (1)、(2)、(3)、(4)）：

(1)* 设 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 为满足 $\ell_1+\ell_2+\ell_3=0$、$\ell_1>\ell_2>\ell_3$ 和 $\ell_1>0>\ell_3$ 的整数。

(I)* 如果 $p\geq 3$，且存在整数 $e_1\geq 0$ 使得 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)=(2\,p^{e_1},0,-2\,p^{e_1})$，那么我们可以定义 $\varphi^*:\ \mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to$ SL(3, k)，其中 $p\geq 2$ 如下：

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} a^{\ell_1} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,b^{2\,p^{e_1}}\\ 0 & a^{\ell_2} & b^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}}\\ 0 & 0 & a^{\ell_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,b^{2\,p^{e_1}}\\ 0 & 1 & b^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}}\\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}}\end{pmatrix}.$$

(II)* 在不对 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 作任何额外假设的情况下，我们可以将 φ^* 定义为：$\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to$ SL(3, k)，其定义如下

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}:=\begin{cases}\begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0\\ 0 & a^{\ell_2} & 0\\ 0 & 0 & d^{-\ell_3}\end{pmatrix} & (\,\ell_2\geq 0\,),\\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0\\ 0 & d^{-\ell_2} & 0\\ 0 & 0 & d^{-\ell_3}\end{pmatrix} & (\,\ell_2<0\,).\end{cases}$$

(III)* 如果存在一个整数 $e_1\geq 0$ 使得 $\ell_1-\ell_2=2\,p^{e_1}$，那么我们可以定义$\varphi^*:\ \mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to$ SL(3, k)，其中 $p\geq 2$ 为

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}:=\begin{cases}\begin{pmatrix} a^{\ell_1} & a^{\ell_2+p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & 0\\ 0 & a^{\ell_2} & 0\\ 0 & 0 & d^{-\ell_3}\end{pmatrix} & (\,\ell_2\geq 0\,),\\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}}\,d^{-\ell_2} & 0\\ 0 & d^{-\ell_2} & 0\\ 0 & 0 & d^{-\ell_3}\end{pmatrix} & (\,\ell_2<0\,).\end{cases}$$

(IV)* 如果存在一个整数 $e_2 \geq 0$ 使得 $\ell_1 - \ell_3 = 2\,p^{e_2}$，那么我们可以定义$\varphi^*$：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$，其中 $p \geq 2$ 为

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & a^{p^{e_2}}\, b^{p^{e_2}}\, d^{-\ell_3} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & a^{p^{e_2}}\, b^{p^{e_2}}\, d^{-\ell_3} \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

(V)* 如果存在整数 e_1, e_2，使得 $e_2 > e_1 \geq 0$ 且

$$(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3) = \left(\frac{2\,p^{e_1} + 2\,p^{e_2}}{3},\quad \frac{-4\,p^{e_1} + 2\,p^{e_2}}{3},\quad \frac{2\,p^{e_1} - 4\,p^{e_2}}{3}\right),$$

那么我们可以定义 $\varphi^*\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 如下

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & a^{\ell_1}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} & a^{\ell_1}\, b^{p^{e_2}}\, d^{p^{e_2}} \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

显然，$\ell_1 > 0, \ell_2 \geq 0, \ell_3 < 0$。并且 $p = 3$ 或 $1 + p^{e_2 - e_1}$ 是 3 的倍数。

(VI)* 设 $e_1 \geq 0$，并假设 $\ell_2 - \ell_3 = 2\,p^{e_1}$。那么我们可以定义 $\varphi^*\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 如下

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{cases} \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & a^{p^{e_1}}\, b^{p^{e_1}}\, d^{-\ell_3} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 \geq 0\,), \\ \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & a^{p^{e_1}}\, b^{p^{e_1}}\, d^{-\ell_3} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix} & (\,\ell_2 < 0\,). \end{cases}$$

(VII)* 设 e_1, e_2 为满足 $e_2 > e_1 \geq 0$ 的整数。假设

$$(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3) = \left(\frac{-2\,p^{e_1} + 4\,p^{e_2}}{3},\quad \frac{4\,p^{e_1} - 2\,p^{e_2}}{3},\quad \frac{-2\,p^{e_1} - 2\,p^{e_2}}{3}\right).$$

Clea显然，$\ell_1 > 0, \ell_2 \leq 0$ 和 $\ell_3 < 0$。那么我们可以定义 $\varphi^*\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 如下

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & a^{p^{e_2}}\, b^{p^{e_2}}\, d^{-\ell_3} \\ 0 & d^{-\ell_2} & a^{p^{e_1}}\, b^{p^{e_1}}\, d^{-\ell_3} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

(2)* 设 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 为满足 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ 和 $\ell_1 = \ell_2 > 0 > \ell_3$的整数。

(VIII)* 在不对 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 作任何额外假设的情况下，我们可以定义 $\varphi^*\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$，其中 $p \geq 2$ 为

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_1} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

(IX)* 如果存在一个整数 $e_1 \geq 0$ 使得 $\ell_1 - \ell_3 = 2\,p^{e_1}$，那么我们可以定义$\varphi^*$：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathbf{SL}(3,k)$，其中 $p \geq 2$ 为

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_1} & a^{\ell_1}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{-\ell_3} \end{pmatrix}.$$

(3)* 设 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 为满足 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ 和 $\ell_1 > 0 > \ell_2 = \ell_3$的整数 .

(X)* 在没有对 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3作任何额外假设的情况下，我们可以定义 φ^*：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathbf{SL}(3,k)$ 如下

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_2} \end{pmatrix}.$$

(XI)* 若存在一个整数 $e_1 \geq 0$ 使得 $\ell_1 - \ell_2 = 2\,p^{e_1}$，则我们可以定义$\varphi^*$：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathbf{SL}(3,k)$，其中 $p \geq 2$ 如下

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & a^{\ell_1}\, b^{p^{e_1}}\, d^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & d^{-\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-\ell_2} \end{pmatrix}.$$

(4)* 设 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 为满足 $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0$的整数。

(XII)* 我们可以将 φ^*：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathbf{SL}(3,k)$ 定义为其中 $p \geq 2$ 为平凡表示，即

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{\ell_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然，任何具有 **(I)*** – **(XII)*** 其中一种形式的 φ^* 都满足

$$\varphi^*\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix}.$$

Let

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)^*} &:= \{\, (\mathrm{I})^*,\ (\mathrm{II})^*,\ (\mathrm{III})^*,\ (\mathrm{IV})^*,\ (\mathrm{V})^*,\ (\mathrm{VI})^*,\ (\mathrm{VII})^* \,\}, \\ \Lambda^{(2)^*} &:= \{\, (\mathrm{VIII})^*,\ (\mathrm{IX})^* \,\}, \\ \Lambda^{(3)^*} &:= \{\, (\mathrm{X})^*,\ (\mathrm{XI})^* \,\}, \\ \Lambda^{(4)^*} &:= \{\, (\mathrm{XII})^* \,\}, \\ \Lambda^* &:= \Lambda^{(1)^*} \cup \Lambda^{(2)^*} \cup \Lambda^{(3)^*} \cup \Lambda^{(4)^*}. \end{aligned}$$

对于任意 $\lambda \in \Lambda^*$，我们可以定义集合 $R^*(\lambda)$ 如下：

$$R^*(\lambda) := \{\, \varphi : \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k) \mid \varphi \text{ is a representation with the form } \lambda \,\}.$$

定理 2.3。以下断言 **(1)** 和 **(2)** 成立：

(1) 任意表示 φ：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 都等价于具有 λ of Λ^* 其中一种形式的表示 φ^*：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$。

（2）设 $\phi \in R^*(\lambda)$ 和 $\psi \in R^*(\mu)$，其中 λ、$\mu \in \Lambda^*$。记 $h_\phi(z)$ 为 $=(z^{\ell_1}$、z^{ℓ_2}、$z^{\ell_3})$，并记 $h_\psi(z)$ 为 $=(z^{m_1}$、z^{m_2}、$z^{m_3})$。

（2.1）如果 $\lambda \neq \mu$，则 ϕ 和 ψ 不等价。（2.2）如果 $\lambda = \mu$，则以下条件（i）、（ii）、（iii）、（iv）等价：（i） ϕ 和 ψ 等价。（ii） h_ϕ 和 h_ψ 等价。（iii）$(\ell_1$、ℓ_2、$\ell_3) = (m_1$、m_2、$m_3)$。（iv） $\phi = \psi$。

推论 2.4. 在所有 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 $\mathrm{SL}(3,k)$ 的表示按等价分类所得的集合与集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda^*} R^*(\lambda)$ 之间存在一一对应，即，

$$\{\varphi : \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k) \mid \varphi \textit{ is a representation}\}/\sim \cong \coprod_{\lambda\in\Lambda^*} R^*(\lambda).$$

证明。设 $S := \{\varphi$：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k) \mid \varphi$是一个表示 $\}/\sim$，且 $T := \coprod_{\lambda\in\Lambda^*} R^*(\lambda)$。

我们可以如下定义一个映射 f：$S \to T$：设 Φ 是 S的一个元素。存在一个表示 φ：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$，使得 Φ 是 φ的等价类，即 $\Phi = [\varphi]$。由定理 2.3 的断言 (1) 可知，存在一个表示 φ^*：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$，使得 φ 与 φ^* 等价，并且对于某个 $\lambda \in \Lambda^*$有 $\varphi^* \in R^*(\lambda)$。因此，$\Phi = [\varphi^*]$。这样的 λ 由 Φ 唯一确定（见定理 2.3 的断言 (2.1)），而 φ^* 也由 Φ 唯一确定（见定理 2.3 的断言 (2.2)）。于是，我们可以定义 f：$S \to T$ 为 $f(\Phi) := \varphi^*$。

反过来，我们可以定义映射 $g : T \to S$ 为 $g(\varphi^*) := [\varphi^*]$。
我们可以证明 $g \circ f = \mathrm{id}_S$ 和 $f \circ g = \mathrm{id}_T$。证明至此完成。 Q.E.D.

2.2.1 定理 2.3 的断言 (1) 的证明

根据引理 1.1，我们不妨从一开始就假设 h_φ 具有如下形式

$$h_\varphi(z) = \mathrm{diag}(\, z^{\ell_1},\, z^{\ell_2},\, z^{\ell_3}\,) \qquad (\, \ell_1 \geq \ell_2 \geq \ell_3\,).$$

由引理 2.1 可知，φ 具有以下形式之一：(1.1)、(1.2.a)、(1.2.b)、(1.2.c)、(1.2.d)、(1.3.a)、(1.3.b)、(1.3.c)、(1.3.d)、(2.a)、(2.b)、(2.c)、(2.d)、(3.a)、(3.b)、(3.c)、(3.d)、(4)。对于下表每一行中的任意 (φ, P)，我们可以计算由下式定义的 φ^*：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 的形式

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := P^{-1}\,\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P.$$

φ	P	φ^*
(1.1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\lambda\, c_1^2) \end{pmatrix}$	$(\mathrm{I})^*$

(1.2.a)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{II})^*$
(1.2.b)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(III) *
(1.2.c)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_2 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{IV})^*$
(1.2.d)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_2 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{V})^*$
(1.3.a)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix}$	$(\mathrm{II})^*$
(1.3.b)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{VI})^*$
(1.3.c)	$\begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{IV})^*$
(1.3.d)	$\begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(VII) *
（ 2.a）	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix}$	（VIII） *
（ 2.b）	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_1 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{IX})^*$
（ 2.c）	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_2 \end{pmatrix}$	（IX） *, $e_1 := e_2$
(2.d)	$\begin{pmatrix} c_2 & c_2 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{IX})^*$
(3.a)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{X})^*$
(3.b)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{XI})^*$
(3.c)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/c_2 & 0 \end{pmatrix}$	**(XI)***, $e_1 := e_2$

(3.d)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_1 & -1/c_1 \\ 0 & 0 & 1/c_2 \end{pmatrix}$	$(\mathrm{XI})^*$
(4)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$	$(\mathrm{XII})^*$

2.2.2 定理 2.3 的断言 (2) 的证明

设 $V = k^{\oplus n}$ 为维数为 n 的列向量空间，并设 $V' := k^{\oplus n}$ 为维数为 n 的行向量空间。对于表示 $\varphi\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(n,k)$ 以及整数 ℓ，我们将子空间 V_ℓ^φ 记为

$$V_\ell^\varphi := \left\{ v \in V \;\middle|\; \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} v = a^\ell v \quad \text{for all} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \right\}$$

并将由下式定义的子空间 $(V')_\ell^\varphi$ 记为

$$(V')_\ell^\varphi := \left\{ v' \in V' \;\middle|\; v'\,\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a^\ell v' \quad \text{for all} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \right\}.$$

引理 2.5. 设 $\varphi_i\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(n,k)$ $(i = 1, 2)$ 是两个表示，且 φ_1 与 φ_2 等价。设 ℓ 是一个整数。则 $V_\ell^{\varphi_1}$ 与 $V_\ell^{\varphi_2}$ 作为向量空间同构，并且 $(V')_\ell^{\varphi_1}$ 与 $(V')_\ell^{\varphi_2}$ 作为向量空间同构。

证明. 存在 $\mathrm{GL}(n,k)$ 的一个正则表示 P，使得

$$P^{-1}\varphi_1\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} P = \varphi_2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad \text{for all} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m.$$

对于任意 $v \in V$，我们有

$$\begin{aligned} v \in V_\ell^{\varphi_1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi_1(A)\, v = a^\ell v \quad \text{for all} \quad A \in \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \\ &\Longleftrightarrow \quad P\varphi_2(A)P^{-1} v = a^\ell v \quad \text{for all} \quad A \in \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi_2(A)\, P^{-1} v = a^\ell\, P^{-1} v \quad \text{for all} \quad A \in \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \\ &\Longleftrightarrow \quad P^{-1} v \in V_\ell^{\varphi_2}. \end{aligned}$$

因此，$V_\ell^{\varphi_1}$ 与 $V_\ell^{\varphi_2}$ 同构。类似地，$(V')_\ell^{\varphi_1}$ 与 $(V')_\ell^{\varphi_2}$ 同构。 Q.E.D.

设 $\varphi\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(n,k)$ 是一个表示，使得

$$\varphi\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{\ell_1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{\ell_2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{\ell_3} \end{pmatrix} \qquad (\,\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ell_3\,).$$

若 $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$，我们可以定义 $\mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ 中的元素 $d_{(1)^*}(\varphi)$ 和 $d'_{(1)^*}(\varphi)$ 如下：

$$\begin{aligned} d_{(1)^*}(\varphi) &:= (\,\dim_k (V)_{\ell_1}^\varphi,\ \dim_k (V)_{\ell_2}^\varphi,\ \dim_k (V)_{\ell_3}^\varphi\,), \\ d'_{(1)^*}(\varphi) &:= (\,\dim_k (V')_{\ell_1}^\varphi,\ \dim_k (V')_{\ell_2}^\varphi,\ \dim_k (V')_{\ell_3}^\varphi\,). \end{aligned}$$

若 $\ell_1 = \ell_2 > 0 > \ell_3$，我们可以将 $d_{(2)^*}(\varphi)$ 和 $d'_{(2)^*}(\varphi)$ 定义为 $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 的元素：

$$d_{(2)^*}(\varphi) := (\,\dim_k (V)_{\ell_1}^\varphi,\ \dim_k (V)_{\ell_3}^\varphi\,),$$

$$d'_{(2)^*}(\varphi) := (\dim_k (V')^{\varphi}_{\ell_1},\ \dim_k (V')^{\varphi}_{\ell_3}).$$

若 $\ell_1 > 0 > \ell_2 = \ell_3$，我们可以将 $d_{(3)^*}(\varphi)$ 和 $d'_{(3)^*}(\varphi)$ 定义为 $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 的元素：

$$d_{(3)^*}(\varphi) := (\dim_k(V)^{\varphi}_{\ell_1}, \dim_k(V)^{\varphi}_{\ell_2}),$$
$$d'_{(3)^*}(\varphi) := (\dim_k(V')^{\varphi}_{\ell_1}, \dim_k(V')^{\varphi}_{\ell_2})。$$

引理 2.6. 我们有以下 (1)*、(2)*、(3)*：

(1)* 令 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 为满足 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$、$\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$ 和 $\ell_1 > 0 > \ell_3$的整数。令φ^*：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(3, k) 为具有以下形式之一的表示：(I)*、(II)*、(III)*、(IV)*、(V)*、(VI)*、(VII)*。

(1.1)* 若 φ^* 具有形式 (I)*，则 $d_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 0, 0)$，$d'_{(1)^*}(\varphi^*) = (0, 0, 1)$。
(1.2)* 若 φ^* 具有形式 (II)*，则 $d_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 1, 1)$，$d'_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 1, 1)$。
(1.3)* 若 φ^* 具有形式 (III)*，则 $d_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 0, 1)$，$d'_{(1)^*}(\varphi^*) = (0, 0, 1)$。
(1.4)* 若 φ^* 具有形式 (IV)*，则 $d_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 1, 0)$，$d'_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 1, 1)$。
(1.5)* 若 φ^* 具有形式 (V)*，则 $d_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 0, 0)$，$d'_{(1)^*}(\varphi^*) = (0, 1, 1)$。
(1.6)* 若 φ^* 具有形式 (VI)*，则 $d_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 1, 0)$，$d'_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 0, 1)$。
(1.7)* 若 φ^* 具有形式 (VII)*，则 $d_{(1)^*}(\varphi^*) = (1, 1, 0)$，$d'_{(1)^*}(\varphi^*) = (0, 0, 1)$。

(2)* 设 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 为满足 $\ell_1+\ell_2+\ell_3 = 0$ 和 $\ell_1 = \ell_2 > 0 > \ell_3$ 的整数。设 φ^*：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(3, k) 是具有以下形式之一的表示：(VIII)* 和 (IX)*。

(2.1)* 若 φ^* 具有形式 (VIII)*，则 $d_{(2)^*}(\varphi^*) = (2, 1)$，$d'_{(2)^*}(\varphi^*) = (2, 1)$。
(2.2)* 若 φ^* 具有形式 (IX)*，则 $d_{(2)^*}(\varphi^*) = (2, 0)$，$d'_{(2)^*}(\varphi^*) = (1, 1)$。

(3)* 设 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 为满足 $\ell_1+\ell_2+\ell_3 = 0$ 和 $\ell_1 > 0 > \ell_2 = \ell_3$ 的整数。设 φ^*：$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(3, k) 是具有以下形式之一的表示：(X)* 和 (XI)*。

(3.1)* 若 φ^* 具有形式 (X)*，则 $d_{(3)^*}(\varphi^*) = (1, 2)$，$d'_{(3)^*}(\varphi^*) = (1, 2)$。
(3.2)* 若 φ^* 具有形式 (XI)*，则 $d_{(3)^*}(\varphi^*) = (1, 1)$，$d'_{(3)^*}(\varphi^*) = (0, 2)$。

证明。证明很直接。 Q.E.D.

现在，我们给出定理 2.3 的断言 (2) 的证明。

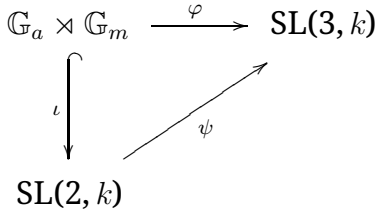
我们先证明 (2.1)。若 $\lambda \in \Lambda^{(i)^*}$ 和 $\mu \in \Lambda^{(j)^*}$，其中 i、$j \in \{1, 2, 3, 4\}$ 满足 $i \neq j$，根据引理 1.2 可知 ϕ 和 ψ 不等价。若 λ、$\mu \in \Lambda^{(i)^*}$ 和 $\lambda \neq \mu$，根据引理 2.5 和 2.6 可知 ϕ 和 ψ 不等价。

接下来我们证明 (2.2)。蕴含关系 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 显然。蕴含关系 (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 由引理 1.2 得出。蕴含关系 (iii) $\Longrightarrow$ (iv) 和 (iv) $\Longrightarrow$ (i) 显然。

3 Fun基本的表示 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k)

3.1 将 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k) 的基本表示分类的候选对象

若存在一个表示 ψ: SL(2, k) $\to$ SL(n, k)，使得下图交换，则称表示 φ: $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(n, k)（定义在 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 上）为基本的:



其中， ι: $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(2, k) 是由下式定义的单同态

$$\iota(t, z) := \begin{pmatrix} z & t\,z^{-1} \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

因此，将 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 的元素 ($a\,b$, a) 与 SL(2, k) 的元素 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 对应起来，我们有

$$\psi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

引理 3.1. 设 φ: $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(n, k) 是一个基本表示。设 P 是 GL(n, k) 的一个正则矩阵，并设 φ^*: $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(n, k) 是由下式定义的表示

$$\varphi^* \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := P^{-1} \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P.$$

那么， φ^* 是 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 SL(n, k) 的一个基本表示。

证明. 设 f: SL(3, k) $\to$ SL(3, k) 是由 $f(A) := P^{-1}AP$ 定义的同态。显然， $\varphi^* = f \circ \varphi$。于是 $\varphi^* = f \circ \psi \circ \iota$，这意味着 φ^* 是 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$的一个基本表示。

证毕。

引理 3.2. 设 φ^*: $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(3, k) 是 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$的一个表示，其形式为 (I)* – (XII)* 之一。假设 φ^* 是基本的。那么 φ^* 具有形式 (I)* – (VII)* 之一，或形式 (XII)*。此外，我们有如下结论:

(1) 若 φ^* 具有 (II)* 的形式，则 $\ell_1 > 0$ 和 $\ell_3 = -\ell_1$。

(2) 若 φ^* 具有 (III)* 的形式，则 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (2\,p^{e_1}, 0, -2\,p^{e_1})$。

(3) 若 φ^* 具有 (IV)* 的形式，则 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (p^{e_2}, 0, -p^{e_2})$。

(4) 若 φ^* 具有 (V)* 的形式，则 $p = 2$ 且 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (2\,p^{e_1}, 0, -2\,p^{e_1})$。

(5) 若 φ^* 具有 (VI)* 的形式，则 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (2\,p^{e_1}, 0, -2\,p^{e_1})$。

(6) 若 φ^* 具有形式 (VII)*，则 $p = 2$ 和 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (2\,p^{e_1}, 0, -2\,p^{e_1})$。

证明。由引理 1.6 可知，整数 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ($\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ell_3$) 满足 $\ell_3 = -\ell_1$和 $\ell_2 = 0$。因此，若 $\ell_1 \neq \ell_2$，则 $\ell_2 \neq \ell_3$。于是 φ^* 具有以下形式之一：(I)* – (VII)*。若 $\ell_1 = \ell_2$，则 $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0$。由引理 1.5 可知，$u_{\varphi^*}$ 是平凡的，因此 φ^* 具有形式 (XII)*。

(1)、(2)、(3)、(5) 的证明是直接的。

(4) 若 φ^* 的形式为 (V)*，则 $\ell_1 = (2\,p^{e_1} + 2\,p^{e_2})/3$、$\ell_2 = (-4\,p^{e_1} + 2\,p^{e_2})/3$、$\ell_3 = (2\,p^{e_1} - 4\,p^{e_2})/3$，其中 $e_2 > e_1 \geq 0$。由于 $\ell_1 = -\ell_3$ 和 $\ell_2 = 0$，我们有 $4\,p^{e_1} = 2\,p^{e_2}$ 和 $p^{e_2} = 2\,p^{e_1}$，这意味着 $p = 2$ 和 $e_2 = e_1 + 1$。因此 $\ell_1 = 2\,p^{e_1}$ 和 $\ell_3 = -2\,p^{e_1}$。

(6) 若 φ^* 的形式为 (VII)*，则 $\ell_1 = (-2\,p^{e_1} + 4\,p^{e_2})/3$、$\ell_2 = (4\,p^{e_1} - 2\,p^{e_2})/3$、$\ell_3 = (-2\,p^{e_1} - 2\,p^{e_2})/3$，其中 $e_2 > e_1 \geq 0$。由于 $\ell_1 = -\ell_3$ 和 $\ell_2 = 0$。因此 $-4\,p^{e_1} = -2\,p^{e_2}$ 和 $p^{e_2} = 2\,p^{e_1}$，这意味着 $p = 2$ 和 $e_2 = e_1 + 1$。因此 $\ell_1 = 2\,p^{e_1}$ 和 $\ell_3 = -2\,p^{e_1}$。

Q.E.D.

引理 3.3. 以下断言 (1) 和 (2) 成立：

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{1+\gamma} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1+\gamma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ for all } \gamma \in k\backslash\{-1\}.$$

(2) 设 $\varphi\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(n,k)$ 是一个基本表示。则有

$$u(1)\,u^-(\gamma) = u^-\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) h(1+\gamma)\,u\left(\frac{1}{1+\gamma}\right) \qquad \text{for all} \quad \gamma \in k\backslash\{-1\}.$$

证明. 断言 (1) 和 (2) 的证明是直接的。 Q.E.D.

3.1.1 (I)*

引理 3.4. 设 $\varphi^*\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 是一个具有如下形式的表示

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,b^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & b^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{pmatrix} \qquad (\,e_1 \geq 0\,).$$

则以下断言 (1)、(2)、(3) 成立：

(1) φ^* 是基本的。

(2) 设 $\psi^*\colon \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{SL}(3,k)$ 是 $\mathrm{SL}(2,k)$ 的一个表示，使得 $\varphi^* = \psi^* \circ \iota$。那么我们有

$$u^-_{\psi^*}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\,s^{p^{e_1}} & 1 & 0 \\ 2\,s^{2\,p^{e_1}} & 2\,s^{p^{e_1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 存在　唯一的表示 $\psi^*\colon \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{SL}(3,k)$，使得 $\varphi^* = \psi^* \circ \iota$。

证明。(1) 考虑由下式定义的表示 $\psi^*\colon \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{SL}(3,k)$

$$\psi^*\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,b^{2\,p^{e_1}} \\ 2\,a^{p^{e_1}}\,c^{p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} + b^{p^{e_1}}\,c^{p^{e_1}} & b^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} \\ 2\,c^{2\,p^{e_1}} & 2\,c^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} & d^{2\,p^{e_1}} \end{pmatrix}.$$

(2) 我们有

$$u_{\psi^*}(t)=\begin{pmatrix}1 & t^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,t^{2\,p^{e_1}}\\ 0 & 1 & t^{p^{e_1}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

我们可以将 $u^{-}_{\psi^*}$：$\mathbb{G}_a\to$ SL(3, k) 表示为

$$u^{-}_{\psi^*}(s)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ v_{2,\,1}(s) & 1 & 0\\ v_{3,\,1}(s) & v_{3,\,2}(s) & 1\end{pmatrix}\qquad(\ v_{2,\,1}(S),v_{3,\,1}(S),v_{3,\,2}(S)\in k[S]\ ).$$

根据引理 3.3 (2)，对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，有

$$\begin{pmatrix}1+v_{2,\,1}(\gamma)+\frac{1}{2}\,v_{3,\,1}(\gamma) & 1+\frac{1}{2}\,v_{3,\,2}(\gamma) & \frac{1}{2}\\ v_{2,\,1}(\gamma)+v_{3,\,1}(\gamma) & 1+v_{3,\,2}(\gamma) & 1\\ v_{3,\,1}(\gamma) & v_{3,\,2}(\gamma) & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & (1+\gamma)^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\\ v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{p^{e_1}}+1 & \frac{1}{2}\,v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)+\frac{1}{(1+\gamma)^{p^{e_1}}}\\ v_{3,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & v_{3,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{p^{e_1}}+v_{3,\,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) & \frac{1}{2}\,v_{3,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)+v_{3,\,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\frac{1}{(1+\gamma)^{p^{e_1}}}+\frac{1}{(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}}}\end{pmatrix}.$$

比较上述等式 (∗) 两边的 (1, 2) 项，得到 $1+v_{3}$,2(γ)/2 =$1+\gamma^{p^{e_1}}$，对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$ 均成立，这意味着 v_{3}, 2(S) $=2\,S^{p^{e_1}}$。比较等式 (∗) 两边的 (2, 3) 项，得到 $1=\frac{1}{2}\,v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)+\ {}^{1}_{1+\gamma}$( ) $^{p^{e_1}}=1$，对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$ 均成立，这意味着 v_{2}, 1(S) $\overline{=2\,S^{p^{e_1}}}$。比较等式 (∗) 两边的 (1, 1) 项，得到 $1+v_{2}$, 1(γ) + v_{3}, 1(γ)/2 =$(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}}$，这意味着 v_{3}, 1(S) $=2\,S^{2\,p^{e_1}}$。

(3) 我们已经知道 ψ^* 的存在（见上面的断言 (1)）。设 ψ^*_1、 ψ^*_2 是 SL(2, k) 到 SL(3, k) 的两个 SL(2, k) 表示，并满足 $\psi^*_1\circ\iota=\psi^*_2\circ\iota=\varphi^*$。由上面的断言 (2) 可知 $u^{-}_{\psi^*_1}=u^{-}_{\psi^*_2}$，进而由引理 1.10 可知 $\psi^*_1=\psi^*_2$。证毕。

3.1.2 (II)*: $\ell_1>0$ 和 $\ell_3=-\ell_1$

引理 3.5. 设 φ^*： $\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to$ SL(3, k) 是一个具有如下形式的表示

$$\varphi^*\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{\ell_1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & d^{-\ell_3}\end{pmatrix}\qquad(\,\ell_1>0>\ell_3\,).$$

那么 φ^* 不是基本的。

证明。反设 φ^* 是基本的。由于u_{φ^*} 是平凡的，由引理 1.9 可知 $\ell_1=0$。这与 $\ell_1>0$矛盾。证毕。

3.1.3 (III)*: $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (2\,p^{e_1},\, 0,\, -2\,p^{e_1})$

引理 3.6. 设 $\varphi^*\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 是一个具有如下形式的表示

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{pmatrix} \qquad (\,e_1 \geq 0\,).$$

那么 φ^* 不是基本的。

证明. 我们有

$$u_{\psi^*}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^{p^{e_1}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

反设, 与此相反, 假设 φ^* 是基本的。我们可以将 $u^-_{\psi^*}\colon \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k)$ 表示为 a s

$$u^-_{\psi^*}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_{2,\,1}(s) & 1 & 0 \\ v_{3,\,1}(s) & v_{3,\,2}(s) & 1 \end{pmatrix} \qquad (\,v_{2,\,1}(S), v_{3,\,1}(S), v_{3,\,2}(S) \in k[S]\,).$$

根据引理 3.3 (2), 对所有 $\gamma \in k\backslash\{-1\}$, 我们有

$$\begin{pmatrix} 1+v_{2,\,1}(\gamma) & 1 & 0 \\ v_{2,\,1}(\gamma) & 1 & 0 \\ v_{3,\,1}(\gamma) & v_{3,\,2}(\gamma) & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & (1+\gamma)^{p^{e_1}} & 0 \\ v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{p^{e_1}}+1 & 0 \\ v_{3,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & v_{3,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{p^{e_1}} + v_{3,\,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) & \frac{1}{(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}}} \end{pmatrix}.$$

比较上述等式两边的第 (3, 3) 个元素, 我们得到 $1 = 1/(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}}$ 对所有 $\gamma \in k\backslash\{-1\}$均成立。考虑 k 中的一个元素 γ, 使得 $\gamma \notin k\backslash\{-1,\,0\}$ 且 $\gamma^{p^{e_1}} \neq -2$, 这就产生了矛盾。证毕

3.1.4 (IV)*: $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (p^{e_2},\, 0,\, -p^{e_2})$

引理 3.7. 设 $\varphi^*\colon \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 是一个具有如下形式的表示

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p^{e_2}} & 0 & b^{p^{e_2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d^{p^{e_2}} \end{pmatrix} \qquad (\,e_2 \geq 0\,).$$

以下断言 (1)、(2)、(3) 成立:

(1) φ^* 是基本的。

(2) 设 $\psi^*\colon \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{SL}(3,k)$ 是 $\mathrm{SL}(2,k)$ 的一个表示, 使得 $\varphi^* = \psi^* \circ \iota$。那么我们有

$$u^-_{\psi^*}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s^{p^{e_2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 该　存在唯一的表示 $\psi^*:\mathrm{SL}(2,k)\to\mathrm{SL}(3,k)$，使得 $\varphi^*=\psi^*\circ$　　ι.

证明。(1) 考虑由下式定义的表示 $\psi^*:\mathrm{SL}(2,k)\to\mathrm{SL}(3,k)$

$$\psi^*\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} a^{p^{e_2}} & 0 & b^{p^{e_2}}\\ 0 & 1 & 0\\ c^{p^{e_2}} & 0 & d^{p^{e_2}}\end{pmatrix}.$$

(2) 我们有

$$u_{\psi^*}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & t^{p^{e_2}}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

我们可以将 ${}^{u^-_{\psi^*}}:\mathbb{G}_a\to\mathrm{SL}(3,k)$ 表示为

$$u^-_{\psi^*}(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ v_{2,1}(s) & 1 & 0\\ v_{3,1}(s) & v_{3,2}(s) & 1\end{pmatrix}\qquad (\ v_{2,1}(S),v_{3,1}(S),v_{3,2}(S)\in k[S]\ ).$$

利用引理 3.3 (2)，对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，我们有

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 1+v_{3,1}(\gamma) & v_{3,2}(\gamma) & 1\\ v_{2,1}(\gamma) & 1 & 0\\ v_{3,1}(\gamma) & v_{3,2}(\gamma) & 1\end{pmatrix}\\ &\quad=\begin{pmatrix} (1+\gamma)^{p^{e_2}} & 0 & 1\\ v_{2,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{p^{e_2}} & 1 & v_{2,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\\ v_{3,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{p^{e_2}} & v_{3,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) & v_{3,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)+\frac{1}{(1+\gamma)^{p^{e_2}}}\end{pmatrix}.\end{aligned}\qquad (*)$$

比较上述等式 (*) 两边的第 (1, 2) 个元素，我们对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$ 有 $v_{3,2}(\gamma)=0$，这意味着 $v_{3,2}(S)=0$。比较上述等式 (*) 两边的第 (2, 3) 个元素，我们对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$ 有 $0=v_{2,1}(\frac{\gamma}{1+\gamma})$，这意味着 $v_{2,1}(S)=0$。比较等式 (*) 两边的第 (1, 1) 个元素，我们对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$ 有 $1+v_{3,1}(\gamma)=(1+\gamma)^{p^{e_2}}$，这意味着 $v_{3,1}(S)=S^{p^{e_2}}$。

(3) 证明与引理 3.4 的断言 (3) 的证明类似（使用上述断言 (1) 和 (2)）。

Q.E.D.

3.1.5 (V)*:　$p=2$ 和 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)=(2\,p^{e_1},0,-2\,p^{e_1})$

引理 3.8. 若 $p=2$，我们令 $\varphi^*:\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to\mathrm{SL}(3,k)$ 为具有如下形式的表示

$$\varphi^*\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & b^{2\,p^{e_1}}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}}\end{pmatrix}\qquad (\,e_1\geq 0\,).$$

则以下断言 (1)、(2)、(3) 成立：

(1)　φ^* 是基本的。

（2）设 ψ^*: SL(2, k) $\to$ SL(3, k) 是 SL(2, k) 的一个表示，使得 $\varphi^* = \psi^* \circ \iota$。那么我们有

$$u^-_{\psi^*}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s^{2\,p^{e_1}} & s^{p^{e_1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 存在唯一的表示 ψ^*: SL(2, k) $\to$ SL(3, k)，使得 $\varphi^* = \psi^* \circ \iota$。

证明。(1) 考虑由下式定义的表示 ψ^*: SL(2, k) $\to$ SL(3, k):

$$\psi^* \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & b^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ c^{2\,p^{e_1}} & c^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} & d^{2\,p^{e_1}} \end{pmatrix}.$$

(2) 我们有

$$u_{\psi^*}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^{p^{e_1}} & t^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们可以将 $u^-_{\psi^*}$: $\mathbb{G}_a \to$ SL(3, k) 表示为

$$u^-_{\psi^*}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_{2,\,1}(s) & 1 & 0 \\ v_{3,\,1}(s) & v_{3,\,2}(s) & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ v_{2,\,1}(S), v_{3,\,1}(S), v_{3,\,2}(S) \in k[S]\ ).$$

根据引理 3.3 (2)，对所有 $\gamma \in k\backslash\{-1\}$，我们有

$$\begin{pmatrix} 1 + v_{2,\,1}(\gamma) + v_{3,\,1}(\gamma) & 1 + v_{3,\,2}(\gamma) & 1 \\ v_{2,\,1}(\gamma) & 1 & 0 \\ v_{3,\,1}(\gamma) & v_{3,\,2}(\gamma) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & (1+\gamma)^{p^{e_1}} & 1 \\ v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{p^{e_1}} + 1 & v_{2,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) \\ v_{3,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}} & v_{3,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{p^{e_1}} + v_{3,\,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) & v_{3,\,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) + \frac{1}{(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}}} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

比较上述等式（$*$）两边的第 (1, 2) 个元素，我们有 $1 + v_3$,2(γ) =$(1+\gamma)^{p^{e_1}}$ 对所有 $\gamma \in k\backslash\{-1\}$ 都成立，这意味着 v_3, 2(S) $= S^{p^{e_1}}$。比较上述等式（$*$）两边的第 (2, 3) 个元素，我们有 $0 = v_2$,1($\frac{\gamma}{1+\gamma}$) 对所有 $\gamma \in k\backslash\{-1\}$ 都成立，这意味着 v_2, 1(S) $= 0$。比较等式（$*$）两边的第 (1, 1) 个元素，我们有$1 + v_2$, 1(γ) $+ v_3$, 1(γ) =$(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}}$ 对所有 $\gamma \in k\backslash\{-1\}$ 都成立，这意味着 v_3, 1(S) $= S^{2\,p^{e_1}}$ （因为 $p = 2$）。

(3) 证明很简单。 Q.E.D.

3.1.6 (VI)*: (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) $= (2\,p^{e_1}, 0, -2\,p^{e_1})$

引理 3.9. 设 φ^*: $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to$ SL(3, k) 是一个具有如下形式的表示

$$\varphi^* \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{2\,p^{e_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{pmatrix} \qquad (\ e_1 \geq 0\ ).$$

那么 φ^* 不是基本的。

证明。我们有

$$u_{\psi^*}(t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&t^{p^{e_1}}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

反设，　与此相反，φ^* 是基本的。我们可以将 $u^-_{\psi^*}\colon \mathbb{G}_a\to$ SL(3, k) a 表示为　s

$$u^-_{\psi^*}(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\v_{2,1}(s)&1&0\\v_{3,1}(s)&v_{3,2}(s)&1\end{pmatrix}\qquad(\ v_{2,1}(S),v_{3,1}(S),v_{3,2}(S)\in k[S]\ ).$$

根据引理 3.3 (2)，对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，有

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\v_{2,1}(\gamma)+v_{3,1}(\gamma)&1+v_{3,2}(\gamma)&1\\v_{3,1}(\gamma)&v_{3,2}(\gamma)&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(1+\gamma)^{2p^{e_1}}&0&0\\v_{2,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2p^{e_1}}&1&\frac{1}{(1+\gamma)^{p^{e_1}}}\\v_{3,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2p^{e_1}}&v_{3,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)&v_{3,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\frac{1}{(1+\gamma)^{p^{e_1}}}+\frac{1}{(1+\gamma)^{p^2\,e_1}}\end{pmatrix}.$$

比较上述等式两边的 (1, 1) 项可得，对所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，$1=(1+\gamma)^{2p^{e_1}}$。取 k 中满足 $\gamma\notin k\backslash\{-1,0\}$ 和 $\gamma^{p^{e_1}}\neq-2$ 的一个元素 γ，便得到矛盾。证毕。

3.1.7 (VII)*：　$p=2$ 且 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)=(2p^{e_1},0,-2p^{e_1})$

引理 3.10. 若 $p=2$，则令 $\varphi^*\colon \mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to$ SL(3, k) 为具有如下形式的表示

$$\varphi^*\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{2p^{e_1}}&0&b^{2p^{e_1}}\\0&1&b^{p^{e_1}}d^{p^{e_1}}\\0&0&d^{2p^{e_1}}\end{pmatrix}\qquad(\ e_1\geq 0\ ).$$

那么，以下断言 (1)、(2)、(3) 成立：

(1) φ^* 是基本的。

(2) 设 ψ^*: SL(2, k) $\to$ SL(3, k) 是 SL(2, k) 的一个表示，且满足 $\varphi^*=\psi^*\circ\iota$。则有

$$u^-_{\psi^*}(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\s^{p^{e_1}}&1&0\\s^{2p^{e_1}}&0&1\end{pmatrix}.$$

(3) 存在唯一的表示 ψ^*: SL(2, k) $\to$ SL(3, k)，使得 $\varphi^*=\psi^*\circ\iota$。

证明。（1）考虑由下式定义的表示 $\psi^*\colon$ SL(2, k) $\to$ SL(3, k)

$$\psi^*\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{2p^{e_1}}&0&b^{2p^{e_1}}\\a^{p^{e_1}}c^{p^{e_1}}&1&b^{p^{e_1}}d^{p^{e_1}}\\c^{2p^{e_1}}&0&d^{2p^{e_1}}\end{pmatrix}.$$

（2）我们有

$$u_{\psi^*}(t)=\begin{pmatrix}1&0&t^{p^{e_2}}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

我们可以将 $u^{-}_{\psi^*}:\ \mathbb{G}_a\to \mathrm{SL}(3,k)$ 表示为

$$u^{-}_{\psi^*}(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\v_{2,1}(s)&1&0\\v_{3,1}(s)&v_{3,2}(s)&1\end{pmatrix}\qquad (\ v_{2,1}(S),v_{3,1}(S),v_{3,2}(S)\in k[S]\ ).$$

根据引理 3.3 (2)，对于所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，我们有

$$\begin{pmatrix}1+v_{3,1}(\gamma)&v_{3,2}(\gamma)&1\\v_{2,1}(\gamma)+v_{3,1}(\gamma)&1+v_{3,2}(\gamma)&1\\v_{3,1}(\gamma)&v_{3,2}(\gamma)&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(1+\gamma)^{2p^{e_1}}&0&1\\v_{2,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2p^{e_1}}&1&v_{2,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)+\frac{1}{(1+\gamma)^{p^{e_1}}}\\v_{3,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(1+\gamma)^{2p^{e_1}}&v_{3,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)&v_{3,1}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)+v_{3,2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\frac{1}{(1+\gamma)^{p^{e_1}}}+\frac{1}{(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}}}\end{pmatrix}.\qquad(*)$$

比较上述等式 (∗) 两边的 (1, 1) 项，我们有 $1+v_3$, $1(\gamma)\ =(1+\gamma)^{2\,p^{e_1}}$ 对于所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，这意味着 v_3, $1(S)\ =S^{2\,p^{e_1}}$。比较上述等式 (∗) 两边的 (1, 2) 项，我们有 v_3,$2(\gamma)\ =0$ 对于所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，这意味着 v_3, $2(S)\ =0$。比较等式 (∗) 两边的 (2, 3) 项，我们有 $1=v_2$,$1(\ \frac{\gamma}{1+\gamma})$ $+\quad {}^{1}(_{1+\gamma})^{p^{e_1}}$ 对于所有 $\gamma\in k\backslash\{-1\}$，这意味着 v_2, $1(S)\ =S^{p^{e_1}}$ (因为 $p=2$)。

(3) 证明是显然的。 Q.E.D.

3.1.8 (XII)*

引理 3.11. 设 $\varphi^*:\ \mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to \mathrm{SL}(3,k)$ 是一个具有如下形式的表示

$$\varphi^*\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

则以下断言 (1)、(2)、(3) 成立：

(1) φ^* 是基本的。

(2) 设 $\psi^*:\mathrm{SL}(2,k)\ \to\mathrm{SL}(3,k)$ 是 $\mathrm{SL}(2,k)$ 的一个表示，且满足 $\varphi^*=\psi^*\circ\iota$。那么我们有

$$u^{-}_{\psi^*}(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(3) 存在唯一的表示 $\psi^*:\mathrm{SL}(2,k)\ \to\mathrm{SL}(3,k)$，使得 $\varphi^*=\psi^*\circ\iota$。

证明。(1) 考虑由下式定义的表示 $\psi^*:\mathrm{SL}(2,k)\to\mathrm{SL}(3,k)$:

$$\psi^*\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(2) 显然, u_{φ^*} 是平凡的。见引理 1.9。

(3) 证明很直接。 Q.E.D.

3.2 从 $\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m$ 到 SL(3, k)的基本表示的分类

基于上述第 3.1 小节，我们可以定义五个基本表示 $\varphi^\sharp:\ \mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to\mathrm{SL}(3,k)$，如下:

(I)$^\sharp$ 在 $p\geq 3$的情形下,

$$\varphi^\sharp\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} a^{2\,p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & \frac{1}{2}\,b^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & b^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{array}\right)\qquad(\,e_1\geq 0\,).$$

(IV)$^\sharp$ 在 $p\geq 2$的情形下,

$$\varphi^\sharp\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} a^{p^{e_2}} & 0 & b^{p^{e_2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d^{p^{e_2}} \end{array}\right)\qquad(\,e_2\geq 0\,).$$

(V)$^\sharp$ 在 $p=2$的情形下,

$$\varphi^\sharp\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} a^{2\,p^{e_1}} & a^{p^{e_1}}\,b^{p^{e_1}} & b^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{array}\right)\qquad(\,e_1\geq 0\,).$$

(VII)$^\sharp$ 当 $p=2$ 时,

$$\varphi^\sharp\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} a^{2\,p^{e_1}} & 0 & b^{2\,p^{e_1}} \\ 0 & 1 & b^{p^{e_1}}\,d^{p^{e_1}} \\ 0 & 0 & d^{2\,p^{e_1}} \end{array}\right)\qquad(\,e_1\geq 0\,).$$

(XII)$^\sharp$ 当 $p\geq 2$ 时,

$$\varphi^\sharp\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Let

$$\Lambda^\sharp:=\left\{\,\mathrm{(I)}^\sharp,\ \mathrm{(IV)}^\sharp,\ \mathrm{(V)}^\sharp,\ \mathrm{(VII)}^\sharp,\ \mathrm{(XII)}^\sharp\,\right\}.$$

对于任意 $\lambda\in\Lambda^\sharp$，我们可以定义集合 $R^\sharp(\lambda)$ 如下:

$R^\sharp(\lambda)$: $=\{\,\varphi:\ \mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to\mathrm{SL}(3,k)\ \mid\varphi$ 是形式为 $\lambda\,\}$. 的基本表示

定理 3.12。以下断言 (1) 和 (2) 成立：

(1) 任意基本表示 $\varphi:\ \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$ 均等价于具有以下形式之一 λ of $\Lambda^\sharp$ 的基本表示 $\varphi^\sharp:\ \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k)$。

(2) 设 $\phi \in R^\sharp(\lambda)$ 和 $\psi \in R^\sharp(\mu)$，其中 $\lambda, \mu \in \Lambda^\sharp$。记 $h_\phi(z) = (z^{\ell_1}, z^{\ell_2}, z^{\ell_3})$，并记 $h_\psi(z) = (z^{m_1}, z^{m_2}, z^{m_3})$。

(2.1) 若 $\lambda \neq \mu$，则 ϕ 和 ψ 不等价。

(2.2) 若 $\lambda = \mu$，则以下条件 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 等价：(i) ϕ 和 ψ 等价。(ii) h_ϕ 和 h_ψ 等价。(iii) $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (m_1, m_2, m_3)$。(iv) $\phi = \psi$。

证明。（1）参见引理 3.2、3.4、3.5、3.6、3.7、3.8、3.9、3.10、3.11。（2）参见定理 2.3 的断言（2）。 Q.E.D.

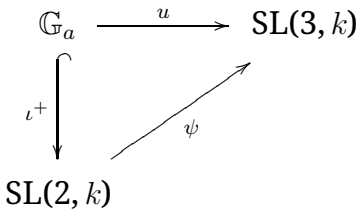
推论 3.13。在所有从 $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 到 $\mathrm{SL}(3,k)$ 的基本表示的等价类集合与集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda^\sharp} R^\sharp(\lambda)$ 之间存在一一对应，即，

$$\{\,\varphi : \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(3,k) \mid \varphi \textit{ is a fundamental representation}\}/\sim \;\cong \coprod_{\lambda\in\Lambda^\sharp} R^\sharp(\lambda).$$

证明。证明很直接（参见推论 2.4 的证明，并使用上述定理 3.12）。证毕。

4 $\mathbb{G}_a$ 到 $\mathrm{SL}(3,k)$ 的基本表示

$\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ 的表示 $u:\ \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(n,k)$ 称为基本的，若存在表示 $\psi: \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{SL}(n,k)$，使得下图交换：



其中 $\iota^+:\ \mathbb{G}_a \hookrightarrow B$ 是由以下方式定义的包含映射

$$\iota^+(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 4.1. 设 $u:\ \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k)$ 是仿射 k-簇之间的一个态射。则断言 (1) 和 (2) 成立：

（1）若 $p = 2$，则 $u:\ \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k)$ 是基本表示，当且仅当 u 等价于具有以下形式之一（1.1）、（1.2）、（1.3）、（1.4）的基本表示 $u^\sharp:\ \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k)$：

$$(1.1)\ u^\sharp(t)=\begin{pmatrix}1&0&t^{p^e}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(e\geq 0).$$

$$(1.2)\ u^\sharp(t)=\begin{pmatrix}1&t^{p^e}&t^{2p^e}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(e\geq 0).$$

$$(1.3)\ u^\sharp(t)=\begin{pmatrix}1&0&t^{2p^e}\\0&1&t^{p^e}\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(e\geq 0).$$

$$(1.4)\ u^\sharp(t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

（2）若 $p\geq 3$，则 $u:\mathbb{G}_a\to \mathrm{SL}(3,k)$ 是基本表示，当且仅当 u 等价于具有以下形式之一（2.1）、（2.2）、（2.3）的基本表示 $u^\sharp:\mathbb{G}_a\to\mathrm{SL}(3,k)$:

$$(2.1)\ u^\sharp(t)=\begin{pmatrix}1&t^{p^e}&\frac{1}{2}t^{2p^e}\\0&1&t^{p^e}\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(e\geq 0).$$

$$(2.2)\ u^\sharp(t)=\begin{pmatrix}1&0&t^{p^e}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(e\geq 0).$$

$$(2.3)\ u^\sharp(t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

证明。假设 $u:\mathbb{G}_a\to\mathrm{SL}(3,k)$ 是 $\mathbb{G}_a$ 的基本表示。因此，存在一个表示 $\psi:\mathrm{SL}(2,k)\to\mathrm{SL}(3,k)$，使得 $\psi\circ\iota^+=u$。令 $\varphi:\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to\mathrm{SL}(3,k)$ 为由 $\varphi:=\psi\circ\iota$ 定义的表示，其中 $\iota:\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to\mathrm{SL}(2,k)$ 是单同态。显然，φ是一个基本表示。我们可以将定理 3.12 应用于φ。

我们首先证明断言 (1)。如果 $p=2$，则存在一个表示 $\varphi^\sharp:\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to\mathrm{SL}(3,k)$，使得 $\varphi^\sharp$ 与 φ 等价，并且 $\varphi^\sharp$ 具有以下形式之一：(IV)$^\sharp$、(V)$^\sharp$、(VII)$^\sharp$、(XII)$^\sharp$。因此，$u_{\varphi^\sharp}:\mathbb{G}_a\to\mathrm{SL}(3,k)$ 具有 (1.1)、(1.2)、(1.3)、(1.4) 中的一种形式。

接下来我们证明断言 (2)。如果 $p\geq 3$，则存在一个表示 $\varphi^\sharp:\mathbb{G}_a\rtimes\mathbb{G}_m\to\mathrm{SL}(3,k)$，使得 $\varphi^\sharp$ 等价于 φ，且 $\varphi^\sharp$ 具有以下形式之一：(I)$^\sharp$、(IV)$^\sharp$、(XII)$^\sharp$。因此，$u_{\varphi^\sharp}:\mathbb{G}_a\to\mathrm{SL}(3,k)$具有以下形式之一：(2.1)、(2.2)、(2.3)。 Q.E.D.

推论 4.2。以下断言 (1) 和 (2) 成立:

(1) 若 $p=2$，则所有基本表示 $u:\mathbb{G}_a\to\mathrm{SL}(3,k)$ 在等价意义下的集合与集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}\amalg\mathbb{Z}_{\geq 0}\amalg\mathbb{Z}_{\geq 0}\amalg\{I_3\}$ 之间存在一一对应，即,

$$\{\,u:\mathbb{G}_a\to\mathrm{SL}(3,k)\mid u\ \textit{is fundamental}\}/\sim\ \cong\ \mathbb{Z}_{\geq 0}\amalg\mathbb{Z}_{\geq 0}\amalg\mathbb{Z}_{\geq 0}\amalg\{\,I_3\,\}.$$

(2) 若 $p \geq 3$, 则所有基本表示 $u:\ \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k)$ 在等价意义下的集合与集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \amalg \mathbb{Z}_{\geq 0} \amalg \{I_3\}$ 之间存在一一对应，即,

$$\{\, u : \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k) \mid u \ \textit{is fundamental}\}/\sim \ \cong\ \mathbb{Z}_{\geq 0} \amalg \mathbb{Z}_{\geq 0} \amalg \{\, I_3 \,\}.$$

证明。断言 (1) 和 (2) 的证明是直接的。 Q.E.D.

我们还有如下推论，它可以给出 $\mathbb{G}_a$ 到 SL(3, k) 的新的非基本表示。

推论 4.3。设 $u:\ \mathbb{G}_a \to \mathrm{SL}(3,k)$ 是一个仿射 k-簇的态射，具有如下形式

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) \\ 0 & 1 & a_{2,3}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\, a_{1,2}(T), a_{1,3}(T), a_{2,3}(T) \in k[T]\,).$$

则以下断言 (1) 和 (2) 成立:

(1) 若 $p = 2$, 则当且仅当 ($a_{1,\ 2}(T)\ a_{1,\ 3}(T)\ a_{2,\ 3}(T)$) 满足以下条件 (1.1.a)、(1.1.b)、(1.2)、(1.3)、(1.4) 之一时， u 是 $\mathbb{G}_a$ 的一个基本表示:

(1.1.a) 对某些 λ、$\nu \in k$, 满足 (λ, ν) $\neq$(0,0), 且对某个 $e \geq 0$, ($a_{1,\ 2}(T)\ a_{1,\ 3}(T)\ a_{2,\ 3}(T)$) =($\lambda T^{p^e}$, νT^{p^e}, 0)。

(1.1.b) 对于满足 (λ, ν) $\neq$(0,0) 的某些 $\lambda, \nu \in k$, 以及某个 $e \geq 0$, (a_1,2(T) a_1,3(T) a_2,3(T)) =(0, νT^{p^e}, λT^{p^e})。(1.2) 对于满足 $\lambda\xi - \mu\nu \neq 0$ 的某些 $\lambda, \mu, \nu, \xi \in k$, 以及某个 $e \geq 0$, (a_1,2(T) a_1,3(T) a_2,3(T)) =($\lambda T^{p^e} + \mu T^{2p^e}$, $\nu T^{p^e} + \xi T^{2p^e}$, 0)。(1.3) 对于满足 $\lambda\xi - \mu\nu \neq 0$ 的某些 $\lambda, \mu, \nu, \xi \in k$, 以及某个 $e \geq 0$, (a_1,2(T) a_1,3(T) a_2,3(T)) =(0, $\nu T^{p^e} + \xi T^{2p^e}$, $\lambda T^{p^e} + \mu T^{2p^e}$)。(1.4) ($a_1$,2($T$) a_1,3(T) a_2,3(T)) = (0, 0, 0)。

(2) 若 $p \geq 3$, 则 u 是 $\mathbb{G}_a$ 的基本表示, 当且仅当 ($a_{1,2}(T)\ a_{1,3}(T)\ a_{2,3}(T)$) 满足以下条件之一 (2.1)、(2.2.a)、(2.2.b)、(2.3):

(2.1) (a_1,2(T) a_1,3(T) a_2,3(T)) =($c T^{p^e}$, $\frac{1}{2}\lambda c^2 T^{2p^e}$, $\lambda c T^{p^e}$), 其中 c、$\lambda \in k\backslash\{0\}$ 以及某个 $e \geq 0$ 满足条件。(2.2.a) (a_1,2(T) a_1,3(T) a_2,3(T)) =(λT^{p^e}, νT^{p^e}, 0), 其中 λ、$\nu \in k$ 满足 (λ, ν) $\neq$(0,0), 且某个 $e \geq 0$ 满足条件。(2.2.b) (a_1,2(T) a_1,3(T) a_2,3(T)) = (0, νT^{p^e}, λT^{p^e}), 其中 λ、$\nu \in k$ 满足 (λ, ν) $\neq$(0,0), 且某个 $e \geq 0$ 满足条件。(2.3) (a_1, 2(T) a_1,3(T) a_2,3(T)) = (0, 0, 0)。

证明。（1）假设 $p = 2$ 和 u 是基本的。存在一个 GL(3, k) 中的正则矩阵 P, 使得 $u^\sharp(t) := P^{-1}u(t)P$ 具有定理 4.1 的断言（1）中给出的形式 (1.1)、(1.2)、(1.3) 或 (1.4) 之一。显然,

$$(u(t) - I_3)\, P = P\,(u^\sharp(t) - I_3). \qquad (*)$$

写作 P =($p_{i,\ j}$)$_{1\leq i,\ j\leq 3}$。

I在 $u^\sharp$ 具有定理 4.1 的 (1.1) 形式的情形下，我们由 $(*)$ 得到 tha t

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) \\ 0 & 0 & a_{2,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^{p^e} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们通过分别讨论以下两种情形来证明:

(a) $a_{2,\ 3}(T) = 0$.

(b) $a_{2,\ 3}(T) \neq 0$

在情形 (a) 中,

$$\begin{pmatrix} p_{2,1}\, a_{1,2}(t) + p_{3,1}\, a_{1,3}(t) & p_{2,2}\, a_{1,2}(t) + p_{3,2}\, a_{1,3}(t) & p_{2,3}\, a_{1,2}(t) + p_{3,3}\, a_{1,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,1}\, t^{p^e} \\ 0 & 0 & p_{2,1}\, t^{p^e} \\ 0 & 0 & p_{3,1}\, t^{p^e} \end{pmatrix},$$

这意味着 $p_{2,\ 1} = p_{3,\ 1} = 0$。由于 P 是正则的，我们有

$$\begin{pmatrix} a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,1}\, t^{p^e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}^{-1}.$$

因此，$(a_{1,\ 2}(T)\, a_{1,\ 3}(T)\, a_{2,\ 3}(T))$ 满足条件 (1.1.a)。

在情形 (b) 中，我们有 $a_{1,2}(T) = 0$，因为 $p = 2$ （见引理 1.4）。因此

$$\begin{pmatrix} p_{3,1}\, a_{1,3}(t) & p_{3,2}\, a_{1,3}(t) & p_{3,3}\, a_{1,3}(t) \\ p_{3,1}\, a_{2,3}(t) & p_{3,2}\, a_{2,3}(t) & p_{3,3}\, a_{2,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,1}\, t^{p^e} \\ 0 & 0 & p_{2,1}\, t^{p^e} \\ 0 & 0 & p_{3,1}\, t^{p^e} \end{pmatrix}.$$

由于 $a_{2,3}(T) \neq 0$，我们有 $p_{3,1} = p_{3,2} = 0$。由于 P 是正则的，我们有 $(p_{1,1}, p_{2,1}) \neq (0, 0)$，并且 $p_{3,3} \neq 0$。因此，$(a_{1,2}(T)\, a_{1,3}(T)\, a_{2,3}(T))$ 满足条件 (1.1.b)。

在 $u^\sharp$ 具有定理 4.1 的形式 (1.2) 的情形下，由 $(*)$ 可得

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) \\ 0 & 0 & a_{2,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t^{p^e} & t^{2\,p^e} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由引理 2.5 和 2.6，我们已知 $a_{2,3}(T) = 0$。因此,

$$\begin{pmatrix} p_{2,1}\, a_{1,2}(t) + p_{3,1}\, a_{1,3}(t) & p_{2,2}\, a_{1,2}(t) + p_{3,2}\, a_{1,3}(t) & p_{2,3}\, a_{1,2}(t) + p_{3,3}\, a_{1,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,1}\, t^{p^e} & p_{1,1}\, t^{2\,p^e} \\ 0 & p_{2,1}\, t^{p^e} & p_{2,1}\, t^{2\,p^e} \\ 0 & p_{3,1}\, t^{p^e} & p_{3,1}\, t^{2\,p^e} \end{pmatrix},$$

这意味着 $p_{2,1} = p_{3,1} = 0$。由于 P 是正则的，我们有 $p_{1,1} \neq 0$，并且

$$\begin{pmatrix} a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1}\, t^{p^e} & p_{1,1}\, t^{2\,p^e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}^{-1}.$$

因此，$(a_{1,2}(T)\, a_{1,3}(T)\, a_{2,3}(T))$ 满足条件 (1.2)。

在 $u^\sharp$ 具有定理 4.1 的形式 (1.3) 的情形下，由 $(*)$ 可得

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) \\ 0 & 0 & a_{2,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^{2\,p^e} \\ 0 & 0 & t^{p^e} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们已由引理 2.5 和 2.6 知道，$a_{1,2}(T) = 0$。因此，

$$\begin{pmatrix} p_{3,1}\, a_{1,3}(t) & p_{3,2}\, a_{1,3}(t) & p_{3,3}\, a_{1,3}(t) \\ p_{3,1}\, a_{2,3}(t) & p_{3,2}\, a_{2,3}(t) & p_{3,3}\, a_{2,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,1}\, t^{2\,p^e} + p_{1,2}\, t^{p^e} \\ 0 & 0 & p_{2,1}\, t^{2\,p^e} + p_{2,2}\, t^{p^e} \\ 0 & 0 & p_{3,1}\, t^{2\,p^e} + p_{3,2}\, t^{p^e} \end{pmatrix},$$

这意味着 $p_{3,1} = p_{3,2} = 0$。由于 P 是正则的，我们有 $p_{3,3} \neq 0$。因此，

$$\begin{pmatrix} a_{1,3}(t) \\ a_{2,3}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{p_{3,3}} \begin{pmatrix} p_{1,1}\, t^{2\,p^e} + p_{1,2}\, t^{p^e} \\ p_{2,1}\, t^{2\,p^e} + p_{2,2}\, t^{p^e} \end{pmatrix}.$$

因此，$(a_{1,2}(T)\, a_{1,3}(T)\, a_{2,3}(T))$ 满足条件 (1.3)。

在 $u^\sharp$ 具有定理 4.1 的形式 (1.4) 的情形下，$(a_{1,2}(T)\, a_{1,3}(T)\, a_{2,3}(T))$ 显然满足条件 (1.4)。

反过来，假设 $(a_{1,2}(T)\, a_{1,3}(T)\, a_{2,3}(T))$ 满足条件 (1.1.a)、(1.1.b)、(1.2)、(1.3)、(1.4) 之一。利用定理 4.1，我们可以证明 u 是基本的。

(2) 假设 $p \geq 3$ 和 u 是基本的。存在一个 $\mathrm{GL}(3, k)$ 的正则矩阵 P，使得 $u^\sharp(t) := P^{-1}u(t)P$ 具有定理 4.1 的断言 (2) 中给出的形式 (2.1)、(2.2) 或 (2.3) 之一。显然，

$$(u(t) - I_3)\, P = P\, (u^\sharp(t) - I_3). \qquad (**)$$

记作 $P = (p_{i,\ j})_{1 \leq i,\ j \leq 3}$。

在 $u^\sharp$ 具有定理 4.1 的形式 (2.1) 的情形下，由 $(**)$ 可得

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) \\ 0 & 0 & a_{2,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t^{p^e} & \frac{1}{2}\, t^{2\,p^e} \\ 0 & 0 & t^{p^e} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} p_{2,1}\, a_{1,2}(t) + p_{3,1}\, a_{1,3}(t) & p_{2,2}\, a_{1,2}(t) + p_{3,2}\, a_{1,3}(t) & p_{2,3}\, a_{1,2}(t) + p_{3,3}\, a_{1,3}(t) \\ p_{3,1}\, a_{2,3}(t) & p_{3,2}\, a_{2,3}(t) & p_{3,3}\, a_{2,3}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & p_{1,1}\, t^{p^e} & \frac{1}{2}\, p_{1,1}\, t^{2\,p^e} + p_{1,2}\, t^{p^e} \\ 0 & p_{2,1}\, t^{p^e} & \frac{1}{2}\, p_{2,1}\, t^{2\,p^e} + p_{2,2}\, t^{p^e} \\ 0 & p_{3,1}\, t^{p^e} & \frac{1}{2}\, p_{3,1}\, t^{2\,p^e} + p_{3,2}\, t^{p^e} \end{pmatrix}.$$

根据引理 2.5 和 2.6，我们已经知道 $a_{1,2}(T) \neq 0$ and $a_{2,3}(T) \neq 0$。比较上述等式两边的第 (i, j) 个元素（$(i, j) = (1, 1), (2, 1), (3, 3)$），可得 $p_{2,1} = p_{3,1} = p_{3,2} = 0$。由于 P 是正则的，因此有 $p_{1,1} \neq 0$, $p_{2,2} \neq 0$ and $p_{3,3} \neq 0$。比较上述等式两边的第 (i, j) 个元素（$(i, j) = (1, 2), (2, 3), (1, 3)$），可知 $(a_{1,2}(T)\ a_{1,3}(T)\ a_{2,3}(T))$ 满足条件 (2.1)。

在 $u^\sharp$ 具有定理 4.1 的形式 (2.2) 的情形下，我们知道 ($a_{1,\ 2}(T)$ $a_{1,\ 3}(T)$ $a_{2,\ 3}(T)$) 满足条件 (2.2.a) 和 (2.2.b) 之一（见上述断言 (1) 的证明）。

当 $u^\sharp$ 具有定理 4.1 中的形式 (2.3) 时，($a_{1,\ 2}(T)\, a_{1,\ 3}(T)\, a_{2,\ 3}(T)$) 显然满足条件 (2.3)。

反过来，假设 ($a_{1,\ 2}(T)\, a_{1,\ 3}(T)\, a_{2,\ 3}(T)$) 满足条件 (2.1)、(2.2.a)、(2.2.b)、(2.3) 中的一个。利用定理 4.1，我们可以证明 u 是基本的。证毕。

参考文献

[1] A. Fauntleroy，《正特征下的 Weitzenbock 定理》，美国数学会会刊 64 (1977年)，第 2 期，209–213。

[2] R. Tanimoto，《五阶指数矩阵》，载于：Kuroda S.、Onoda N.、Freuden- burg G.（编），《多项式环与仿射代数几何》。PRAAG 2018。Springer 数学与统计学会议论文集，第 319 卷。Springer，Cham，267–305。

[3] R. Tanimoto，《指数矩阵》，《线性代数及其应用》572（2019年），153–25 1.

[4] R. Tanimoto，《计算局部有限迭代高阶导子的核的算法》，《纯粹与应用代数杂志》212（2008年），第10期，2284–2297。

静冈大学教育学院，836 Ohya，骏河区，静冈 422-8529，日本，电子邮箱：
tanimoto.ryuji@shizuoka.ac.jp