非厄米超可积系统

Francisco Correa[a]、Luis Inzunza[a] 和 Ian Marquette[b]

[a]智利南方大学物理与数学研究所，邮政信箱 567，瓦尔迪维亚，智利

[b]数学与物理学院，昆士兰大学，布里斯班，昆士兰州 4072，澳大利亚

arXiv:2304.01039v1 [math-ph] 3 Apr 2023

摘要

本文提出一种非厄米推广的 Marsden–Weinstein约化方法，用于构造定义在 n 维球面 S^n 上的一族量子 $\mathcal{PT}$-对称超可积模型。本文通过一维和二维实例说明这一机制；这两个实例分别与 $u(2)$ 和 $u(3)$ 李代数相关，并由此得到具有实谱和自发 $\mathcal{PT}$-对称性破缺的新量子模型。在某些极限下，这些模型可约化为已知的非厄米系统，以及此前研究过的实超可积系统的复扩展。

1 引言

构造可积哈密顿系统最著名的方法之一是 Marsden–Weinstein约化过程[1, 2]。从定义在高维齐性空间上的自由哈密顿量出发，利用李群中所需的一组对称性来约化模型的维数，从而使不同类别的势相互作用得以出现。约化相空间是原相空间（辛流形）与一个由阿贝尔变换构成的辛对称群的商空间。借助所谓的动量映射 [2], ——一种保持代数关系的向量场与相空间函数之间的自同构——约化过程会生成基于李对称性的运动积分，进而赋予模型可积性。哈密顿约化的著名应用包括重陀螺和二体问题，其中维数约化源于平移不变性和旋转不变性 [1–3]。许多力学系统都适合采用这类技术，例如刚弹性体 [4] 以及 Calogero 模型和 Neumann模型 [2, 3, 5]。Marsden–Weinstein过程的另一项重要优势在于，它可用于发现和构造新的超可积系统，使哈密顿–雅可比方程和 Laplace–Beltrami方程能够进行变量分离 [6–9]。从一个在伪酉变换下不变的齐性空间中的自由粒子出发，利用对称李代数中所谓的极大阿贝尔子代数（MASAs）所生成的变换进行约化 [10–12]。约化系统具有有效势，其结构直接取决于极大阿贝尔子代数的选择；模型的二阶运动积分则对应于包络代数不变部分中的元素。因此，具有 n 个自由度的约化系统是“最大”超可积的，存在 $2n-1$ 个函数独立的运动积分 [13]。通过这些约化过程得到的哈密顿模型中，一个标准示例是二维球面上的一般模型：

$$H = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{k_1^2}{s_1^2} + \frac{k_2^2}{s_2^2} + \frac{k_3^2}{s_3^2}, \qquad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1\,, \tag{1.1}$$

此时推广到 n 球面是直接的。该系统很好地说明了这样一个事实：具有二阶运动积分的超可积模型可以通过变量分离求解 [13]。与通过极大阿贝尔子代数方法构造的许多其他系统一样，这些模型已在文献中得到广泛研究，例如从收缩 [14, 15], 、交织算子 [16、威尔逊多项式 [19], 、二次代数 [20，以及代数方法 22] 等角度进行探讨。

这里只列举几个与实现方式无关的例子 [23], 。尽管 Marsden–Weinstein 方案的研究已超出力学系统的范畴，但据作者所知，目前尚无系统方法利用这一构造研究具有实谱的超可积非厄米哈密顿量。本文的主要目标是填补这一空白，设计新的复超可积可解模型。然而，在寻找超可积和可分离系统时引入复势并非新鲜事。Hamilton-Jacobi 方程和 Laplace-Beltrami 方程中的可分离性研究历史悠久，并已通过多种方法得到严格研究 [13, 24–26]。在这方面，文献 [27] 对该主题作了近期综述，并列举了大量具有可分离性的模型，其中包括能够导出某些复势的正交可分离坐标系分类。此思路已在一系列论文 [28–31], 中得到探索，揭示了依赖三个独立参数的复超可积哈密顿量。在这一背景下，我们的方法有三方面的新意。首先，我们旨在通过极大阿贝尔子代数提供的群论方法寻找复势，而不是像上述研究那样从坐标系中的可分离性入手。其次，我们能够生成依赖三个以上独立参数的新势，从而推广文献 [29–31] 中研究的部分情形。最后，本研究的动机也考虑了 $\mathcal{PT}$ 对称性的存在及其特殊性质。当然，在非厄米哈密顿量进入科学研究视野之前，利用极大阿贝尔子代数 [6, 7] 构造超可积模型时，势必须满足厄米性条件。尽管如此，三十年来人们已知，量子谱的实性不仅可以通过教科书中的标准方法解释，在一定条件下也可以从非厄米的角度加以说明 [32–34]。最典型的例子是：非厄米哈密顿量在宇称算符与时间反演算符的同时作用下保持对称（$\mathcal{PT}$），且哈密顿量的波函数也是 $\mathcal{PT}$ 的本征函数。迄今，这些思想已应用于广泛的研究领域，包括光学、凝聚态物理、声学、场论和量子力学，应用范围仍在不断扩大 [35, 36]。可积系统也不例外，同样存在不同类型的非厄米扩展或 $\mathcal{PT}$ 对称形变。例如，对于具有孤子解的经典可积系统，人们利用 $\mathcal{PT}$ 对称性对著名模型进行形变 [37, 38], ，以构造具有新型孤子解的可积模型 [39, 40] ，并赋予具有发散荷的孤子以物理意义，使其成为实量 [41]。具有非厄米性质的孤子和非线性方程已发展成为独立的研究领域，目前仍在发展之中 [42, 43]。经典和量子可积多粒子系统也已从非厄米扩展的角度得到研究。其中最具代表性的 Calogero 模型是最早被推广为复数形式的可积模型之一 [44–46] ，同时也通过根系复化以更精细的方式得到研究 [47], ，最新的参考文献列表见 [48] 。以对称生成元（或产生与湮灭算符）表示的量子非厄米哈密顿量会导出 Swanson 模型 [49] 及其扩展 [50] ，包括超对称扩展 [51]。近期，复磁场也从超可积性的角度引起关注，例如见 [52] ；在石墨烯系统中，具有非厄米 Dirac-Weyl 哈密顿量的情形亦受到研究 [53]。目前，引入非厄米形变有多种方法：一种是将坐标、场或参数复化，另一种则通过生成元或根系改变底层对称结构。本文提出的方法更接近第二种，但略有不同：非厄米扩展是在 Marsden-Weinstein 约化之前、于极大阿贝尔子代数层面引入的，因此允许采用一大类复参数。

本文的结构安排如下。第2 节回顾参考文献 [6–9]中所述的、结合极大阿贝尔子代数的 Marsden–Weinstein 方法。随后介绍在 S^n球面上构造非厄米超可积模型的方法，并通过对称生成元描述二阶运动积分。第3 节讨论圆上的双参数复模型族，其中一些特殊情形对应于著名的 $\mathcal{PT}$对称量子系统。第4节研究二维球面上的非厄米模型，这些模型具有丰富的 $\mathcal{PT}$对称结构，并会根据参数取值呈现精确相或破缺相。接下来给出其他示例，结果表明这些示例与极大阿贝尔子代数的 $\mathcal{PT}$扩展有关，包括非紧 Cartan 子代数、可正交分解子代数和幂零子代数。它们还推广了此前关于二维球面上复可分系统的结果。最后，第5节进行讨论并展望未来。

2 球面上的复系统

这一思路基于 Marsden–Weinstein 降维约化方案[1, 2] ，并将其应用于齐性空间 [6–9]中自由粒子的测地运动。通过适当的正则变换，结果哈密顿量中不再显式出现某些坐标。这些坐标称为可忽略坐标，相应的正则动量则是运动积分。这样，整个相空间便约化为一个区域，其中可忽略变量为零，而其动量可作为涌现势能项中的耦合常数处理。此类正则变换的主要组成部分是极大阿贝尔子代数 [10–12] ，它们生成等距变换子群，其秩决定系统中可忽略变量的数量[11]。构造实超可积哈密顿系统的约化方法，以一个在 n 维球面上运动的自由粒子为起点，并用复坐标表示。

$$y^\mu \overline{y}_\mu = 1\,, \qquad y_\mu \in \mathbb{C}\,, \qquad \mu = 1, \ldots, n\,, \tag{2.1}$$

其中， y 表示一个 n维列向量。在此参数化下，系统的哈密顿量为

$$H = \frac{2}{m} P_\mu \overline{P}^\mu\,, \tag{2.2}$$

由测地拉格朗日量 $L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \dot{y} \dot{\overline{y}}$以及泊松括号 $\{y^\mu, P_\nu\}_{\rm PB} = \delta^\mu_\nu$和 $P_\mu y^\mu + \overline{y}_\mu \overline{P}^\mu = 0$ 直接由几何约束（2.1）得出。由于齐性空间（2.1）的等距变换由酉群 U（n）生成，坐标变换 $y' = By$ 可表示为B 一个酉矩阵。对称群包含一个由极大阿贝尔子代数及其生成元生成的阿贝尔子群，其变换记为 Y_μ，可用对称矩阵和纯虚矩阵表示。因此，约化方案建立了如下形式的正则变换 [6],

$$y^\mu = B(x)^\mu_\nu s^\nu\,, \qquad \overline{y}^\mu = \overline{B}(x)^\mu_\nu s^\nu\,, \tag{2.3}$$

$$B(x) = \exp(x^\mu Y_\mu)\,, \quad [Y_\mu, Y_\nu] = 0\,, \qquad Y_\mu = -\overline{Y}_\mu = Y_\mu^T\,, \tag{2.4}$$

其中， x^μ 和 s^μ 是实坐标。正则变换将两组新的 n维正则动量向量 p_s 和 p_x，分别与共轭变量 s^μ 和 x^μ 相关联,

$$\begin{pmatrix} \overline{P} \\ P \end{pmatrix} = (J^{-1})^T \begin{pmatrix} p_x \\ p_s \end{pmatrix}\,,$$

其中 J 是雅可比矩阵。 Y_μ 生成元中的条件立即推出 $\overline{B} = B^{-1}$ ，其定义了 n维球面上的 s^μ 变量

$$s^\mu s_\mu = 1\,, \qquad p_s^T s = 0\,. \tag{2.5}$$

变换（2.3）和（2.4）得到哈密顿量（从现在起，质量设为 $m = 1/2$），

$$H = p_s^T p_s + V(s, p_x)\,, \qquad V(p_x, s) = p_x^T \mathcal{V}^{-1} p_x\,, \tag{2.6}$$

其中 $\mathcal{V}$ 按构造是一个实矩阵，它由 s^μ 坐标和极大阿贝尔子代数生成元定义,

$$\mathcal{V}_{\mu\nu} = -(Y_\mu)^\rho_\alpha (Y_\nu)^\beta_\rho s^\alpha s_\beta\,, \qquad \mathrm{Im}\,\mathcal{V} = 0\,. \tag{2.7}$$

上述过程消除了势中可忽略变量 x^μ 的影响，并通过将超曲面 $x^\mu = 0$ 与 $p_x = k = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ 识别为新的耦合常数，使相空间得以约化。结合式 (2.5)，共同定义了哈密顿量 (2.6)，它位于具有非平凡势的 S^n 球面上： $V(p_x, s) = V(k, s)$。关于这一构造的更多细节见附录 A，另见 [6]。如下文所示，该方法以一种使约化系统成为超可积系统的方式生成运动积分。事实上，人们已针对不同类型的等距群 [7–9], 研究了若干扩展，以及它们与交织算子和超对称性 [16, 17] 的关系；近期还从纯代数方法的角度进行了研究[23]。然而，对实值势的自然限制

(2.7) 对极大阿贝尔子代数的不同选择施加了严格的约束；考虑到对称群越大，出现的类别也越多，因此可选方案也越丰富。例如，对于三阶代数，所得若干可积模型包含动能符号为负的项 [7, 9]，这使得这些系统更难与物理背景联系起来。以下构造将迄今已知的方法加以推广，既克服了这些问题，也通过使势成为非厄米但 $\mathcal{PT}$-对称的形式，发现了新的超可积系统族。推广过程始于将齐次 $2n$维空间（2.1）替换为新的独立复坐标 q^μ 以及 r^μ

$$(y, \bar{y}) \to (q, r), \qquad (P, \overline{P}) \to (p_q, p_r)\,. \tag{2.8}$$

自然地，　由此得到的构型空间允许更大类的等距变换和坐标变换，
其形式为　复对称矩阵，B

$$q^T r = q^\mu r_\mu = 1\,, \quad q' = Bq \quad r' = B^{-1} r\,. \tag{2.9}$$

与原始哈密顿量（2.2）相比，很容易看出，新的哈密顿量可以被视为自由 $2n$维哈密顿量的解析延拓

$$H = 4p_q^T p_r = 4(p_+^T p_+ + p_-^T p_-), \quad p_\pm = p_q \pm \mathrm{i} p_r\,, \tag{2.10}$$

尽管对它们的解释并不需要比确立一种用于构造新的超可积模型的扩展更深入的论证。从新的初始哈密顿量（2.10）出发，将约化方案（2.3）和（2.4）扩展为

$$q^\mu = B(x)^\mu_\nu s^\nu\,, \qquad r^\mu = B^{-1}(x)^\mu_\nu s^\nu \tag{2.11}$$

$$B(x) = \exp(x^\mu Z_\mu)\,, \quad [Z_\mu, Z_\nu] = 0\,, \qquad Z_\mu = Z_\mu^T\,, \qquad Z_\mu \in \mathbb{C}\,, \tag{2.12}$$

在此情形下，复阿贝尔矩阵 Z_μ 可以是生成 $u(n)$ 代数的所有可能极大阿贝尔子代数的复线性组合 $Z_\mu = \sum a_\mu Y_\mu$。此前的方法不允许这种新选择，[6, 9], 它意味着哈密顿量（2.10）和动力学约束的形式与（2.6）相似，但势 V 会因矩阵取复值而改变，

$$\mathcal{V}_{\mu\nu} = -(Z_\mu)^\rho_\alpha (Z_\nu)^\beta_\rho s^\alpha s_\beta\,. \tag{2.13}$$

可忽略坐标与之前相同 x_ρ，约化相空间也保持不变。显然，这一扩展包含实数情形这一特例，同时也允许出现由（$\mathcal{PT}$）给出的2.13）中的新型 $\mathcal{PT}$对称超可积系统。[32] 对称算符并不总是唯一的，哈密顿量也可能同时具有不同的反线性对易算符。在这一设置中，只需要求势 $\mathcal{PT}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ 在类似下列算符的作用下保持不变即可

$$\mathcal{T} : \mathrm{i} \to -\mathrm{i}\,, \qquad \mathcal{P} : s^\mu \to \mathcal{P}^\mu_\nu s^\nu, \qquad \mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^T\,, \tag{2.14}$$

它也保持动能项不变。不变性条件意味着，极大阿贝尔子代数生成元在（2.14）的作用下应全为偶或全为奇，　$Z_\mu = \varepsilon \mathcal{P}(\overline{Z}_\mu)\mathcal{P}$ 其中 $\varepsilon^2 = 1$，此外还须满足式（2.12）中的限制。尽管以上讨论是在经典层面进行的，但非厄米构造的思想以及势的复数性质主要面向量子层面。因此，完成经典约化后，下一步是对哈密顿量进行量子化，并尽可能以最简单的方式完成。借助可积性方案求得薛¨定谔方程的解后，重点将放在同时与相应对称性（2.14）相容的波函数集合上。这样，谱的实性便得到保证，除非在某些参数或耦合常数取值区域内，波函数失去确定的宇称，导致 $\mathcal{PT}$-对称性发生自发破缺。相应的薛¨定谔方程将通过变量分离法求解，这与二阶不变量的存在有关 [13]。量子化之前，可以按照与原方案类似的方式研究相应的守恒量 [6–9]。定义约化哈密顿系统（实数或复数）后，运动积分

和哈密顿量是李代数生成元 [6] 作为包络代数元素的投影。换言之，与对称群相关的李代数的任意生成元 X 都可以通过动量映射$\widehat{}$投影为相空间函数 $X \to \widehat{X}$ [2,6]

$$\widehat{X} = p_q^T X q + p_r^T \overline{X}\, r\,. \tag{2.15}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$该映射在泊松括号 $\{X_i, X_j\}_{\rm PB} = \widehat{X([X_i, X_j])}$ 的层面保持对易关系，并可用于将生成元的任意函数投影到相空间中。将这一约化方案应用于实情形和复情形可得到

$$\widehat{X} = \frac{1}{2} p_s^T (X + \overline{X}) s + \frac{1}{2} k^T \mathcal{A}^{-1} (X - \overline{X}) s\,, \qquad \mathcal{A}_{\mu\nu} = (Z_\nu)_{\mu\sigma} s_\sigma\,. \tag{2.16}$$

由于我们研究的是 $U(n)$，其对应的李代数为 $u(1) \oplus su(n)$，生成元 X 表示为反厄米矩阵，并可将其分为纯虚对称矩阵和实反对称矩阵 [6]。在当前方法中，极大阿贝尔子代数生成元选为对称矩阵的线性组合，从而得到

$$\widehat{Z}_\rho = k^T \mathcal{A}^{-1} Z_\rho s = k_\sigma \mathcal{A}^{-1}_{\sigma\nu} \mathcal{A}_{\nu\rho} = k_\rho\,. \tag{2.17}$$

与实情形相同 [6], ，系统的运动积分由 $su(n)$ 的包络代数中的子空间得到，该子空间在由复极大阿贝尔子代数生成的变换下保持不变。这些不变量表示为生成元 X 的二次函数，

$$T_\ell = \sum_{i,j} c^\ell_{ij} X_i X_j\,, \qquad [T_\ell, Z_\rho] = 0\,, \qquad c^\ell_{jk} \in \mathbb{C}\,, \tag{2.18}$$

并通过 $T_\ell(\widehat{X}) \to \widehat{T_\ell}(\widehat{X})$ 将其投影到约化相空间中。为了说明这一方案如何生成新的 $\mathcal{PT}$-不变超可积系统，接下来的章节将聚焦于低维球面上的实例。

3 $\mathcal{PT}$对称的 S^1模型

最简单的例子是研究一个在单位圆 $s_1^2 + s_2^2 = 1$ 上运动的粒子，这意味着约束 $s_1 p_1 + s_2 p_2 = 0$。我们选择用泡利矩阵实现的 $u(2) = u(1) \oplus su(2)$代数，其对易关系如下

$$X_0 = \mathrm{i}\sigma_0\,, \qquad X_1 = \mathrm{i}\sigma_1\,, \qquad X_2 = \mathrm{i}\sigma_2\,, \qquad X_3 = \mathrm{i}\sigma_3\,, \tag{3.1}$$

$$[X_3, X_2] = 2X_1\,, \qquad [X_2, X_1] = 2X_3\,, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2\,. \tag{3.2}$$

显然，只有 $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$ 矩阵是对称的，并且符合式（2.12）中关于极大阿贝尔子代数的条件。因此，不失一般性，极大阿贝尔子代数生成元 Z_μ 可以取为依赖于两个复参数 a 和 b,

$$Z_1 = X_0\,, \qquad Z_2 = aX_3 - \mathrm{i}bX_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}a & b \\ b & -\mathrm{i}a \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

按照构造，极大阿贝尔子代数彼此对易，$[Z_1, Z_2] = 0$ 而常数 a 和 b 的定义使它们不可能同时为零。对于 $a = 1$ 和 $b = 0$ 的实情形，已有研究 [9], 得到了 $n = 2$ 版本的（1.1）。约化相空间（2.16）中的极大阿贝尔子代数及其 X生成元具有如下形式

$$\widehat{Z}_1 = \widehat{X}_0 = k_1\,, \qquad \widehat{Z}_2 = a\widehat{X}_3 - \mathrm{i}b\widehat{X}_1 = k_2\,, \tag{3.4}$$

$$\widehat{X}_1 = \mathrm{i}\frac{ak_1 + k_2(s_2^2 - s_1^2)}{b(s_1^2 - s_2^2) - 2\mathrm{i}as_1s_2}\,, \qquad \widehat{X}_2 = s_1p_2 - s_2p_1\,, \qquad \widehat{X}_3 = \frac{2\mathrm{i}k_2s_1s_2 - bk_1}{b(s_1^2 - s_2^2) - 2\mathrm{i}as_1s_2}\,. \tag{3.5}$$

需要强调的是，参数 a 和 b 独立于耦合常数 k_1 和 k_2，实际上它们采用不同的基。在这一方案中，耦合常数是在相空间约化（3.4）后由向量 $p_x = (k_1, k_2)$ 引入的，这与参数 a 和 b 不同，后者最初用于定义极大阿贝尔子代数。约化后的 $su(2)$ 代数的卡西米尔算符就是哈密顿量（2.6）$\widehat{X}_1^2 + \widehat{X}_2^2 + \widehat{X}_3^2 = 2\widehat{H}_{a,b}$，其中

$$\widehat{H}_{a,b} = p_1^2 + p_2^2 + V_{a,b}(s_1, s_2)\,, \tag{3.6}$$

和 $V_{a,b}(s_1, s_2)$ 表示复势的双参数族（2.13），

$$V_{a,b}(s_1, s_2) = \frac{2k_1k_2(a(s_1^2 - s_2^2) + 2ibs_1s_2) - k_1^2(a^2 - b^2) - k_2^2}{(b(s_1^2 - s_2^2) - 2ias_1s_2)^2}\,. \tag{3.7}$$

显然，由于此处的有效模型是一维的，哈密顿量是唯一的运动积分。为了讨论哈密顿量的量子特征，令 $\hbar = 1$，以下引入极坐标 $(s_1, s_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$，其中 $\varphi \in [0, 2\pi)$，从而将哈密顿量变为 $\widehat{H}_{a,b} = p_\varphi^2 + V_{a,b}(\varphi)$，其势为

$$V_{a,b}(\varphi) = \frac{2k_1k_2(a\cos 2\varphi - \mathrm{i}b\sin 2\varphi) - k_1^2\left(a^2 - b^2\right) - k_2^2}{(b\cos 2\varphi - \mathrm{i}a\sin 2\varphi)^2}\,. \tag{3.8}$$

如果参数 a 和 b 为实数，则根据通常的宇称与时间反演算符，哈密顿量呈现出明显的 $\mathcal{PT}$-对称性

$$\mathcal{P} : \varphi \to -\varphi\,, \qquad \mathcal{T} : \mathrm{i} \to -\mathrm{i}\,. \tag{3.9}$$

在参数取特定值时，势 $V_{a,b}(\varphi)$ 可化为文献中讨论的若干情形，这些情形分为三个区域 $a = b$，$a > b$ 和 $b > a$。当 $b = a$，（3.8）呈现为$\mathcal{PT}$-对称莫尔斯势的形式，

$$V_{a,a}(\phi) = \frac{k_2}{a^2}(2ak_1e^{-2\mathrm{i}\varphi} - k_2e^{-4\mathrm{i}\varphi})\,. \tag{3.10}$$

变量替换 $r = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}$ 并结合 $\psi(\varphi) = r^{-\frac{1}{2}}f(r)$，将薛定谔方程$\widehat{H}_{a,b}\psi = E\psi$ 化为方程 $(-\frac{d^2}{dr^2} + \omega^2r^2 + g/r^2)$ $f(r) = \mathcal{E}f(r)$，其势为径向谐振子势 [55]。在这里，本征值与耦合常数的作用互换，$g = E - \frac{1}{4}$ 和 $\mathcal{E} = 2k_1k_2/a$，这就是所谓的耦合常数蜕变和 St¨ackel 变换[56]。在其余情况下，势 $V_{a,b}(\varphi)$ 可用复变量化为 P¨oschl-Teller 型势。当 $a > b$ 时，由 $\cos 2\xi = {}^{a}\cos{}_{\sqrt{a^2-b^2}}^{2\varphi+b}\ {}_{2\varphi}\mathrm{i}\sin$ 定义的 $\mathcal{PT}$-不变量 ξ 将 (3.8) 变换为

$$V_{a,b}(\xi) = \frac{g_-(g_- - 1)}{\sin^2\xi} + \frac{g_+(g_+ - 1)}{\cos^2\xi}\,, \tag{3.11}$$

其中，新的耦合常数 $g_\pm$ 可用先前的耦合常数和参数表示$g_\pm(g_\pm - 1) = (\sqrt{a^2-b^2}k_1 \pm k_2)4\ a^2 - b^2$ $()^2$。具有势（¨的薛定~~谔方程的形式~~解3.11）可用超几何函数表示 ${}_2F_1(a, b;\ c;\ z)$，

$$\begin{aligned}\psi_n(\xi) = {} & c_1(\sin\xi)^{g_-}(\cos\xi)^{g_+}{}_2F_1\left(-n, g_- + g_+ + n; \tfrac{1}{2} + g_+; \cos^2\xi\right) \\ & + c_2(\sin\xi)^{g_-}(\cos\xi)^{1-g_+}\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2} - n - g_+, \tfrac{1}{2} + n + g_-; \tfrac{3}{2} - g_+; \cos^2\xi\right)\,,\end{aligned} \tag{3.12}$$

其本征值为 $E_n = (2n + g_- + g_+)^2$，积分常数为 c_1 和 c_2。通常，定义量子数 n 时，必须考虑解 $\psi_n(\xi)$ 的适当行为。在可选的不同方案中，自然的做法是要求波函数为单值，并规定 $g_\pm$ 或 $1 - g_\pm$ 必须为整数，因为它们以坐标 ξ的复函数幂的形式出现。这些限制意味着，在 $c_2 = 0$ 或$c_1 = 0$的情况下，为使函数在 $\pm\infty$处定义良好，量子数 n 必须分别为整数或半整数。此外，势的某些奇点

势 $V_{a,b}(\xi)$以及实数轴上的波函数 $\psi_n(\xi)$的一些奇点可以避开，因为变量ξ 是复数。尽管如此，只要波函数 (3.12) 也是 $\mathcal{PT}$(3.9) 的本征态，谱的实性便有保证，这归因于不变性 ξ；上述情形均满足这一条件。注意，在这种情况下，势 (3.11) 也可视为经 $\mathcal{PT}$-正则化的三角形 P¨oschl-Teller 势，它通过施加复变换 $\varphi \to \varphi + \mathrm{i}\beta$ 得到，同时令 $a = \cosh(2\beta)$ 和 $b = \sinh(2\beta)$ [57, 58]保持不变。最后一种情形，即 $b > a$，需要单独处理，因为耦合常数 $g_\pm$ 变成了复数，从而引入多值函数。由于波函数 (3.12) 也可用雅可比多项式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$表示，因此可以通过黎曼曲面 [59]上的适当闭合曲线研究其复扩展及正交性。本文着重于设计新模型，而非穷尽所有可能的构型，因此不讨论 $b > a$ 的闭合曲线分析。

4 $\mathcal{PT}$对称的 S^2模型

二维球面 $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ 上的实超可积系统在过去 [14–23, 60], 一直受到广泛研究，特别是，文献 [9] 对用于获得这些系统的对称性约化方法进行了完整分析。该文研究了守恒量集合以及 Hamilton–Jacobi 方程的可分离性。由于实情形下对 MASAs 允许组合的约束条件更多，利用 $su(3)$或 $su(2,1)$代数构造不同系统的许多可能性已被穷尽。相比之下，在非厄米情形中，由于可选的极大阿贝尔子代数及其复线性组合各不相同，构造可积模型的可能性大幅增加。约化方案的构件是 $u(3) = u(1) \oplus su(3)$代数的八个生成元 X_i、 $i = 1$、.....、8

$$
\begin{array}{lll}
[X_1, X_3] = 2X_4\,, & [X_1, X_4] = -2X_3\,, & [X_1, X_5] = X_6\,, \\
[X_1, X_6] = -X_5\,, & [X_1, X_7] = -X_8\,, & [X_1, X_8] = X_7\,, \\
[X_2, X_3] = -X_4\,, & [X_2, X_4] = X_3\,, & [X_2, X_5] = X_6\,, \\
[X_2, X_6] = -X_5\,, & [X_2, X_7] = 2X_8\,, & [X_2, X_8] = -2X_7\,, \\
[X_3, X_4] = 2X_1\,, & [X_3, X_5] = -X_7\,, & [X_3, X_6] = -X_8\,, \\
[X_3, X_7] = X_5\,, & [X_3, X_8] = X_6\,, & [X_4, X_5] = X_8\,, \\
[X_4, X_6] = -X_7\,, & [X_4, X_7] = X_6\,, & [X_4, X_8] = -X_5\,, \\
[X_5, X_6] = 2(X_1 + X_2)\,, & [X_5, X_7] = -X_3\,, & [X_5, X_8] = X_4\,, \\
[X_6, X_7] = -X_4\,, & [X_6, X_8] = -X_3\,, & [X_7, X_8] = 2X_2\,.
\end{array}
\tag{4.1}
$$

由于机械 $su(3)$ 包络代数（4.1）中产生了对称结构，因此二次和三次卡西米尔元，

$$
\mathcal{C}_2 = 4(X_1^2 + X_2X_1 + X_2^2) + 3(X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 + X_8^2)\,, \tag{4.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_3 = {} & (X_8X_6 + X_7X_5)X_4 + (X_8X_5 - X_7X_6)X_3 + \tfrac{4}{27}\,(X_1 - X_2)\,(2X_1 + X_2)\,(X_1 + 2X_2) + \\
& + \tfrac{1}{6}\{X_1 + 2X_2, X_3^2 + X_4^2\} + \tfrac{1}{6}\{X_1 - X_2, X_5^2 + X_6^2\} - \tfrac{1}{6}\{2X_1 + X_2, X_7^2 + X_8^2\} - \tfrac{4}{3}(X_1 - X_2)\,,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

其中， $\{A, B\} = AB + BA$有助于理解多项式代数[23]的特征。特别是，哈密顿量通常用二次卡西米尔算符 $\mathcal{C}_2$ 来确定；同时，它也可以表示为运动积分的组合。代数（4.1）可实现为 3×3 反厄米矩阵

$$
X_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}
$$

$$
X_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}
$$

$$
X_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \mathrm{i}\mathbb{I}_{3\times 3}\,, \tag{4.6}
$$

其中只有矩阵 $\{X_0, X_1, X_2, X_4, X_6, X_8\}$ 是对称的。非厄米推广允许将对称集合中的任意对易复线性组合用作 Z_μ （2.12）的极大阿贝尔子代数生成元，从而将系统类别扩展到实情形下不允许的系统[6,9]。利用式（2.16）约化至相空间后，其余反对称生成元映射为角动量分量

$$\widehat{X}_7 = -L_1\,, \qquad \widehat{X}_5 = L_2\,, \qquad \widehat{X}_3 = -L_3\,, \qquad L_i = \epsilon_{ijk} s_j p_k\,. \tag{4.7}$$

由于动力学存在于 S^2 曲面上，施加约束 $s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3 = 0$ 后，角动量平方之和便化为通常的动能项，即正则动量平方

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2|_{S^2} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\,.$$

4.1 单参数复二维可积模型

如前所述，实数标准方法 [6–9] 与本文提出的非厄米方法之间，主要区别在于放宽了对 Z_μ 矩阵的选择，允许其成为对称子集的复线性组合 su（3）生成元（4.4）–（4.6）。秉持与实情形相同的思路，这些线性组合随后由条件 $[Z_\mu, Z_\nu] = 0$唯一确定，而复线性组合的自由度则允许引入大量自由参数，以构造 $\mathcal{PT}$不变哈密顿量。除约化过程$\curvearrowleft k_1$中 k_2 和 k_3 通过式（ $Z_\mu \to Z_\mu = k_\mu$ 2.17）得到的耦合常数外，还可以通过允许的对称（2.12）极大阿贝尔子代数 $\{X_0, X_1, X_2, X_4, X_6, X_8\}$的组合引入其他参数。本文旨在构造具有实能量、同时展现非厄米系统特征（例如自发 $\mathcal{PT}$对称性破缺）的量子模型，因此只需通过仅含一个额外参数的系统来展示这一机制，即 λ，此外还有三个耦合常数 k_μ。因此，一组有趣的极大阿贝尔子代数生成元 $[Z_1, Z_2] = [Z_2, Z_3] = [Z_3, Z_1] = 0$ 可取为

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{1}{3\sqrt{1-2\lambda^2}}\left[(1-2\lambda^2)X_0 + \gamma_- X_1 + (1+\lambda^2)X_2 - \frac{3}{2}\lambda^2 X_4 + 3\mathrm{i}\lambda(\lambda_- X_6 - \lambda_+ X_8)\right]\,,\\
Z_2 &= \frac{1}{3\sqrt{1-2\lambda^2}}\left[(1-2\lambda^2)X_0 + \gamma_+ X_1 + (1+\lambda^2)X_2 - \frac{3}{2}\lambda^2 X_4 + 3\mathrm{i}\lambda(\lambda_+ X_6 - \lambda_- X_8)\right]\,,\\
Z_3 &= \frac{1}{3\sqrt{1-2\lambda^2}}\left[-(1-2\lambda^2)X_0 + (1+\lambda^2)(X_1+2X_2) - 3\lambda^2 X_4 + 3\mathrm{i}\lambda(X_6 - X_8)\right]\,,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

它们取决于单个参数 λ，其范围为 $0 < \lambda^2 < \frac{1}{2}$，并定义常数 $\lambda_\pm$ 和 $\gamma_\pm$,

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-2\lambda^2}\right)\,, \qquad \gamma_\pm = \frac{1}{2}(1+\lambda^2 \pm 3\sqrt{1-2\lambda^2})\,.$$

$\widehat{}$向相空间表述的约化将极大阿贝尔子代数转化为耦合常数 $Z_\mu = k_\mu$（2.17），而由式（2.6）和（2.13）计算得到的哈密顿量的量子化版本具有如下形式,

$$\widehat{H}_\lambda = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + V_\lambda(s_1, s_2, s_3) = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + V_\lambda(s_1, s_2, s_3)\,, \tag{4.9}$$

$$V_\lambda(s_1, s_2, s_3) = \frac{k_1^2}{(\lambda_- s_1 - \lambda_+ s_2 + \mathrm{i}\lambda s_3)^2} + \frac{k_2^2}{(\lambda_+ s_1 - \lambda_- s_2 + \mathrm{i}\lambda s_3)^2} + \frac{k_3^2}{(\mathrm{i}\lambda(s_1 - s_2) - s_3)^2}\,. \tag{4.10}$$

哈密顿量除相加和相乘的若干常数因子外，与二阶 su（3）卡西米尔算符 $\mathcal{C}_2$ （4.3）的投影相一致。由于常数 $\lambda_\pm$ 在范围$0 < \lambda^2 < \frac{1}{2}$ 内为实数，势V_λ（s_1， s_2， s_3）显然是复数，因此哈密顿量是非厄米的。将反线性对称性定义为对 s_3 坐标进行宇称反演并施加通常的共轭算符所构成的复合变换,

$$\mathcal{P}: s_3 \to -s_3 \qquad \mathcal{T}: \mathrm{i} \to -\mathrm{i}\,, \tag{4.11}$$

势（4.10）在它们的联合作用下保持不变

$$\mathcal{PT}\,V_\lambda(s_1,s_2,s_3)=\overline{V_\lambda}(s_1,s_2,-s_3)=V_\lambda(s_1,s_2,s_3)\,. \tag{4.12}$$

因此，遵循非厄米理论的思路[32，34]，很容易推测，哈密顿量（4.9）具有实谱，前提是其波函数也是算符（4.11）的本征态。在着手研究本征值问题之前，有必要先讨论运动积分以及量子问题的可分离性。事实上，相应的定态薛定谔方程$\widetilde{H}_\lambda\psi=E\psi$无法在笛卡尔坐标下分离，但由于存在二次运动积分 [13, 25]，可分离坐标系的存在性得以保证。由于系统（4.9）受球面约束，实际上是二维的，因此预期只有$2\times2-1=3$个独立运动积分，其中两个彼此对易。事实上，可以将一组过完备的运动$\widehat{\ }$积分$[H_\lambda,T_\mu]=0,\ \ \mu=1,\ 2,\ 3$构造为（2.18）形式的二次函数，

$$T_1=(\lambda_-X_7+\lambda_+X_5+\mathrm{i}\lambda X_3)^2-\frac{[2\lambda(\lambda_+X_1+X_2)-\lambda X_4+\mathrm{i}(\lambda^2+\lambda_+)X_6-\mathrm{i}(\lambda^2+\lambda_-)X_8]^2}{1-2\lambda^2}+4Z_2Z_3\,, \tag{4.13}$$

$$T_2=(\lambda_+X_7+\lambda_-X_5+\mathrm{i}\lambda X_3)^2-\frac{[2\lambda(\lambda_-X_1+X_2)-\lambda X_4+\mathrm{i}(\lambda^2+\lambda_-)X_6-\mathrm{i}(\lambda^2+\lambda_+)X_8]^2}{1-2\lambda^2}+4Z_1Z_3\,, \tag{4.14}$$

$$T_3=(\mathrm{i}\lambda X_7+\mathrm{i}\lambda X_2-X_3)^2+\frac{[\lambda^2X_1+2\lambda^2X_2+\left(\lambda^2-1\right)X_4+\mathrm{i}\lambda X_6-\mathrm{i}\lambda X_8]^2}{1-2\lambda^2}\,. \tag{4.15}$$

它们在相空间中的约化形式为

$$\widehat{T}_1=(\lambda_-L_1-\lambda_+L_2+\mathrm{i}\lambda L_3)^2+\left(k_2\frac{\mathrm{i}\lambda s_1-\mathrm{i}\lambda s_2-s_3}{\lambda_+s_1-\lambda_-s_2+\mathrm{i}\lambda s_3}+k_3\frac{\lambda_+s_1-\lambda_-s_2+\mathrm{i}\lambda s_3}{\mathrm{i}\lambda s_1-\mathrm{i}\lambda s_2-s_3}\right)^2, \tag{4.16}$$

$$\widehat{T}_2=(\lambda_+L_1-\lambda_-L_2+\mathrm{i}\lambda L_3)^2+\left(k_1\frac{\mathrm{i}\lambda s_1-\mathrm{i}\lambda s_2-s_3}{\lambda_-s_1-\lambda_+s_2+\mathrm{i}\lambda s_3}+k_3\frac{\lambda_-s_1-\lambda_+s_2+\mathrm{i}\lambda s_3}{\mathrm{i}\lambda s_1-\mathrm{i}\lambda s_2-s_3}\right)^2, \tag{4.17}$$

$$\widehat{T}_3=(\mathrm{i}\lambda L_1-\mathrm{i}\lambda L_2-L_3)^2+\left(k_1\frac{\lambda_+s_1-\lambda_-s_2+\mathrm{i}\lambda s_3}{\lambda_-s_1-\lambda_+s_2+\mathrm{i}\lambda s_3}+k_2\frac{\lambda_-s_1-\lambda_+s_2+\mathrm{i}\lambda s_3}{\lambda_+s_1-\lambda_-s_2+\mathrm{i}\lambda s_3}\right)^2. \tag{4.18}$$

这组积分与哈密顿量（4.9），以及卡西米尔算符 $\mathcal{C}_2$，也通过以下关系相互关联：

$$\widehat{T}_1+\widehat{T}_2+\widehat{T}_3=(1-2\lambda^2)\widehat{H}_\lambda-(k_1-k_2-k_3)^2\,, \tag{4.19}$$

从而确立了该模型的超可积性，因为这里只有三个独立的积分。积分（4.16）、（4.17）和（4.18）的结构使人联想到二维球面上众所周知的模型，其$\widehat{\ }$哈密顿量（1.1）及其对称代数也具有相同的形式。在这种情况下，T_1、T_2和T_3构成了 Racah代数 $R(3)$ [22, 23]的一个非厄米实现。该$\widehat{\ }$代数的结构（与本文无关，故不在此详述）包含元素 $T_{ij}=-\mathrm{i}[T_i,T_j]$，它们还与二阶和三阶卡西米尔算符[23]相关。这些生成元并不独立$\widetilde{T}_{12}=-T_{13}=T_{23}$，并满足如下形式的代数关系：

$$[\widehat{T}_{12},\widehat{T}_1]\propto\mathrm{i}\{\widehat{T}_1,\widehat{T}_3\}-\mathrm{i}\{\widehat{T}_1,\widehat{T}_2\}+\text{lower terms}\,, \tag{4.20}$$

$$[\widehat{T}_{12},\widehat{T}_2]\propto\mathrm{i}\{\widehat{T}_1,\widehat{T}_2\}-\mathrm{i}\{\widehat{T}_2,\widehat{T}_3\}+\text{lower terms}\,. \tag{4.21}$$

其中 $\widehat{T}_{12}^2=P(\widehat{T}_1,\widehat{T}_2,\widehat{T}_3)$ 是关于积分的多项式。本征值问题可以通过坐标 ξ 和 χ 对 Schr¨odinger 方程进行变量分离来处理，这些坐标由以下方程定义

$$\cos2\xi=\frac{(\lambda_-s_1-\lambda_+s_2+\mathrm{i}\lambda s_3)^2-(\lambda_+s_1-\lambda_-s_2+\mathrm{i}\lambda s_3)^2}{(\lambda_-s_1-\lambda_+s_2+\mathrm{i}\lambda s_3)^2+(\lambda_+s_1-\lambda_-s_2+\mathrm{i}\lambda s_3)^2}\,,\quad \cos\chi=\frac{\mathrm{i}\lambda(s_1-s_2)-s_3}{\sqrt{1-2\lambda^2}}\,, \tag{4.22}$$

同时作为 ξ 和 χ 在 $\mathcal{PT}$方程（4.11）中定义的 - 对称性下的不变量。对于 $\lambda^2\neq\frac{1}{2}$，变换（$\widehat{\ }$，z_1，z_2，z_3）$=(\cos\xi\sin\chi,\ \sin\xi\sin\chi,\ \cos\chi)$ 在 $z_\mu z^\mu=1$的条件下，使得可以将 H_λ写成一般形式

在 S^2 （1.1）上的模型。然而，在这里， λ 的取值会内在地控制系统的 $\mathcal{PT}$对称性，因为谱、坐标和波函数都将依赖于它。具体而言，方程 $\sim H_\lambda\psi = E\psi$ 在单参数势 V_λ（s_1， s_2， s_3）下具有如下形式

$$-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\chi^2}+\cot\chi\frac{\partial\psi}{\partial\chi}+\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\right)+\frac{1}{1-2\lambda^2}\left[\frac{1}{\sin^2\chi}\left(\frac{k_1^2}{\cos^2\xi}+\frac{k_2^2}{\sin^2\xi}\right)+\frac{k_3^2}{\cos^2\chi}\right]\psi=E\psi \tag{4.23}$$

随后通过 $\psi(\chi,\xi) = \Psi(\chi)\Phi(\xi)$ 进行变量分离，其中耦合常数 k_μ借助 $\ell_\mu = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4k_\mu^2}{1-2\lambda^2}}\right)$ 重新参数化，且 $\mu = 1$ 为 2、3、

$$-\frac{\partial^2\Phi(\xi)}{\partial\xi^2}+\left(\frac{\ell_1(\ell_1-1)}{\cos^2\xi}+\frac{\ell_2(\ell_2-1)}{\sin^2\xi}\right)\Phi(\xi)=(\ell_1+\ell_2+2m)^2\Phi(\xi)\,, \tag{4.24}$$

$$-\frac{\partial^2\Psi(\chi)}{\partial\chi^2}-\cot\chi\frac{\partial\Psi(\chi)}{\partial\chi}+\left(\frac{\ell_3(\ell_3-1)}{\cos^2\chi}+\frac{(\ell_1+\ell_2+2m)^2}{\sin^2\chi}\right)\Psi(\chi)=E\Psi(\chi)\,. \tag{4.25}$$

常数 m 起量子数的作用，它作为两个量子系统之间的分离常数引入，这两个系统具有复坐标中的 P¨öschl-Teller 势。与上一节一样，方程（4.24）和（4.25）的解可以用超几何函数表示，积分常数为 c_i，$i = 1$， 4

$$\begin{aligned}\Phi_m(\xi) &= c_1(\sin\xi)^{\ell_2}(\cos\xi)^{\ell_1}\,{}_2F_1\left(-m,\ell_1+\ell_2+m;\tfrac{1}{2}+\ell_1;\cos^2\xi\right)\\ &\quad+c_2(\sin\xi)^{\ell_2}(\cos\xi)^{1-\ell_1}\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}-m-\ell_1,\tfrac{1}{2}+m+\ell_2;\tfrac{3}{2}-\ell_1;\cos^2\xi\right)\,,\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{m,n}(\chi) &= c_3(\sin\chi)^{-\ell_1-\ell_2-2m}(\cos\chi)^{\ell_3}\,{}_2F_1\left(-n,\tfrac{1}{2}-\ell_1-\ell_2+\ell_3-2m+n;\tfrac{1}{2}+\ell_3;\cos^2\chi\right)\\ &\quad+c_4(\sin\chi)^{-\ell_1-\ell_2-2m}(\cos\chi)^{1-\ell_3}\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}-n-\ell_3,1-\ell_1-\ell_2-2m+n;\tfrac{3}{2}-\ell_3;\cos^2\chi\right)\,.\end{aligned} \tag{4.27}$$

解 $\Psi_{m,\ n}(\chi)$ 取决于额外的量子数 n，必须与所关注的解一同指定。为避免多值函数，式（4.26）和（4.27）中三角函数的幂必须取整数值，即 ℓ_1， ℓ_2， ℓ_3， $1-\ell_1$， $-\ell_1-\ell_2-2m$等等。当然，这些选择还必须同时满足解在渐近区域的正则性要求，这会对超几何函数的第一个参数以及量子数 n 和 m施加额外条件。在这些可能性繁多的情形中，只要参数 λ 介于 $0 < \lambda^2 < \frac{1}{2}$之间，两个波函数在变换（4.11）下都具有确定的宇称。

$$\mathcal{PT}\,\Phi_m(\xi) = \varepsilon\,\Phi_m(\xi)\,,\quad \mathcal{PT}\,\Psi_{m,n}(\chi) = \varepsilon\,\Psi_{m,n}(\chi),\quad \varepsilon^2 = 1\,. \tag{4.28}$$

因此，式（4.26）和（4.27）中两个波函数对应的能量均为实数，并以耦合常数和量子数表示，

$$E_{n,m} = (\ell_1+\ell_2-\ell_3+2m-2n-1)(\ell_1+\ell_2-\ell_3+2m-2n)\,. \tag{4.29}$$

然而，如果参数偏离有效区域，即 $\lambda^2 > \frac{1}{2}$，系统便进入 $\mathcal{PT}$-破缺相。坐标 ξ 在 $\mathcal{PT}$ 变换下不再具有确定的宇称，式（4.23）中的势具有排斥性[1] ，最终能量也会变为复数，耦合常数 ℓ_μ也会如此。有趣的是，在 $\lambda^2 > \frac{1}{2}$ 中会出现一种新型反线性对称性，其算符与式（4.11）中的相同，˜但定义了一个新的宇称算符 $\mathcal{P}$ 如下:

$$\widetilde{\mathcal{P}} : s_1 \leftrightarrow s_2\,. \tag{4.30}$$

在这种情况下，必须进行全新的分析，同时考虑耦合常数的复数性质 ℓ_μ 以及超几何函数的复分析，其方式与上一节中针对 $b > a$ 的一维情形类似。最后，在特殊情形 $\lambda^2 = \frac{1}{2}$ 下，矩阵 Z_μ

[1]在实情形下，某些参数区域必须从自伴扩张的角度加以处理 [68]„ 因此预计在复情形下也应进行严格分析。

在式（4.8）中未定义，但可以对其重新缩放，从而计算出带有势（2.6）的约化哈密顿量（2.13），

$$\widehat{H}_{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{\alpha^2}{(s_1 - s_2 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}s_3)^2}\,, \tag{4.31}$$

此时势在变换 $\mathcal{PT}$和 $\widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{T}$下均保持不变，且 $\alpha^2 = 4k_1^2 + 4k_2^2 - 2k_3^2$ 仅仅是对耦合常数的重新定义。在这种情况下，式（4.10）中的三个势能项也合并为一个，式（4.16）-（4.18）中的三个运动积分则简化为 $\widehat{T} = L_1 - L_2 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}L_3$，$\frown$ $\sim[T, H_{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}] = 0$。系统（4.31）的超可积性可以通过新变量来理解$z =$ （$s_1 - s_2 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}s_3$）$^{-1}$，使得有效的薛定谔方程¨ $\widehat{H}_{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}\psi = E\psi$ 可写为以下形式：

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{E}{z^2}\right)\psi(z) = \alpha^2\psi(z)\,. \tag{4.32}$$

这是耦合常数蜕变的另一种情形，[56], 在这种情形下，能量与耦合常数的作用互换。式（4.32）的解可用贝塞尔函数表示，并展开为

$$\psi_{\alpha,q}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+q+\frac{3}{2})}\left(\frac{\alpha z}{2}\right)^{2j+q+1} \tag{4.33}$$

其中 $E = q(q+1)$ 和 $\Gamma(x)$ 是伽马函数。当 $\sim\ell$ 取整数值时，会出现关于 $\psi_{\alpha,q}(z)$ 的单值函数；这些函数同时也是 $\mathcal{PT}$ 和 $\mathcal{PT}$ 算符的本征态。因此，哈密顿量 (4.31) 的能量 E 为实数。作为本小节的结尾，不妨从另一个角度来看所得结果。具有二阶不变量的二维球面超可积系统可在五种坐标系 [25–27]，中分离，其中包括球坐标系。从这个意义上说，预计极大阿贝尔子代数方法能够找到与参考文献 [29–31] 中分类的系统相关的情形。然而，令人惊讶的是，通过增加极大阿贝尔子代数中的自由参数，还可以生成新的超可积非厄米系统，其中包含这些分类中的模型作为特例。此外，与实情形相比，这种描述中的参数能够以略有不同的方式决定系统的物理性质。势 (3.7) 和 (4.10) 明显体现了这些特征，分别对应一维和二维情形；它们通过复变换与球面上的一般模型相关，而该变换仅在参数的有限取值范围内成立。这些变换并不能简单地消去参数，因为参数会显式出现在表征系统 $\mathcal{PT}$-对称相的谱和波函数中。下文第 4.2 节将展示更多此类情形。

4.2 更多非厄米超可积模型

Marsden–Weinstein 约化机制的非厄米情形可以生成新的复势；在某些参数取值下，这些复势会约化为或关联到文献中已知的结果。一方面，在双曲背景下对自由粒子$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = 1$ [9,24]采用约化方案，会得到动能项具有闵可夫斯基度规符号的哈密顿量。实情形中出现这类动能项的原因，在于极大阿贝尔子代数 $su(2,1)$ 子代数的不同类别，它们被称为非紧卡当子代数、正交可分解子代数和幂零子代数 [6,9]。鉴于这类模型的物理解释更为晦涩，在非厄米方法中，这些超可积系统呈现为具有欧几里得动能项的系统，并且是更一般的多参数系统族的特例。另一方面，已有不少论文对复二维球面上的可分离坐标系进行了分类 [29–31],由此得到具有三个独立耦合常数的复势以及其他一些特例。在此背景下，本方法的优势之一是，可以通过合适的极大阿贝尔子代数线性组合和自由参数，将其中一些超可积系统加以推广并纳入其中。这可以

be s例如通过一个简单示例看出，其中极大阿贝尔子代数由两个参数 a 和 b定义 ，

$$Z_1 = \frac{1}{3}(X_0 + 2X_1 + X_2)\,, \quad Z_2 = aX_2 + 2\mathrm{i}bX_8\,, \quad Z_3 = \frac{1}{3}(2X_0 - 2X_1 - X_2)\,. \tag{4.34}$$

其构造背后的逻辑与上文所述相同，即重复构造势、哈密顿量和守恒量的步骤。由 (2.6) 和 (2.13) 可得到以下势族，

$$V_{a,b} = \frac{k_1^2}{s_1^2} + \frac{\left(s_2^2+s_3^2\right)\left(k_2^2+\left(a^2-4b^2\right)k_3^2\right) - 2k_2k_3\left(a(s_2^2-s_3^2)+4bis_3s_2\right)}{4\left(as_2s_3 - \mathrm{i}b\left(s_2^2-s_3^2\right)\right)^2}\,. \tag{4.35}$$

集合 与复极大阿贝尔子代数 (4.34) 对易的二次生成元 (2.18) 可选为 s

$$T_1 = X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2\,, \tag{4.36}$$
$$T_2 = X_2^2 + X_7^2 + X_8^2\,, \tag{4.37}$$
$$T_3 = a(X_3^2 + X_4^2) + \mathrm{i}b(\{X_3, X_5\} + \{X_4, X_6\})\,, \tag{4.38}$$

通过 (2.16) 将其约化到相空间，可得

$$\widehat{T}_1 = L_2^2 + L_3^2 + \frac{k_1^2}{s_1^2} + s_1^2 V_{a,b} + 2(k_3k_1 - k_1^2)\,, \tag{4.39}$$

$$\widehat{T}_2 = L_1^2 + (1 - s_1^2)\left(V_{a,}\right. \tag{4.40}$$

$$_b - \left.\frac{k_1^2}{s_1^2}\right)\,,$$

$$\widehat{T}_3 = aL_3^2 + \mathrm{i}b\{L_2, L_3\} + s_1^2\frac{(k_2s_3 + k_3[as_3 - 2\mathrm{i}bs_2])([a^2-4b^2]k_3s_3 + k_2[as_3 - 2\mathrm{i}bs_2])}{4\left(as_2s_3 - \mathrm{i}b\left(s_2^2-s_3^2\right)\right)^2}) \tag{4.41}$$

$$+ \frac{k_1^2}{s_1^2}s_2(as_2 + 2\mathrm{i}bs_3) + k_1(k_2 + ak_3)\,。 \tag{4.42}$$

由 $\widehat{H}_{a、\ b} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + V_{a、\ b}$ 定义的哈密顿量，以及积分 $[\widehat{H}_{a,b}, \widehat{T}_i] = 0$、 $i = 1$、2、3，与第 4.1 节中的二维情形有若干相似之处。所有守恒量在上述（4.11）定义的同一 $\mathcal{PT}$对称性下保持不变，并且这些积分构成一个过完备集合，满足 $\widehat{T}_1 + \widehat{T}_2 = \widehat{H}_{a、\ b} + 2k_1k_3 - k_1^2$。最后一个关系表明，考虑到这里再次有 $T_{12} = -\mathrm{i}[T_1, T_2]$，这些积分的二次代数将与（4.20）和（4.21）略有不同。考虑势（4.35）的一些极限情形，也可以理解该代数的性质。两个特例 $b = 1/2$、 $a = 0$ 和 $b = 1/2$、 $a = 1$ 分别是非紧 Cartan 子代数和正交可分解子代数极大阿贝尔子代数约化的非厄米对应物，

$$V_{0,\frac{1}{2}} = \frac{k_1^2}{s_1^2} + \frac{(k_3^2-k_2^2)(s_2^2+s_3^2) + 4\mathrm{i}k_2k_3s_2s_3}{(s_2^2-s_3^2)^2} = \frac{k_1^2}{s_1^2} - \frac{(k_2 - \mathrm{i}k_3)^2}{2(s_2-s_3)^2} - \frac{(k_2+\mathrm{i}k_3)^2}{2(s_2+s_3)^2}\,, \tag{4.43}$$

$$V_{1,\frac{1}{2}} = \frac{k_1^2}{s_1^2} + \frac{2k_2k_3}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^2} - \frac{k_2^2\,(s_2 - \mathrm{i}s_3)}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^3}\,. \tag{4.44}$$

第一个势可以理解为在 $s_2 - s_3$ 平面内进行旋转，随后对球面上一般模型的耦合常数进行复重新定义（1.1）。第二个势出现在复二维球面上超可积哈密顿量的分类方案中 [29]。可分离坐标系的类型与超可积系统及其特定代数有关，也与 $\widehat{T}_{12}^2$ [27] 的形式有关，这使得这些系统能够被分类。因此，在可能的复极大阿贝尔子代数构型中，预计会出现不同的代数结构。同样，幂零子代数情形的类似形式可以用以下由幂零生成元构成的极大阿贝尔子代数来构造$Z_2^2 = Z_3^3 = 0$,

$$Z_1 = X_0\,, \qquad Z_2 = X_2 + \mathrm{i}X_8\,, \qquad Z_3 = X_4 + \mathrm{i}X_6\,. \tag{4.45}$$

采用这种选择的复势与参考文献 [9,29], 中的形式相似

$$V_{\mathrm{N}}=\frac{2k_1k_2+k_3^2}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^{\,2}}-\frac{4k_2k_3s_1}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^{\,3}}+\frac{k_2^2\left(4s_1^2-1\right)}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^{\,4}}\,, \tag{4.46}$$

并且与前述示例具有相同的 $\mathcal{PT}$-对称性。运动积分同样由包络代数中不变元的约化构造而得，即:

$$T_1=\frac{4}{3}X_1^2+\frac{2}{3}X_2^2+2X_3^2+X_4^2+X_6^2+X_7^2+\tfrac{1}{3}X_8^2+\mathrm{i}\{X_3,X_5\}-\frac{2}{3}\{X_1,X_2+2\mathrm{i}X_8\}\,, \tag{4.47}$$

$$T_2=-(X_3+\mathbf{i}X_5)^2+\tfrac{2}{3}\{2X_1+X_2,X_2+\mathbf{i}X_8\}\,, \tag{4.48}$$

$$T_3=-\tfrac{1}{6}\{2X_1+X_2,X_4\}-\tfrac{\mathrm{i}}{6}\{2X_1-5X_2-6\mathrm{i}X_8,X_6\}+\tfrac{1}{2}\{\mathrm{i}X_3-X_5,X_7\}\,. \tag{4.49}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$它们的不变量也构成一个过完备集，可用哈密顿量 $T_1+T_2=$
$\widehat{H}_{\mathrm{N}}+\frac{1}{3}\ k_1^2+2k_2^2$ $\widehat{H}_{\mathrm{N}}=p_1^2+p_2^2+p_3^2+V_{\mathrm{N}}$ () 表示，其中

$$\widehat{T}_1=L_1^2+2L_3^2-\mathrm{i}\{L_2,L_3\}+V_{\mathrm{N}}+\frac{4k_2^2}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^2}-\frac{4k_2(s_1k_3+2s_2k_2)}{(s_2+\mathrm{i}s_3)}+\frac{k_1^2+4k_1k_2+14k_2^2}{3}\,, \tag{4.50}$$

$$\widehat{T}_2=(L_2+\mathrm{i}L_3)^2-4s_1k_2\frac{k_2s_1-k_3(s_2+\mathrm{i}s_3)}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^2}-\frac{4}{3}k_1k_2\,, \tag{4.51}$$

$$\widehat{T}_3=\frac{1}{2}\{L_2+\mathrm{i}L_3,L_1\}-s_1(s_2+\mathrm{i}s_3)V_{\mathrm{N}}+\frac{s_1k_2^2}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^3}-\frac{k_2k_3}{(s_2+\mathrm{i}s_3)^2}+\frac{k_3(k_1+3k_2)}{3}\,. \tag{4.52}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$两族哈密顿量$H_{a,\ b}$ 和 H_{N} 凭借 $\mathcal{PT}$-对称性（4.11），具有$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$实谱。特别是，$H_{0,\ 1\,2}$， $H_{1,\ 1\,2}$以及 H_{N}，也可以通过约化方案[9]，由闵可夫斯基度规符号下双曲面上的系统，经复变换 $s_3\to\mathrm{i}s_3$ 和$p_3\to-\mathrm{i}p_3$得到。此处所述示例只是通过更一般的极大阿贝尔子代数构造的一大类复模型中的一部分

$$Z_\mu=c_\mu^0X_0+c_\mu^1X_1+c_\mu^2X_2+c_\mu^4X_4+c_\mu^6X_6+c_\mu^8X_8\,,\quad \mu=1,2,3. \tag{4.53}$$

对系数施加必要约束后， c_μ^ν 与 $[Z_\mu,Z_\nu]=0$有关。系数数量上的自由度（无论系数为复数还是实数），使我们能够构造诸如（3.7）、（4.10）和（4.35）这样的势，从而将不同极大阿贝尔子代数和可分离坐标下的系统连续地联系起来[9,29]。

5 讨论

本文将 Marsden–Weinstein约化方法推广到任意维数，以构造复$\mathcal{PT}$-对称超可积哈密顿量。放宽极大阿贝尔子代数线性组合中的实性条件，增加了自由参数的数量，进而丰富了势的种类。由于这一思路适用于任意维数，且诸如 $su(n)$ 这样的代数中的参数数量会随维数增加，因此还有许多新系统有待发现。在非厄米情形下，可以构造具有实能量且含有额外参数的超可积系统；这些参数是在相空间约化向量 $p_x=k$ 所产生的 n耦合常数之外增加的。由于可分离坐标对应的波函数显式依赖于这些额外参数，它们揭示了诸如自发 $\mathcal{PT}$-对称性破缺等特征。为初步展示复数机制的运作方式，本文讨论了一维和二维中的不同类别系统，涵盖已知厄米哈密顿量的复扩展，以及按照可分离性质分类的复哈密顿量的推广[6,9,29–31]。采用此方法寻找并构造三维及更高维的非厄米超可积系统，仍是一个开放问题。接下来一个自然的问题是如何恰当地对这类系统进行分类，这可以通过两种不同但彼此相关的途径来探讨。实情形与复情形的区别在于，在代数层面上，若实极大阿贝尔子代数可由相应群[6]的伴随作用 gYg^{-1} 相互变换，则它们彼此等价。除标准耦合常数之外再引入复参数后

就有必要研究非厄米情形下如何定义这些等价类。理解非厄米哈密顿量本质的另一种方式，是从可分离坐标和代数结构的角度对其进行分类并考察其超可积性[27]。从这个角度看，像双参数势（4.35）这样的系统如何纳入这一框架，颇值得探讨。迄今为止，能级的解一直是通过施罗丁格¨方程来讨论的，其中哈密顿量是相应积分的卡西米尔算符。人们或许会问，在这种非厄米情形下，如何运用其他方法求得谱。一种在实情形中行之有效、也可用于复情形的技术以抛玻色代数为基础 [62, 64]。这种代数方法尤其应用于包含 Painlev´é 超越函数的哈密顿量 [65], ，在这些问题中，其他常见的偏微分方程和常微分方程求解方法（如级数解）无法用于求得相应施罗丁格¨方程的谱和波函数。这些情形表明，有必要在量子哈密顿量的研究中进一步发展代数方法。不过，本文并未采用抛玻色代数；其代数框架完全基于一个底层的 $u(3)$ 李代数及其包络代数。与李代数的这种联系，进而赋予本文所述的各种模型解析可解性和超可积性等性质。事实上，其中一些模型导出的特殊函数／正交多项式超出了通常超几何函数或雅可比多项式的范畴[59]。已知球面上的厄米一般超可积系统与 Lauricella 多项式相关，而这些多项式又源自对超几何方程的推广 n。这表明，本文围绕 $\mathcal{PT}$-对称（以及更广泛的非厄米）超可积系统所展开的研究计划，可能会带来这些特殊函数的进一步推广，并有望将其应用于量子系统之外的领域。论文 [66], 还揭示了另一个有趣的代数特征：隐藏对称性将球面上的一般模型 n推广到了准精确可解性。这也可能为本文提出的模型带来隐藏对称代数，并为研究准精确可解系统的新复扩展提供可能途径。最后，本文进一步佐证了这一猜想：超可积模型可以通过约化高维空间中的自由粒子得到；这一结论对非厄米哈密顿量同样成立。从这个意义上说，具有高阶守恒量的非厄米可积系统的存在及其与其他约化方法的关系也值得深入探讨，参见[60] 及其中的参考文献。

致谢

FC 和 LI 分别获得了 Fondecyt 项目 1211356 和 3220327 的资助。IM 获得了澳大利亚研究理事会未来研究员奖 FT180100099 的资助。

A 约化哈密顿量的显式计算

本附录介绍球面上复约化哈密顿量的计算细节，其中实情形是一个特例，可在此处显式求得 [6]。哈密顿量（2.6）的构造需要变换（2.12）的雅可比矩阵及其逆矩阵，它们如下所示：

$$J = \frac{\partial(q,r)}{\partial(x,s)} = \begin{pmatrix} A & B \\ -(B^{-1})^2 A & B^{-1} \end{pmatrix}, \qquad J^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^2 \\ B^{-1} & B \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

其中矩阵 A 的各分量定义如下：

$$A_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu} = (Z_\nu)_{\mu\sigma} B_{\sigma\rho}(x) s_\rho = B_{\mu\rho}(x)(Z_\nu)_{\rho\sigma} s_\sigma \,. \tag{A.2}$$

逆雅可比矩阵满足方程，

$$J^{-1}\mathcal{I}(J^{-1})^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

其中矩阵 $\mathcal{V}$与方程（2.13）中的矩阵相同，且与 x 坐标

$$\mathcal{V} = -A^T(B^{-1})^2A = -(B^{-1}A)^T(B^{-1}A) = -(A(x=0))^T(A(x=0)\,. \tag{A.4}$$

随后利用（A.3）直接计算出哈密顿量的最终形式，

$$\begin{aligned} H &= 4p_q^T p_r = (p_q^T, p_r^T)(2\mathcal{I}) \begin{pmatrix} p_q \\ p_r \end{pmatrix} = (p_x^T, p_s^T)J^{-1}(2\mathcal{I})(J^{-1})^T \begin{pmatrix} p_x \\ p_s \end{pmatrix} \\ &= p_s^T p_s + p_x^T \mathcal{V}^{-1} p_x\,. \end{aligned} \tag{A.5}$$

参考文献

[1]J. Marsden 和 A. Weinstein，“带对称性的辛流形约化”，数学物理报告 **5** （1974年），121。

[2] J. Marsden、G. Misiolek、J-P. Ortega、M. Perlmutter 和 T. S. Ratiu。《分阶段哈密顿约化》（施普林格出版社，柏林、海德堡，2007年）。

[3] O. Babelon、D. Bernard 和 M. Talon。《经典可积系统导论》（剑桥，2003年）。

[4] P. S. Krishnaprasad 和 J. E. Marsden，“带柔性附件的刚体的哈密顿结构与稳定性”，《理性力学与分析文献》**98** （1987年），71。

[5] A. M. Perelomov，《经典力学可积系统与李代数》第一卷（Birkh¨auser，巴塞尔，1990年）。[6] M. A. del Olmo、M. A. Rodr´ıguez 和 P. Winternitz，“基于 $SU(p,q)$ 齐性流形的可积系统”，J. Math. Phys. 34 (1993)，5118。[7] M. A. del Olmo、M. A. Rodriguez 和 P. Winternitz，“共形群 SU(2,2) 与洛伦兹双曲面上的可积系统”，《物理进展》44 (1996) 199，[arXiv:hep-th/9407080]。[8] J. A. Calzada、M. A. del Olmo 和 M. A. Rodr´ıguez，“经典超可积 $SO(p,q)$ 哈密顿系统”，《几何与物理杂志》23 (1997)，14。[9] J. A. Calzada、M. A. del Olmo 和 M. A. Rodr´ıguez，“伪正交群与二维可积动力系统”，J. Math. Phys. 40 (1999)，188 [arXiv:solv-int/9810010v1]。[10] W. Miller、J. Patera 和 P. Winternitz，“李群的子群与变量分离”，J. Math. Phys. 22 (1981)，251。[11] J. Patera、P. Winternitz 和 H. Zassenhaus，“实与复辛李代数的极大阿贝尔子代数”，J. Math. Phys. 24 (1983)，1973。[12] M. A del Olmo、M. A. Rodr´ıguez、P. Winternitz 和 H. Zassenhaus，“伪酉李代数的极大阿贝尔子代数”，《线性代数及其应用》135 (1990)，79。[13] W. Miller、S. Post 和 P. Winternitz，“经典与量子超可积性及其应用”，J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013)，423001 [arXiv:1309.2694[math-ph]]。[14] J. A. Calzada、J. Negro、M. A. del Olmo 和 M. A. Rodr´ıguez，“超可积哈密顿系统的收缩”，J. Math. Phys. 41 (2000)，317。[15]W. Miller，“二维二阶量子超可积系统的收缩理论及其与超几何正交多项式 Askey 方案的关系”，J. Phys.: Conf. Ser. 512 (2014)，012012 [arXiv:1310.2202[math-ph]]。[16] J. A. Calzada、J. Negro 和 M. A. del Olmo，“超可积量子 $u(3)$ 系统与高秩分解”，J. Math. Phys. 47 (2006)，043511 [arXiv:math-ph/0601067]。

[17] J. A. Calzada、J. Negro 和 M. A. del Olmo，“量子超可积系统的交织对称代数”，SIGMA 5 (2009), 039 [arXiv:0803.2117[quant-ph]]。[18] J. A. Calzada、J. Negro 和 M. A. del Olmo，“超可积哈密顿系统：一种代数方法”，J. Phys.: Conf. Ser. 175 (2009)，012007。[19] E. G. Kalnins、W. Miller 和 S. Post，“二维球面上的威尔逊多项式与一般超可积系统”，J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007)，11525。[20]S. Post，“二维超可积系统生成的二次代数模型”，SIGMA 7 (2011) 036 [arXiv:1104.0734[math-ph]]。[21] H. De Bie、P. Iliev、W. Van de Vijver 和 L. Vinet，“Racah代数：综述与最新成果”，载于《李群、数论与顶点代数》，第 3–20 页，《当代数学》768，Ame

r. Math. Soc.，罗

[arXiv:2001.11195[math.RT]].[22]S. Kuru、I. Marquette 和 J. Negro，《一般 Racah 代数作为伪球面上一般系统的对称代数》，J. Phys. A: Math. Theor. 53 (2020), 405203[arXiv:2004.07048[math-ph]].[23] F. Correa、M. A. del Olmo、I. Marquette 和 J. Negro，《由 su(3) 得到的多项式代数及二维球面上的一个二次超可积模型》，J. Phys. A: Math. Theor. 54 (2021) 1, 015205[arXiv:2007.11163[math-ph]].[24] C. P. Boyer、E. G. Kahnns 和 P. Wintemitz，《完全可积相对论哈密顿系统及厄米双曲空间中的变量分离》，J. Math. Phys. 24 (1983), 2022.[25] W. Miller，《对称性与变量分离》（美国，1977）。[26] E. G. Kalnins，《常曲率黎曼空间中的变量分离》，纯数学与应用数学专著和综述 28（朗文，1986）。[27] E. G. Kalnins、J. M. Kress 和 W. Miller Jr.，《变量分离与超可积性》（IOP 出版社，2018）。[28] E. G. Kalnins、W. Miller Jr.、G. S. Pogosyan，《多重可分离超可积性的完备性：E_2,$\mathbb{C}$》，J. Phys. A Math. Gen. 33 (2000), 4105.[29] E. G. Kalnins、W. Miller Jr.、G. S. Pogosyan，《复二维球面上多重可分离超可积性的完备性》，J. Phys. A Math. Gen. 33 (2000), 6791.[30] E. G. Kalnins、W. Miller Jr.、G. S. Pogosyan，《二维多重可分离超可积性的完备性》，《原子核物理》65 (2002), 1033.[31]E. G. Kalnins、J. M. Kress、W. Miller Jr.、G. S. Pogosyan，《二维常曲率空间中超可积性的完备性》，J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001), 4705[arXiv:math-ph/0102006].[32] A. Mostafazadeh，《伪厄米性与 $\mathcal{PT}$对称性：谱为实数的必要条件》，J. Math. Phys. 43 (2002), 205 [arXiv:math-ph/0107001].[33] M. Znojil，《量子物理中的伪厄米哈密顿量》，《捷克物理学杂志》54 (2004), 1.[34] C. M. Bender，《理解非厄米哈密顿量》，《物理学进展报告》70 (2007), 947[arXiv:hep-th/0703096].[35] C. M. Bender、P. E. Dorey、C. Dunning、A. Fring、D. W. Hook、H. F. Jones、S. Kuzhel、G. Levai 和 R. Tateo。《对称性：量子与经典物理》（世界科学出版社，新加坡，2019）。[36] D. Christodoulides 和 J. Yang。《宇称-时间对称性及其应用》（施普林格，柏林，2018）。

[37] C. M. Bender、D. C. Brody、J. Chen 和 E. Furlan, 《 $\mathcal{PT}$-对称的柯特韦格-德弗里斯方程扩展》, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007), F153.[38] A. Fring, 《$\mathcal{PT}$-对称的柯特韦格-德弗里斯方程变形》, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007), 4215.[39]M. J. Ablowitz 和 Z. H. Musslimani, 《可积非局域非线性薛定谔方程》, Phys. Rev. Lett. 110 (2013), 064105。《可积非局域非线性方程》, Stud. Appl. Math. 139 (2016), 7. ¨J. Cen、F. Correa 和 A. Fring, 《可积非局域 Hirota 方程》, J. Math. Phys. 60 (2019), [40]arXiv:1710. 081508 [nlin.SI11560[.]]F. Correa 和 A. Fring, 《正则化简并多孤子》, JHEP 09 (2016), 008[41] arXiv:1605.[nlin.SI06371[.]]V. V. Konotop、J. Yang 和 D. A. Zezyulin, 《[42] -对称系统中的非线性波》, Rev. of Mod. Phys. 88 (2016), 035002. $\mathcal{PT}$A. Fring, 《[43] -对称的可积模型变形》, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 371 (2013), $\mathcal{PT}$arXiv:1204. 20120046 [hep-th2291[.]] M. Znojil 和 M. Tater, 《具有实能量的复 Calogero 模型》, J. Phys. A: Math. Theor. 34 (2001), [44] arXiv:quant-ph/ 1793 [.0010087]B. Basu–Mallick 和 B. P. Mandal, 《关于一个具有非厄米[45] 不变相互作用的精确可解 B_N 型 Calogero 模型》, Phys. Lett. A 284 (2001), $\mathcal{PT}$arXiv:cond-mat/ 231 [.0101349]A. Fring, 《关于 Calogero–Moser–Sutherland 模型非厄米扩展可积性的一点说明》, Mod. Phys. Lett. A 21 (2006),[46] arXiv:hep-th/ 691 [.0511097]A. Fring、M. Smith, 《由复根空间构造的非厄米多粒子系统》, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012), [47]arXiv:1108. 085203 [hep-th1719[.]] F. Correa 和 O. Lechtenfeld, 《[48] -变形 Calogero 模型的代数可积性》, J. Phys.: Conf. Ser. 2038 (2021), $\mathcal{PT}$arXiv:2106. 012007 [hep-th05428[.]]M. S. Swanson, 《非厄米二次哈密顿量的跃迁矩阵元》, J. Math. Phys. 45 (2004), 585.[49]P. E. Assis 和 A. Fring, 《李代数型非厄米哈密顿量》, J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2008), [50]arXiv:0804. 015203 [quant-ph4677[.]]L. Inzunza 和 M. S. Plyushchay, 《共形桥变换、[51] -与超对称性》, JHEP 22 (2022), $\mathcal{PT}$arXiv:2112. 228 [hep-th 13455[。《共形桥变换与]]对称性》, J. Phys. Conf. Ser. 2038 (2021), $\mathcal{PT}$arXiv:2104. 012014 [hep-th08351[.]]O. Kub[52]u 和 L. ˇSnobl, 《具有复磁场的柱面上一阶超可积性》, ˚arXiv:2212.[math-ph04141[.]]David J. Fern[53]andez C. 和 Juan D. Garc´ıa-Mu´noz, 《复磁场中的石墨烯》, Eur. Phys. J. Plus 137 (2022), 1013. ˆS. Fl[54] ugge, 《实用量子力学》（Springer Science & Business Media，2012）。¨M. Znojil, 《PT 对称量子力学中莫尔斯振子的精确解》, Phys. Lett. A 264 (1999), [55]arXiv:quant-ph/ 108 [。

[56]J. Hietarinta、B. Grammaticos、B. Dorizzi 和 A. Ramani，《可积哈密顿系统之间的耦合常数蜕变与对偶性》，Phys. Rev. Lett. 53 (1984年), 1707。C. P. Boyer、E. G. Kalnins 和 W. Miller，《St ¨ackel 等价的可积哈密顿系统》，《SIAM 数学分析杂志》17 (1986年), 778。[57]M. Znojil，《经 PT 对称正则化的 Eckart-Poschl-Teller 势和 Hulthen 势》，J. Phys. A: Math. Theor. 33 (2000年)，4561 [arXiv:quant-ph/9912027]。[58] F. Correa 和 M. S. Plyushchay，《PT 对称周期有限带系统中的谱奇异点》，《物理评论 D》86 (2012年)，085028 [arXiv:1208.4448 [高能物理理论]]。[59] A. B. J. Kuijlaars、A. Martinez-Finkelshtein 和 R. Orive，《具有一般参数的雅可比多项式的正交性》，《电子数值分析汇刊》19 (2005年),1 [arXiv:math/0301037]。[60]A.V. Tsiganov，《球面、椭球面和双曲面上的可积系统》，[arXiv:2211.08750 [非线性科学：可积系统]]。[61] D. C¸evik、M. Gadella、S¸. Kuru 和 J. Negro，《P ¨oschl–Teller 势的共振与反束缚态：阶梯算符和超对称伙伴》，Phys. Lett. A 380 (2016年), 1600[arXiv:1601.05134[数学物理]]。[62]C. Daskaloyannis，《二维经典超可积系统的二次泊松代数与量子超可积系统的二次结合代数》，J. Math. Phys. 42 (2001年), 1100 [arXiv:math-ph/0003017]。[63]A. M. Perelomov 和 V. S. Popov，《半单李群的卡西米尔算符》，《苏联科学院学报》32 (1968年) 1368。[64]P. S. Isaac 和 I. Marquette，《通过变形振子代数实现具有三个生成元的多项式代数》，J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014年), 205203[arXiv:1402.3361[数学物理]]。

[65] I. Marquette，“具有三阶运动积分、三次代数和超对称量子力学的超可积性 II：Painlevé超越函数势”，J. Math. Phys. **50 (2009)**，095202[arXiv:0811.1568[math-ph]]。

[66] W. Miller，“球面上的（准）精确可解性 S^n”，J. Math. Phys. **56 (2015)**，023501[arXiv:1411.2113[math-ph]]。

[67]P. Iliev，“球面上一般超可积系统的对称代数”，JHEP **44 (2018)**，2018 [arXiv:1712.06422[math-ph]]。[68] D. Gitman、I. Tyutin 和 B. Voronov，《量子力学中的自伴扩张：一般理论及其在具有奇异势的薛定谔方程和狄拉克方程中的应用》，数学物理进展丛书（Birkhauser Boston，2012年）。