arXiv:2304.01040v1 [eess.SY] 3 Apr 2023

不确定性下的安全：利用风险感知控制障碍函数获得紧确界

Mitchell Black[1] Georgios Fainekos[2] Bardh Hoxha[2] Danil Prokhorov[2] Dimitra Panagou[3]

摘要— 我们提出一类新颖的风险感知控制障碍函数（RA-CBF），用于随机安全关键系统的控制。借助随机水平越界文献中的一项结果，我们不再采用目前随机控制障碍函数技术所使用的鞅理论，并证明，与现有方法相比，基于 RA-CBF 的控制综合能够对系统在有限时间区间内变得不安全的概率给出更紧确的上界。我们通过一个移动机器人示例的对比研究，凸显所提方法相较于最先进方法的优势，并进一步在密集交通中的自动驾驶车辆高速公路汇入问题上验证其可行性。

I. 引言

安全的自主系统是实现完全自主系统的关键。自控制障碍函数（CBF）作为安全控制设计和系统验证工具问世以来 [1]–[5], , 安全关键系统领域便愈发接近跨过这道门槛。直观而言，有效的 CBF 构成一份证书，保证所有从安全状态集内出发的系统轨迹在未来始终保持安全。对于一类控制仿射动力系统，常见做法是在基于二次规划（QP）的控制律中将 CBF 作为线性约束。尽管这种集合论方法在自动驾驶 [5]–[7], 、四旋翼控制 [8], [9], 和多智能体系统 [2], [10], 等应用中展现了实现、维持和/或验证系统安全性的潜力，但若缺少完整的系统模型，其安全性保证就可能失效。

在确定性环境中，已有多项研究通过修改标准控制障碍函数条件来解决这一问题。例如，研究者提出了鲁棒控制障碍函数方法，以便在系统动力学受到有界扰动 [4], [11], [12] 或存在测量误差 [13], [14],时进行安全控制设计，但最坏情况假设会导致过于保守。在存在 线性参数模型不确定性的情况下，自适应控制障碍函数方法被用于学习 [9] 并补偿系统动力学中 [15]未知参数的影响。针对更一般的非线性不确定性，研究者利用高斯过程学习系统 [10], [16], [17], 残差项的非参数概率模型，并直接学习障碍函数中的控制障碍函数 [18], 及障碍函数 [8], 等。此外，还有研究采用机会约束概率模型的控制障碍函数条件 [19]–[21], ，但未考虑在一个时间区间内的安全性。

相反，在许多实际应用中，系统行为可以用一类随机微分方程（SDE）建模。从 [22]和随机障碍证书开始，随机场景下的控制屏障函数研究在很大程度上依赖鞅理论，以处理离散时间和连续时间随机过程。 [23] 中提出、并在 [5], [24], 中针对风险有界控制加以改进的随机控制障碍函数（S-CBF），利用鞅来界定系统在有限时间区间内变得不安全的概率。尽管理论上颇有用处，但在实际应用中，安全概率受到初始条件的严格限制。 [25]通过面向随机系统的倒数型和归零控制障碍函数来处理这一问题，并声称能够以概率 1 保证安全性，不过所需的保守程度尚不明确。

在本文中，我们不再采用鞅理论，并作出以下贡献:

- 我们提出了一类新的风险感知控制屏障函数（RA-CBF），它利用[1] 源自随机越级文献的生成元条件，来获得系统在有限时间区间内变得不安全的概率上界。
- 我们推导出相应条件，使我们的 RA-CBF 控制器能够保证系统变得不安全的风险上界小于现有随机控制障碍函数方法所能达到的上界；此外，我们通过一项包含 100,000 次试验的数值研究表明，尽管这种风险保护保证更强，我们的控制器所产生的行为仍不那么保守。
- 我们研究了自动驾驶车辆在高速公路上汇入车流的问题，并证明，在要求安全概率达到 99% 的情况下，所提出的基于风险感知控制屏障函数的控制器能够有效地使车辆成功汇入密集交通流。

II. 预备知识与问题表述

支撑于 a 和 b 上的均匀分布为 $U[a,b]$。加粗的 $\boldsymbol{x}_t$ 表示时间 t处的向量随机过程。高斯误差函数为 $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$，而 $\mathrm{erf}^{-1}(\cdot)$ 是其反函数。矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的迹为 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{M})$。函数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 沿向量场 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的李导数为 $L_f\phi(x) \triangleq \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x)$。

[1]密歇根大学航空航天工程系，美国密歇根州安娜堡市比尔大道1320号，邮编48109； {mblackjr}@umich.edu。[2]丰田北美研发中心，美国密歇根州安娜堡市伍德里奇大道1555号，邮编48105； {georgios.fainekos, bardh.hoxha, danil.prokhorov}@toyota.com。[3]密歇根大学机器人系及航空航天工程系，美国密歇根州安娜堡市，邮编48109； {dpanagou}@umich.edu。

[1]随机过程的（无穷小）生成元与确定性系统的李导数类似。

A. 预备知识

我们考虑以下一类非线性、控制仿射随机微分方程（SDE）：

$$d\boldsymbol{x}_t = \big(f(\boldsymbol{x}_t) + g(\boldsymbol{x}_t)\boldsymbol{u}_t\big)dt + \sigma(\boldsymbol{x}_t)d\boldsymbol{w}_t, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 表示状态，$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ 表示控制输入，$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^q$ 表示定义在完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 上的标准 q 维维纳过程（即布朗运动）；该概率空间的样本空间为 Ω，σ-代数为$\mathcal{F}$，概率测度为 $P:\ \mathcal{F} \to [0,1]$。我们考虑一类无记忆的状态反馈控制器，其控制信号为 $\boldsymbol{u}_t = k(\boldsymbol{x}_t)$，其中 $f:\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$，$g:\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{n\times m}$，且 $k:\ \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ 已知、局部利普希茨连续，并在 $\mathcal{X}$上有界，且假定 $\mathcal{X}$有界。我们还假设，式（1）中的 $\sigma:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times q}$ 满足这些正则性条件，因此假定对所有 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$和 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n$，过程 $\{\boldsymbol{x}_t:\ t \in [0,\infty)\}$ 是式（1）的强解（参见 [26, 第5章，定义2.1]）。对于强解，生成元定义如下。

定义 1. *[27, 定义 7.3.1]* $\boldsymbol{x}_t$ 的（无穷小）生成元$\mathcal{A}$定义为

$$\mathcal{A}\phi(\boldsymbol{y}) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}\left[\phi(\boldsymbol{x}_t) \mid \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}\right] - \phi(\boldsymbol{y})}{t}, \tag{2}$$

其中 $\phi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 属于 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$，即所有使该极限对每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 都存在的函数所构成的集合。

生成元是确定性系统中李导数的随机对应物，因为它刻画了 ϕ 沿着（1）的轨迹在期望意义下的导数。根据 [27, 定理 7.3.3], 对于具有紧支集的二阶连续可微函数 ϕ，即 $\phi \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$，生成元 $\mathcal{A}$ 作用于 $\boldsymbol{x}_t$ 可表示为

$$\mathcal{A}\phi(\boldsymbol{x}) = L_f\phi(\boldsymbol{x}) + L_g\phi(\boldsymbol{x})k(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma(\boldsymbol{x})^T \frac{\partial^2\phi}{\partial \boldsymbol{x}^2}\sigma(\boldsymbol{x})\right),$$

我们记作 $\Gamma_\phi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}) := \mathcal{A}\phi(\boldsymbol{x})$，并使用 $\boldsymbol{u} = k(\boldsymbol{x})$。

考虑由二阶连续可微的半正定函数 $B:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义的集合 S：

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n:\ 0 \le B(\boldsymbol{x}) < 1\}, \tag{3}$$

并假设还已知，对于某个 $\gamma \in [0,1]$,

$$B(\boldsymbol{x}) \le \gamma,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_0. \tag{4}$$

在确定性环境中，集合 S 被称为正向不变，如果 $\boldsymbol{x}_0 \in S \implies \boldsymbol{x}_t \in S, \forall t \ge 0$。本文假设 S 表示系统（1）的安全状态集合，因此将正向不变性与安全性这两个概念互换使用。然而，在随机环境中，可能会出现失败情况，使得 $\boldsymbol{x}_t$ 离开 S，即系统变得不安全。因此，我们考虑停止过程 $\tilde{\boldsymbol{x}}_t$以及概率正向不变性，后者改编自 [28]。

定义 2. *[29]* 假设 $\tau > 0$ 是 $\boldsymbol{x}_t$ 首次离开开集 S 的时间。停止过程 $\tilde{\boldsymbol{x}}_t$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_t = \begin{cases} \boldsymbol{x}_t; & t < \tau, \\ \boldsymbol{x}_\tau; & t \ge \tau. \end{cases}$$

定义 3. 令 $0 < p \le 1$，并考虑长度为 $T > 0$ 的区间上的停止过程 $\{\tilde{\boldsymbol{x}}_t:\ t \in [0,T]\}$，相对于集合 S，该集合由 (3) 定义。集合 $S \subset \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是系统 的概率正向不变集，概率为 $\boldsymbol{p}$，适用于系统(1)在区间 $[0,T]$ 上，如果 $P(\tilde{\boldsymbol{x}}_t \in S, \forall t \in [0,T]) \ge p$。

因此，S以概率 **安全**，且该概率为 p，在区间 $[0,T]$内成立，当且仅当它是一个概率正向不变集，且其概率为p，在 $[0,T]$上成立。或者，系统在 ρ内变得不安全的概率 $[0,T]$，即 $\rho:= P(\exists t \in [0,T]:\ \tilde{\boldsymbol{x}}_t \notin S)$，有上界 $\rho \le 1-p$。下文将 ρ称为“系统风险”。对系统（1）的系统风险进行界定的一种方法，是在控制设计中使用随机控制障碍函数 [5], [23]。

定义 4。 考虑集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 定义为（3）其中，函数 B 是满足（4）的二阶连续可微半正定函数。函数 B 是定义在集合 S 上的随机控制障碍函数（*S-CBF*），如果存在 α、$\beta \ge 0$ 使得对于系统（1），其生成元$\Gamma_B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in S$,

$$\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}} \Gamma_B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \le -\alpha B(\boldsymbol{x}) + \beta. \tag{5}$$

有效的随机控制障碍函数可保证系统风险有上界，如下述 [23,命题 1]所示。

定理 *1*。考虑形式为（*1*）的随机系统、由函数 B 按（*3*）隐式定义的安全状态集合 S，以及对于 $T > 0$的区间 $[0,T]$。记 $\{\tilde{\boldsymbol{x}}_t:\ t \in [0,T]\}$ 离开 S的概率为 $\rho_{S\text{-}CBF}:= P\ (\exists t \in [0,T]:\ \tilde{\boldsymbol{x}}_t \notin S \mid \tilde{\boldsymbol{x}}(0) \in \mathcal{X}_0)$。如果 B是定义在集合 S上、针对（*1*）的随机控制障碍函数，则

$$\rho_{S\text{-}CBF} \le \begin{cases} 1 - (1-\gamma)\, e^{-\beta T}; & \alpha > 0 \text{ and } \alpha \ge \beta, \\ \left(\gamma + (e^{\beta T} - 1)\frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\beta T}; & \alpha > 0 \text{ and } \alpha < \beta, \\ \gamma + \beta T; & \alpha = 0. \end{cases} \tag{6}$$

备注 1。 随机控制障碍函数控制器最多只能证明，在任意选择 $1-\gamma$ 的情况下，一定比例的轨迹在一个时间区间内保持安全 α，β，$T \ge 0$。注意，由于随机控制障碍函数源于鞅，式 $\sigma(\boldsymbol{x})$ 中的过程噪声强度（(1) 并未出现在式 (6)中。这促使我们提出第 *II-B* 节中形式化的问题。

在控制设计中，通过基于二次规划（QP）的控制律，将各种控制障碍函数（例如随机控制障碍函数 [5],机会约束控制障碍函数[19], [20], 鲁棒控制障碍函数 [4],等）与标称控制器结合起来进行综合设计，已成为一种常见做法，其形式如下：

$$\boldsymbol{u}^* = \arg\min_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\|^2 + \frac{1}{2}w\delta^2 \tag{7a}$$

$$\text{s.t.}$$

$$A\boldsymbol{u} + b + c\delta \le 0, \tag{7b}$$

其中，$\boldsymbol{u}_0$ 是标称控制律，δ 是权重为 $w \ge 0$的松弛变量，而（7b）表示一个通用的控制障碍函数约束，其中 b，$c \in \mathbb{R}$，$A \in \mathbb{R}^{1\times m}$。在下文中，我们使用（7）比较随机控制障碍函数与我们提出的风险感知控制障碍函数作用下系统的涌现行为。

B. 问题表述

根据备注1，我们推测随机控制障碍函数可能会给风险感知控制设计带来不必要的保守性。我们通过一个示例说明这一点确实成立，并借此引出所研究的问题。

示例 1. 考虑一台移动机器人，其目标是访问一个半径为 $R_g > 0$、以 $s_g = [x_g\ y_g]^T$为中心的圆形区域，该区域相对于惯性坐标系 $\mathcal{I}$的原点s_0 定义；同时始终处于一个半径为 R_c 、以 s_0为中心的圆形区域内。目标规格可视为访问一个兴趣点，而约束则可用于描述通信范围受限等情况。我们选择 $s_g = [2\ 2]^T$, $R_c = 1$, $R_g = 0.25$ ，使目标集与安全集不相交。假设机器人可建模为2*D* 随机单积分器，

$$d\boldsymbol{z}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} d\boldsymbol{w}_t, \tag{8}$$

其中， $\boldsymbol{z} = [x\ y]^T$ 表示机器人相对于 s_0的位置（单位：*m*），控制 $\boldsymbol{u} = [v_x\ v_y]^T$ 由沿 x 轴和 y 轴的速度组成（单位：*m/s*），而 $\sigma_x, \sigma_y \in \mathbb{R}$ 决定了维纳过程 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$引入的噪声强度。

控制方面，我们使用 (7)，其标称输入为 $\boldsymbol{u}_0 = -k[(x - x_g)\ (y - y_g)]^T$，其中 $k > 0$。输入约束为 $|v_x, v_y| \le v_{max} = 10$, 且 (7b) 为随机控制屏障函数条件 (5)，其中 $B(\boldsymbol{z}) = \frac{x^2+y^2}{R_c^2}$。在随机控制屏障函数二次规划控制器下，系统变得不安全的风险上界由 (6) 给出。我们固定 $\boldsymbol{z}_0 = [1/\sqrt{2},\ 0]^T$，使得$B(\boldsymbol{z}_0) = 0.5 = \gamma$，并考虑了 $T = 1$ 秒的时间范围，时间步长为 $\Delta t = 0.001$ 秒。随后，我们对轨迹进行了 $N = 100{,}000$ 次试验，其中 $\sigma_x, \sigma_y = 0.3 v_{max} \cdot \Delta t$，即控制输入最大值的 30%。

结果（见表 I）证实了我们的假设：S-CBF 约束可能会产生一个理论系统风险上界，显著高估实际不安全结果的比例。尽管失效率分别有界于0.505 和0.990，基于 S-CBF 的控制器在两种情况下的 100%试验中均保持了安全性，这些试验共进行了 100,000 次（0 次失败），持续时间为 $T = 1$ 秒。这个例子清楚地表明，S-CBF 风险上界可能无法提供任何有意义的指导，而在此例中显然确实如此。

表 I随机 CBF试验 $N = 100,\ 000$

理论值 ρ	实测值 ρ	α	β	γ	T
0.505	0	0.1	0.01	0.50	1.0
0.990	0	10.0	4.0	0.50	1.0

因此，我们旨在设计一种随机控制框架，在有限时间区间内界定系统风险，同时弥合理论推导结果与实践观测结果之间的差距。现在，我们正式定义这个问题。

问题 1. 考虑如下形式的随机动力系统 (1) 以及与之相关的安全集 S ，该安全集由二次连续可微的半正定函数 B 满足 (4)。设计一个反馈控制器 $\boldsymbol{u}_t = k(\boldsymbol{x}_t)$，使得在某些条件下 $\rho := P(\exists t \in [0, T] :\ \tilde{\boldsymbol{x}}_t \notin S) < \rho_{S\text{-}CBF}$，其中 $\rho_{S\text{-}CBF}$ 由 (6)给出，并确定该关系成立的条件。

III. 风险感知控制障碍函数

在本节中，我们提出通过一类新颖的风险感知控制障碍函数（RA-CBFs）来求解问题 1 。首先，我们需要以下结果。

引理 1. 假设 $w : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ 是一个标准维纳过程，且 $T > 0$ 和 $a > 0$ 是常数。则对所有 $t \in [0, T]$， $w_t < a$成立的概率为

$$P\left(\sup_{0 \le t \le T} w(t) < a\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2T}}\right). \tag{9}$$

证明. 证明可直接由 [30,第 3]节得出。 □

下文中，我们将 $\tilde{\boldsymbol{x}}_t$ 的生成元积分记为

$$I_L(t) \coloneqq \int_0^t \Gamma_B\big(\tilde{\boldsymbol{x}}_s, \boldsymbol{u}_s\big) ds, \tag{10}$$

它可以作为积分器状态纳入维数为 $n + 1$ 的增广系统中。现在，我们正式引入风险感知控制障碍函数的概念。

定义 5. 考虑集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 由 (3) 定义，其中函数 B 是二次连续可微的半正定函数，且满足 (4)。函数 B 是集合 S 上的风险感知控制障碍函数，如果存在一个利普希茨连续函数 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ ，使得对于系统 (1) ，以下条件对所有 $\boldsymbol{x} \in S$均成立，

$$\inf_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \Gamma_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \le \alpha\big(h(I_L(t))\big), \tag{11}$$

其中

$$h(I_L(t)) = 1 - \gamma - (\sqrt{2}\eta T)\operatorname{erf}^{-1}(1 - \rho_d) - I_L(t), \tag{12}$$

其中 $I_L(t)$ 由 (10) 给出， $\rho_d \in \left[1 - \text{误差函数}\left(\frac{1-\gamma}{\sqrt{2}\eta T}\right),\ 1\right]$ 为设计参数，且

$$\eta = \sup_{\boldsymbol{x} \in S} \|L_\sigma B(\boldsymbol{x})\|. \tag{13}$$

在下述定理（即我们的主要结果）中，我们证明，RA-CBF 能够界定形式为（1）的系统在有限时间区间内变得不安全的风险。

定理 2。 设 $T > 0$，并将系统风险记为$\rho := P(\exists t \in [0, T] : \tilde{\boldsymbol{x}}_t \notin S \mid \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathcal{X}_0)$。若 B 是集合 S 上的风险感知控制障碍函数，则，

$$\rho \le \rho_d, \tag{14}$$

其中 $\rho_d \in \left[1 - \text{误差函数}\left(\frac{1-\gamma}{\sqrt{2}\eta T}\right),\ 1\right]$ 是一个设计参数，满足 η 由 (13)给出。

证明。 令 $\tau > 0$ 为 $\boldsymbol{x}_t$ 离开开集 S的首次离开时间。设 $\{\boldsymbol{x}_t : t \in [0, \infty)\}$ 是方程（ 1 ）的强解，根据伊藤公式 [27, 定理 4.21] , 可得 $\forall t < \tau$,

$$dB(\tilde{\boldsymbol{x}}_t) = \Gamma_B(\tilde{\boldsymbol{x}}_t, \boldsymbol{u}_t) dt + L_\sigma B(\tilde{\boldsymbol{x}}_t) d\boldsymbol{w}_t,$$

从而得到积分方程 $B(\tilde{\boldsymbol{x}}_t) = B(\tilde{\boldsymbol{x}}_0) + I_L(t) + I_S(t)$，其中 $I_L(t)$ 是由式（10）定义的勒贝格积分，而 $I_S(t)$是由下式定义的随机积分

$$I_S(t) = \int_0^t L_\sigma B(\tilde{\boldsymbol{x}}_s) d\boldsymbol{w}_s. \tag{15}$$

尽管(10)可以确定性地求值，但随机积分(15)是 Itˆo 积分 [27, 定义 3.1。6] 因此会在 $B(\tilde{\boldsymbol{x}}_t)$ 上诱导出概率分布，基于

$$I_S(t) \sim \mathcal{N}\left(0,\ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t L_\sigma B(\tilde{\boldsymbol{x}}_s) d\boldsymbol{w}_s\right)^2\right]\right).$$

令 $\boldsymbol{w}$ 为 q 维标准维纳过程。根据 q 维 Itˆo 等距关系（[31, 引理 18]（对一维 Itˆo 等距关系 [27, 引理 3.1.5] 的推广））， 可得 $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t L_\sigma B(\tilde{\boldsymbol{x}}_s) d\boldsymbol{w}_s\right)^2\right] = \int_0^t \|L_\sigma B(\tilde{\boldsymbol{x}}_s)\|^2 ds$，因此

$B\ \tilde{\boldsymbol{x}}_t \sim \mathcal{N}\ \mu_B\ t\ \ \sigma_B^2\ t \qquad \mu_B\ t = B\ \tilde{\boldsymbol{x}}_0 + (\,)\,(\,)$ $I_L\ t \qquad \sigma_B^2\ t = \int_0^t \|L_\sigma B\ \tilde{\boldsymbol{x}}_s\ \|^2 ds$ ( ))，其中 ( ) ( ) ( ) 且 ( ) ( ) 。因此，

$$\rho = 1 - P\left(\sup_{0\le t\le T} B(\tilde{\boldsymbol{x}}_t) < 1 \mid B(\tilde{\boldsymbol{x}}_0) \le \gamma\right).$$

现在，令 $\bar{I}_S(t) \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t \eta^2 ds)$ 在 $B(\tilde{\boldsymbol{x}}_t)$ 上诱导一个概率分布，即 $B(\tilde{\boldsymbol{x}}_t) = B(\tilde{\boldsymbol{x}}_0) + I_L(t) + I_S(t)$。那么，由于根据式 (13) 有 $\int_0^t \eta^2 ds \ge \sigma_B^2(t)$ 对所有 $t \ge 0$ 均成立，因此可得

$$\rho \le \bar{\rho} := 1 - P\left(\sup_{0\le t\le T} \bar{B}(\tilde{\boldsymbol{x}}_t) < 1 \mid B(\tilde{\boldsymbol{x}}_0) \le \gamma\right). \tag{16}$$

然而，我们注意到 $\int_0^t \eta^2 ds = \eta^2 t$，因此根据高斯线性性，$\bar{I}_S(t) = \eta\sqrt{t} w(t)$，其中 $w(t)$ 是一维标准维纳过程，这意味着 $\bar{B}(\boldsymbol{x}_t) = B_0 + I_L(t) + \eta\sqrt{t} w(t)$。因此，

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= 1 - P\left(\sup_{0\le t\le T} w(t) < \frac{1-\gamma-I_L(t)}{\eta\sqrt{t}} \mid B_0 \le \gamma\right),\\ &\le 1 - P\left(\sup_{0\le t\le T} w(t) < \frac{1-\gamma-\bar{I}_L}{\eta\sqrt{T}} \mid B_0 \le \gamma\right),\end{aligned} \tag{17}$$

其中 I_L = 上确界$_{0\le t\le T} I_L(t)$。因此，由式（16）、（17）和引理 1 可得

$$\rho \le \bar{\rho} \le 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1-\gamma-\bar{I}_L}{\sqrt{2}\eta T}\right). \tag{18}$$

现在，为使 (18) 成立，必须满足 $I_L \le 1-\gamma-(\sqrt{2}\eta T)\text{erf}^{-1}(1-\bar{\rho})$。其一个充分条件是 $I_L(t) \le 1-\gamma-(\sqrt{2}\eta T)\text{erf}^{-1}(1-\bar{\rho})$ $\forall t \in [0,T]$。随后，我们定义集合 $S_I = \{I_L \in \mathbb{R} \mid h(I_L) \ge 0\}$，其中$h(I_L) = 1-\gamma-(\sqrt{2}\eta T)\text{erf}^{-1}(1-\bar{\rho})-I_L$，并注意到，如果$h$ 是集合 S_I的有效控制屏障函数，即存在 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 使得 $\forall I_L \in S_I$和 $\forall t \in [0,T]$成立，则 (11) 成立，此时集合 S 以概率$p = 1-\rho \ge 1-\bar{\rho}$概率前向不变。因此，由 (18) 可知，由于根据定义 $I_L(0) = 0$，所以 $\bar{\rho}_0 \le 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1-\gamma}{\sqrt{2}\eta T}\right)$，其中 $\bar{\rho}_0$ 在 $t = 0$处为 $\bar{\rho}$。因此，对于 $h(I_L) \ge 0$，必须满足$\rho_d \in [\bar{\rho}_0, 1]$。证明完毕。

□

注 2. 在 *RA-CBF* 控制器下，系统风险的上界 ρ仅取决于初始条件γ、时间区间 T的长度，以及随机噪声对 B的影响，即 η。函数 h 衡量控制器通过累积形成 I_L的动作，使系统接近可容忍风险阈值 ρ 的程度。

现在我们给出一些条件，在这些条件下，定理 2 所保证的系统风险上界严格低于 S-CBF 控制框架所保证的上界。

定理 3。设定理 *1* 的前提成立，并设ρ_d 如定理 *2*.若 B 是一个风险感知控制障碍函数，则

$$\min_{\rho_d \in \mathcal{R}} \rho_d < \rho_{S\text{-}CBF} \tag{19}$$

当

$$\eta < \frac{1-\gamma}{\sqrt{2}T\text{erf}^{-1}(1-\gamma)_{1-\gamma}\left(\sqrt{2}\eta T\right)},\ 1], \tag{20}$$

其中 η 由 (13) 给出，且 $\mathcal{R} = [1 - \operatorname{erf}$

证明。证明可直接由备注 1中的观察得出，即 $\rho_{S\text{-}CBF} \ge \gamma$，$\forall \alpha,\ \beta,\ T \ge 0$。然后，根据定理 2，$\min \rho_d < \rho_{S\text{-}CBF}$当 $1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1-\gamma}{\sqrt{2}\eta T}\right) < \gamma$。重新整理各项，可得（20）。

□

这一结果说明，在什么情况下，RA-CBF 控制器预测的风险水平会低于 S-CBF 控制器，反之亦然。对于第 II-B 节中的机器人运动问题，其动力学为（8），障碍函数为 B（ $\boldsymbol{z} = \frac{x+y}{R_c^2}$ $\eta \approx 0.009$ $\rho_d \ge \rho_{S\text{-}CBF}$ ），我们有。因此，min在 $T = 1$ 秒的时间区间内需要满足$\gamma < 1e\text{-}15$，给定 $\sigma_x,\ \sigma_y$ 或 $\sigma_x,\ \sigma_y \approx 50 v_{max} \cdot \Delta t$ 给定$\gamma = 0.5$；这两种情况对该问题而言都不现实。

然而，当 η 由（13）给出且数值较大时，基于 RA-CBF（采用 $\min \rho_d$）的风险规范可能无法接受。在这种情况下，将控制器设计为始终处于更小的子水平集 $S_\mu = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n :\ 0 \le B(\boldsymbol{x}) < \mu\}$之内，或通过级联集合 S_{μ_1}、……、S_{μ_k}推导系统变得不安全的总风险，可能更为有用，如下述结果所示。

定理 4。假设定理 *2* 的前提成立。考虑一个序列 $\mu_0, \ldots, \mu_k$，满足 $\gamma = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_k = 1$，其子水平集为 $S_{\mu_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \le B(\boldsymbol{x}) < \mu_i\} \subseteq S,\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$，其中每个集合都有 η_i，由 (13) 在 S_{μ_i}上定义。若 B 在每个集合上都是 *RA-CBF* S_{μ_i}，则 $\rho \le \rho_d$，其中 ρ_d 是一个有界于以下范围的设计参数

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\sqrt{2}T\eta_i}\right)\right) \le \rho_d \le 1. \tag{21}$$

证明。首先，根据定义5，函数 B 在集合 S_{μ_i} 上是 RA-CBF，当且仅当对所有 $\boldsymbol{x} \in S_{\mu_i}$，式 ($1-\gamma$ 12) 中的 项被替换为 $\mu_i - \gamma$时，式 (11) 成立。令$\rho_{\mu_i} := P\left(\exists t \in [0,T] : \tilde{\boldsymbol{x}}_t \notin S_{\mu_i} \mid \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \in S_{\mu_i} \setminus S_{\mu_{i-1}}\right)$。那么，由于 B 是集合 S_{μ_i}上的 RA-CBF，根据定理 2 可得

$$\rho_{\mu_i} \le 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\sqrt{2}T\eta_i}\right), \tag{22}$$

其中 η_{μ_i} 在集合 S_{μ_i}上由式 (13) 定义。由式 (4) 和贝叶斯法则可得 $\rho \le \prod_{i=1}^{k} \rho_{\mu_i}$，因此由式 (22) 可得式 (21)。 □

（22）中的界限在以下情况下尤其有用： $\eta_1 < \ldots < \eta_k$, 因为在所有η 中，采用 S所带来的保守性降低幅度最大。分区数量 k 是一个设计选择，应根据期望的系统风险以及每个 η_i进行调整。对于控制设计，必须在每个 S_{μ_i} 上选择 $\rho_{d_i} \ge \rho_{\mu_i}$，以满足 RA-CBF 条件（11）。

IV. 数值案例研究

本节将通过两个示例展示我们的 RA-CBF 控制器的有效性：第II-B节中的机器人问题，以及高速公路汇入问题。

A. 单积分器机器人

问题设置与第II-B节完全相同，机器人的动力学由（8）给出，控制器采用（7）的形式，并满足 RA-CBF 条件（11）。结果与基于 S-CBF 的控制器大相径庭。当系统风险的上限设为0.505 以匹配 S-CBF 试验时，如表II所示，有 0.458 的试验违反了安全条件。当 RA-CBF

表 II 风险感知 CBF 试验 $N = 100,000$

预测 ρ	测量 ρ	γ	η
0.010	10^{-4}	0.50	0.006
0.505	0.458	0.50	0.006

控制器在系统风险最高为 $\rho = 0.01$ 时使用；然而，测得的 ρ 不仅满足了这一上界（$1e$-4），而且即使将随机控制障碍函数控制器的风险水平设为 $\rho_{S\text{-}CBF} = 0.505$，系统轨迹仍比该控制器采取了更激进的动作，朝安全集边界靠近，如图 1 所示。

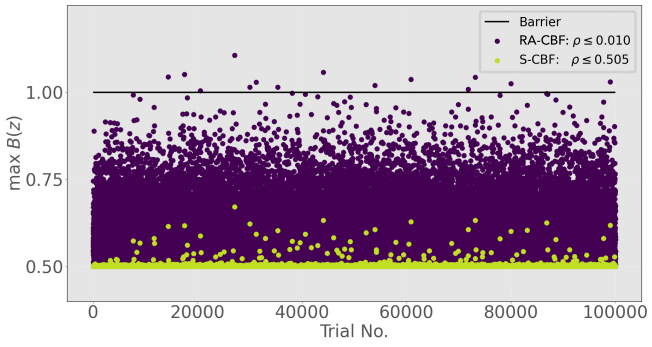

图 1. RA-CBF（分别为 S-CBF）在系统风险上界为 $\rho \le 0.01$ （分别为 $\rho_{S\text{-}CBF} \le 0.505$）时，每次试验中的最大障碍函数值 $\max_{0 \le t \le T} B(\boldsymbol{z}_t)$。

B. 高速公路汇入

设 $\mathcal{I}$ 为一个惯性坐标系，其原点为 s_0。考虑一组汽车 $\mathcal{A}$，其中一部分在匝道附近的双车道高速公路上行驶（即 $\mathcal{A}_H \subset \mathcal{A}$），其余车辆则试图通过匝道（即 $\mathcal{A}_M \subset \mathcal{A}$）并入高速公路。假设车辆 $i \in \mathcal{A}$ 的动力学遵循形式为 (1) 的随机自行车模型，其确定性部分由[32, Ch. 2] （因篇幅所限而省略）描述，并用于对 [7] 中的汽车建模。随机项为 $\sigma_i(\boldsymbol{z}_i) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathrm{I}_{5\times 5}$，其中 $\boldsymbol{\sigma} = [0\ 0\ 0\ \sigma_a\ \sigma_\omega]^T$。状态为 $\boldsymbol{z}_i = [x_i\ y_i\ \psi_i\ v_i\ \beta_i]^T$，其中 x_i 和 y_i 分别表示车辆 i 质心相对于 s_0 的纵向和横向位置（单位：m），ψ_i 表示其车体固定坐标系$\mathcal{B}_i$相对于 $\mathcal{I}$的朝向（单位：rad），v_i 表示后轮相对于 s_0的速度（单位：m/s），β_i 表示质心相对于 $\mathcal{B}_i$ 的侧偏角[2] （假设$|\beta_i| < \frac{\pi}{2}$，单位：rad）。前、后轴距分别为 l_f 和 l_r。模型示意图见 [7,Figure 1] 。控制量为 $\boldsymbol{u}_i = [a_i\ \omega_i]^T$，其中 a_i 为后轮的线加速度（单位：m/s^2），ω_i 为 β_i的角速度（单位：rad/s）。向量 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^5$ 为五维标准维纳过程。

我们模拟了 1000 次 $T = 4$s 高速公路汇入场景试验，其中有 11 辆车，$\mathcal{A}_M = \{0\}$ 是自车，且 $\mathcal{A}_H = \{1, \ldots, 10\}$。高速公路车辆 $i \in \mathcal{A}_H$在 x 方向上以 15m 的间隔初始化，并均匀分布在车道 1（$y = 0$）和车道 2（$y = 3$）上。它们的初始速度按照 $v_{i,0} \sim U[29, 31]$ 分布。自车在匝道上距起点 98.75m 处初始化，初始速度为 $v_{e,0} \sim U[24, 26]$；因此，在名义加速度策略下，自车将确定性地与车辆 2 直接碰撞。噪声分量为 $\sigma_a = A_{drag}\Delta t$ 和 $\sigma_\omega = \sigma_a \frac{\bar{\omega}}{\bar{a}}$，其中 $\bar{\omega} = \frac{\pi}{16}$ (rad/s) 和 $\bar{a} = 2.0$ (m/s^2) 定义了输入约束 $a_i \in [-\bar{a}, \bar{a}]$ 和 $\omega_i \in [-\bar{\omega}, \bar{\omega}]$，而 $A_{drag} = 0.1 + 5\bar{v} + 0.25\bar{v}^2$ 的 $\bar{v} = 35$ (m/s) 表示：在 35m/s 行驶时，单个标准差的噪声对应于空气动力阻力所产生的加速度 [1] 。自车采用式（7）进行控制，并使用了 11 个 RA-CBF 约束，对应于占据次水平集 S_{μ_i}；其中，我们为 $i \in \{1, \ldots, 5\}$ 选择了 $\mu_i = i/5$。10 个自车避碰约束通过 $B_{ei}(\boldsymbol{z}_e, \boldsymbol{z}_i) = e^{-h_{ei}(\boldsymbol{z}_e, \boldsymbol{z}_i)}$ 编码，其中 $h_{ei}(\boldsymbol{z}_e, \boldsymbol{z}_i)$ 是松弛的前瞻型 CBF（rff-CBF）（在 [7] 中为碰撞规避而提出），其 $\gamma(h_0) = 0.1h_0$。道路约束采用如下形式的 rff-CBF 编码：$B_r(\boldsymbol{z}_e) = e^{-h_r(\boldsymbol{z}_e)}$，对于 $h_r(\boldsymbol{z}_e) = h_{r,0}(\boldsymbol{z}_e, 0) + h_{r,0}(\boldsymbol{z}_e, 1)$，其中

$$h_{r,0}(\boldsymbol{z}_e, \tau) = -\left(x_e \tan(\theta) + \frac{w_l}{2\cos(\theta)} - (y_e + \dot{y}_e \tau - y_l)\right)^2$$

与 θ 道路相对于 x轴的角度、w_l 车道宽度以及 y_l 车道中心。对于所有 RA-CBF，相应的 η_i 数值通过模拟 1000 次试验并取所有试验和所有时刻的 $\eta_i =$ 最大值$_{\boldsymbol{x} \in S_{\mu_i}} \|L_\sigma B(\boldsymbol{x})\|$来数值确定。所得 η_i 数值列于表 III中。对于匝道，迎角为 $\theta = 3°$ ($\theta = 0°$ 高速公路车道中为该值)。自车名义控制 $\boldsymbol{u}_0$ 采用附录 [7,中详述的线性二次调节律 1]，其依据是期望车道和速度（$v_d = 30$米/秒）。对于自然驾驶行为，我们使用智能驾驶员模型（IDM） [33] 计算 a_i 的加速度输入

[2] β_i is related to the steering angle δ_i via $\tan\beta_i = \frac{l_r}{l_r + l_f}\tan\delta_i$.

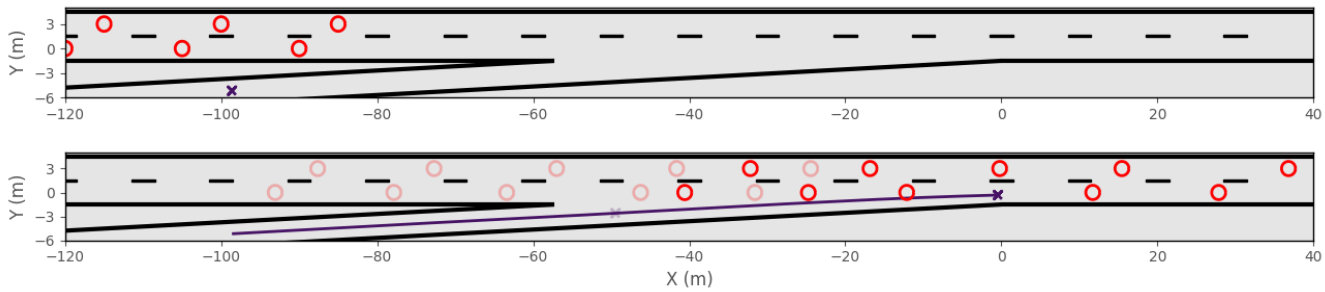

图 2. 高速公路汇入场景中 RA-CBF-QP 控制器实证研究的一次试验快照，分别摄于 $t = 0.0$s (a) 和 $t = 4.0$s（$t = 2.0s$ 半透明）(b)。交通流从左向右，自车以蓝色 X 表示，高速公路车辆以红色圆圈表示。

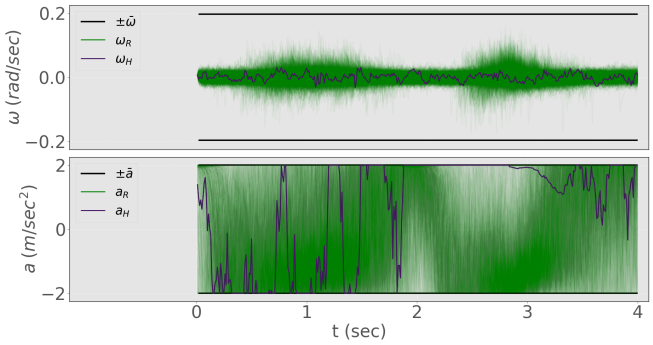

图 3. 自车控制输入，包括图 2 （下标 H）中突出显示的试验和其余试验（下标 R ）。

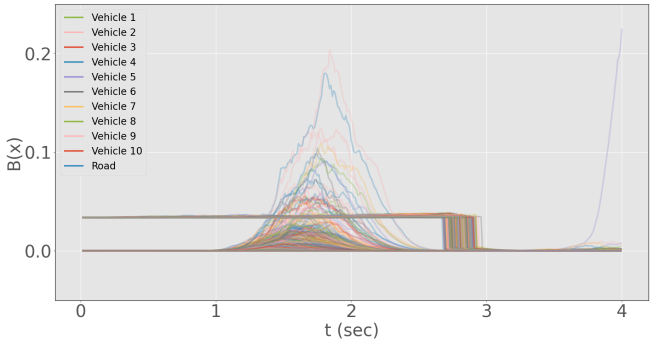

图 4. 1000 次高速公路汇入试验中的 RA-CBF 轨迹。

表 IIIη_i 实证得出的数值

CBF	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5
Road	0.012	0.025	0.035	0.046	0.067
碰撞	0.018	0.031	0.049	0.063	0.076

高速公路车辆 $i \in \mathcal{A}_H$。为模拟不同的驾驶员激进程度，我们根据 $\tau \sim U[0.25, 0.75]$ 对 IDM 中车辆的期望时间间隔进行随机化。其转向输入 ω_i 依据期望航向（$\psi_d = 0$），通过线性二次调节器计算得出。

基于 η_i 表 III中的仿真时长为 $T = 4$秒，已知对于所有 γ $B(\boldsymbol{z}_0)$，与离开每个子水平集相关的道路安全性和碰撞规避的最小可指定风险 S_{μ_i} 列于表 IV。我们选择了 $\rho_{d,\ i}$ 表 V 中提供的数值，使得概率

表 IVρ_i 子水平集的数值 S_{μ_i}

CBF	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
Road	8.58e-4	0.046	0.153	0.277	0.456
碰撞	0.026	0.107	0.308	0.427	0.511

就道路而言保持安全的概率为 0.99999，就全部 10 辆高速公路车辆而言保持安全的概率为 0.991，因此总安全概率为 $p \geq 0.99$，由此得到 $\rho \leq 0.01$。

表 V 指定风险界限 $\rho_{d,\ i}$ 针对子水平集 S_{μ_i}

CBF	$\rho_{d,1}$	$\rho_{d,2}$	$\rho_{d,3}$	$\rho_{d,4}$	$\rho_{d,5}$
Road	0.001	0.1	0.25	0.5	0.6
碰撞	0.05	0.15	0.4	0.5	0.6

在超过 1000 次仿真试验中，基于 RA-CBF 的控制器成功安全并道 1000 次，满足风险上界$\rho \leq 0.01$。图 2 展示了其中一次安全并道：自车并入车辆 2 后方，所施加的控制输入如图 3所示。在本研究中，我们观察到，在全部 1000 次试验中，自车均并入车辆 2 后方。在另一项研究中，指定的风险为 $\rho \leq 0.12$，我们观察到自车在 1000 次试验中有 914 次安全并道（$p = 0.914$）。值得注意的是，在这 914 次安全试验中，自车并入车辆 2 后方的比例为 0.749，并在其前方并道的比例为剩余的 0.251，这表明在第二项研究中，自车愿意承担额外风险。

V. 结论

本文提出了一类用于随机安全关键系统的新型 RA-CBF。我们为一类随机非线性控制仿射系统提出了新的控制障碍函数条件，并证明，在控制综合中使用该条件，可保证系统在有限时间区间内变得不安全的风险上界。随后，我们推导了使风险感知控制障碍函数控制器的系统风险低于现有方法的条件，并通过移动机器人示例进行了直接比较研究。我们在密集交通环境下的自动驾驶车辆高速公路汇入问题中，展示了我们的控制策略可提供 99.1% 的安全保证。未来，我们将

考虑测量噪声，并研究我们的控制框架在安全预测控制背景下应用于恢复问题的情况。

参考文献

[1] A. D. Ames、X. Xu、J. W. Grizzle 和 P. Tabuada，“基于控制障碍函数的二次规划及其在安全关键系统中的应用”，IEEE《自动控制汇刊》，第62卷第8期，第3861–3876页，2017年。[2] Y. Chen、A. Singletary 和 A. D. Ames，“有限驱动能力下多机器人作业的有保证障碍物规避：一种控制障碍函数方法”，IEEE控制系统快报，第5卷第1期，第127–132页，2021年。[3] W. Shaw Cortez、D. Oetomo、C. Manzie 和 P. Choong，“机械系统的控制障碍函数：理论及其在机器人抓取中的应用”，IEEE控制系统技术汇刊，第29卷第2期，第530–545页，2021年。[4] K. Garg 和 D. Panagou，“具有固定时间收敛保证的鲁棒控制障碍函数与控制李雅普诺夫函数”，载于2021年美国控制会议（ACC），2021年，第2292–2297页。[5] S. Yaghoubi、K. Majd、G. Fainekos、T. Yamaguchi、D. Prokhorov 和 B. Hoxha，“利用随机屏障函数进行风险有界控制”，IEEE控制系统快报，第5卷第5期，第1831–1836页，2021年。[6] T. D. Son 和 Q. Nguyen，“非仿射非线性系统的安全关键控制及其在自动驾驶车辆中的应用”，载于第58届IEEE决策与控制会议，2019年，第7623–7628页。[7] M. Black、M. Jankovic、A. Sharma 和 D. Panagou，“利用面向未来的控制障碍函数实现交叉路口通行”，arXiv预印本 arXiv:2204.00127，2022年。[8] L. Wang、E. A. Theodorou 和 M. Egerstedt，“利用屏障证书安全地学习四旋翼动力学”，载于2018年IEEE机器人与自动化国际会议，2018年，第2460–2465页。[9] M. Black、E. Arabi 和 D. Panagou，“用于安全控制综合的固定时间参数自适应”，arXiv预印本 arXiv:2204.10453，2022年。[10] R. Cheng、M. J. Khojasteh、A. D. Ames 和 J. W. Burdick，“利用带有学习得到的不确定性的鲁棒控制障碍函数实现安全的多智能体交互”，载于第59届IEEE决策与控制会议，2020年，第777–783页。[11] M. Jankovic，“用于非线性系统约束稳定化的鲁棒控制障碍函数”，Automatica，第96卷，367，2018年，第359页。[12] S. Yaghoubi、G. Fainekos 和 S. Sankaranarayanan，“在存在扰动时利用控制障碍函数训练神经网络控制器”，载于2020年IEEE第23届智能交通系统国际会议（ITSC），2020年，第1–6页。[13] R. K. Cosner、A. W. Singletary、A. J. Taylor、T. G. Molnar、K. L. Bouman 和 A. D. A mes，“测量鲁棒控制障碍函数：状态不确定情况下的安全确定性”，载于2021年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议（IROS），2021年，第6286–6291页。[14] S. Dean、A. Taylor、R. Cosner、B. Recht 和 A. Ames，“通过测量鲁棒控制障碍函数保证学习得到的感知模块的安全性”，载于《2020年机器人学习会议论文集》，《机器学习研究论文集》系列，第155卷。PMLR，2021年11月16日至18日，第654–670页。[15] A. J. Taylor 和 A. D. Ames，“ 利用控制障碍函数实现自适应安全 ”，载于 2020 年美国控制会议，2019年，第1399–1405页。[16] P. Jagtap、G. J. Pappas 和 M. Zamani，“利用高斯过程为未知非线性系统构造控制障碍函数”，载于第59届IEEE决策与控制会议，2020年，第3699–3704页。[17] F. Casta˜neda、J. J. Choi、B. Zhang、C. J. Tomlin 和 K. Sreenath，“模型不确定性下基于高斯过程的安全关键控制的逐点可行性”，载于第60届IEEE决策与控制会议（CDC），2021年，第6762–6769页。[18] M. Khan、T. Ibuki 和 A. Chatterjee，“利用高斯过程刻画控制障碍函数中的安全不确定性”，载于2021年IEEE机器人与自动化国际会议，2021年，第6003–6009页。[19] M. J. Khojasteh、V. Dhiman、M. Franceschetti 和 N. Atanasov，“学习得到的高相对阶系统动力学的概率安全约束”，载于第2届动力学与控制学习会议论文集，第120卷，2020年6月，第781–792页。[20] Y. Lyu、W. Luo 和 J. M. Dolan，“面向自动驾驶车辆的概率安全保障自适应合流控制”，载于2021年IEEE机器人与自动化国际会议，2021年，第10 764–10 770页。

[21] W. Luo、W. Sun 和 A. Kapoor，“不确定性下利用概率安全屏障证书实现多机器人碰撞规避”，神经信息处理系统进展，第33卷，第372–383页，2020年。[22] S. Prajna、A. Jadbabaie 和 G. J. Pappas，“利用屏障证书进行最坏情况与随机安全验证的框架”，*IEEE*《自动控制汇刊》，第52卷第8期，第1415–1428页，2007年。[23] C. Santoyo、M. Dutreix 和 S. Coogan，“用于有限时间随机系统验证与控制的障碍函数方法”，*Automatica*，第125卷，第109439页，2021年。[24] S. Yaghoubi、G. Fainekos、T. Yamaguchi、D. Prokhorov 和 B. Hoxha，“结合卡尔曼滤波与随机屏障函数的风险有界控制”，载于*2021*年第*60*届*IEEE*决策与控制会议（*CDC*），2021年，第5213–5219页。[25] A. Clark，“随机系统的控制障碍函数”，*Automatica*，第130卷，第109688页，2021年。[26] I. Karatzas 和 S. E. Shreve，布朗运动与随机微积分，第2版。Springer纽约州纽约市，1998年。[27] B. Øksendal，随机微分方程：应用导论，第6版。Springer，2003年。[28] E. Kofman、J. A. De Don´a 和 M. M. Seron，“概率集合不变性与最终有界性”，*Automatica*，第48卷第10期，第2670–2676页，2012年。[29] H. J. Kushner，随机稳定性与控制，科学与工程中的数学系列。爱思唯尔，1967年，第33卷。[30] I. Blake 和 W. Lindsey，“随机过程的水平穿越问题”，*IEEE*《信息论汇刊》，第19卷第3期，第295–315页，1973年。[31] K. S. Zhang、G. Peyr´e、J. Fadili 和 M. Pereyra，“镜像朗之万蒙特卡洛的Wasserstein控制”，载于第*33*届学习理论会议论文集，第125卷，2020年7月9日至12日，第3814–3841页。[32] R. Rajamani，车辆动力学与控制。Springer美国，2012年。[33] M. Treiber、A. Hennecke 和 D. Helbing，“实证观测与微观模拟中的拥堵交通状态”，《物理评论*E*》，第62卷，第1805–1824页，2000年8月。