arXiv:2304.01055v3 [cs.RO] 3 Feb 2025

用于三维点云平面 SLAM 的双层优化特征因子

Gonzalo Ferrer[1*]、Dmitrii Iarosh[2] 和 Anastasiia Kornilova[1]

[1]斯科尔科沃科学技术研究院人工智能技术中心，俄罗斯莫斯科 Bolshoy Boulevard 30号，p.1，邮编121205。[2]圣彼得堡国立大学软件工程系，俄罗斯圣彼得堡 Universitetskaya Embankment 7-9 号，邮编 199034。

*通讯作者。电子邮箱：g.ferrer@skoltech.ru；贡献作者：dimajarosh@gmail.com；anastasiia.kornilova@skoltech.ru；

摘要

现代深度传感器可在数秒内生成大量三维点，供后续定位与建图算法处理。理想情况下，这些算法应能高效处理大规模点云（PC），并假设使用的点越多，可获得的信息就越多。特征因子（EF）是一种通过将平面作为主要几何基元来求解点云 SLAM 的新算法。为此，EF 借助齐次点的 *Summation matrix* S，以复杂度$O(1)$穷举计算所有点的误差。

EF 的求解是一种双层优化，其中，*lower-level* 问题以闭式形式估计平面变量，而 *upper-level* 非线性问题则采用二阶优化来估计传感器位姿（轨迹）。我们基于齐次点面约束，提供了梯度和海森矩阵的直接解析解。此外，我们提出了 EF 的两种变体：一种是纯解析推导，另一种则将问题近似为交替优化，并展现出更好的收敛性质。

我们在合成环境中评估了 EF 及其他最先进的平面 SLAM 算法的优化过程（后端），并将评估扩展至 ICL数据集（RGB-D）和 LiDAR KITTI数据集。EF 展现出更强的鲁棒性和更高的轨迹估计精度，并改善了地图指标。代码已公开发布于 https://github.com/prime-slam/EF-plane-SLAM，并提供 Python 绑定和 pip软件包。

关键词： SLAM，平面 SLAM，平面束调整，$\boldsymbol{SE}$ 中的微分$(\mathbf{3})$。

1 引言

现代传感技术的发展使我们能够以较高的流速，通过三维激光雷达、飞行时间相机、RGB-D 等多种传感器感知三维深度，即点云。使用的点越多，从环境中获取的信息就越多。然而，是否可以评估所有观测点并提高精度，同时避免复杂度大幅增加？这正是本文试图回答的核心问题。

对一系列观测到的点云进行对齐，可以表述为同时定位与

建图（SLAM） [1]问题，其中完整的轨迹和地图几何完全根据传感器观测到的三维点进行估计。类似地，这一定义也完全适用于光束法平差（BA） [2]问题。本文关注于设计和研究一种新的观测函数，使得能够以高效的方式，直接利用传感器观测到的点来表述 SLAM（或 BA）问题。

一个重要的障碍在于，传感器从点云中获取的点是从场景几何结构中采样得到的，因此，在后续观测中再次观测到完全相同的点的可能性极低。因此，需要定义某种能够高效提供点误差的固有几何结构表示。我们选择平面表面作为地标，因为它们具有规则性，并且约束方程简单。这些几何表面通常存在于室内和城市区域中。平面 SLAM [3, 4] 方法将平面作为地标，但观测会被预处理为平面特征，因此不会直接使用三维点，导致性能下降。当前平面SLAM方法面临的常见挑战包括平面特征提取或大规模数据处理。本文聚焦于后者。

我们提出了一种用于后端优化的平面 SLAM 技术，即特征因子（EF）。SLAM 的前端负责处理传感器获取的原始数据，而后端专注于优化过程，这正是本文针对平面 SLAM 所关注的目标。EF 专为来自 RGB-D 和激光雷达的三维点云（点云）设计，同时能够以恒定复杂度处理大量点。本文是早期 EF [5], 的改进版本，克服了其主要局限（一阶优化）。EF 使用平面几何约束，对由移动传感器描述的轨迹进行对齐。为此，EF 将所有观测到的点汇总到求和矩阵 S中，该矩阵是齐次点外积的求和，并以 $O(1)$的复杂度直接计算精确的点误差。

此外，特征因子针对轨迹优化点到平面误差。平面变量在下层问题中以闭式解计算，而轨迹估计对应于双层优化问题 [6]中的上层问题。

通过将问题重新表述为在 $SE(3)$上的流形优化并使用回缩映射，可直接计算梯度和海森矩阵。遗憾的是，特征因子不支持高斯-牛顿优化近似，因为这里没有残差，只有特征值，因此我们改用二阶优化。为在 $SE(3)$上求导，我们提出了一种方法，可大幅简化任意阶导数的计算；当解析表达式难以推导时，例如本例涉及特征值或矩阵元素的情况，该方法也可应用于其他问题。

我们为特征因子的轨迹优化提供了两种方案：一种是对海森矩阵进行解析且完整的推导，该矩阵是一个稠密矩阵；另一种是通过将问题视为交替问题进行近似，即分别独立估计每轮迭代中的变量集。特征因子的理想应用是优化三维点云地图，因此需要对轨迹有较好的初始估计。两种特征因子方案都能提供准确结果，其各自的优缺点将在后文讨论。

本文的贡献如下：

- 通过矩阵求和 S 以 $O(1)$复杂度计算所有点到平面误差；
- 采用双层优化，首先以闭式解计算平面参数，然后通过非线性二阶优化估计上层变量（仅轨迹）；
- 以解析方式计算特征因子（稠密）的梯度和海森矩阵，并采用交替优化近似；
- 提出一种方法，用于计算涉及刚体变换流形的任意函数的导数 $SE(3)$；

评估在合成环境、RGB-D 环境和激光雷达环境中，将 EF 与其他最先进的平面 SLAM 后端算法进行比较，因为我们认为这些是平面 SLAM 最有用的应用场景。为了清楚地了解每种方法的所有细节，我们决定只比较后端，并向所有方法提供完全相同的输入。前端会影响

这些方法的最终性能，因此我们决定将这一影响单独隔离出来。

2 相关工作

EF 最初的动机是通过最小化点误差来对齐 PC。迭代最近点（ICP）算法 [7–10] 通过迭代寻找对应关系并求解优化问题，对一对 PC 进行拟合 [11–13]。现有方法包括点到点、点到线 [14]，点到平面匹配，以及模拟平面的其他变体 [15, 16]，或假设一般几何形状。这些技术每次迭代都需要处理所有点，并且能够获得高精度结果。

这一思路可以应用于 PC 序列或多视图配准。早期的一项工作[17] 提出在每个视图中匹配所有点，以降低整体点误差，但需要大量内存资源和密集计算。多视图配准方面的改进致力于提升效率，例如将 PC 对作为约束 [18]。

尽管计算整体点误差是建图和 SLAM 的自然选择，研究人员一直在尝试降低这些技术先验的高计算需求。在这方面，对每个 PC 观测处理平面路标，可以视为计算点误差的一种替代方式，同时还能降低计算代价。因此，基于平面路标的 SLAM 会优化轨迹和平面路标地图 [3, 4]。已有大量不同变体，其中一些侧重于平面表示 [19, 20]，、添加平面约束 [21]，或混合使用点和平面[22, 23]。平面路标的关键问题在于，从含噪点中提取平面特征后，与联合考虑所有点相比，信息不可避免地会有所损失。另一方面，EF 保留了所有点的信息。

现代建图方法为了确保实时或近实时运行，会在准确完成扫描到地图的对齐后，将观测整合到地图中，从而有效地边缘化位姿。这类方法的例子包括 LOAM [24, 25]，它将点云对齐与建图相结合，以及 LIO-建图 [26]。基于曲面元素的方法 [27, 28] 遵循相同的原理，将场景划分为平面圆盘，并取得了令人瞩目的结果。考虑回环检测时，纯建图方法存在局限，需要额外工作才能适当地更新其建图结果。SLAM 方法则没有这一局限，因为通常会同时估计轨迹和地图，因此能更自然地处理回环检测情形，但代价是需要更多计算资源。

考虑整体点误差时，效率至关重要。我们之前关于特征因子（EF）的论文 [5]首次提出了 S 矩阵，它是由每个传感器位姿下的齐次点的外积求和得到的。这使得我们能够以 $O(1)$ 的复杂度优化点到平面误差，这是我们的方法能够高效运行的关键要求。随后，π-LSAM [29]利用同一 S 矩阵计算整体点到平面误差，以求解平面束调整，并联合估计位姿和平面地标。研究表明，在存在噪声时（第6.4节），该方法的表现不如 EF 等基于点误差的方法。在后续工作中，作者将这个齐次求和矩阵 S 称为集成代价矩阵 (ICM) [23]。

BAREG [30] 算法采用 [5] 中提出的泛函，并增量更新协方差矩阵 3×3，无需显式地重新评估点，从而保持了与 S 矩阵相同的优势。BALM2 [31] 采用了相同的 S 矩阵概念，并将其称为簇点，同时形式化了 S矩阵的一些性质，例如叠加和变换。

BALM采用了将特征因子（EF）的特征分解用作目标函数的思路[32]，，但其推导基于 3×3 协方差，而非EF中的 4×4 齐次 S 矩阵。作者通过计算梯度和海森矩阵的解析导数 [31]提高了效率。我们的实证结果表明，尽管BALM提出了对海森矩阵进行更精确的估计，但这并不一定能带来更好的结果，尤其是在扰动条件下进行评估时；相比之下，EF对海森矩阵的解析近似更为准确。

在 BAREG[30],中，作者通过特征分解说明，在权重适当时，点到平面误差与平面到平面误差等价。这种等价关系假设平面参数是最优的，而这一条件在实践中可能过于严格。

然而，这种化简大幅降低了优化步骤的复杂度并提高了效率。此外，它还要求对每次观测进行平面估计，因此在点噪声较强的条件下进行评估时会受到影响。

在本研究中，我们还关注如何使用地图构建度量来评估地图质量。某些数据集的真实值对于建图而言不够准确，因此需要这些评估工具。尽管已有许多方法可以根据点云序列进行精确的轨迹估计，但地图质量评估这一主题尚未受到同等程度的关注。3D图形学界提出了一系列全参考度量，用于解决点云压缩和去噪任务，包括点对点度量、点到平面度量 [33],角度相似度 [34]，基于投影的方法 [35] 或结构相似性指数 [36, 37]。大多数基于点云的度量都需要真实值作为参考，而在我们提出的评估场景（KITTI）中，将无法获得三维重建的真实值。因此，本研究采用无参考评估。具体而言，平均地图熵（MME） [38]和平均平面方差（MPV） [39] 用于评估聚合点云中的噪声，而相互正交度量（MOM）[40]则将重建噪声与三维位姿中的扰动相关联。

3 特征因子：点到平面误差

三维空间中的平面 π 由单位法向量 $\eta \in \mathbb{S}^2$ 和到原点的平面距离 $d \in \mathbb{R}$定义：

$$\pi = \begin{bmatrix} \eta \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3, \qquad \text{where } ||\eta|| = 1. \tag{1}$$

当且仅当满足以下条件时，点 $p = [x, y, z]^\top$ 位于平面 π 上：

$$\pi^\top \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \pi^\top \tilde{p} = 0. \tag{2}$$

在这一约束条件下，给定一组来自同一平面表面的含噪观测点，主要有两种方法可以求解平面估计问题。**中心化方法**最小化总体点到平面误差

$$\min_{\pi} \sum_{n=1}^{N} ||\eta^\top p_n + d||^2. \tag{3}$$

求解分为两步：

$$\min_{\eta} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \eta^\top \underbrace{(p_n - E\{p\})(p_n - E\{p\})}_{\Sigma_p} \eta \right\} \tag{4}$$

$$d = -E\{\eta^\top p\}, \tag{5}$$

首先，对协方差矩阵 3×3 进行特征分解 Σ_p，求得 η 的值，然后得到 d。

齐次方法在不对点数据进行中心化的情况下，计算平面 π 的点到平面误差：

$$\min_{\pi} \sum_{n=1}^{N} ||\pi^\top \tilde{p}_n||^2 = \pi^\top \tilde{P} \tilde{P}^\top \pi \tag{6}$$

其中，矩阵 P 是由 N齐次点堆叠而成的向量。在齐次平面估计方法中，这种项的排列方式使我们能够定义求和矩阵：

$$S := \tilde{P} \tilde{P}^\top = \sum_{n=1}^{N} \tilde{p}_n \tilde{p}_n^\top, \tag{7}$$

该矩阵是平面中所有点的外积之和。式（6）的解通过对 4×4 矩阵 S进行特征分解计算。在[41]中对两种方法进行了比较，结果相似。然而，我们发现这一结论只在某些条件下成立，即在靠近原点时；并且在计算导数时，以中心为基准的方法在数值上更加稳定（参见第 6.1节）。

我们的最终目标是优化地图中的轨迹和几何特征。中心化方法的缺点是，每次添加或修改新样本时，都必须重新执行所有计算。采用齐次方法 来高效地处理位姿，会更加自然。我们将看到，如何在保持中心化方法数值优势的同时，推导出一种基于齐次方法的方案。

因此，特征因子是对齐次平面估计的推广，它是在一系列不同时间点$t \in \{1,\dots,H\}$的参考坐标系或位姿 $T_t \in SE(3)$中观测到的。它也可以理解为一条轨迹 $\boldsymbol{T} = \{T_1,\dots,T_H\}$。这些位姿均将点变换到全局参考坐标系 g，使得 ${}^{g}T_{t}$。为简洁起见，在以下各节中我们将省略全局参考坐标系。其基本思想是，同一平面 π 会从不同位姿 T_t 下被观测到，但平面约束必须在所有视角下都成立。因此，我们可以将平面 π 的平面估计问题重新表述为

$$\min_{\pi} \sum_{t=1}^{H} \sum_{n=1}^{N_t} ||\pi^\top T_t \tilde{p}_{t,n}||^2 = \min_{\pi} \pi^\top \Big(\sum_{t=1}^{H} T_t S_t T_t^\top \Big) \pi, \tag{8}$$

其中每个点 $\tilde{p}_{t,\ n}$ 表示观测该点时所处的参考坐标系 t，而矩阵 S_t 包含所有这些 N_t 点，如（7）所示。通过重新排列各项可以看出，平面 π 位于求和符号之外，因此平面解归结为对这个新矩阵进行特征分解。因此，我们将矩阵 Q 定义为以下求和

$$Q(\boldsymbol{T}) := \sum_{t=1}^{H} T_t S_t T_t^\top = \sum_{t=1}^{H} Q_t(T_t), \tag{9}$$

其中每个分量 Q_t 取决于矩阵S_t、**仅计算一次**以及当前的三维位姿估计 T_t。矩阵 S_t 表示时间 t 下局部坐标系中的点，并且保持不变；而矩阵 Q 表示在全局参考坐标系中的点，并会针对每条新的更新轨迹重新计算。

检查矩阵 Q的各个元素，可以得到以下各项：

$$Q = \begin{bmatrix} \sum_i p_i \cdot p_i^\top & \sum_i p_i \\ \sum_i p_i^\top & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_p & q \\ q^\top & N \end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中，Q_p 是三维点的外积之和，q 是所有点的总和，与均值成正比。为简化起见，我们考虑点的全局参考坐标系，但 t 处的每个局部坐标都已通过T_t变换。

然后，通过特征分解直接得到该最小化问题的解：

$$\begin{aligned} \pi^* &= k \cdot u_{min}(Q(\boldsymbol{T})) \\ &\text{s.t. } ||\eta^*|| = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

最小特征向量 u_{min} 与平面解成正比。为了使精确解具有几何意义，它必须满足平面的定义（1），且具有单位法向量 η。因此，需要将其乘以标量 k。如果不进行这一修正，每个误差都会以不同的比例缩放，从而使解产生偏差。点到平面的平方误差之和（对于平面 π）等于

$$\lambda_\pi(\boldsymbol{T}) := \min_{\pi} \pi^\top Q(\boldsymbol{T}) \pi = k^2 \lambda_{min}(Q(\boldsymbol{T})), \tag{12}$$

其中 λ_{min} 是最小特征值，经过 k^2适当缩放后，它等于最小代价或最小误差，可由（11）轻松推导得出。通过特征分解求解代数方程后，平面的最小化过程便隐式完成。因此，剩下需要估计的状态变量只有轨迹变量，**从而大幅降低问题的维数**。若考虑更一般形式的双层问题：

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} F(x,y) \\ &\text{s.t. } \min_{y} f(x,y) \end{aligned}$$

它可以视为求解平面参数的下层程序$f(x,\ y)$，而上层 程序则求解轨迹 [6]。

式（ λ_π (·) 在（12）中针对平面 π 得到，具有一些有趣的性质。在理想的无噪声情况下，该函数应为零；根据构造，其值始终为正 λ_π (·) $\geq$ 0。我们可以将其重新表述为如下形式的隐式观测函数：h（x，z）$= 0$。在我们的具体情形中，状态x 是轨迹 $\boldsymbol{T}$，观测 z 则是所有点。相比之下，显式观测的形式为 h（x）$= z$，它将状态与观测联系起来。

遗憾的是，这种隐式观测函数并不适用于一般的非线性最小二乘

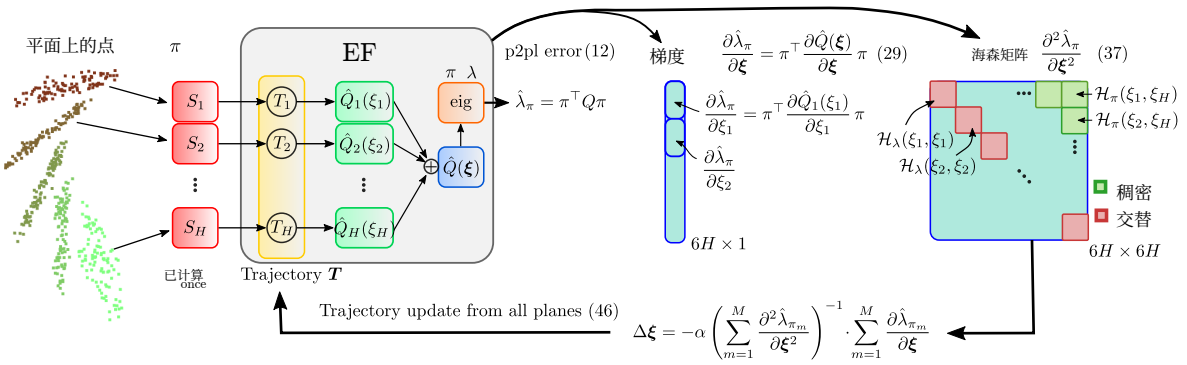

图1 特征因子示意图。从左侧开始，展示了从不同位姿观测到的单个平面上的点。随后，算法估计 S_t 矩阵（仅一次），并处理数据以估计平面 π 及其特征值 λ。接下来，我们可以计算点误差、梯度（第 5节）和海森矩阵（第 5.1节），得到两种形式：红色表示 *alternating*（块对角），绿色表示 *dense* 方法。该示意图对应一个迭代优化过程，因此在更新位姿后，会重复执行这些过程。

（NLLS），甚至也不适用于简单的高斯-牛顿方法。来自 $\lambda_\pi(\cdot)$ 的状态估计问题中，要最小化的总成本定义为

$$C(\boldsymbol{T}) := \sum_{m=1}^{M} \lambda_{\pi_m}(\boldsymbol{T}), \tag{13}$$

鉴于 M 是观测平面的总数。需要注意以下几点：

- 代价 $C(\boldsymbol{T})$ 等于针对每个位姿 T_t评估得到的点到平面平方误差总和。
- 复杂度与点的数量无关，因为矩阵 S_t 只需对这些点求和一次，之后无需修改即可使用。
- 平面参数以闭式形式估计，状态变量仅为位姿序列 $\boldsymbol{T}$ 。

本质上，EF 是一个旨在最小化轨迹相对于点到平面误差的程序。其主要组成部分如图 1 所示。下面我们将介绍实现这一目标的具体功能和求导过程。

4 流形上的回缩与优化

本节介绍矩阵流形优化中的一些工具 [42] ，这是正确构建特征因子二阶优化方法所必需的。我们关注的问题是进一步构建映射 $Q(T) : SE(3) \to \mathbb{R}^{4\times4}$，因此我们提出了系统性的规则，以简便的方式对涉及 $SE(3)$ 的任意函数求导。

刚体变换（RBT）记为 ${}^fT_o \in SE(3)$，可将点从原始参考系 o 变换到最终参考系 f。它还可以变换参考坐标系，或用于唯一表示三维位姿。更正式地说，特殊欧几里得群为

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \mathbf{R} \in SO(3) \wedge \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{14}$$

此外，RBT 是一个矩阵群 $SE(3) \subset \mathbb{R}^{4\times4}$，由于其内部结构和性质，它还是一个黎曼流形。因此，存在一个从 $SE(3)$ 的某个子群元素到向量空间 $\mathbb{R}^6$ 的光滑映射（图）。众所周知，三维位姿的维数为六；然而，存在多种可能的映射方式。

我们关注的是对一个代价函数的优化，其输入是 $SE(3)$ 的一个元素，或者更一般地，是流形 $\mathcal{M}$ 的一个元素。设函数 $f(x) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 是一个从流形映射到实数值的映射。那么，如果直接应用方向导数的定义

$$\nabla f(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x + h\eta) - f(x)}{h}, \tag{15}$$

会发现该操作不适用于涉及流形的数值计算。

可以通过使用回缩映射来求解该问题。

定义1。 回缩 $R_T(\xi)$ 是从 T元素附近的切空间到流形的光滑映射：

$$R_T(\xi) : \mathbb{R}^6 \to SE(3)\,. \tag{16}$$

必须满足两个条件：*i*） $R_T(0_T) = T$以及 *ii*）局部刚性（见第*4 [42]*章）。

因此，使用回缩映射时，我们可以构造一个新函数：

$$\hat{f}_T = f \circ R_T, \tag{17}$$

从切空间 $\mathbb{R}^6$ 映射到一个实数值。这个新函数 f_T 存在方向导数（15）。按照本文的约定，所有回缩映射均用上标ˆ表示 (帽子)。

因此，优化问题 $x' = x + \Delta x$ 对流形 $x \in \mathcal{M}$ 中的元素而言定义不明确，而使用回缩映射后则定义明确

$$T' = R_T(\Delta\xi). \tag{18}$$

在一阶优化中，更新量与梯度方向 ˆ $\Delta\xi = -\alpha\nabla_\xi f_T$ 成正比。梯度下降是最简单的优化方法之一：它需要一个方向和一个幅度。二阶优化方法根据代价曲面的曲率 $\Delta\xi = -\alpha(\nabla^2_\xi \hat{} f_T)^{-1}\nabla_\xi \hat{} f_T$ 对下降方向进行加权，从而获得更高的收敛速率。

在 $SE(3)$ 的特殊情况下，其切空间具有欧几里得空间的结构。只有在这些条件下，使用回缩后，梯度和 Hessian 矩阵才有明确定义：

$$\nabla_T f(T) = \nabla_\xi \hat{f}_T(0_T)$$
$$\nabla^2_T f(T) = \nabla^2_\xi \hat{f}_T(0_T).$$

这些结果意义重大，因为我们只需将实分析应用于第5节中梯度和海森矩阵的计算，就能运用方向导数（15）的概念。这样，我们将实现一种几乎不需要超参数且具有二次收敛速度的二阶优化方法[43]。

4.1 在 $SE(3)$ 上对指数映射求导

指数映射是最自然的回缩选择：其定义与 $SE(3)$ 上的扰动概念密切相关，这将有助于后续各节中导数的计算。只要满足定义，也可以选择其他回缩映射。

指数映射以如下方式定义回缩 R_T：

$$R_T(\xi) = \mathrm{Exp}(\xi)T. \tag{19}$$

我们采用左端约定，但右端同样是有效的回缩，只需对相关项进行类似推导即可。单位元附近的回缩可以根据矩阵指数的定义展开为泰勒级数

$$R_I(\xi) = \mathrm{Exp}(\xi)I = I + \xi^\wedge + \frac{1}{2}(\xi^\wedge)^2 + o(|\xi|^3), \tag{20}$$

其中向量 $\xi = [\theta^\top, \rho^\top]^\top = [\xi_1, \ldots, \xi_6]^\top \in \mathbb{R}^6$ 和矩阵

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \theta^\wedge & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 & \rho_1 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 & \rho_2 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 & \rho_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

是李代数矩阵群 $\mathfrak{se}(3)$，表示单位元附近的无穷小 RBT 群。有关 RBT 及其李代数的详细说明，请参见 [44–46] 。该矩阵可以重新排列，使其具有向量空间结构

$$\xi^\wedge = G_1\xi_1 + G_2\xi_2 + \ldots + G_6\xi_6, \tag{22}$$

其中 G_i 是一个 4×4 矩阵，表示第 i 个th 生成元，基为 $\boldsymbol{G} = \{G_i\}$， $\forall i = 1$， ……， 6。

定义回缩映射（19）后，下一步是求回缩的导数，即在零元处计算指数映射。

引理 1。 指数映射相对于其中一个李坐标 ξ_i 的导数是其

对应的矩阵生成器

$$\frac{\partial \operatorname{Exp}(\xi)}{\partial \xi_i} = G_i. \tag{23}$$

证明。 可以对（20）中矩阵指数的定义进行解析展开

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Exp}(\xi)}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(I + \xi^\wedge + \frac{1}{2}(\xi^\wedge)^2 + o(|\xi|^3)\right)\Big|_{\xi_i=0} \\ &= G_i + \frac{1}{2}G_i\xi^\wedge + \frac{1}{2}\xi^\wedge G_i + \ldots\Big|_{\xi_i=0} = G_i\end{aligned} \tag{24}$$

对每一项求导后，高阶项在 ξ_i =0 处求值时会消失。

□

引理 2。 指数函数关于李坐标 ξ_i 和 ξ_j的二阶导数为

$$\mathcal{H}_{ij} := \frac{\partial^2 \operatorname{Exp}(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_i} = \frac{1}{2}G_iG_j + \frac{1}{2}G_jG_i. \tag{25}$$

证明。可以重复相同的步骤，对二阶导数进行解析展开:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \operatorname{Exp}(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_i} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_i}\left(I + \xi^\wedge + \frac{1}{2}(\xi^\wedge)^2 + o(|\xi|^3)\right)\Big|_{\xi=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(G_i + \frac{1}{2}G_i\xi^\wedge + \frac{1}{2}\xi^\wedge G_i + o(|\xi|^3)\right)\Big|_{\xi=0} \\ &= \frac{1}{2}G_iG_j + \frac{1}{2}G_jG_i\end{aligned} \tag{26}$$

□

这个紧凑的结果是一个 4×4 矩阵，对应海森矩阵的每个（i， j）坐标各有一个。整体张量 $\frac{\partial^2 \operatorname{Exp}(\xi)}{\partial \xi^2}$ 的维度为 $4 \times 4 \times 6 \times 6$，其中考虑了其每个坐标（$i$， j）。注意 $\mathcal{H}_{ij} = \mathcal{H}_{ji}$ 的对称性。

回缩函数的概念，以及指数映射的一阶和二阶导数，在计算更复杂函数（例如特征因子中的矩阵）的导数时将非常有用，正如我们在下一节所展示的那样。

5 特征因子求导

我们先只考虑时刻 T_t的变换 t，那么 $Q = Q_t$ 可改写为形式如下的ˆ回缩函数（17）：$Q_t = Q_t \circ R_{T_t}$： $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^{4\times4}$，使得

$$\hat{Q}_t(\xi_t) = \operatorname{Exp}(\xi_t) \cdot Q_t \cdot \operatorname{Exp}(\xi_t)^\top. \tag{27}$$

这种形式可以推广到完整轨迹，因为 Q（9）中的矩阵定义为若干 Q_t 之和，并且是轨迹 $\boldsymbol{T}$的函数。因此，它也是回缩坐标 $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_{1,1}, \xi_{1,2} \ldots, \xi_{t,i}, \ldots \xi_{H,6}\}$的函数，而回缩坐标正是用于优化的变量。我们使用李坐标 i，轨迹元素为 t，因此总维度为 $6 \times H$。

点到平面误差在（ λ_π）中定义为特征因子推导式（$\boldsymbol{T}$）中的误差，也可以重新定义为回缩函数

$$\hat{\lambda}_\pi(\xi_t) = \lambda_\pi \circ \hat{Q}_t : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R} \tag{28}$$

现在，该函数已定义明确，可用于计算方向导数（15）。可以采用更一般的形式 λ_π（$\boldsymbol{\xi}$），在任意其他位姿附近求回缩函数的值。

现在，需要通过特征分解传播梯度。

命题1。特征值λ_π 关于位姿 T_t 的导数等于

$$\nabla_{\xi_t}\hat{\lambda}_\pi = \frac{\partial \hat{\lambda}_\pi}{\partial \xi_t} = \pi^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_t}\pi. \tag{29}$$

证明。根据定义，特征分解表示为 $Qu = \lambda u$。参数向量 u 是满足 $||u||^2 = u^\top u = 1$的单位向量。可以用任意其他向量 u 替换 $\pi \in \mathbb{P}^3$，因为 $\pi = ku$且 $||\pi|| = k^2$，根据定义 λ_π 见（12）。

ˆ ˆ$Q\pi = \lambda\pi$ 是针对变量 ξ_t 的每个第 i 个坐标推导得出的，$_i$，为简便起见，记作 ξ_i，

$$\hat{Q}\frac{\partial \pi}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_i}\pi = \lambda\frac{\partial \pi}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \xi_i}\pi \tag{30}$$

$$\text{s.t.} \quad \pi^\top \frac{\partial \pi}{\partial \xi_i} = 0. \tag{31}$$

ˆ 考虑到矩阵 Q 按构造是对称的，因此

$$\hat{Q} = \hat{Q}^\top \quad \Longrightarrow \quad \pi^\top \hat{Q} = \hat{\lambda}\pi^\top. \tag{32}$$

可以在表达式（30）左乘$\pi^\top$，代入（32）并进行一些运算：

$$\pi^\top \hat{Q}\frac{\partial \pi}{\partial \xi_i} + \pi^\top \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_i}\pi = \pi^\top \hat{\lambda}\frac{\partial \pi}{\partial \xi_i} + \pi^\top \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \xi_i}\pi$$

$$\underbrace{\hat{\lambda}\pi^\top \frac{\partial \pi}{\partial \xi_i}}_{(31)} + \pi^\top \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_i}\pi = \underbrace{\hat{\lambda}\pi^\top \frac{\partial \pi}{\partial \xi_i}}_{(31)} + \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \xi_i}\underbrace{\pi^\top \pi}_{k^2}$$

$$\pi^\top \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_i}\pi = \frac{\partial \hat{\lambda} k^2}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \hat{\lambda}_\pi}{\partial \xi_i}. \tag{33}$$

回顾（9）可知，ˆ $Q = \sum$ ˆQ_τ，因此，唯一非零的导数对应于 Q_t 分量。可以重新排列 i 中的每个坐标，并最终写为 ξ_t ：

$$\frac{\partial \hat{\lambda}_\pi}{\partial \xi_t} = \pi^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_t}\pi. \tag{34}$$

□

因此，计算梯度ˆ归结为计算 Q_t 相对于流形上元素T_t 附近切空间的导数。对（27）求导，得到

$$\frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_t} = \frac{\partial \mathrm{Exp}(\xi_t)}{\partial \xi_t}Q_t + Q_t\frac{\partial \mathrm{Exp}(\xi_t)^\top}{\partial \xi_t}, \tag{35}$$

这是应用乘积法则得到的。

利用引理 1，只需代入即可得到相对于坐标 i 的导数：

$$\frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,i}} = G_i \cdot Q_t + Q_t \cdot G_i^\top, \tag{36}$$

其中这些元素均为 4×4 矩阵。然后按照（29）将该结果相乘，即可得到梯度，其结果为一个标量；总计对于 $i = 1$，……，6 个坐标中的每一个，均得到一个 6 维向量。

该方法适用于求取关于三维位姿的函数导数，并且即使该函数的像是一个矩阵，也能得到简洁的结果。

5.1 特征因子、海森矩阵

本节旨在为海森矩阵 $\nabla^2_{\hat{\xi}}\lambda$ 求得解析解。同样，我们遵循相同的系统化流程，推导特征因子的海森矩阵。

命题 2. 关于位姿 T_t 和 $T_{t'}$的特征分解海森矩阵为

$$\frac{\partial^2 \hat{\lambda}_\pi}{\partial \xi_{t,j}\partial \xi_{t',i}} = 2 \cdot \mathcal{H}_\lambda(\xi_{t,j}, \xi_{t',i}) + 2 \cdot \mathcal{H}_\pi(\xi_{t,j}, \xi_{t',i}) \tag{37}$$

$$\mathcal{H}_\lambda(\xi_{t,j}, \xi_{t,i}) = \pi^\top \mathcal{H}_{ij} Q_t \pi + \pi^\top G_{t,j}\frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,i}}\pi \tag{38}$$

$$\mathcal{H}_\lambda(\xi_{t,j}, \xi_{t',i}) = 0 \qquad \forall t \neq t' \tag{39}$$

$$\mathcal{H}_\pi(\xi_{t,j}, \xi_{t',i}) = \pi^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}}\mathcal{Q}^{-1}\frac{\partial \hat{Q}_{t'}}{\partial \xi_{t',i}}\pi \tag{40}$$

$$\mathcal{Q}^{-1} = \sum_{l \neq min}^{4} \frac{1}{\lambda_{min} - \lambda_l} u_l u_l^\top. \tag{41}$$

证明。 解析推导见附录A。

□

特征因子海森矩阵表达式（37）包含两个主要部分。一方面，与特征值$\mathcal{H}_\lambda$（$\xi_{t,\ j}$，$\xi_{t,\ i}$）对应的部分，其元素在不同时间索引（39）下为零。另一方面，与平面$\mathcal{H}_\pi$（$\xi_{t,\ j}$，$\xi_{t',\ i}$）的导数相关的部分会产生一个稠密海森矩阵。向量 u_l 是Q的特征向量，如（6）中针对 u_{min}所述。下一小节将阐释这两部分各自的作用及其用途。

5.2 交替优化

我们提出了特征因子作为一种方法，首先以闭式解估计平面（11），随后由特征因子优化轨迹 $\boldsymbol{T}$，并以双层规划的形式有效降低待估计状态的维数。

在交替优化方案中，两组变量，即上层和下层变量彼此可分离，也就是说，这两组变量互不相关

。遗憾的是，推导出的轨迹解依赖于关于平面导数的海森矩阵。因此，我们提出以下近似

$$\frac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{T}} \approx 0.$$

通过这样处理，梯度保持不变（29），更新后的海森矩阵（37）是

$$\frac{\partial^2 \hat{\lambda}_\pi}{\partial \xi_{t,j} \partial \xi_{t,i}} \approx 2 \cdot \mathcal{H}_\lambda(\xi_{t,j}, \xi_{t,i}). \tag{42}$$

由该近似得到的一个重要性质，如（39）所示，是海森矩阵为**块对角**形式，这意味着可以快速计算优化迭代，并降低算法的复杂度。

这种近似的动机在于检查矩阵 $\mathcal{Q}^{-1}$。可以注意到，它大致取决于点$1/N$的逆矩阵，如（9）所述。因此，随着点和位姿数量增加，梯度相对于平面的贡献会减小。

这种块对角形式也可以视为一种拟牛顿法 [43], ，它针对 EF 的特定问题产生，从而能够估计优化步长；与一阶优化方法相比，其收敛速度更快，但不如采用稠密海森矩阵的纯二阶方法那么全面。

5.3 轨迹优化

本节讨论优化轨迹 $\boldsymbol{T} = \{T_1, \dots, T_H\}$ 或其对应向量集合 $\boldsymbol{\xi}$的不同方法。可以直接在轨迹中的每个位姿处应用 EF 梯度和海森矩阵，从而得到联合梯度向量

$$\frac{\partial \hat{\lambda}_\pi}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \left[\left(\pi^\top \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_1} \pi \right)^\top, \dots, \left(\pi^\top \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_H} \pi \right)^\top \right]^\top_{6H \times 1}. \tag{43}$$

这种聚合对应于各个位姿流形的笛卡尔积。如果某个位姿没有观测到任何点，那么梯度将为零，因为它不会对任何均值下的 EF代价作出贡献。相同的排列方式也可用于海森矩阵：

$$\frac{\partial^2 \hat{\lambda}_\pi}{\partial \boldsymbol{\xi}^2} = \left[\frac{\partial^2 \hat{\lambda}_\pi}{\partial \xi_{t,j} \partial \xi_{t',i}} \right]_{6H \times 6H}. \tag{44}$$

总 EF 代价（13）可以根据位姿联合向量的回缩函数重新定义 $\boldsymbol{\xi}$:

$$\hat{C}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=1}^{M} \hat{\lambda}_{\pi_m}(\boldsymbol{\xi}). \tag{45}$$

位姿坐标联合向量的最优更新通过以下方式求解

$$\Delta \boldsymbol{\xi} = -\alpha (\nabla^2_\xi \hat{C})^{-1} \nabla_\xi \hat{C} \tag{46}$$

$$\mathcal{G} := \nabla_\xi \hat{C} = \sum_m^M \frac{\partial \hat{\lambda}_{\pi_m}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{47}$$

$$\mathcal{H} := \nabla^2_\xi \hat{C} = \sum_m^M \frac{\partial^2 \hat{\lambda}_{\pi_m}}{\partial \boldsymbol{\xi}^2}. \tag{48}$$

应用上述回缩过程后，这是一个标准的二阶方法。请注意，这是在 $SE(3)$ 流形上的优化。

5.4 误差对参考坐标系的不变性

平面是射影空间 $\mathbb{P}^3$ 中的元素，它们可以通过 RBT 从一个参考坐标系变换到另一个参考坐标系，方式与齐次点类似：

$${}^t\pi = {}^tT_g^{-\top} \cdot {}^g\pi, \tag{49}$$

其中，全局参考坐标系中的平面 ${}^g\pi$ 被变换到局部坐标系 t中，表示为 ${}^t\pi$ 。

如果我们在点到平面误差（8）中显式考虑所有参考坐标系，其中点 ${}^tp$以局部坐标表示，而平面以全局坐标 g表示，那么

$${}^g\pi^\top \cdot {}^gT_t \cdot {}^t\tilde{p} = {}^g\pi^\top \cdot {}^g\tilde{p} = {}^t\pi^\top \cdot {}^t\tilde{p}. \tag{50}$$

可以看出，误差值不受参考坐标系选择的影响：我们既可以将任意元素变换到局部参考坐标系，也可以将其变换到全局坐标系。特征因子的推导采用了后者。

不仅如此，在任意参考坐标系中，平面约束都成立：

$$ {}^{c}\pi^{\top} \cdot {}^{c}\tilde{p} = ({}^{c}T_{g}^{-\top}{}^{g}\pi)^{\top} \cdot {}^{c}T_{g}{}^{g}\tilde{p} = {}^{g}\pi^{\top} \cdot {}^{g}\tilde{p}, \quad (51) $$

在任意新的参考坐标系 c 下，变换都会相互抵消。下一小节将深入探讨这一想法。

5.5 数据中心化

由于对于任意参考坐标系 ${}^{c}T_{g}$，平面约束的值都相同（为简便起见，我们记作 T_c），下面将证明 EF 代价对于变换也具有**不变性**：

$$ \begin{aligned} \lambda_{\pi} &= \pi^{\top} Q \pi = \pi^{\top} \underbrace{T_c^{-1} T_c}_{I} \cdot Q \cdot T_c^{\top} \underbrace{T_c^{-\top} \pi}_{{}^{c}\pi} \\ &= {}^{c}\pi^{\top} T_c \cdot Q \cdot T_c^{\top} {}^{c}\pi. \end{aligned} \quad (52) $$

平面坐标发生了变化，而矩阵 Q 也变换到了参考坐标系 c中。根据（8）和（9）中的定义，

如果误差 λ_{π} 保持不变，那么自然会产生这样的问题：是否存在比其他参考坐标系更便于计算误差的参考坐标系？为了回答这个问题，我们必须更详细地分析矩阵 Q （10）中的元素： Q_p 和 q。与μ 均值之间存在联系；回想一下，所有点都是在同一个全局参考坐标系中观测到的

$$ q = \sum_{t}^{H} \sum_{n}^{N_t} T_t \cdot p_{t,n} = \sum_{t}^{H} q_t = N \cdot \mu. \quad (53) $$

向量 q 是全局坐标中每个平均点 q_t 的总和。

同样， 3×3 矩阵块 Q_p 是变换到同一参考坐标系中的点的求和：

$$ Q_p = \sum_{t}^{H} \sum_{n}^{N_t} T_t \cdot p_{t,n} \cdot p_{t,n}^{\top} \cdot T_t^{\top} \quad (54) $$

它与点协方差的关系如下： Σ_p 在（5）中，关系如下：

$$ \Sigma_p \cdot N = Q_p - \frac{1}{N} q \cdot q^{\top}. \quad (55) $$

现在，令该变换为均值平移：

$$ T_c = \begin{bmatrix} I & -\mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (56) $$

在这种情况下，这一变换的结果自然会使数据点中心化：

$$ Q_c := T_c \begin{bmatrix} Q_p & q \\ q^{\top} & N \end{bmatrix} T_c^{\top} = \begin{bmatrix} Q_p - \frac{1}{N} q \cdot q^{\top} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad (57) $$

其中左上块对应于缩放协方差（55）。

或者，我们也可以问：对平面 π 施加怎样的变换才能使 d 分量为零？那么，解为

$$ \begin{bmatrix} \eta \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\mu^{\top} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (58) $$

这成立，因为我们已在 $d = -E\{\eta^{\top} p\}$ （5）中定义了该项。在这两种情况下，结果都是中心化矩阵 Q_c。

在实践中，我们使用这一结果来估计平面法向量，因为它能提供更稳定的结果，详见第6.1节。不过，推导仍基于上文给出的齐次形式，只需在梯度和海森矩阵的计算中适配这一变换 即可。因此，梯度按（29）计算，而海森矩阵的几乎所有分量都保持不变，只有（40）现在写作

$$ \mathcal{H}_{\pi,c}(\xi_{t,j}, \xi_{t',i}) = \pi^{\top} \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}} T_c^{\top} \mathcal{Q}_c^{-1} T_c \frac{\partial \hat{Q}_{t'}}{\partial \xi_{t',i}} \pi \quad (59) $$

$$ \mathcal{Q}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{l \neq min}^{3} \frac{1}{\lambda_{min} - \lambda_l} v_l v_l^{\top} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\lambda_{min} - N)} \end{bmatrix}. \quad (60) $$

这些变量 v_l 是 3 ×3×3 分块矩阵（57）的特征向量，并且 v_{min} 对应于平面法向量 η。附录B展示了这一推导。

在评估中，我们将使用本节刚刚介绍的方法，即 EF中心，该方法简称为 EF。

6 实验

实验旨在评估不同基于平面的同步定位与地图构建**后端**方法，这些方法以图优化式同步定位与地图构建的形式构建。由于同步定位与地图构建完整流程的质量也可能受到前端检测与关联算法的显著影响，因此，完整流程的质量问题不在本文讨论范围内，我们将仅关注后端。为此，我们通过开发合成数据生成器，使用来自不同传感器模态的预标注数据，并采用 ICL NUIM [47]和 KITTI [48]序列（来自 EVOPS基准） [49]。

为评估基于平面的图优化式 SLAM 方法，我们选取以下方法作为代表：BAREG [30]、 π-Factor [23], 、BALM [31, 32], 、交替式 EigenFactor（简称 EF）以及 EF-Dense，后两者是我们提出的方法。BAREG、 π-Factor 和 EigenFactor 均在我们共同的 mrob[1] 框架中实现，该框架用于因子图优化问题，提供 Python 绑定并以开源形式与社区共享。具体而言，所有方法均采用相对容差为10^{-4} 的 Levenberg-Marquardt 优化器，并使用完全相同的初始条件。由于 BALM 的建模形式也属于图优化式 SLAM，我们采用作者提供的原始实现及默认参数 [31],，并移除算法的前端部分，以便与其他方法进行公平的后端评估比较。

6.1 特征因子的数值评估

数值评估为特征因子的设计选择及正确实现提供了实证依据。我们总共进行了两项数值测试：平面估计，以及梯度/海森矩阵的数值精度测试。

该**平面估计**测试了两种不同的方法：居中法（5）和齐次法（6）。在噪声较小且数据与参考原点距离较近的情况下，两种方法的表现相近。然而，在增加噪声并将数据点进一步移离原点后，居中方法的结果明显更优，毫无疑问。这是特征分解的结果，也是对单位向量解（变量）引入数值噪声的结果，其缩放因子为k（11）。

梯度和**数值测试**证实了对解析推导（29）、（37）和（59）的正确实现。我们将所得数值与数值计算结果进行了比较，并采用范数的百分比表示。例如，对于海森矩阵：

$$\frac{||\mathcal{H} - \mathcal{H}_{numerical}||}{||\mathcal{H}||} \times 100. \tag{61}$$

对于具有小幅扰动的轨迹，梯度和海森矩阵的范数百分比都接近于零，从经验上证明了推导的正确性。

加入更多噪声后进行评估时，准确率会下降；然而，对于使用齐次 $\mathcal{Q}$ 方法的海森矩阵（41），其表现与采用中心化方法的情况 $\mathcal{Q}_c$ （60）不同，如图3所示。因此，在下面的分析中，我们选择中心化方法作为默认的特征因子方法。

6.2 复杂度分析

理论复杂度分析如表1所示。我们列出了优化的每次迭代步骤中都需要的三类计算，并假设在整个序列中均观测到平面。

表1 各种平面 SLAM 方法的复杂度比较。

	# 平面估计。	评估	优化
BAREG	MH	$O(HM)$	$O(H)$
π-因子	0	$O(HM)$	$O(H^3 + M)^*$
BALM2	M	$O(HM)$	$O(H^3)$
EF-Dense	M	$O(HM)$	$O(H^3)$
EF	M	$O(HM)$	$O(H)$

第一列表示待估计的平面数量。例如， π-特征因子不评估平面，因为平面属于其状态变量。其他方法会对每个平面评估一次，而 BAREG 则需要在轨迹中的每个位姿处评估每个平面。第二列——评估 指评估

[1] https://github.com/prime-slam/mrob

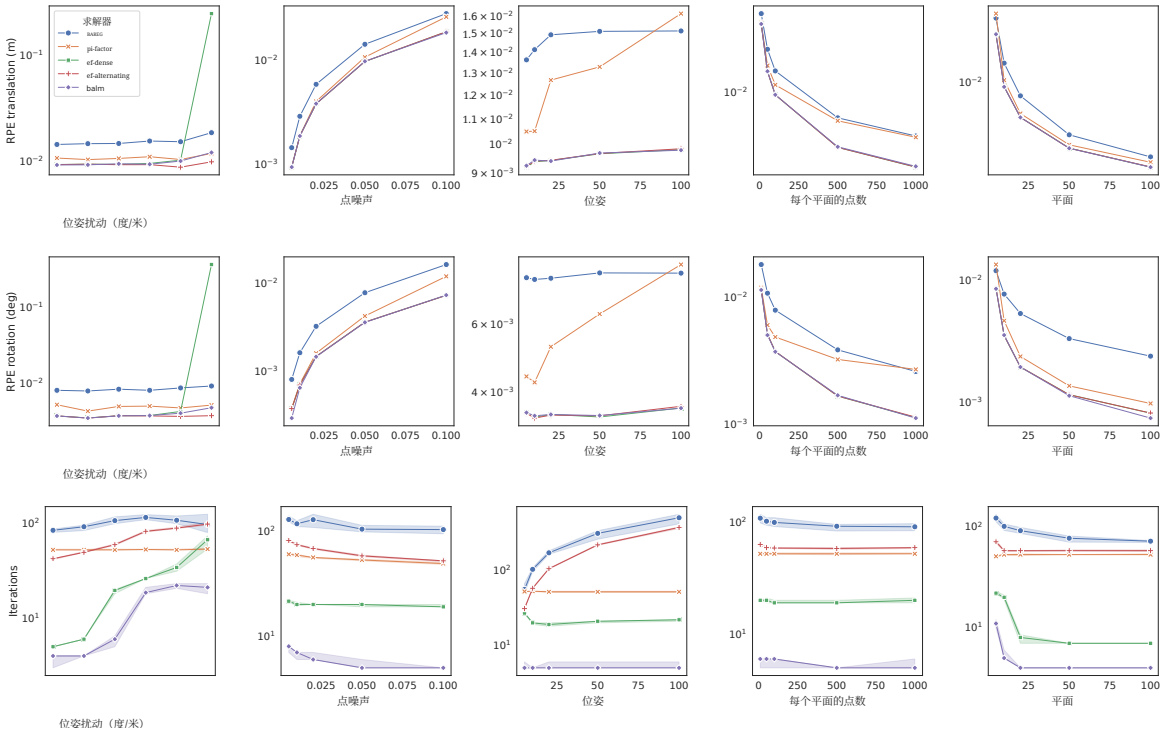

图 2 在合成环境中评估平面，改变以下参数：位姿扰动、轨迹中的位姿数量、每个平面的点数、点到平面噪声。 *Top*：不同模拟器配置下的相对位姿误差平移误差； *Middle*：不同模拟器配置下的相对位姿误差旋转误差； *Down*：收敛迭代次数。绘图中的阴影区域表示 95% 置信区间（默认值）。

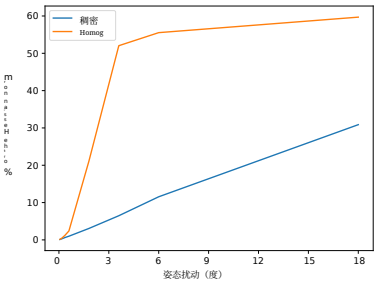

图 3 向轨迹注入噪声后，海森矩阵误差占其范数的百分比。该结果对应 6 个平面、10 个位姿以及每个平面 125 个点。

各方法残差的复杂度，并在需要时计算梯度和海森矩阵。可以看到，所有方法的复杂度相同，取决于平面数量 M 以及轨迹中的位姿数量H。

最后，优化复杂度与问题的结构有关。例如，BAREG 和 EF 表现出线性复杂度，因为它们需要求逆的矩阵是块对角矩阵。 π-因子需要估计更大的状态向量 $H+M$，并求逆一个稀疏矩阵（本文展示的是最坏情况）；此外，还可以使用舒尔技巧来边缘化平面路标 M。BALM2 和 EF-Dense 需要求逆稠密矩阵，因此呈现立方复杂度。下一节将报告各方法的运行时效率以供比较。

6.3 合成平面

为了评估基于平面的 SLAM 后端的质量，我们开发了一种用于生成包含平面的合成环境的生成器。

设置。 生成元提供一组包含平面的点云及其参考轨迹，并可通过位姿数量、平面数量、每个平面的点数、点到平面噪声和轨迹噪声进行参数化。图中展示了生成的合成环境示例 4。默认参数配置如下：位姿数量 — 10，平面数量 — 10，每个平面的点数 — 50，点到平面噪声 — 0.04 米，

每个位姿的轨迹扰动 — 0.05 米和 5 度。在评估中，我们选择一个参数，在不同取值下进行测试，同时保持其他参数不变。相对位姿误差 [50]用于分别估算各方法在旋转和平移部分的准确度。

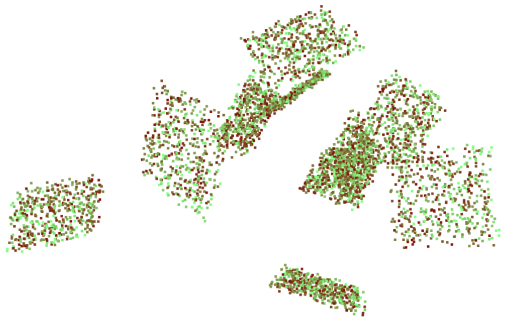

图 4 合成环境。生成点以模拟在平面上的采样。颜色对应于不同的位姿。

结果与讨论。 评估结果如图 2所示。在参数变化后，各方法的总体排序如下：EF（交替式）、EF-Dense 和 BAREG 在相对位姿误差的平移和旋转方面表现几乎相同，紧随其后的是 π-Factor。在这些条件下，BAREG 的表现略差。

值得注意的是，在轨迹扰动实验中，EF、 π-Factor 和 BALM 在所有扰动范围内均表现出一致的结果，这意味着它们具有良好的收敛特性，不仅可用于局部轨迹细化，还可用于全局对齐。对位姿数量、每个平面的点数、点到平面噪声等参数进行遍历后，各方法的性能排序保持不变。在考虑迭代次数时，BALM 提供了最佳结果，但与 EF-Dense 一样，每次迭代需要更多计算资源（表1）。EF 需要更多迭代次数，但计算复杂度较低。

图5展示了在同一框架下实现的各方法的运行时间结果。可以看到，每次优化的总时间为所有方法提供了共同的比较基准，各方法的表现相近，而迭代次数并不是衡量效率的良好指标。

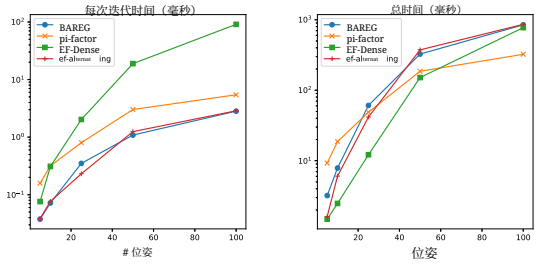

图 5 包含 25 个平面的合成环境。 *Left*：每次迭代时间的中位数。 *Right*：每次优化总时间的中位数。

6.4 RGB-D

评估的第二阶段包括对 RGB-D 数据进行质量估计。由于评估仅考虑后端过程，我们采用 EVOPS基准 [49] 中带有预标注平面的 RGB-D 序列。该基准包含 ICL NUIM 和 TUM RGBD数据集的标注数据。TUM RGBD数据集中只有少量轨迹片段覆盖了足够多的平面，因此仅使用 ICL NUIM 数据。

设置。 评估时，我们随机抽取 50 个不同的子序列，每个子序列包含连续的 30 帧。对于每个子序列，原始轨迹中的位姿会受到扰动，旋转幅度范围为 0.001–0.15 度，平移幅度范围为 0.001–0.15 米。使用了两种 ICL NUIM 数据集配置：原始配置，以及模拟 Kinect噪声的配置。评估时，分别使用相对位姿误差评估平移和旋转部分。

结果与讨论。 图中展示了一个位姿扰动以及随后通过特征因子进行对齐的定性示例。 6。由于所有方法都能生成具有良好视觉质量的地图，因此仅选择一种方法进行可视化。使用各项指标进行评估的结果如图所示。 7。在无噪声的深度数据上，所有方法都取得了出色的结果： 10^{-4} 误差极小。令人意外的是，BALM 的结果不如预期；在类似的合成实验中，该方法表现良好。与合成实验的唯一差异在于，平面并非随着位姿连续观测，因此某些位姿无法观测到某个平面，而在合成实验中

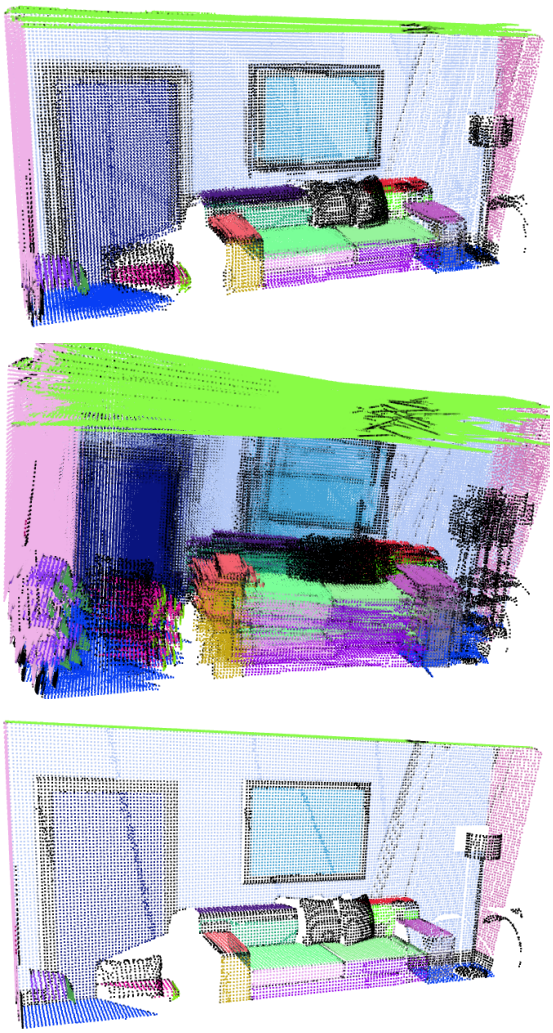

图 6 *Top*：由 10 个位姿聚合而成的地图示例，每个位姿的噪声量为 1 度、0.01 米。 *Middle*：由 10 个位姿聚合而成的地图示例，每个位姿的噪声量为 5 度、0.05 米。 *Down*：使用 EF算法 对齐的结果。

评估过程中，所有平面在整个轨迹中都被连续观测。由于每个平面的点数更多，BAREG 的表现更好，这有利于其在每个位姿处估计平面的策略。

在评估模拟 Kinect 噪声的数据时，EF 表现最佳，其次是 EF-Dense；但当扰动达到一定程度后，其结果会迅速恶化。BAREG 的表现与之相近，而 π-Factor 的各项性能指标则稍逊一筹。与合成实验中一样，EF 在各个扰动范围内的误差几乎保持恒定，这表明其具有良好的实际收敛保证，而其他方法的表现波动更大，甚至包括 EF-Dense。因此，**EF 是首选方法**，适用于在噪声条件未知且接近真实数据的情况下进行优化。这一实验证据可能得到第 6.1节所述结果的支持：添加噪声会降低海森矩阵估计的质量，进而导致优化性能变差。毕竟，众所周知，特征值在某些条件下会变得不稳定，更不用说对其求一阶或二阶导数了。此外，由于该问题具有块对角结构，这种选择在计算上也很高效，因此这一结果更具参考价值。

6.5 激光雷达

最后，在包含真实激光雷达数据的 KITTI数据集上对方法进行评估。

设置。KITTI数据集的原始真值位姿不适合使用经典的基于位姿的指标进行评估，因为其中包含噪声数据 [49]。因此，采用以下场景：将真实值轨迹作为所有方法的初始条件，然后各方法基于 EVOPS 基准中的预标注平面进行优化。评估时，我们从 map-00 中随机采样 100 个子地图，每个子地图包含 30 个位姿。为评估对齐质量，使用无参考地图指标 MME [38],MPV [39]和 MOM [40]。

结果与讨论。各方法的无参考地图指标统计结果见表 2，由于 BALM 在这些序列上无法收敛，因此未报告其结果。根据以下结果，EF 改进了位姿，并在所有指标上提升了地图质量；相关定性示例见图 8。其他方法有时也能改进真实值位姿，但效果不如 EF 显著。值得注意的是，KITTI 激光雷达数据噪声较大，而 EF 在这种条件下仍表现良好，这进一步支持了将 EF（交替式）作为真实且不受控环境下默认方法的经验证据。

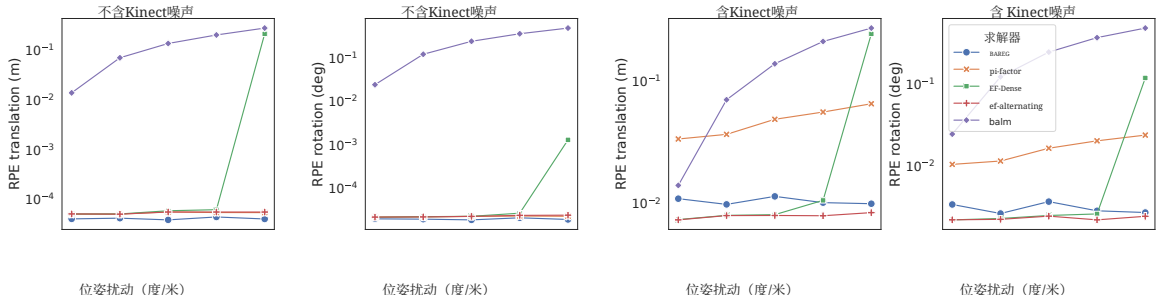

图 7 *Left:* 评估 ICL 上初始位姿扰动的影响，点云中不含噪声。 *Right:* 评估在点云中添加噪声的情况。

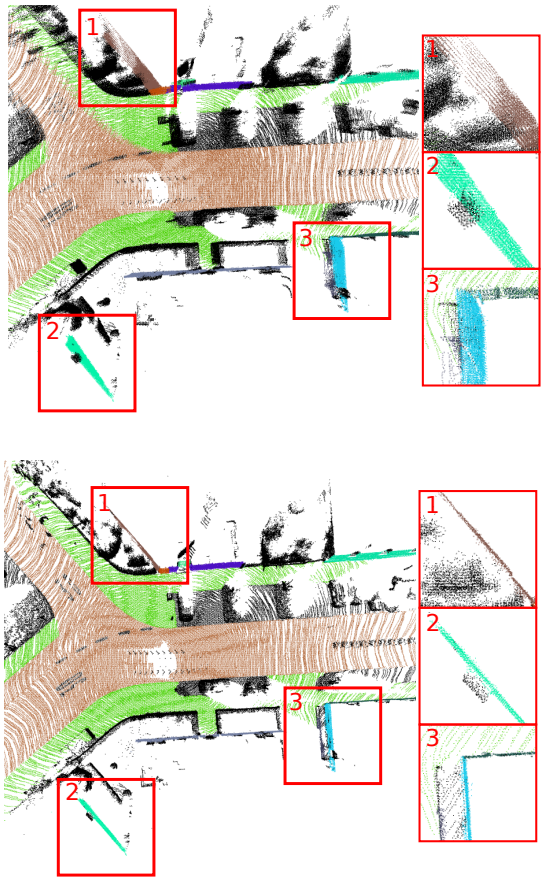

图 8 *Top:* 由 KITTI 真值位姿聚合得到的地图。 *Down:* 由 EF 获得的位姿聚合得到的地图。

7 结论

本文扩展了我们此前关于 Eigenfactors 的工作 [5]，在该工作中，我们提出了一种能够精确计算平面内所有点的点误差的方法，且其复杂度为 $O(1)$。本文对这一概念进行了形式化，并提供了

表2 KITTI数据集上的无参考地图指标

	MME ↓	MPV ↓	MOM ↓
BAREG	0.24	0.0276	0.0046
π-因子	0.26	0.0275	0.0028
GT	0.23	0.0276	0.0029
EF（本文方法）	**0.17**	**0.0266**	**0.0023**

从流形优化的角度将其扩展为双层规划，并通过一种简单的导数计算流程，推导出 EF 梯度和海森矩阵的解析解。

我们提出了用于后端平面 SLAM 的特征因子法，并提供了两种变体：EF-Dense 和 EF（交替式）。将问题近似为交替优化 后，会得到块对角海森矩阵，从而能够非常高效地求解问题。此外，作为一项经验性证据，我们发现这种近似形式虽然需要更多迭代才能收敛，但在合成数据上表现出色；与其他最先进的平面 SLAM 方案相比，它能够更好地收敛到更准确的解。

EF-Dense 或 BALM 等方法会计算完整且精确的海森矩阵，并将其表示为稠密矩阵；在扰动较低时，这些方法能取得良好结果。然而，在扰动较大、条件更贴近现实的情况下，无论是 RGB-D 还是激光雷达数据，这些方法的结果都较差。

EF 方法的一个实际意义在于，由于其相较于其他方法具有更强的鲁棒性，因此可用于更为真实的环境，例如在给定初始估计的情况下进行地图优化，或实现回环检测并校正地图

更新，而目前大多数建图算法尚不具备这些能力。

所有代码均已公开发布于 https://github.com/prime-slam/EF-plane-SLAM，供社区使用，同时也提供 Python 绑定。

附录 A 特征因子海森矩阵的推导

证明。分别对 $\xi_{t,\,i}$ 和 $\xi_{t,\,j}$ 求导后，即可得到二阶导数，写作 ξ_i 和 ξ_j

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial \hat{\lambda}_\pi}{\partial \xi_i}\right) = \frac{\partial}{\xi_j}\left(\pi^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_i}\pi\right) \tag{A1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{\lambda}_\pi}{\partial \xi_j \partial \xi_i} &= \frac{\partial \pi^\top}{\partial \xi_j}\frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_i}\pi + \pi^\top \frac{\partial^2 \hat{Q}_t}{\partial \xi_j \partial \xi_i}\pi + \pi^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_i}\frac{\partial \pi}{\partial \xi_j} \\ &= \pi^\top \frac{\partial^2 \hat{Q}_t}{\partial \xi_j \partial \xi_i}\pi + 2\frac{\partial \pi^\top}{\partial \xi_j}\frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_i}\pi \end{aligned} \tag{A2}$$

表达式（A2）由两个主要项组成：第一项取决于矩阵 Q_t 的二阶导数，第二项取决于平面的导数，即一阶导数的乘积。

第一部分：我们使用乘积法则，对（Q_t （27）中的导数求两次：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}\partial \xi_{t,i}} &= \frac{\partial}{\partial \xi_{t,j}}\left(\frac{\partial \mathrm{Exp}(\xi_t)}{\partial \xi_{t,i}}\hat{Q}_t + \hat{Q}_t\frac{\partial \mathrm{Exp}(\xi_t)^\top}{\partial \xi_{t,i}}\right) \\ &= \frac{\partial^2 \mathrm{Exp}(\xi_t)}{\partial \xi_{t,j}\partial \xi_{t,i}}Q_t + \frac{\partial \mathrm{Exp}(\xi_t)}{\partial \xi_{t,i}}\frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}} + \\ &+ \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,i}}\cdot\frac{\partial \mathrm{Exp}(\xi_t)^\top}{\partial \xi_{t,j}} + Q_t\frac{\partial^2 \mathrm{Exp}(\xi_t)^\top}{\partial \xi_{t,j}\partial \xi_{t,i}}. \end{aligned} \tag{A3}$$

现在考虑与平面 π 相乘，会出现一些对称性：

$$\begin{aligned}&\pi^\top \frac{\partial^2 \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}\partial \xi_{t,i}}\pi \\ &= \pi^\top\left(2\frac{\partial^2 \mathrm{Exp}(\xi_t)}{\partial \xi_{t,j}\partial \xi_{t,i}}\hat{Q}_t + 2\frac{\partial \mathrm{Exp}(\xi_t)}{\partial \xi_{t,i}}\frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}}\right)\pi \\ &= \pi^\top 2\mathcal{H}_{ij}Q_t\pi + 2\pi^\top G_i\frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}}\pi^\top \end{aligned} \tag{A4}$$

这种形式对应于（38），以及式（37）中一般海森矩阵形式的相应元素。

通过注意到该表达式仅取决于位姿 Q_t 处的矩阵 t，而其他位姿在 $t' \neq t$ 处的贡献在第一次求导后便消失，可以轻松验证条件（39）。

第二部分是对 [31]的修改，使其适用于齐次形式，以便获得平面 $\frac{\partial \pi^\top}{\partial \xi_j}$ 的导数。为此，我们必须将累积矩阵 Q因式分解为

$$Q = U\Lambda U^\top \quad \rightarrow \quad \Lambda = U^\top Q U, \tag{A5}$$

其中，U 是一个正交矩阵，因此

$$U^\top U = I \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial U^\top}{\partial \xi_i}U}_{D^\top} + \underbrace{U^\top \frac{\partial U}{\partial \xi_i}}_{D} = 0. \tag{A6}$$

在之前的推导中，我们考虑的是平面向量；而当通过 U考虑整个解空间时，会出现一种新的结构：矩阵 D 必须是斜对称的：

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ -d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ -d_{13} & -d_{23} & 0 & d_{34} \\ -d_{14} & -d_{24} & -d_{34} & 0 \end{bmatrix} \tag{A7}$$

如果我们从（33）重新推导，现在针对矩阵：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial U^\top}{\partial \xi_i}QU + U^\top\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_i}U + U^\top Q\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ &= \frac{\partial U^\top}{\partial \xi_i}U\Lambda + U^\top\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_i}U + \Lambda U^\top\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ &= D^\top\Lambda + U^\top\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_i}U + \Lambda D \end{aligned} \tag{A8}$$

其中将等式 $QU = U\Lambda$和 $U^\top Q = \Lambda U^\top$（A5）代入，以便将表达式简化为关于 D的形式。对于（A8）中的每个非对角元素（即等于零的元素），都可以对其进行变换，并求解该元素对应的方程：

$$d_{l,min} = \frac{1}{\lambda_{min} - \lambda_l} u_l^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,i}} u_{min}, \tag{A9}$$

其中，平面解的索引 u_{min} 已设定，而 l 是任意其他索引。

$$D = U^\top \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = UD \tag{A10}$$

由于 $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]$，可以对向量进行运算并得到：

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \sum_{l \neq min}^{4} \frac{1}{\lambda_{min} - \lambda_l} u_l u_l^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,i}} u_{min} \tag{A11}$$

使用表达式 $\pi = k u_{min}$ (11)，可以代入等式两边：

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi_i} k = \underbrace{\sum_{l \neq min}^{4} \frac{1}{\lambda_{min} - \lambda_l} u_l u_l^\top}_{\mathcal{Q}^{-1}} \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,i}} \pi k, \tag{A12}$$

其中标量变量 k 在等式两边相消。随后可以将（A2）中得到的结果代入

$$2 \cdot \frac{\partial \pi^\top}{\partial \xi_{t,j}} \frac{\partial \hat{Q}_{t'}}{\partial \xi_{t',i}} \pi = 2 \cdot \pi^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}} \mathcal{Q}^{-1} \frac{\partial \hat{Q}_{t'}}{\partial \xi_{t',i}} \pi \tag{A13}$$

这恰好对应于（40）。

可以注意到，表达式 $\mathcal{Q}^{-1}$ 实际上是 $Q - \lambda_{min} u_{min} u_{min}^\top$ 的逆矩阵。注意，我们移除了一个自由度，解为 u_{min}，因此（41）中的记号称其为“逆矩阵”。

□

附录B EF Center 的近似

我们首先将中心化变换 T_c 定义为特定位姿的回缩在 t 处：

$$R_{T_c}(\xi_t) = \begin{bmatrix} I & -\mu(\xi_t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\frac{1}{N}\left(\sum_{\tau \neq t}^{H} q_\tau + \mathrm{Exp}(\xi_t) q_t\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \frac{1}{N}(q_t - \mathrm{Exp}(\xi_t) q_t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T_c = \mathcal{E}(\xi_t) T_c. \tag{B14}$$

其中我们使用了（53）中的结果。其在任意位姿 t 的第 i 个坐标处的导数为

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\xi)}{\partial \xi_i} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{N} G_i q_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{B15}$$

现在，我们要推导优化中所需且受中心化变换影响的各项。需要考虑以下两个等式：

$$Q_c = T_c Q T_c^\top, \qquad Q = T_c^{-1} Q_c T_c^{-\top}. \tag{B16}$$

如前所述，只有海森矩阵中依赖于平面导数（60）的部分需要使用新的中心化平面估计方法重新计算。因此，表达式

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(T_c^\top \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix}\right) \tag{B17}$$

可以看作是平面（58）的变换。进一步展开该表达式，可得两项：

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi_j} = \frac{\partial T_c^\top}{\partial \xi_j} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} + T_c^\top \frac{\partial}{\partial \xi_j} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} \approx T_c^\top \frac{\partial}{\partial \xi_j} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B18}$$

进一步展开后，可得到这一近似：

$$\frac{\partial T_c^\top}{\partial \xi_j} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} = T_c^\top \frac{\partial \mathcal{E}(\xi_j)^\top}{\partial \xi_j} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{N}(G_i q_t)^\top \eta \end{bmatrix} \tag{B19}$$

其中，法向量η 的导数为零，而平面的变量 d 仅受到一个大小为点数倒数的小量扰动。

为求解第二个表达式，我们采用与（A8）中类似的方法。为此，我们

注意，用于估计平面（居中）的 3×3 矩阵：

$$Q_p - \frac{1}{N} q \cdot q^\top = V \Lambda_c V^\top \tag{B20}$$

而观察齐次中心化矩阵时

$$Q_c = \begin{bmatrix} V \Lambda_c V^\top & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \tag{B21}$$

我们可以将特征值扩展一个维度，使得

$$U = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B22}$$

并重复（A11）中的相同步骤。因此，结果可以归纳为：

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{l \neq min}^{3} \frac{1}{\lambda_{min} - \lambda_l} v_l v_l^\top & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\lambda_{min} - N)} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_c^{-1}} \frac{\partial \hat{Q}_c}{\partial \xi_j} \begin{bmatrix} v_{min} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B23}$$

我们已得到 $\mathcal{Q}_c^{-1}$，如（60）所示。最后一步需要用已知变量来定义中心化累积矩阵 Q_c 的导数。为此，我们将其展开为

$$\frac{\partial \hat{Q}_c}{\partial \xi_j} = \frac{\partial T_c \hat{Q} T_c^\top}{\partial \xi_j} \approx T_c \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_j} T_c^\top \tag{B24}$$

在此，我们按照（B19）中的说明，将 T_c的导数近似为可忽略。接下来，我们可以使用（B18）和（B23）来写出平面的导数

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi_j} = T_c^\top \mathcal{Q}_c^{-1} T_c \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_j} \underbrace{T_c^\top \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix}}_{\pi}. \tag{B25}$$

可以将所有分量写在同一个表达式中

$$\frac{\partial \pi^\top}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \hat{Q}_{t'}}{\partial \xi_{t',i}} \pi = \pi^\top \frac{\partial \hat{Q}_t}{\partial \xi_{t,j}} T_c^\top \mathcal{Q}_c^{-1} T_c \frac{\partial \hat{Q}_{t'}}{\partial \xi_{t',i}} \pi \tag{B26}$$

这与（59）中的表达式一致，正如预期的那样。

参考文献

[1]Dellaert, F., Kaess, M.：平方根 SAM：通过平方根信息平滑实现同时定位与建图。《国际机器人研究杂志》**25**(12), 1181–1203 (2006)[2] Triggs, B., McLauchlan, P.F., Hartley, R.I., Fitzgibbon, A.W.：光束法平差——现代综述。载于：视觉算法国际研讨会，页码 298–372 (1999)[3] Weingarten, J., Siegwart, R.：使用平面片段进行三维 SLAM。载于：IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议，页码 3062–3067 (2006)。IEEE[4] Trevor, A.J., Rogers, J.G., Christensen, H.I.：利用三维和二维传感器进行平面表面同步定位与建图。载于：2012年IEEE国际机器人与自动化会议，页码 3041–3048 (2012)。IEEE[5] Ferrer, G.：特征因子：用于多帧与时间连续点云配准的平面估计。载于：IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议，页码 1278–1284 (2019)[6]Colson, B., Marcotte, P., Savard, G.：双层优化概述。《运筹学年鉴》**153**, 235–256 (2007)[7] Chen, Y., Medioni, G.：通过多个距离图像配准进行物体建模。载于：IEEE国际机器人与自动化会议，页码 2724–2729 (1991)。IEEE[8] Besl, P.J., McKay, N.D.：一种三维形状配准方法。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》**14**(2), 239–256 (1992)[9] Zhang, Z.：用于自由形状曲线与曲面配准的迭代点匹配。《国际计算机视觉杂志》**13**(2), 119–152 (1994)

[10]Rusinkiewicz, S., Levoy, M.：ICP算法的高效变体。载于：第三届三维数字成像与建模国际会议论文集，页码 145–152 (2001)。IEEE

[11] Horn, B.K.：基于单位四元数的绝对定向闭式解。《美国光学学会会刊A辑》4(4), 629–642 (1987)

[12]Arun, K.S., Huang, T.S., Blostein, S.D.：两个三维点集的最小二乘拟合。IEEE模式分析与机器智能汇刊(5), 698–700(1987)

[13]Umeyama, S.：两个点模式之间变换参数的最小二乘估计。IEEE模式分析与机器智能汇刊 **13**(4), 376–380 (1991)

[14] Censi, A.：一种采用点到线度量的NICP变体。载于：IEEE国际机器人与自动化会议，页码19–25 (2008)

[15]Segal, A., Haehnel, D., Thrun, S.：广义ICP。载于：《机器人学：科学与系统》，第2卷(2009)

[16]Serafin, J., Grisetti, G.：NICP：基于法线的稠密点云配准。载于：IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS），第 742–749 页（2015）

[17] Bergevin, R., Soucy, M., Gagnon, H., Lau- rendeau, D.：迈向一种通用的多视图配准技术。《IEEE 模式分析与机器智能汇刊》**18**(5), 540–547（1996）

[18]Pulli, K.：面向大型数据集的多视图配准。载于：第二届国际 3D 数字成像与建模会议（目录号：Pr00062），第 160–168 页（1999）。IEEE

[19]Kaess, M.：基于无限平面的同时定位与建图。载于：IEEE国际机器人与自动化会议（ICRA），第 4605–4611 页（2015年）

[20] Geneva, P., Eckenhoff, K., Yang, Y., Huang, G.：Lips：激光雷达-惯性三维平面 SLAM。载于：IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议（IROS），第 123–130 页（2018年）。IEEE[21] Zhang, X., Wang, W., Qi, X., Liao, Z., Wei, R.：使用假定平面进行室内环境中的点平面 SLAM。《传感器》**19**（17）（2019年）https://doi.org/10.3390/s19173795

[22]Taguchi, Y., Jian, Y.-D., Ramalingam, S., Feng, C.：面向手持式三维传感器的点平面SLAM。载于：机器人与自动化（ICRA），2013 IEEE 国际会议，第 5182–5189 页（2013）。IEEE

[23] Zhou, L., Koppel, D., Kaess, M.：面向室内环境的平面调整激光雷达同步定位与建图。IEEE《机器人与自动化快报》**6**(4),7073–7080（2021年）

[24]Zhang, J., Singh, S.：LOAM：实时激光雷达里程计与建图。载于：机器人学：科学与系统，第 2 卷（2014年）

[25] Zhang, J., Singh, S.：低漂移实时激光雷达里程计与建图。Autonomous Robots 41(2),401–416（2017年）

[26] Ye, H., Chen, Y., Liu, M.：紧耦合三维激光雷达惯性里程计与建图。载于：国际机器人与自动化会议（ICRA），第 3144–3150 页（2019年）。IEEE

[27] Whelan, T., Salas-Moreno, R.F., Glocker, B., Davison, A.J., Leutenegger, S.：ElasticFusion：实时稠密同步定位与建图及光源估计。《国际机器人研究杂志》**35**(14), 1697–1716（2016年）

[28]Behley, J., Stachniss, C.：在城市环境中使用三维激光测距数据进行高效的 Surfel SLAM。载于：机器人学：科学与系统（2018年）

[29]Zhou, L., Wang, S., Kaess, M.： π-lsam：基于平面的激光雷达平滑与建图。载于：2021年IEEE国际机器人与自动化会议 (ICRA)，第 5751–5757 页 (2021年)。IEEE

[30] Huang, H., Sun, Y., Wu, J., Jiao, J., Hu, X., Zheng, L., Wang, L., Liur, M.：关于多视角点云配准的光束法平差。IEEE机器人与自动化快报 (RAL) 6(4)，8269–8276 (2021年)

[31]Liu, Z., Liu, X., Zhang, F.：激光雷达点云上的高效且一致的束调整。arXiv 预印本 arXiv:2209.08854（2022）

[32]Liu, Z., Zhang, F.：BALM：用于激光雷达建图的束调整。IEEE机器人与自动化快报 6(2)，3184–3191（2021）

[33]Tian, D., Ochimizu, H., Feng, C., Cohen, R., Vetro, A.：点云压缩的几何失真度量。载于：IEEE图像处理国际会议（ICIP），第3460–3464页（2017年）。
https://doi.org/10.1109/ICIP.2017.8296925

[34] Alexiou, E.,Ebrahimi,T.：基于角度相似性的点云质量评估指标。载于：2018年IEEE国际多媒体与博览会会议（ICME），第1–6页（2018年）。
https://doi.org/10.1109/ICME.2018.8486512

[35]Torlig, E.M., Alexiou, E., Fonseca, T.A., Queiroz, R.L., Ebrahimi, T.：体素化点云质量评估的一种新方法。载于：Tescher, A.G.（编）《数字图像处理应用》第41卷，第10752卷，第174–190页（2018年）。
https://doi.org/10.1117/12.2322741 。SPIE。
https://doi.org/10.1117/12.2322741[36]Meynet, G., Digne, J., Lavou´e, G.：PC-MSDM：一种用于三维点云的质量度量。在：第十一届多媒体体验质量国际会议（QoMEX），第1–3页（2019年）。
https://doi.org/10.1109/QoMEX.2019.8743313

[37]Alexiou, E., Ebrahimi, T.：迈向点云结构相似性指标。载于：2020年 IEEE 多媒体博览会国际会议研讨会（ICMEW），第 1–6 页（2020年）。
https://doi.org/10.1109/ICMEW46912.2020.9106005

[38] Droeschel, D., St¨uckler, J., Behnke, S.：利用连续旋转的三维激光扫描仪进行六自由度运动估计与建图的局部多分辨率表示。载于：IEEE国际机器人与自动化会议（ICRA），第 5221–5226 页（2014年）

[39] Razlaw, J., Droeschel, D., Holz, D., Behnke, S.：稀疏三维激光扫描配准方法的评估。载于：欧洲移动机器人会议（ECMR），第1–7页（2015年）

[40] Kornilova, A., Ferrer, G.：成为自己的基准：已配准点云上的无参考轨迹度量指标。载于：欧洲移动机器人会议（ECMR）（2021年）

[41] Klasing, K., Althoff, D., Wollherr, D., Buss, M.：测距传感应用中的曲面法向量估计方法比较。载于：IEEE国际机器人与自动化会议，第3206–3211页（2009年）

[42]Absil, P.-A., Mahony, R., Sepulchre, R.：矩阵流形上的优化算法。普林斯顿大学出版社，新泽西州（2008年）

[43] Nocedal, J., Wright, S.：《数值优化》。施普林格，纽约（2006年）

[44] Lynch, K.M., Park, F.C.：《现代机器人学》。剑桥大学出版社，剑桥（2017年）

[45] Barfoot, T.D.：《机器人状态估计》。剑桥大学出版社，剑桥（2017年）

[46] Sola, J., Deray, J., Atchuthan, D.：机器人学状态估计的微型李群理论。arXiv预印本 arXiv:1812.01537（2018年）

[47] Handa, A., Whelan, T., McDonald, J., Davison, A.J.：RGB-D视觉里程计、三维重建与SLAM基准。在：2014年IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA），第1524–1531页（2014年）。IEEE

[48] Geiger, A., Lenz, P., Stiller, C., Urtasun, R.：

视觉与机器人学的交汇：KITTI数据集。《国际机器人研究杂志》**32**(11), 1231–1237 (2013)

[49]Kornilova, A., Iarosh, D., Kukushkin, D., Goncharov, N., Mokeev, P., A., S., Ferrer, G.: EVOPSBenchmark：RGB-D 和激光雷达数据平面分割的评估。载于：IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）（2022）

[50]K¨ummerle, R., Steder, B., Dornhege, C., Ruhnke, M., Grisetti, G., Stachniss, C., Kleiner, A.：关于SLAM算法精度的测量。Autonomous Robots**27**(4), 387–407（2009）