arXiv:2304.01061v1 [math.CA] 3 Apr 2023

等式框架下半直线上的 Rellich 型不等式

Yi C. Huang and Fuping Shi

摘要

本文在等式框架下建立了半直线上的一些加权 Hardy 不等式和 Rellich 型不等式，推广了 Machihara-Ozawa-Wadade 和 Bez-Machihara-Ozawa 近期证明的结果。特别地，本文在等式框架下证明了一维经典 Rellich 不等式。

1 引言与主要结果

设 $n \geq 2$。众所周知， $\mathbb{R}^n$ 上的标准拉普拉斯算子可分解为

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{|x|^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中， Δ_r 表示径向拉普拉斯算子， $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 表示球面 $\mathbb{S}^{n-1}$上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。更准确地说，径向拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_r f = \partial_r^2 f + \frac{n-1}{|x|}\partial_r f,$$

其中 ∂_r 表示径向导数 $\partial_r = \frac{x}{|x|}\cdot\nabla$。

令 $\|\cdot\|_2$ 表示关于勒贝格测度在 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^2 范数。令 $\mathrm{R}_Q = {}_{Q(Q-4)\ 4}$，其中 ~~$Q \in$~~ $\mathbb{R}$。Machihara-Ozawa-Wadade 最近在 [3] 中证明了以下“Rellich 型等式”，Bez-Machihara-Ozawa 则在 [1] 中证明了这些等式。

2020 年数学主题分类。主要分类号：26D10；次要分类号：46E35、35A23。关键词：Rellich 不等式、Hardy 不等式、径向导数、极坐标。作者的研究得到中国国家 NSF 基金（编号：11801274）的资助。

THEOREM 1.1（Bez-Machihara-Ozawa）。对于 $n \geq 2$ 和 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$，有

$$\mathbf{R}_n^2 \left\| \frac{f}{|x|^2} \right\|_2^2 = \|\Delta_r f\|_2^2 - \left\| \Delta_r f + \mathbf{R}_n \frac{f}{|x|^2} \right\|_2^2 - 2\mathbf{R}_n \left\| \frac{f^*}{|x|} \right\|_2^2 \tag{1}$$

$$= \|\Delta_r f\|_2^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n\right) \left\| \Delta_r f + \mathbf{R}_n \frac{f}{|x|^2} \right\|_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_n \left\| f^\# \right\|_2^2, \tag{2}$$

其中 $f^* = \partial_r f + \frac{n-4}{2|x|} f$和 $f^\# = \partial_r^2 f + (n-3)\frac{\partial_r f}{|x|} + (n-4)\frac{2}{4} \frac{f}{|x|^2}$。

注意，上述结果实际上可以在射线 $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ 上重新表述，因为它们只涉及径向导数。于是，原等式 (1) 和 (2) 可由极坐标分解公式和径向约化等式（在 $\mathbb{R}_+$ 上采用 $L^2(r^{n-1}\mathrm{d}r)$- 范数）得到。此外，在这种径向约化的一维情形下，我们还可以考虑加权类比。令 $\beta \in \mathbb{R}$ 并记 $\|\cdot\|_{L^2_\beta}$ 为以下加权 L^2-范数：

$$\|f\|_{L^2_\beta}^2 = \int_0^\infty |f(r)|^2 r^\beta \mathrm{d}r.$$

与 $\alpha \in \mathbb{R}$ 相应地，我们还考虑加权二阶导数

$$\mathfrak{L}_\alpha := \partial_r^2 + \frac{\alpha}{r}\partial_r.$$

显然 $\mathfrak{L}_{n-1} = \Delta_r$。

对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，令

$$\mathbf{C}_{\alpha,\beta} = \frac{(\beta - 3)(2\alpha - \beta + 1)}{4}.$$

对于 $\mathfrak{L}_\alpha$，我们有以下类似于 [3] 和 [1] 中结果的结论。

THEOREM 1.2. 对于 $f \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$，有

$$\mathbf{C}_{\alpha,\beta}^2 \left\| \frac{f}{r^2} \right\|_{L^2_\beta}^2 = \|\mathfrak{L}_\alpha f\|_{L^2_\beta}^2 - \left\| \mathfrak{L}_\alpha f + \mathbf{C}_{\alpha,\beta} \frac{f}{r^2} \right\|_{L^2_\beta}^2 - 2\mathbf{C}_{\alpha,\beta} \left\| \frac{f^*}{r} \right\|_{L^2_\beta}^2 \tag{3}$$

并且，若 $\beta - \alpha - 2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\alpha,\beta}^2 \left\| \frac{f}{r^2} \right\|_{L^2_\beta}^2 &= \|\mathfrak{L}_\alpha f\|_{L^2_\beta}^2 - \left(1 + \frac{2\mathbf{C}_{\alpha,\beta}}{(\beta - \alpha - 2)^2}\right) \left\| \mathfrak{L}_\alpha f + \mathbf{C}_{\alpha,\beta} \frac{f}{r^2} \right\|_{L^2_\beta}^2 \\ &\quad + \frac{2\mathbf{C}_{\alpha,\beta}}{(\beta - \alpha - 2)^2} \left\| f^\# \right\|_{L^2_\beta}^2, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $f^* = f' + \frac{\beta-3}{2r} f$且 $f^\# = f'' + \frac{\beta-2}{r} f' + (\beta-3)\frac{2}{4r^2} f.$

注意到 $\mathbf{C}_{n-1,n-1}=\mathbf{R}_n$，因此当 $\alpha=\beta=n-1$ 时，定理 1.1 是定理 1.2 的直接推论，也就是说，

$$\mathbf{R}_n^2\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_{n-1}}^2=\|\mathfrak{L}_{n-1}f\|_{L^2_{n-1}}^2-\left\|\mathfrak{L}_{n-1}f+\mathbf{R}_n\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_{n-1}}^2-2\mathbf{R}_n\left\|\frac{f^*}{r}\right\|_{L^2_{n-1}}^2 \tag{5}$$

$$=\|\mathfrak{L}_{n-1}f\|_{L^2_{n-1}}^2-\left(1+\frac{\mathbf{R}_n}{2}\right)\left\|\mathfrak{L}_{n-1}f+\mathbf{R}_n\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_{n-1}}^2+\frac{\mathbf{R}_n}{2}\left\|f^{\#}\right\|_{L^2_{n-1}}^2 \tag{6}$$

要从 (5)-(6) 推出 (1)-(2)，只需使用极坐标

$$(r,\omega)=\left(|x|,\frac{x}{|x|}\right)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}^{n-1},$$

并结合在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的积分以及 Fubini 定理。

等式 (3) 和 (4) 推出以下“Rellich 型不等式”。

THEOREM 1.3. 对所有 α、$\beta\in\mathbb{R}$ 和 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$，有

$$\mathbf{C}_{\alpha,\beta}^2\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2\le\|\mathfrak{L}_\alpha f\|_{L^2_\beta}^2. \tag{7}$$

对于 $n\ge 2$，按照上述说明，在定理 1.3 中取 $\alpha=\beta=n-1$，并使用极坐标和 Fubini 定理，即可得到 [1] 中的高维结果。

THEOREM 1.4（Bez-Machihara-Ozawa）。设 $n\ge 2$。对于 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$，有

$$\mathbf{R}_n^2\left\|\frac{f}{|x|^2}\right\|_2^2\le\|\Delta_r f\|_2^2.$$

REMARK 1.5. Δ_r 与 Δ 之间存在范数比较：若 $n\ge 3$，则

$$\|\Delta_r f\|_2\le\|\Delta f\|_2$$

对 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 成立。结合定理 1.4，即可在等式框架下证明 $\mathbb{R}^n$ 上关于 $n\ge 3$ 的经典 Rellich 不等式（见 [5, 6]）。一维 Rellich 不等式包含在我们的定理 1.2 和定理 1.3 中。

2 定理 1.2 的证明

(3) 的证明。若 $\beta=3$，等式显然成立。因此，以下假设 $\beta\ne 3$。记关于 $\|\cdot\|_{L^2_\beta}$ 的厄米内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。分部积分

关于 $\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2$ 进行两次后，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{|f(r)|^2}{r^4} r^\beta \mathrm{d}r &= \int_0^\infty f(r)\overline{f(r)} r^{\beta-4}\mathrm{d}r \\ &= -\frac{2}{\beta-3}\Re\int_0^\infty f(r)\overline{f'(r)} r^{\beta-3}\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{(\beta-2)(\beta-3)}\Re\int_0^\infty \left(|f'(r)|^2 + f(r)\overline{f''(r)}\right) r^{\beta-2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{(\beta-2)(\beta-3)}\left(\left\|\frac{f'}{r}\right\|_{L^2_\beta}^2 + \Re\left\langle \frac{f}{r^2}, f''\right\rangle\right).\end{aligned} \tag{8}$$

第三步中我们使用了 $\beta \neq 2$，稍后将给出 $\beta = 2$ 情形的详细说明。

等式 (8) 右端最后一个表达式中的第一项可改写为

$$\left\|\frac{f'}{r}\right\|_{L^2_\beta}^2 = \left\|\left(\frac{f}{r}\right)' + \frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2 = \left\|\left(\frac{f}{r}\right)'\right\|_{L^2_\beta}^2 + 2\Re\left\langle\left(\frac{f}{r}\right)', \frac{f}{r^2}\right\rangle + \left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2. \tag{9}$$

在下文中，我们将引理 2.2 中的 f 替换为$\frac{f}{r}$，从而得到

$$\left\|\left(\frac{f}{r}\right)'\right\|_{L^2_\beta}^2 = \mathbf{H}_{\beta+1}^2\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2 + \left\|\frac{f'}{r} + \frac{\mathbf{H}_{\beta+1}-1}{r^2}f\right\|_{L^2_\beta}^2.$$

经分部积分可得

$$2\Re\left\langle\left(\frac{f}{r}\right)', \frac{f}{r^2}\right\rangle = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{|f|^2}{r^2}\right)'}{r} r^\beta \mathrm{d}r = -(\beta-1)\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2.$$

将上述两个等式代入 (9)，得到

$$\left\|\frac{f'}{r}\right\|_{L^2_\beta}^2 = (\mathbf{H}_{\beta+1}-1)^2\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2 + \left\|\left(\frac{f}{r}\right)' + \mathbf{H}_{\beta+1}\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2.$$

等式 (8) 右端最后一个表达式中的第二项可改写为

$$\Re\left\langle\frac{f}{r^2}, f''\right\rangle = \Re\left\langle\frac{f}{r^2}, f'' + \frac{\alpha}{r}f'\right\rangle - \alpha\Re\left\langle\frac{f}{r^3}, f'\right\rangle, \tag{10}$$

其中最后一项为

$$\Re\left\langle\frac{f}{r^3}, f'\right\rangle = \frac{1}{2}\Re\left\langle\frac{1}{r^3}, (f\bar{f})'\right\rangle = -\frac{(\beta-3)}{2}\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2.$$

若 $2\alpha - \beta + 1 = 0$，则 $\mathsf{C}_{\alpha,\ \beta} = 0$，且 (3) 显然成立。否则，$\mathsf{C}_{\alpha,\ \beta} \neq 0$，因此我们可以汇总等式 (9) 和 (10)，得到

$$\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2 = -\frac{1}{\mathbf{C}_{\alpha,\beta}}\Re\left\langle\frac{f}{r^2}, f'' + \frac{\alpha}{r}f'\right\rangle - \frac{1}{\mathbf{C}_{\alpha,\beta}}\left\|\frac{f'}{r} + (\mathbf{H}_{\beta+1}-1)\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2.$$

由下文的引理 2.1，我们得到所需的等式。

对于 $\beta = 2$，可以验证

$$\Re\left\langle \frac{f}{r^2}, f''\right\rangle = \Re\left\langle \frac{f}{r}, \frac{f'}{r}\right\rangle = \left\|\frac{f'}{r}\right\|_{L^2_2}^2,$$

因此，通过类似的论证，我们完成了对 (3) 的证明。 □

For 为使论证完整，下面记述上述引理 .

LEMMA 2.1（Machihara-Ozawa-Wadade）。设 H 是一个带有厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的向量空间。令 $a \in \mathbb{R}, c \neq 0$ 和 $u, v \in \mathrm{H}$。则

$$\|u\|^2 = -c\Re\langle u, v\rangle + a \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}\|u\|^2 = \|v\|^2 - \left\|v + \frac{1}{c}u\right\|^2 + \frac{2a}{c^2}.$$

该引理的证明是直接的，注意到由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是厄米的，

$$\langle f-g, f-g\rangle = \|f\|_{\mathsf{H}}^2 + \|g\|_{\mathsf{H}}^2 - 2\Re\langle f, g\rangle = \|f\|_{\mathsf{H}}^2 + \|g\|_{\mathsf{H}}^2 - 2\Re\langle g, f\rangle.$$

设 $\mathrm{H}_Q = \frac{Q-2}{2}$，其中 $Q \in \mathbb{R}$。以下结果可视为在等式框架下，将 [4] 中证明的 Hardy 不等式约化到径向函数的情形。

LEMMA 2.2. 对于 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$，有

$$\mathbf{H}_{\beta+1}^2 \left\|\frac{f}{r}\right\|_{L^2_\beta}^2 = \|f'\|_{L^2_\beta}^2 - \left\|f' + \mathbf{H}_{\beta+1}\frac{f}{r}\right\|_{L^2_\beta}^2. \tag{11}$$

PROOF. 注意，当 $\beta = 1$ 时，该引理显然成立。对于 $\beta \neq 1$，令 $u = -\frac{2}{\beta-1}f'$ 和 $v = \frac{f}{r}$。像之前一样利用分部积分，我们得到如下表达式

$$\|v\|_{L^2_\beta}^2 = \Re\int_0^\infty v\bar{u}r^\beta \mathrm{d}r.$$

Then

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2_\beta}^2 - \|v\|_{L^2_\beta}^2 &= \|u\|_{L^2_\beta}^2 - \|v\|_{L^2_\beta}^2 + 2\Re\int_0^\infty \left(|v|^2 - v\bar{u}\right) r^\beta \mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty |v-u|^2 r^\beta \mathrm{d}r,\end{aligned}$$

这就得到了所需的等式。 □

REMARK 2.3. 对于 $t \in \mathbb{R}$，在（11）中取 $\beta = t+2$，可得到带权一维 Hardy 不等式（例如，参见 Cassano 和 Pizzichillo [2]）

$$\int_0^\infty |f'(r)|^2 r^{t+2}\mathrm{d}r \geq \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 \int_0^\infty |f(r)|^2 r^t \mathrm{d}r.$$

因此，我们得到加权Rellich不等式

$$\int_0^\infty |f''(r)|^2 r^{t+4}\mathrm{d}r \geq \left(\frac{t+3}{2}\right)^2 \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 \int_0^\infty |f(r)|^2 r^t \mathrm{d}r.$$

(4)的证明。对于 $a \in \mathbb{R}$，我们首先注意到

$$\frac{(\beta-1-a)^2}{4}\left\|\frac{g}{r^{1+\frac{a}{2}}}\right\|_{L^2_\beta}^2 = \left\|\frac{g'}{r^{\frac{a}{2}}}\right\|_{L^2_\beta}^2 - \left\|\frac{\beta-1-a}{2}\frac{g}{r^{1+\frac{a}{2}}} + \frac{g'}{r^{\frac{a}{2}}}\right\|_{L^2_\beta}^2 \tag{12}$$

对所有 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ 均成立。事实上，通过分部积分可得

$$2\Re\left\langle \frac{g}{r^{1+\frac{a}{2}}}, \frac{g'}{r^{\frac{a}{2}}}\right\rangle = -(\beta-1-a)\left\|\frac{g}{r^{1+\frac{a}{2}}}\right\|_{L^2_\beta}^2.$$

若 $\beta-1-a=0$，等式显然成立。由引理 2.1，我们得到 (12)。

现在取由下式给出的 $a=2\alpha-\beta+3$ 和 g

$$g(r) = \left(\frac{f'}{r} + (\mathbf{H}_{\beta+1}-1)\frac{f}{r^2}\right) r^{\frac{2\alpha-\beta+5}{2}},$$

我们得到，对于 $\beta-\alpha-2\neq 0$,

$$\left\|\frac{f'}{r} + \frac{\beta-3}{2r^2}f\right\|_{L^2_\beta}^2 = \frac{1}{(\beta-\alpha-2)^2}\left\|\mathfrak{L}_\alpha f + \mathbf{C}_{\alpha,\beta}\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2 - \frac{1}{(\beta-\alpha-2)^2}\left\|f^{\#}\right\|_{L^2_\beta}^2, \tag{13}$$

其中 $f^{\#} = f'' + \frac{\beta-2}{r}f' + \left(\frac{\beta-3}{2r^2}\right)^2 f$. 我们看到，(4) 可由 (3) 和 (13) 推出。 □

3 定理 1.3 的证明

若 $\mathbf{C}_{\alpha,\ \beta} \geq 0$，则 (7) 可由 (3) 得出。对于 $\beta-\alpha-2=0$，我们有

$$\mathbf{C}_{\alpha,\beta} = \frac{(\beta-3)^2}{4}.$$

因此，若 $\mathbf{C}_{\alpha,\ \beta} < 0$，则 $\beta-\alpha-2\neq 0$。在定理 1.2 中，对于 $\mathbf{C}^2_{\alpha,\ \beta}\left\|\frac{f}{r^2}\right\|_{L^2_\beta}^2$，我们可以使用表达式 (4)。直接计算可得

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2\mathbf{C}_{\alpha,\beta}}{(\beta-\alpha-2)^2} &= \frac{1}{2} + \frac{2\alpha\beta-\beta^2+4\beta-6\alpha-3+(\beta-(\alpha+2))^2}{2(\beta-\alpha-2)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(\alpha-1)^2}{2(\beta-\alpha-2)^2} > 0, \end{aligned}$$

因此 (7) 得证。证明到此完成。

参考文献

[1] Neal Bez, Shuji Machihara, Tohru Ozawa, 重新审视 Rellich 不等式。Mathematische Zeitschrift，303:49，2023。

[2] Biagio Cassano, Fabio Pizzichillo, 库仑型球对称势下狄拉克算子的自伴扩张。数学物理快报，108，2635-2667，2018。

[3] Shuji Machihara, Tohru Ozawa, Hidemitsu Wadade,关于 Rellich 不等式的评述。Mathematische Zeitschrift, 286(3-4):1367-1373, 2017.

[4] Shuji Machihara, Tohru Ozawa, Hidemitsu Wadade,等式框架下带余项的 Hardy型不等式。载于 T. Ogawa、K. Kato 和 T. Ozawa 编，《非线性色散方程与波动方程的渐近分析》，纯数学高级研究第 81 卷，第 247- 258 页。日本数学会，2019 年。

[5] Franz Rellich,高阶半有界微分算子，1954 年国际数学家大会论文集，阿姆斯特丹，第 III 卷，第 243–250 页。

[6] Franz Rellich，特征值问题的微扰理论，CRC出版社，1969年。

School of Mathematical Sciences
Nanjing Normal University
Nanjing 210023
People's Republic of China电子邮箱：Yi.Huang@njnu.edu.cn

School of Mathematical Sciences
Nanjing Normal University
Nanjing 210023
People's Republic of China电子邮箱：ryan1165761719@foxmail.com