利用光学腔中的引力光偏折实现激光频率稳定

S. Ulbricht,[1, 2, *] J. Dickmann,[1, 2, 3, †] 和 A. Surzhykov[1, 2, 3]

[1] *Physikalisch–Technische Bundesanstalt, D–38116 Braunschweig, Germany*

[2] *Technische Universität Braunschweig, D–38106 Braunschweig, Germany*

[3] *LENA Laboratory for Emerging Nanometrology, D–38106 Braunschweig, Germany*（日期：2023年4月4日）

我们从理论上研究均匀引力场中的光传播。为对此进行建模，我们推导了林德勒时空中的波动方程解，其中考虑了引力红移和光偏折。我们利用所建立的理论框架，探究平面光波在水平法布里-珀罗腔中的传播。我们特别关注腔体输出功率。结果表明，该功率不仅取决于输入频率，还取决于探测器的垂直位置。我们指出，由腔内光偏折效应（CILD效应）产生的、随高度变化的探测器信号，也为地基激光实验中的频率稳定以及在实验室尺度研究引力光偏折开辟了一种新的替代途径。

arXiv:2304.01069v1 [gr-qc] 3 Apr 2023

I. 引言

引力光偏折效应通常在大尺度上被观测到。例如，已知遥远恒星发出的光会被太阳的引力势所弯曲。从地球上观测，这会导致太阳附近恒星的视位置发生偏移；显然，只有在太阳圆面被遮挡时才能观测到这一现象。1919年日食期间，爱丁顿首次观测到这一现象，证实了爱因斯坦广义相对论中的一项开创性预言 [1–3]。此后，进一步的引力透镜观测 [4], 微引力透镜 [5, 6], 以及对黑洞的直接成像 [7, 8] 证实了从星系尺度到宇宙学尺度上引力光偏折的存在。

尽管已有这些天体物理观测，目前仍缺乏对小尺度引力光偏折效应的验证。然而，引力波探测器 [9–13] 和高稳定性光学谐振腔 [14, 15] 等光学仪器的进步，为在实验室实验中研究光偏折提供了途径。最近，我们提出利用高精细度光学腔研究这一效应；这类光学腔用于先进光学实验中的频率稳定 [16–18]。在这样的腔中，光在两面高反射镜之间振荡，并被限制在腔内数毫秒。在此期间，光受到地球引力场的作用，实际上沿竖直方向下落。这种腔内光偏折效应（CILD效应）的特征可以从腔输出信号中观察到。

对 CILD效应进行实验验证将对基础物理学研究具有重要价值，因为这将使人们能够以可重复的方式，在良好控制的实验室条件下研究地球引力与光的相互作用。在这项工作中，我们提出了一种测量方案，它不仅能够验证这一效应，还能探讨其潜在应用。该方案利用垂直分段探测器，在两个不同高度分析腔输出信号。对于这种探测器，CILD效应产生的信号对腔共振附近的频率变化极为敏感。这意味着，这种信号可作为一种新型激光频率稳定方法的基础，该方法利用地球引力势。

为研究光学腔中的光偏折，我们首先需要描述地球引力场中的光传播。第二节说明，实验室尺度上的该引力场可近似为林德勒时空，即均匀加速时空。第三节利用该时空中的协变麦克斯韦方程推导出波动方程，其中引力红移和光偏折是主要的引力效应。第四节利用所得方程研究光在法布里-珀罗腔两面高反射镜之间的传播与反射。具体而言，我们分析腔输出信号如何取决于输入激光频率和探测器的垂直位置。基于分析结果，我们在第五节提出使用分段式探测器，比较腔输出信号在其上、下分段中的差异。我们指出，在接近腔共振频率时，探测器各分段之间的功率差对频率变化高度敏感，因此有望为开发新型频率稳定技术开辟新途径，并帮助在实验室尺度上探索引力光偏折。

II. 林德勒时空中的麦克斯韦方程组

在本研究中，我们将考察引力对光在光学腔中传播的影响

* sebastian.ulbricht@ptb.de

† johannes.dickmann@ptb.de

。本研究的理论基础是以麦克斯韦方程组来表述的，该方程组是在受引力扭曲的时空中构建的。由于我们已在此前的论文中详细讨论了这一理论框架 [16, 17]，此处仅用广义相对论的语言简要汇总基本公式和思想。

对于地球上的典型实验，时空可由林德勒线元描述

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^2 \mathrm{d}(ct)^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 \quad (1)$$

且近似精确。该线元考虑了近似均匀的重力加速度 $\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{e}_z$，其在我们星球表面的大小为 $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$ [19, 20]。在观测者位置周围的小区域内，可以忽略地球作为球形天体所产生的其他效应。在上式中，c为光速，$g_{\mu\nu}$ 为度规张量，其符号约定为 $(1,\ -1,\ -1,\ -1)$，采用笛卡尔坐标，且 $\boldsymbol{r} = (ct,\ x,\ y,\ z)$。与相对论物理学中的惯例一样，我们使用爱因斯坦求和约定：当希腊字母成对出现时，对其从 0 到 3 求和。

林德勒时空中的麦克斯韦方程组可写成协变形式

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0\,, \quad (2)$$

其中，$F^{\mu\nu}$ 为电磁场强度张量，其分量与通常的电场和磁场 [3, 21]相关。为了进行后续理论分析，方便起见，我们根据四维势 $A_\mu = (\Phi/c,\ \boldsymbol{A})$ 的偏导数构造该张量 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。这里，$\boldsymbol{A}$和 Φ 分别是电磁场的矢量势和标势。此外，在式（2）中，协变导数 $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma^\rho_{\mu\rho}$ 由偏导数 ∂_μ 和克里斯托费尔符号 $\Gamma^\rho_{\mu\rho} = g/c^2\left(1+gz/c^2\right)^{-1}\delta^3_\mu$构造而成，其中包含了林德勒时空的几何信息。

将四维势 A_μ 代入场强张量 $F^{\mu\nu}$，并利用式（2），即可推导出协变波动方程

$$\nabla_\mu\nabla^\mu \boldsymbol{A} = 0\,, \quad \nabla_\mu\nabla^\mu \Phi = 0\,, \quad (3)$$

这里假设满足洛伦兹规范条件 $\nabla_\mu A^\mu = 0$。对于传播中的电磁场，这一条件意味着标势 Φ可以通过矢势按以下关系导出

$$\partial_t \Phi/c = \left(1+\frac{gz}{c^2}\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)\boldsymbol{A}\right]\,. \quad (4)$$

因此，在下一节中，我们将把分析范围限定于矢势 $\boldsymbol{A}$，并用它来描述均匀引力场中的光传播。

III. 均匀引力场中的光传播

为继续进行理论分析，我们需要简化式（3）中给出的矢势 $\boldsymbol{A}$的波动方程。具体而言，我们要考虑引力对地球上光传播的最低阶影响。为此，我们在式（3）中代入协变导数的显式形式，并对小参数 $\epsilon = gL/c^2$ 展开，其中 L 是实验的典型长度尺度。由此得到的波动方程形式如下：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} - \left[\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)\boldsymbol{\nabla}\right]^2 \boldsymbol{A} = 0 + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\,, \quad (5)$$

该方程看起来与传统波动方程十分相似，但不同之处在于，通常的纳布拉算子 $\boldsymbol{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ 前面多了一个前因子（$1+gz/c^2$）。这一前因子会引发多种效应，例如引力红移和光偏折。下文将利用式（5）的解，讨论地球引力对均匀引力场中自由传播的光的影响。

A. 电磁矢势的一组基函数

与常规波动方程的情况一样，方程 (5) 的解可以表示为一组基函数的叠加。下文中，我们将选择一组近轴解作为基函数，使光的动量集中在 x 轴附近，即 $k_y,\ k_z \ll k_x$。在此条件下，振幅与偏振自由度彼此解耦，完整的矢势可表示为以下叠加：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \iiint \boldsymbol{e}\,\tilde{A}_{\boldsymbol{k}}\psi^{\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}(k_z^2)\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_x\,. \quad (6)$$

其中，$\boldsymbol{e}$ 是一个常量偏振矢量，$\psi^{\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r},\ t)$ 是标量基函数；对于任意选定的参数矢量 $\boldsymbol{k} = (k_x,\ k_y,\ k_z)$，它们满足方程 (5) 中的波动方程，并遵循色散关系 $\boldsymbol{k}^2 = (2\pi\nu)^2/c^2$。这些基函数的推导已在参考文献 [17]，中作了详细讨论，其形式如下：

$$\begin{aligned}&\psi^{\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r},t) \quad (7)\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\delta k_z}}\mathrm{e}^{-\frac{gz}{2c^2}}\,\mathrm{Ai}\left[-\frac{k_z^2}{\delta k_z^2}+\delta k_z z\right]\mathrm{e}^{ik_x x}\,\mathrm{e}^{ik_y y}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,,\end{aligned}$$

其中，$\delta k_z = 2(g\pi^2\nu^2/c^4)^{1/3}$ 是一个小参数，而 $\mathrm{Ai}(x)$ 是艾里函数 [22]，它源于波动方程 Eq. (5) 在垂直方向上的性质。

可以看出，叠加积分（式 (6)）中使用了非传统的参数空间 $\mathrm{d}(k_z^2)\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_x$。

这是因为基函数（式 (7)）满足完备性关系

$$\iiint \psi^{\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r},t)\psi^{*\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r}',t)\,\mathrm{d}(k_z^2)\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_x = \left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{8}$$

参见参考文献 [23],，其中狄拉克δ函数的前因子（$1+gz/c^2$）$^{-1}$ 补偿了林德勒时空无穷小体积 $(1+gz/c^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 所受的引力修正。在下一节中，我们将使用这组完备的基函数来计算引力畸变平面波的矢势。

B. 地球引力场中的平面波

为了利用式（7）中的基函数描述均匀引力场中的光传播，我们必须通过适当的边界条件来规定光的性质。本研究将考虑一束单色平面波，它最初从 $x=0$进入水平法布里-珀罗腔。这意味着边界条件为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}(z,t) = \boldsymbol{A}_0\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{\alpha-1/2}\exp\left[-2\pi i\nu t\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-\beta}\right], \tag{9}$$

其振幅 $\boldsymbol{A}_0$ 和频率ν均为常数。当引力加速度为零，即 $g\to 0$时，该边界条件变为 $\boldsymbol{A}_0\exp(-2\pi i\nu t)$，与$x=0$处平面波的熟知表达式相似。然而，在存在引力时，平面波的振幅和相位都分别受到因子（$1+gz/c^2$）的 $\alpha-1/2$ 次方和$-\beta$次方修正。如附录 A 所述，参数 α 可出于技术目的进行调整，而参数 β 则反映了所用激光的初始引力频率红移。

为进一步分析均匀引力场中的光传播，将边界条件式（9）按基函数（7）展开是很实用的。该展开为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}(z,t) = \iiint \tilde{\boldsymbol{A}}^b_{\boldsymbol{k}}\,\psi^{\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}(k_z^2)\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_x\,, \tag{10}$$

其中，展开系数为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}^b_{\boldsymbol{k}} = \int \boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}(z',t)\psi^{*\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r}',t)\left(1+\frac{gz'}{c^2}\right)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{11a}$$

$$= 2\pi\boldsymbol{A}_0\delta(k_x)\delta(k_y) \times\frac{1}{\sqrt{\delta k_z}}\int \mathrm{d}z'\mathrm{e}^{gz'b(\alpha,\beta)/c^2}\,\mathrm{Ai}\left[-\frac{k_z^2}{\delta k_z^2}+\delta k_z z'\right]. \tag{11b}$$

这里，式（11b）是在对 x'，y' 积分后，由 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}(z,\ t)$ 和 $\psi^{*\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r},\ t)$ 的显式形式得到的，而 z' 积分则保留到后续处理。此外，我们引入记号 $b(\alpha,\ \beta)=\alpha+2\pi i\beta\nu t$ 表示边界条件。

式（10）—（11）描述了 $x=0$处的边界条件。不过，接下来我们希望分析任意点$\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$处、满足 $x>0$的光传播。正如我们在文献 [17], 中详细讨论的那样，位置 $\boldsymbol{r}$ 处的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)$ 可以通过以下替换得到

$$\delta(k_x)\to\delta\left(k_x-\frac{2\pi\nu}{c}+\frac{c}{4\pi\nu}(k_y^2+k_z^2)\right), \tag{12}$$

在式（10）—（11）中进行上述替换。这在近轴区实现了色散关系 $2\pi\nu/c=\sqrt{k_x^2+k_y^2}+k_z^2$，其中 k_y，$k_z\ll k_x$。利用关系式（12），展开系数 $\tilde{\boldsymbol{A}}^b_{\boldsymbol{k}}$ 被矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)$ 在任意位置处的反粒子部分 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}$ 所替代。因此，我们得到

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \iiint \tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{k}}\psi^{\boldsymbol{k}}_{\delta k_z}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}(k_z^2)\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z \tag{13a}$$

$$= \boldsymbol{A}_0\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1/2}\mathrm{e}^{-2\pi i\nu(t-x/c)}\,\mathrm{e}^{S_g} +\mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{13b}$$

其中，对 k_x 和 k_y 的积分可利用狄拉克δ函数 (12) 轻松求得。式 (13b) 中剩余的对 z' 和 k_z^2 的积分汇集在复指数中

$$\mathrm{e}^{S_g} = \int \mathrm{d}z'\mathrm{e}^{gz'b(\alpha,\beta)/c^2}\,f(x,z,z'), \tag{14}$$

以及核函数

$$f(x,z,z') = \int \mathrm{d}(k_z^2)\frac{1}{\delta k_z}\mathrm{e}^{-i\frac{k_z^2cx}{4\pi\nu}}\,\mathrm{Ai}\left[-\frac{k_z^2}{\delta k_z^2}+\delta k_z z\right] \times\mathrm{Ai}\left[-\frac{k_z^2}{\delta k_z^2}+\delta k_z z'\right] \tag{15a}$$

$$= \sqrt{\frac{\nu}{icx}}\exp\left[\,i\frac{\pi\nu}{cx}(z-z')^2\,-\,i\frac{gx}{c^2}\frac{\pi\nu}{c}(z+z')\right] +\mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{15b}$$

这里，积分 (15a) 可借助艾里函数 [22]的余弦表示，改写为标准高斯积分并求解。此外，我们注意到，式 (15b) 中仅考虑了 $\epsilon=gL/c^2$的一次项。

将核函数 (15b) 代入式 (14)，最终得到复指数

$$S_g = \frac{gz}{c^2}b(\alpha,\beta)\,-\,i\frac{gz}{c^2}\frac{2\pi\nu}{c}\,x\,. \tag{16}$$

尽管该表达式的第一项包含有关边界条件的信息，但第二项

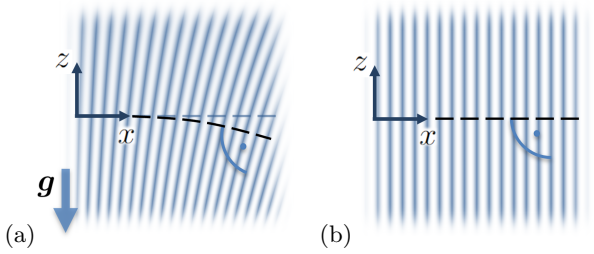


图 1. 水平传播的单色波在均匀引力场中的示意图（a），与无引力时的平面波情形（b）进行比较。我们发现，在引力作用下，光最初在 $x = 0$ 处呈平面波，并在沿正 x方向传播时向下弯曲。

与沿引力方向和光传播方向的坐标乘积 zx 成正比。因此，随着传播距离增加，光波的相位前沿会发生形变并向下弯曲。这体现了矢势的引力偏转，如图 1 所示。

将复指数（16）代入式（13b），均匀引力场中平面光波的矢势最终可写为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}_0 \left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1/2} \exp\left[\frac{gz}{c^2}\alpha + i\phi(x,z,t)\right] \quad (17)$$

其中相位为

$$\phi(x,z,t) = \frac{2\pi\nu}{c}\left(x - ct - \frac{gz}{c^2}x + \frac{gz}{c^2}\beta ct\right). \quad (18)$$

将此结果与式（9）比较可知，表达式（17）—（18）可写为初始矢势与一个相位指数项的乘积

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}_{\rm in}(z,t)\,\exp\left[\frac{2\pi i\nu}{c}\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1}x\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (19)$$

其中我们使用了对 $\exp(gz/c^2) = (1+gz/c^2)+\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 和 $(1-gz/c^2) = (1+gz/c^2)^{-1}+\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 的展开式。式（19）中的指数项描述了光在 x方向上的传播。该表达式中的 z 依赖性会导致垂直波前发生变形，并产生一种高度相关长度尺度，即红移波长 $\lambda_g(z) = (1+gz/c^2)c/\nu$，它体现了引力对光偏折的影响。此外，我们还要指出，式（19）中的指数项取决于林德勒时空的性质，与式（9）中的初始频率红移无关。

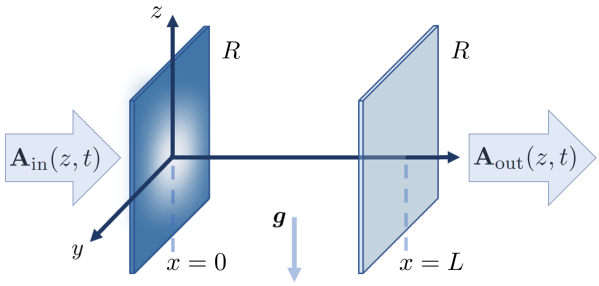


图 2. 水平法布里-珀罗腔的几何结构，由两块反射率为 $R = (1-\xi^2)$ 的平行平面镜组成。激光最初在 $x = 0$处经由平面镜进入腔内。在位于 $x = L$处的第二块平面镜后方探测腔输出信号。

IV. 引力中的法布里-珀罗腔输出信号

A. 腔输出处的矢量势

在上一节中，我们回顾了均匀引力场中平面单色光波传播的理论。现在，我们可以运用该理论研究引力如何影响光学腔实验的可测结果。在本文中，我们考虑一种特殊情况：水平法布里-珀罗腔由位于 $x = 0$ 和 $x = L$ 处的两面平行平面镜组成，如图2所示。假设腔反射镜仅允许 $\xi \ll 1$ 的一小部分光透射，而大部分光以振幅 $(1-\xi)\boldsymbol{A}_0$反射。在可以忽略光的散射和吸收的理想化情形下，振幅透射率参数 ξ 与通常的反射率$R = (1-\xi)^2$ [24] 直接相关。

简要讨论腔模型后，我们现在描述光在这一光学器件中的演化。为此，我们采用往返计算法；我们在先前的出版物 [17] 中已针对一般镜面讨论过这种方法。具有矢量势（19）的平面波从 $x = 0$ 进入腔，并向 $x = L$ 处的第二面镜子传播。当光到达这面镜子时，一小部分光透射出来，构成腔输出信号的第一项贡献

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(z,t) = \xi\,\boldsymbol{A}_{\rm in}(z,t)\,\exp\left[\frac{2\pi i\nu}{c}\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1}L\right]. \quad (20)$$

对于留在腔内的另一部分光，其振幅会减小一个因子 $(1-\xi)$，传播方向则因反射而从 x 改变为 $-x$。因此，光会传播回位于 $x = 0$的第一面镜子，在那里再次反射并返回

位于 $x = L$的输出镜。回到那里后，下一部分光

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(z,t) = \boldsymbol{A}^{(0)}(z,t)(1-\xi)^2 \exp\left[\frac{2\pi i\nu}{c}\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1} 2L\right] \tag{21}$$

离开腔并叠加到腔输出信号上。这个表达式与前一次往返的输出仅相差一个前因子（$1-\xi$）^{2},，该因子考虑了两次反射；此外还相差一个相位，该相位取决于传播距离增加了 $2L$ 以及相应的引力红移。继续这一过程，我们发现第 n次往返对腔输出信号的贡献为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{(n)}(z,t) &= \boldsymbol{A}^{(0)}(z,t) \\ &\times \left\{(1-\xi)^2 \exp\left[\frac{2\pi i\nu}{c}\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1} 2L\right]\right\}^n .\end{aligned} \tag{22}$$

最后，可以将所有往返的贡献相加，得到腔输出处的矢势

$$\boldsymbol{A}_{\rm out}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(n)}(z,t) \tag{23a}$$

$$= \frac{\xi \exp\left[\frac{2\pi i\nu}{c}\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1} 2L\right] \boldsymbol{A}_{\rm in}(z,t)}{1-(1-\xi)^2 \exp\left[\frac{2\pi i\nu}{c}\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1} 2L\right]}, \tag{23b}$$

其中，我们利用几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$，在 $|q| < 1$ 的条件下进行求和。我们发现，腔输出处的矢势与入射光的矢势之间存在一个正比因子，该因子取决于激光器-腔系统的两个参数（ν、 L和 ξ）以及时空的性质（g 和 z）。这表明腔输出信号携带着有关光偏折效应的信息，可用于在地球上的光学实验中研究引力，正如我们将在下一节讨论的那样。

B. 地球上法布里-珀罗腔的输出光强和输出功率

在上一节中，我们得到了水平法布里-珀罗腔输出端的矢势，如图 2 所示。在典型的腔实验中，测量的不是矢势 $\boldsymbol{A}_{\rm out}(z,\ t)$，而是与 $|\boldsymbol{A}_{\rm out}(z,\ t)|^2$ 成正比的输出光强。利用式（23b），可得该光强为

$$I_{\rm out}(\nu,z) = \frac{FI_0/4}{1+F\sin^2\left[\frac{2\pi\nu}{c}\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1} L\right]}, \tag{24}$$

其中 $I_0 = \varepsilon_0 c(2\pi\nu)^2|\boldsymbol{A}_0|^2/2$ 是最初进入腔内的平面波的恒定强度。我们进一步引入了参数 $F = 4R/(1-R)^2$,，它与通常用于表征光学腔的腔精细度 $\mathcal{F} = \pi\sqrt{F}/2$ 相关 [25, 26]。关于 Rindler 时空中强度定义的详细讨论，请参见附录 A。

由式（24）可见，输出光强不仅对腔长和激光频率的变化敏感，还取决于检测输出信号时的垂直位置 z；进一步讨论请参见参考文献 [27] 。

将式（24）中的光强在一个矩形探测器的表面上积分，该探测器的高度为 $2a$、宽度为 $2b$，其中心位于特定高度 h，即可得到收集到的输出功率

$$P_{\rm out}(\nu,h) = \int_{h-a}^{h+a}\int_{-b}^{b} I_{\rm out}(\nu,z)\,{\rm d}y{\rm d}z \tag{25a}$$

$$= \frac{AFI_0/4}{1+F\sin^2\left[\frac{2\pi\nu}{c}\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)^{-1} L\right]} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{25b}$$

其中 $A = 4ab$ 是探测器表面。结合公式（24），该表达式表明，探测器收集的功率与位于探测器表面中心位置 h 处的点状探测器所测得的强度成正比:

$$P_{\rm out}(\nu,h) = A\, I_{\rm out}(\nu,h)\,. \tag{26}$$

在下一节中，我们将利用这些发现和关于输出功率的表达式（25b），讨论一种适用于测量引力对激光器-腔体装置影响的探测器方案，并为激光频率稳定提供新的可能性。

V. 利用地球引力实现激光频率稳定

得益于最先进的高反射镜，精细度达到 $\mathcal{F} \sim 3\times10^5$ 及以上的光学腔可用于现代高精度实验 [14, 15, 28]。这类光学器件的一项主要应用是稳定激光频率。为简要回顾激光稳定的原理，我们考虑引力为零时的式（25b），即 $g = 0$。由该式可见，当光频率ν 偏离腔共振频率 $\nu_0 = nc/2L$ 时，高精细度腔的输出功率会迅速下降，其中 n 为整数模式数。这意味着，即使频率只有微小变化，也会导致腔体输出功率显著改变，这种变化可通过实验观测到。这一效应是边缘锁定技术的基石。该技术是研究并补偿激光频率波动、以便在高精度应用中稳定激光的成熟方法之一[29–31]。另一种常见方法是边带稳定技术，详见参考文献 [32, 33]。在这

项工作中，我们提出另一种频率稳定方法，该方法利用引力对法布里–珀罗腔的影响。具体而言，我们将利用腔输出信号取决于其在引力场中的高度 h 这一事实，正如上一节所述。最简单的分析方法是使用一个由上、下两个分段组成的探测器，如图 3 所示。在实验中，这种探测器可以采用常见的象限探测器[34]实现。根据式（25b），我们发现，分段中心处于不同垂直位置会使其输出信号不同，分别为 $P^{\pm}(\nu) = P_{\rm out}(\nu,\ \pm a/2)$。为量化这种差异，我们引入参数

$$\chi(\nu) = \frac{P^{+}(\nu) - P^{-}(\nu)}{P^{+}(\nu) + P^{-}(\nu)} = \frac{ga}{c^2}\,\frac{\pi\nu L}{c}\,\frac{F\sin\left(\frac{4\pi\nu}{c}L\right)}{1 + F\sin^2\left(\frac{2\pi\nu}{c}L\right)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \quad (27)$$

我们在此利用式（25b）得到了其对频率的显式依赖关系。如式（27）和图4所示，该 χ参数在共振频率 ν_0 处为零，但当频率 $\nu = \nu_0 + \delta\nu$ 接近共振时会迅速变化。对于我们主要关注的频率稳定应用中的小频率偏移 $\delta\nu$，可将 χ参数线性化为

$$\chi(\nu_0 + \delta\nu) = 4\pi^2\,\frac{ga}{c^2}\,\frac{FL^2\nu_0}{c^2}\,\delta\nu\ + \mathcal{O}(\delta\nu^2)\,, \quad (28)$$

这使我们能够量化所提出方法在频率稳定方面的能力。为说明这一点，我们来计算一个典型激光器-腔体装置的线性化 χ 参数。我们考虑一个 $L = 21\,\text{cm}$ 的腔，其反射镜反射率为 $R = 1 - 10^{-5}$，并与一台 Nd:YAG 激光器耦合；这种激光器广泛应用于引力波探测器等设备中。该激光器产生的光波长为 $\lambda = 1064\,\text{nm}$，对应的频率为 $\nu_0 = c/\lambda = 2.8\times10^{14}\,\text{Hz}$。此外，我们假设腔输出信号由一个分段式探测器记录，如图 3 所示，其中 $a = 1.5\,\text{cm}$。对于这样的系统，线性化 χ 参数为

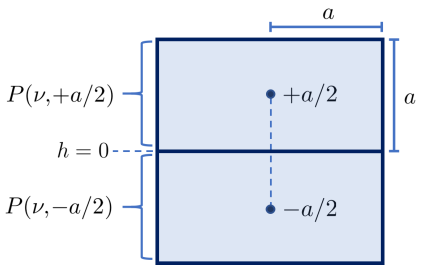


图3. 分段式探测器的几何结构。两个面积均为 $2a^2$的矩形分段上下叠置。该探测器相当于两个分别位于高度 $\pm a/2$处的点状探测器，分别收集来自上、下分段的光。

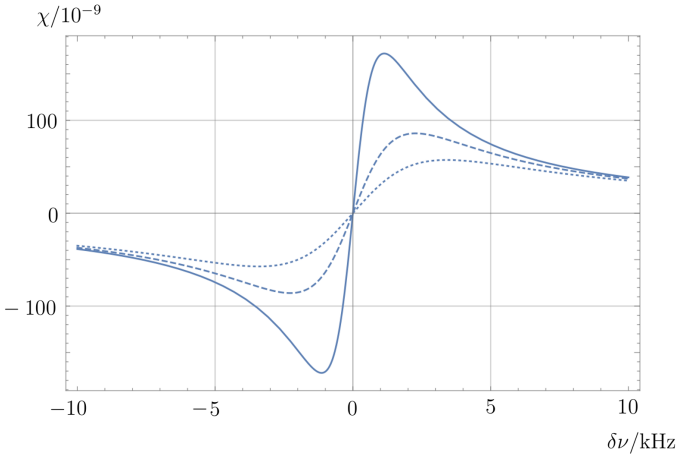


图4. 对于腔长为 $L = 21\,\text{cm}$的腔，χ参数（27）随相对于共振频率 $\nu_0 = 2.8\times10^{14}\,\text{Hz}$的频率偏移$\delta\nu$的变化。图中给出了探测器几何尺寸为 $a = 1.5\,\text{cm}$（参见图3）时的信号，镜面反射率分别为 $R = 1 - 3\times10^{-5}$（点线）、 $R = 1 - 2\times10^{-5}$（虚线）和$R = 1 - 10^{-5}$（实线）。对于后一种情况，根据式（30 $\chi/\Delta\chi \sim$ 200），可以估算信噪比。

值

$$\chi(\nu_0 + \delta\nu) \approx \frac{\delta\nu}{3\,\text{Hz}} \times 10^{-9}\,. \quad (29)$$

要从这个数值示例推断该方法稳定频率的能力，必须知道 χ 参数能够测量得多精确。在理想的实验条件下，例如优化测量频率、进行地震隔离并使用光学镜面涂层时，所提出的实验灵敏度仅受探测器光子散粒噪声的限制 [11, 35, 36]，

$$\Delta\chi = 0.86\times10^{-9}\,\left(\frac{P_{\rm det}}{\text{W}}\right)^{-1/2}\,, \quad (30)$$

其中，我们考虑了 1 Hz 的常见测量带宽 [37]。此外，$P_{\rm det} = P^{+}(\nu) + P^{-}(\nu)$ 是探测器输入总功率。假设典型激光功率为数瓦，式（30）给出的限制为 $\Delta\chi \approx 10^{-9}$。结合式（29），对于所给示例，频率变化最高可达 3 Hz，并且能够被分辨。将此结果与所用的约为 3×10^{14} Hz 的激光频率相比，可实现范围为 $\delta\nu/\nu \approx 10^{-14}$ 的相对频率稳定性。我们注意到，这仍低于当今最佳频率稳定方法 [14, 15] 所达到的 4×10^{-17}。不过，若采用优化的实验装置，而非假设的常见光学元件，可实现的频率稳定性将得到极大提升。尤其是，由于线性化的 χ 参数（28）与 $F = 4R/(1-R)^2$，呈线性关系，因此提高镜面反射率能够增强信号。考虑到先进镜面技术（例如晶体涂层）方面正在开展的研究

[38–40]或标准具 [41–44], , 可以设想具有 $R \sim 1 - 3 \times 10^{-7}$ 的未来假想腔，对应于 $\mathcal{F} = \pi\sqrt{F}/2 = 1 \times 10^{-7}$。在这一参数范围内，可采用基于 CILD效应 的稳定方法，将激光频率稳定至 10^{-17} 的水平，如表 I 所示。

本文提出的频率稳定方法相比以往方法具有一些优势。具体而言，观测到的 χ参数不受激光强度影响，因此对强度波动不敏感。这种不敏感性是我们的方法与边带稳定技术的共同特点，也使它们相较于边缘稳定法具有显著优势。此外，得益于探测器信号（27）的不对称性，所提出的方法能够判断应提高还是降低激光频率，才能使其达到腔共振频率 ν_0。相比之下，边带稳定技术基于对称的信号输出进行分析，因此这一点构成了优势。最后，本文提出的方法无需进行频率调制，即可直接将激光频率稳定到 ν_0 ，而另外两种方法则分别评估边带信号，或评估远离共振频率处的强度变化。结合相对简单的实验装置，上述优势使基于 CILD效应的激光频率稳定方法适用于实际应用，尤其适用于引力波探测等需要较大激光功率的场景。

表 I. 使用 $a = 1.5\text{cm}$ 分段式探测器分析 $L = 21\,\text{cm}$ 腔的输出光强时， $\chi(\nu_0 + \delta\nu)$ 的特性；该腔假设具有高达 $R = 10^{-5} \ldots 10^{-7}$ 的镜面反射率，并与频率为 $\nu_0 = 2.8 \times 10^{14}\,\text{Hz}$（波长为 $\lambda = c/\nu_0 = 1064\,\text{nm}$）的激光耦合。最大 $\chi_{\max} \approx \frac{16}{3}\frac{ga}{c^2}\frac{L\nu_0}{c}\frac{1}{1-R}$ 可在偏离腔共振 $\nu_0 \pm \delta\nu(\chi_{\max})$ 的频率处测得，其中偏移量可估算为 $\delta\nu(\chi_{\max}) \approx \frac{1}{4\pi}\frac{c}{L}(1-R)$。共振处 χ- 参数的倒数斜率 $\delta\nu_{\min} = \delta\nu/\chi(\nu_0 + \delta\nu)|_{\delta\nu=0} \approx \frac{\delta\nu_{(\chi\max)}}{2\chi_{\max}}\Delta\chi$ 给出了可分辨频率变化的极限。将该值与共振频率 ν_0 的比值计算后，我们得到相对灵敏度 $\delta\nu/\nu \approx \delta\nu_{\min}/\nu_0$ 的估计值。需要指出的是，这些数值与象限探测器灵敏度 $\Delta\chi$ 呈线性关系，其范围为十亿分之一（10^{-9}）。

$1-R$	$\chi_{\max}$ [ppb]	$\delta\nu(\chi_{\max})$ [Hz]	$\delta\nu_{\min}$ [Hz/十亿分之一]	$\delta\nu/\nu$
1×10^{-5}	172	1137	3	1×10^{-14}
3×10^{-6}	573	238	0.2	7×10^{-16}
1×10^{-6}	1.7×10^{3}	114	3×10^{-2}	1×10^{-16}
3×10^{-7}	5.7×10^{4}	24	2×10^{-3}	7×10^{-18}
1×10^{-7}	1.7×10^{4}	11	3×10^{-4}	1×10^{-18}

其范围为 $\delta\nu/\nu = 10^{-15} \ldots 10^{-17}$。因此，CILD 效应不仅能够在实验室尺度上验证引力光偏折，还能为频率稳定提供一种新的替代方案，可应用于现代高精度实验。

VI. 总结与展望

本文对均匀引力场中的光传播进行了理论分析。该分析基于引力扭曲的（Rindler）时空中自由电磁场麦克斯韦方程组的协变表述。虽然所建立的理论可应用于各种情形，但本文着重研究位于地球实验室中的 Fabry-P´erot 腔内平面波的传播。我们发现，腔谐振器的输出光强会受到引力场的影响。具体而言，结果表明，由于腔内光偏折效应（CILD效应），腔的输出光强不仅取决于所用激光的频率，也取决于其在引力场中的垂直位置。基于这一效应，我们提出了一种探测器方案，可用于将激光稳定到腔共振频率。具体来说，提出采用垂直分段探测器，在腔共振附近产生陡峭的不对称输出信号。使用当前最先进的光学元件，例如高反射率反射镜以及由单晶硅、蓝宝石或金刚石制成的腔，这种方法有望与近期提出的频率稳定方法相竞争。

致谢

作者感谢 Stefanie Kroker 提供的宝贵讨论。本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）资助，资助项目属于德国卓越战略——EXC 2123 量子前沿——390837967。

附录 A：林德勒时空中的光功率与光强

1. 一般情形

为了研究光在均匀引力场中的行为，我们需要考察能量、功率和强度等可观测量。利用协变守恒定律，可以优雅地求得这些量

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0 \tag{A1}$$

对于电磁能动张量的 0 分量

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right), \tag{A2}$$

例如，参见 [21]。根据时空度规 (1) 的导数定义克里斯托费尔符号后，可将式 (A1) 改写为

$$\partial_0 T^{00} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\left(\sqrt{-g}T^{0i}\right) = 0\,, \tag{A3}$$

其中，$\sqrt{-g} = \left(1 + gz/c^2\right)$ 为度规行列式。所得表达式构成了能量密度与坡印廷矢量的连续性方程 $\partial_t w(\boldsymbol{r},\ t) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},\ t)$。因此，这两个量与能量动量张量的关系为 $w(\boldsymbol{r},\ t) = \sqrt{-g}T^{00}$ 以及 $S^i(\boldsymbol{r},\ t)/c = \sqrt{-g}T^{i0}$。

对连续性方程进行空间积分，可得到如下形式的守恒定律：$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = P$，它以积分形式联系能量与功率：

$$E = \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}^3\sqrt{-g}T^{00} = \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}^3 w(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{A4a}$$

$$\begin{aligned} P &= -c\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}^3\sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\left(\sqrt{-g}T^{0i}\right) \\ &= -\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}^3\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \int_{\partial V=\Sigma}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}\,. \end{aligned} \tag{A4b}$$

根据式 (A4b) 中的高斯积分定理，我们可以将功率写成对闭合曲面 Σ 的积分。所得结论对于非闭合曲面也成立，例如用于分析电磁波强度的探测器平面。被积函数 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},\ t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = I(\boldsymbol{r},\ t)\mathrm{d}\Sigma$ 将坡印廷矢量与曲面 Σ 上的强度$I(\boldsymbol{r},\ t)$ 联系起来。

2. 均匀引力场中对垂直探测器表面的应用

附录 A 1 中的表达式 (A4b) 给出了功率的定义，功率由对特定曲面上的坡印廷矢量$S^i(\boldsymbol{r},\ t)/c = \sqrt{-g}T^{i0}$积分确定。该曲面代表实验中的探测器，可选为 $x = \mathrm{const}$，并为 $y,\ z$ 积分选取适当的积分限。在这一特定情形下，微元面矢量表示为 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，功率积分的被积函数

$$P = \int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1(z)}^{y_2(z)} S^1(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{A5}$$

$$= \int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \sqrt{-g}\,c\,T^{10}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,, \tag{A6}$$

可视为强度 $I(\boldsymbol{r},\ t) = \sqrt{-g}\,c\,T^{10}$。例如，假设采用式 (19) 中的 y 偏振平面波矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)$，则强度可进一步简化为

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{-1}\mathrm{Re}\left[\partial_t\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\cdot\partial_x\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r},t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(2\pi\nu_0\right)^2\left(1+\frac{gz}{c^2}\right)^{2\alpha-\beta-3}|\boldsymbol{A}_0|^2\,. \end{aligned} \tag{A7}$$

方程中出现项（$1+gz/c^2$）表明，实验的初始条件可能导致随高度变化的强度衰减。然而，只有当测量强度时，对于 $L \sim 1$厘米的距离，相对精度达到 $gL/c^2 \sim 10^{-18}$，这种衰减才会变得显著；这一精度比当前强度测量技术的精度高出九个数量级 [37]。因此，在当前实验设备的技术能力范围内，我们可以假设平行于探测器表面的平面波具有恒定的强度分布 $I_0 = \varepsilon_0 c\left(2\pi\nu_0\right)^2|\boldsymbol{A}_0|^2/2$，且探测器表面位于 $x = \mathrm{const}$处。

[1] A. Einstein, *The Foundation of the General Theory of Relativity* **49**, 769 1916, Annalen der Physik（）。[2] F. W. Dyson、A. S. Eddington 和 C. Davidson, *A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse ofMay 29*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, **220**, 291（1920）。[3] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 芝加哥（1984）。[4] D. Walsh、R. Carswell、R. Weymann, *0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens?*, Nature **279**, 381（1979）。[5] S. Refsdal, *On the possibility of determining Hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect*, Mon. Notices of the Royal Astron. Soc. **128**, 307 1964（）。

[6] M. J. Irwin、R. L. Webster、P. C. Hewett、R. T. Corrigan 和 R. T. Jedrzejewski, *Photometric variations in the Q2237 + 0305 system - First detection of a microlensing event* **98**, 1989 1989《天文学杂志》（）。[7] 事件视界望远镜合作组等, *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*,《天体物理学杂志快报》**875** L1（2019年）。[8] 事件视界望远镜合作组等, *First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VI. Testing the Black Hole Metric*《天体物理学杂志快报》**930** L17（2022年）。[9] G. M. Harry 和 LIGO科学合作组, *Advanced LIGO: The next generation of gravitational wave detectors*,《经典与量子引力》**27**，084006（2010年）。

[10] B. Sathyaprakash 等, *Scientific objectives of EinsteinTelescope*, 《经典与量子引力》29，124013（2012年）。[11] L. K. Dooley 等, *Status of GEO 600*, 《物理学杂志：会议系列》610，012015（2015年）。[12] J. Baker 等, *The Laser Interferometer Space Antenna: Unveiling the Millihertz Gravitational Wave Sky*, arXiv:1907.06482（2019年）。[13] ET指导委员会, *ET design Report update 2020*, 报告编号 ET-0007B-20（2020年）。[14] T. Kessler、C. Hagemann、C. Grebing、T. Legero、U. Sterr、F. Riehle、M. Martin、L. Chen 和 J. Ye, *A sub-40-mHz-linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity* **6**, 687 2012 , 《自然·光子学》（）。[15] D. G. Matei 等, *1.5 μm Lasers with Sub-10 mHz Linewidth* , 《物理评论快报》（）。[16] S. Ulbricht、J. Dickmann、R. A. M¨uller、S. Kroker 和 A. Surzhykov, *Gravitational light deflection in Earth-based laser cavity experiments* **101**, , 《物理评论D》（R）（）。[17] S. Ulbricht、J. Dickmann、R. A. M¨uller、S. Kroker 和 A. Surzhykov, *Impact of Earth's gravity on Gaussian beam propagation in hemispherical cavities*, 《物理评论D》104，062002（2021年）。[18] S. Ulbricht, *Theoretical Investigation of Gravitational Acceleration Effects in Earth-based High Precision Ex-periments*, 博士论文，布伦瑞克卡罗洛·威廉明娜工业大学（2022年）。[19] W. Rindler, *Hyperbolic Motion in Curved Space Time*, 《物理评论快报》119，2082（1960年）。[20] W. Rindler, *Kruskal space and the uniformly accelerated frame* **34**, 1174 1966 , 《美国物理学杂志》（）。[21] S. M. Carrol, *An Introduction to General Relativity –Spacetime and Geometry*, Addison Wesley，旧金山（2004年）。[22] O. Vall´ee 和 M. Soares, *Airy Functions and Applica-tions to Physics* 2004 , 帝国理工学院出版社，伦敦（）。[23] P. M. Hunt, *A continuum basis of airy functions: Matrix elements and a test calculation* **44**, , 《分子物理学》-（）。[24] E. Hecht, *Optics*，第4卷，Addison Wesley，旧金山（2002年）。[25] N. Ismail、C. C. Kores、D. Geskus 和 M. Pollnau, *Fabry-Pérot resonator: spectral line shapes, generic and related Airy distributions, linewidths, finesses, and performance at low or frequency-dependent reflectivity*, 《光学快报》24，16366（2016年）。[26] S. T. Dawkins、J. J. McFerran 和 A. N. Luiten, *Considerations on the measurement of the stability of oscillators with frequency counters*, 《IEEE超声学、铁电学与频率控制汇刊》54，918（2007年）。[27] 我们注意到，强度（24）在坐标中心 $z' = z - h$发生垂直平移时保持不变，前提是同时将频率替换为相应的红移频率 $\nu' = \nu\left(1 + gh/c^2\right)^{-1}$，使得 $I_{\rm out}(\nu', z') = I_{\rm out}(\nu, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$。这意味着表达式（24）不依赖于度规（1）所描述的坐标系的初始选择，因此适用于描述均匀引力场中任意高度 h 处的强度分布。

[28] A. D. Ludlow、X. Huang、M. Notcutt、T. Zanon-Willette、S. M. Foreman、M. M. Boyd、S. Blatt 和 J. Ye, *Compact thermal-noise-limited optical cavity for diode laser stabilization at* 1×10^{-15} **32**, 641 2007 , 《光学快报》（）。[29] R. L. Barger、M. S. Sorem 和 J. L. Hall, *Frequency stabilization of a cw dye laser*, 《应用物理快报》22，573（1973）。[30] J. Helmcke、S. A. Lee 和 J. L. Hall, *Dye laser spectrometer for ultrahigh spectral resolution: design and performance* **21**, 1686 1982 , 《应用光学》（）。[31] K. Huang 等, *Microcontroller-based locking in optics experiments*, 《科学仪器评论》85，123112（2014）。[32] R. W. P. Drever、J. L. Hall、F. V. Kowalski、J. Hough、G. M. Ford、A. J. Munley 和 H. Ward, *Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator*, 《应用物理B辑》31，97（1983）。[33] E. D. Black, *An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization* **69**, , 《美国物理学杂志》（）。[34] F. Diorico、A. Zhutov 和 O. Hosten, *Laser-cavity locking at the* 10^{-7} *instability scale utilizing beam elipticity*, arXiv:2203.04550v1（2022）。[35] J. M. Robinson、E. Oelker、W. R. Milner、W. Zhang、T. Legero、D. G. Matei、F. Riehle、U. Sterr 和 J. Ye, *Crystalline optical cavity at 4 K with thermal-noise-limited instability and ultralow drift*, 《光学》6，240（2019）。[36] M. Notcutt、L.-S. Ma、A. D. Ludlow、S. M. Foreman、J. Ye 和 J. L. Hall, *Contribution of thermal noise to frequency stability of rigid optical cavity via Hertz-linewidth lasers* **73**, 031804 2006 , 《物理评论A辑》（R）（）。[37] W. A. Edelstein、J. Hough、J. R. Pugh 和 W. Mar- tin, *Limits to the measurement of displacement in an interferometric gravitational radiation detector*, 《物理学杂志E：科学仪器》11，710（1978）。[38] G. D. Cole、W. Zhang、B. J. Bjork、D. Follman、P. Heu、C. Deutsch、L. Sonderhouse、J. Robinson、C. Franz、A. Alexandrovski、M. Notcutt、O. H. Heckl、J. Ye 和 M. Aspelmeyer, *High-performance near- and mid-infrared crystalline coatings* **3**, 647 2016 , 《光学》（）。[39] G. D. Cole、W. Zhang、M. Martin 等, *Tenfold reduction of Brownian noise in high-reflectivity optical coatings* **7**, 644 2013 , 《自然·光子学》（）。[40] G. M. Harry、T. P. Bodiya 和 R. DeSalvo 编, *Opti-cal coatings and thermal noise in precision measurement*，剑桥大学出版社（2012）。[41] J. Dickmann 和 S. Kroker, *Highly reflective low-noiseetalon-based meta-mirror*, 《物理评论D》98，082003（2018）。[42] K. Somiya 等, *Reduction of coating thermal noise by using an etalon* **375**, 1363 2011 , 《物理快报A辑》（）。[43] A. G. Gurkovsky 等, *Reducing thermal noise in future gravitational wave detectors by employing Khalili etalons*, 《物理快报A辑》375，4147（2011）。[44] J. Dickmann、S. Sauer、J. Meyer、M. Gaedtke、T. Siefke、U. Br¨uckner、J. Plentz 和 S. Kroker, *Experimental re-alization of a 12, 000-finesse laser cavity based on a low-noise microstructured mirror*, 《通讯物理》6，16（2023）。