arXiv:2304.01087v1 [math.FA] 3 Apr 2023

福克-索博列夫空间上的傅里叶乘子与伪微分算子

SUNDARAM THANGAVELU

Abstract. 任意作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子 T，都会在福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$上导出算子 $S = B \circ T \circ B^*$，其中 B 是巴格曼变换。本文将确定与 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的傅里叶乘子和伪微分算子相对应的那些 S，并研究它们在 Fock-Sobolev 空间 $\mathcal{F}^{s,\,2}(\mathbb{C}^n)$上的有界性。

1. Introduction

考虑福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$，它由定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数 F 组成，这些函数关于测度 $d\nu(z)$ 平方可积。 $= c_n e^{-\frac{1}{2}|z|^2} dz$.本文关注福克空间上的某些有界线性算子。众所周知，巴格曼变换B 是一个酉算子，它将 $L^2(\mathbb{R}^n)$映射到 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$上。任意作用于$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子 T，都会在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$上导出算子 $S = B \circ T \circ B^*$。有一族酉算子 $\pi(z)$，以 $\mathbb{C}^n$ 为指标，作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$上，其作用方式如下:

$$\pi(z)f(\xi) = e^{i(x\cdot\xi + \frac{1}{2}x\cdot y)} f(\xi + y),\ z = x + iy.$$

这族酉算子与海森堡群的薛定谔表示有关，参见 Folland。因此，由其不可约性可知，在所有算子中，唯一与所有算子都对易的算子是恒等算子的常数倍。另一方面，对于某些参数，存在与算子或算子对易的算子族。对于这样的算子，转移算子预计具有某种不变性。

注意到，这些算子是平移，而与之对易的算子有明确的描述。事实上，所有这类算子都是傅里叶乘子，即存在某个函数，使得

$$Tf(x) =: T_m f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\, m(\xi)\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

回顾一下，巴格曼变换（参见 Bargmann [1] 和 Zhu [19]）定义为

$$Bf(z) = e^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-\frac{1}{2}|u|^2} e^{u\cdot z} du = e^{\frac{1}{4}z^2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} e^{i\xi\cdot z} d\xi.$$

$\pi(ia)$ 上的平移 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上诱导出作用 $\rho(a)$，其定义为

$$\rho(a)F(z) = F(z + a) e^{-\frac{1}{2}a\cdot z} e^{-\frac{1}{4}|a|^2}.$$

由此可见， $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的平移不变算子对应于 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上与 $\rho(a)$ $a \in \mathbb{R}^n$. 对易的算子。还有另一类算子 $\pi(b)f(x) = e^{ib\cdot x} f(x)$,

日期：2023年4月4日。

称为调制算子，它们生成作用于福克空间上的算子 $\rho(ib)$，其定义如下：

$$\rho(ib)F(z) = F(z+ib)e^{\frac{1}{2}ib\cdot z}e^{-\frac{1}{4}|b|^2}.$$

在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上与 $\pi(b)$ 对易的算子恰好是（逐点）乘法算子。在福克空间上，它们对应于与 $\rho(ib)$ 对易的算子。更一般地，我们有以下由 $\mathbb{C}^n$ 索引的酉算子族：

$$\rho(w)F(z) = F(z+w)e^{-\frac{1}{2}\bar{w}\cdot z}e^{-\frac{1}{4}|w|^2}.$$

由于这些算子与在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上实现的海森堡群的一个不可约酉表示相关，因此，对所有 $w \in \mathbb{C}^n$，福克空间上与 $\rho(w)$ 对易的算子只能是恒等算子的常数倍。

考虑 $L^2(\mathbb{R})$ 上的希尔伯特变换 H。它是一个平移不变算子，其乘子为 $m(\xi) = -i\,sign\,\xi$. 在 [18] 中，Zhu 计算了转移算子，并证明

$$(B\circ H\circ B^*)F(z) = \int_{\mathbb{C}} F(w)\,\varphi(z-\bar{w})\,e^{\frac{1}{2}z\bar{w}}\,d\nu(w)$$

其中 φ 可用误差函数 A. 显式表示。受此例启发，Zhu 建议考虑如下形式的算子

$$S_\varphi F(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w)\,\varphi(z-\bar{w})\,e^{\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}\,d\nu(w)$$

其中 $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$，并提出了如何刻画使得 S_φ 在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上有界的那些 φ 的问题。利用上述傅里叶乘子之间的联系，作者在 [6] 中证明，S_φ 在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上有界，当且仅当

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)e^{-(\xi-\frac{i}{2}z)^2}d\xi$$

对于某些 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$。通过计算 $B\circ T_m\circ B^*$ 对再生核 $k(z,\bar{w})$ 的作用，可以给出一个更简短的证明。$= e^{\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}$. 类似地，与 $\rho(ib)$ 对易的 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上的算子具有如下形式：

$$\widetilde{S}_\varphi F(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w)e^{\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}\,\varphi(z+\bar{w})\,d\nu.$$

这些算子对应于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的逐点乘子，Bais 和 Dogga 已经研究过它们 [2]。我们还可以用 m 来描述 φ，其中 m 由 $\widetilde{}$ 关系 $(B^*\circ S_\varphi\circ B)f = mf$. 定义。

$\widetilde{}$尽管算子 S_φ 和 S_φ 看起来极为相似，但它们的性质却大不相同。事实上，这些算子的有界性受到不确定性原理的限制。

定理 1.1. 对于 $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$，算子 S_φ 在福克空间上有界，当且仅当 $\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)e^{-(\xi-\frac{i}{2}z)^2}d\xi$对于某个 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 成立；而 $\widetilde{S}_\varphi$有界，当且仅当$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)e^{-(\xi-\frac{1}{2}z)^2}d\xi$对于另一个 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 成立。此外，对于任意非恒定的 $\widetilde{\varphi}$，S_φ 或 S_φ 都无界。

上述定理对 φ的描述表明，我们可以考虑以下变换。对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$，其中 $d\gamma(x) = e^{-|x|^2}dx$，定义

$$Gf(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{-(\xi-\frac{i}{2}z)^2}d\xi = e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{iz\xi}\,d\gamma(\xi).$$

我们可以用巴格曼变换表示 G，因此它被称为 Gauss-Bargmann 变换。在福克空间上定义酉算子 U，使得 $UF(z) = F(-iz)$。于是我们得到 $Gf = (U^* \circ B \circ E)f$，其中 $Ef(\xi) = f(\xi)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$.。由于 E 是从 $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的酉算子，因此可知 $G: L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \to \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 是酉的。由此可见，当且仅当对于某个 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，有 $\varphi = Gm$ ($\subset L^2, \mathbb{R}^n, d\gamma$) 时， S_φ 是有界的。换言之， φ 必须属于子空间 $GL^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$。使用 G 还有另一个优点：我们可以对算子 S_φ. 作出如下有趣的描述

定理 1.2. 有界线性算子 S在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上与所有 $\rho(a)$ $a \in \mathbb{R}^n$ 可交换，当且仅当存在一个 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得

$$SF(z) = e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)\, G^*F(\xi)\, e^{iz\cdot\xi}\, d\gamma(\xi).$$

注 1.3. 上述表示表明，我们使用记号 $S_\varphi F = \varphi * F$. 于是，$G^*$ 将这种卷积变为乘积： $G^*(\varphi * F) = (G^*\varphi)\,(G^*F)$，其中 $\varphi = Gm$. 还有一个~类似的表示适用于算子 S_φ.

~定理 1.4. 有界线性算子 S在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上与所有 $\rho(ib)$ $b \in \mathbb{R}^n$ 可交换，当且仅当存在一个 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\widetilde{S}F(z) = e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)\; B^*F(\xi)\, e^{z\cdot\xi}\, d\xi.$$

~注 1.5. 我们注意到，在上述定理中，与 S_φ 对应的乘子 m 由 $m(\xi)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} = B^*\varphi$. 给出

在近期的一项工作中， [7] 研究了形如 S_φ 的算子在分数阶 Fock-Sobolev 空间 $\mathcal{F}^s$, $2(\mathbb{C}^n)$ $s \geq 0$ 上的有界性；这些空间是 Hermite-Sobolev 空间 $W^{s,}{}_H{}^2(\mathbb{R}^n)$ 在巴格曼变换下的像。回顾一下，记 $H = -\Delta + |x|^2$ 为 Hermite 算子，则空间 $W^{s,}{}_H{}^2(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的子空间，由满足 $H^{s/2}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的那些 f 构成。这里的分数次幂 $H^{s/2}$ 是利用 Hermite 算子的显式谱分解定义的。Cho 和 Park [8] 的工作还表明， $\mathcal{F}^s, 2(\mathbb{C}^n)$ 也是加权 Bergman 空间。由于 Hermite 函数被映射为单项式 z^α ，因此考察空间 $\mathcal{F}^s, 2(\mathbb{C}^n)$ 是很自然的。除了具有平移不变性外，空间 $W^{s,}{}_H{}^2(\mathbb{R}^n)$ 在傅里叶变换下也保持不变，因此这些空间上的每个傅里叶乘子也是逐点乘子。利用这些性质， [7] 中的作者证明， S_φ 在 $\mathcal{F}^s, 2(\mathbb{C}^n)$ 上有界，当且仅当 φ 具有与定理 1.1 相同的表示形式，其中 m 现在定义了 $W^{s,}{}_H{}^2(\mathbb{R}^n)$ 上的一个傅里叶乘子。当 $s = 0$ 时，已知 S_φ 在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上有界，当且仅当相应的 m 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$。对于分数阶情形，目前尚无此类刻画。

$L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$ 在 G 下的像与 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 B 下的像相同，也就是 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$。对于任意 $s \geq 0$, $W^{s,}{}_H{}^2(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^{-s/2}$. 下的像。同样，我们可以

将 Gauss-Sobolev 空间 $W^{s,2}_G(\mathbb{R}^n)$ 定义为 $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$ 在 $L^{-s/2}$ 下的像，其中 $L = -\Delta + x\cdot\nabla$ 是 Ornstein-Uhlenbeck 算子。事实证明，$W^{s,2}_G(\mathbb{R}^n)$ 在 G 下的像与 $W^{s,2}_H(\mathbb{R}^n)$ 在 B 下的像重合，即与 $\mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 相同。Wick 和 Wu 在 [17] 中研究了算子 S_φ 在 $\mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 上的有界性，其中 $s = k$ 为非负整数；Cao 等人在 [7] 中研究了一般情形。我们可以简化他们的证明并改进结果，得到以下刻画。设 $MW^{s,2}_H(\mathbb{R}^n)$ 为 Hermite-Sobolev 空间 $W^{s,2}_H(\mathbb{R}^n)$ 的所有傅里叶乘子构成的集合。我们将 $M\mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 记为 $MW^{s,2}_H(\mathbb{R}^n)$ 在 G 下的像，它是 $\mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 的真子空间。[17] 和 [7] 的结果可重新表述如下。

定理 1.6. 算子 S_φ 在 $\mathcal{F}^{s,\,2}(\mathbb{C}^n)$ 上有界，当且仅当 $\varphi \in M\mathcal{F}^{s,\,2}(\mathbb{C}^n)$。换言之，对于某个 $m \in MW^{s,\,2}_H(\mathbb{R}^n)$，有 $\varphi = Gm$。

由于我们还没有 $MW^{s,\,2}_H(\mathbb{R}^n)$ 的刻画，因此最好找出关于 m 的易于检验的充分条件。对于 $s = k$ 这一情形，作为部分刻画，我们可以证明：对所有$|\alpha| \le k.$， $m \in MW^{k,\,2}_H(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $\partial^\alpha m \circ H^{-|\alpha|/2}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界

乘子中一个有用的子类由 $L^\infty_k(\mathbb{R}^n)$ 给出，它是满足以下估计的函数空间：$|\partial^\alpha m(x)| \le C(1+|x|)^{|\alpha|}$ 对所有 $|\alpha| \le k.$ 均成立。可以证明，$L^\infty_k(\mathbb{R}^n)$ 包含于 $MW^{k,\,2}_H(\mathbb{R}^n)$。我们用 $\mathcal{F}^{k,\,2}_0(\mathbb{C}^n)$ 表示 $L^\infty_k(\mathbb{R}^n)$ 在高斯－巴格曼变换下的像。当 $k = 0$ 时，我们就简单地写作 $\mathcal{F}_0(\mathbb{C}^n)$，而不写 $\mathcal{F}^{0,\,2}_0(\mathbb{C}^n)$。

定理 1.7。设 k 为非负整数。若假设 $\varphi \in \mathcal{F}^{k,2}_0(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{F}^{k,2}(\mathbb{C}^n)$，或等价地，$\varphi = Gm$，$m \in L^\infty_k(\mathbb{R}^n)$，则 S_φ 在 $\mathcal{F}^{k,2}(\mathbb{C}^n)$ 上有界。

例。 $\varphi \in \mathcal{F}^{k,2}_0(\mathbb{C}^n)$ 的一个例子由函数 $\varphi_t(z) = c_t\, e^{-\frac{1}{4}\frac{it}{1+it}z^2}$ 给出，该函数对应于乘子 $m_t(\xi) = e^{-it|\xi|^2}$。 $t \in \mathbb{R}.$ 傅里叶乘子 T_{m_t} 是由拉普拉斯算子 Δ 在 $\mathbb{R}^n.$ 上生成的薛定谔群 $\ddot{} e^{it\Delta}$。因此，算子 $B \circ e^{it\Delta} \circ B^*$ 在每个 $\mathcal{F}^{k,2}(\mathbb{C}^n)$ 上都有界。函数 $u(z,t) = e^{-\frac{1}{4}z^2} S_{\varphi_t} F(z)$ 求解了与 $\mathbb{C}^n.$ 上的复化拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_j^2}$ 相关的薛定谔方程。

注 1.8. 由于 Hermite-Sobolev 空间在傅里叶变换下保持不变，因此 $\partial^\alpha m \circ H^{-|\alpha|/2}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界，当且仅当 $T_{\partial^\alpha m} \circ H^{-|\alpha|/2}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界。由于 Hermite 算子 H 经 Bargmann 变换后的像是福克空间上的数算子 $\mathcal{R} = 2\sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + n$，因此上述关于 $\partial^\alpha m$ 的条件等价于 $S_{\partial^\alpha \varphi} \circ \mathcal{R}^{-|\alpha|/2}$在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上有界，其中 $\varphi = Gm.$。若能找到关于 φ 的尖锐条件，从而得出 S_φ 在 Fock-Sobolev 空间上有界，将会很有意义。

现在我们考虑作用在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上的有界线性算子，它们不一定具有 $S_{\varphi.}$ 的形式。注意，福克空间上的任意此类算子都是形如

$$SF(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w)K(z,\bar{w})d\nu(w)$$

的积分算子，其中 $K(z,w) = K_S(z,w)$ 是适当的核，并且是 $\mathbb{C}^{2n}$. 上的全纯函数。事实上，由于我们有再生公式

$$F(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w)g(\cdot,\bar{w})d\nu(w),\ g(z,w) = g_w(z) =: e^{\frac{1}{2}z\cdot w}$$

由此可得 $K_S(z,w) = Sg(\cdot,w)(z)$。这启示我们考虑核为 $K(z,w)$ 的积分算子，并探讨它们在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上有界的充分条件。稍微改变记号，记作 $K(z,w) = k(z,z-w)e^{\frac{1}{2}z\cdot w}$，我们也可以将它们写成如下形式

$$S_K F(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w)k(z,z-\bar{w})\, e^{\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}\, d\nu(w)$$

并称其为 福克空间上的 m 阶伪微分算子，理由如下 .

回顾一下，当 $m = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(-i)^{|\alpha|}\,\xi^\alpha$ 为多项式时，傅里叶乘子算子T_m 化为微分算子 $m(D) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha\,\partial^\alpha$. 。由于多项式 m 也可以用 Hermite 多项式表示为 $m(\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} b_\alpha(-i)^{|\alpha|}\,H_\alpha(\xi)$，因此相应的福克空间上的算子 S_φ 具有如下形式

$$S_\varphi F(z) = e^{\frac{1}{2}z^2}\int_{\mathbb{R}^n} p(\xi)\,G^*F(\xi)\,e^{i\xi\cdot z}\,d\gamma = p * F(z)$$

其中 $p(z) = \sum_{|\alpha|\le k} b_\alpha z^\alpha$. 由此可见，$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的偏微分算子会产生以多项式为核的卷积算子。注意，算子 S_φ 对应于核 $k(z,w)$，而该核与第一个变量无关。因此，自然可以考虑福克空间上的算子，它们对应于定义在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的伪微分算子 $a(x,D)$，其形式为

$$a(x,D)f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\,\widehat{f}(\xi)\,e^{ix\cdot\xi}\,d\xi.$$

通过形式计算，这些算子也可以写成如下形式，其中 $\mathcal{F}_2$ 是对第二组变量进行的傅里叶变换。

$$a(x,D)f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_2^{-1}a(x,x-y)\,f(y)\,dy$$

S_K 与 $a(x,D)$ 之间的类比现在已十分清楚。

然而，算子 S_K 更为一般，因为 $B^*\circ S_K\circ B$ 不一定是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的伪微分算子。我们希望研究那些实际上对应于伪微分算子的算子 S_K。换言之，我们希望确定核 K，使得 $S_K =: B^*\circ a(x,D)\circ B$ 对应于某个符号 $a(x,\xi)$。

注记 1.9. 鉴于定理 1.2 中建立的 S_φ 表示，定义 Fock 空间上的伪微分算子还有另一种可能。给定一个关于第一变量为整函数的符号$b(z,\xi)$，我们可以考虑

$$b(z,D)F(z) = e^{\frac{1}{2}z^2}\int_{\mathbb{R}^n} b(z,\xi)\,G^*F(\xi)\,e^{i\xi\cdot z}\,d\gamma.$$

探究这两类伪微分算子之间的联系将会很有意思。

上文定义的伪微分算子 $a(x,D)$ 对应于 Kohn-Nirenberg 类。另有一种等价定义，对应于 Weyl 演算，即将其定义为缓增分布的 Weyl 变换。对于函数 $\sigma \in L^1(\mathbb{C}^n)$ 或 μ 上的有限 Borel 测度 $\mathbb{C}^n$，我们定义其 Weyl 变换为

$$W(\sigma)f(\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} \sigma(z)\pi(z)f(\xi)\, dz.$$

已知，对于适当的符号 $a.$，$W(\sigma)$ 可写作 $\widehat{a}(x,D)$。转移算子 $B \circ W(\varphi) \circ B^*$ 很容易计算。事实上，简单计算可得，$\rho(w) = B \circ \pi(w)B^*$ 作用于 $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 的结果为

$$\rho(w)F(z) = F(z+w)e^{-\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}e^{-\frac{1}{4}|w|^2}$$

因此，我们看到 $(B \circ W(\varphi) \circ B^*)F(z)$ 可表示为如下积分

$$\int_{\mathbb{C}^n} \varphi(w)\rho(w)F(z)dw = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi(w)F(z+w)e^{-\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}e^{\frac{1}{4}|w|^2}d\nu(w).$$

因此，$W(\varphi)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性等价于上述等式右侧所示算子的有界性。不过，考察这类具有全纯核的算子的积分表示会更有启发性。

现在我们专门研究福克空间上的积分算子，其核为 $K(z,w) = B\psi(z,w)$，其中某个 ψ 在 $\mathbb{R}^{2n}.$ 上。给定 $\sigma \in L^1(\mathbb{C}^n)$，记 $\sigma(x,y) = \sigma(x+iy)$，并定义

$$\psi(u,v) = (\mathcal{F}_1^{-1}\sigma)(\frac{1}{2}(u+v), u-v)$$

其中 $\mathcal{F}_1$ 是对第一组变量进行的傅里叶变换。注意，我们可以根据公式从 ψ 得到 σ

$$\sigma(z) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi + \frac{1}{2}y, \xi - \frac{1}{2}y)d\xi. \tag{1.1}$$

定理 1.10. 给定定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的函数 ψ，令 σ 如上所定义。则算子

$$S_K F(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w)\, B\psi(z,\bar{w})\, d\nu(w)$$

对应于定义在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的伪微分算子 $W(\sigma)$。因此，S_K 在 $\mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 上有界，当且仅当 $W(\sigma)$ 在 Hermite-Sobolev 空间 ${W^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界。

当 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 时，函数 $\sigma \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 因而以及 $W(\sigma)$ 和 S_K 都是 Hilbert-Schmidt 算子。注意，此时 $B\psi \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$。$W(\sigma)$ 在 ${W^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性等价于 $H^{s/2} \circ W(\sigma) \circ H^{-s/2}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性。由于这些算子均为伪微分算子，我们可以借助一些一般性定理，找出使 S_K 在 $\mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 上有界的 σ 的充分条件，参见注释 4.1。

当我们选择 σ 为 $\mathbb{R}^{2n}.$ 上的径向函数/测度时，会出现一类特别有趣的算子。在这种情况下，算子 $W(\sigma)$ 可由 Hermite 函数对角化，我们还可以显式计算与转移算子相关的核 $K(z,w)$，见

命题 4.2. 结果表明，该核具有 $k(\sqrt{z\cdot w})$ 的形式，其中 k 是单个复变量的偶整函数。

由于巴格曼变换与 Hermite 展开理论密切相关，我们研究了 ${W^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 上的平移不变算子，以及这些算子在巴格曼变换下的像。这些空间及其像，即分数阶 Fock-Sobolev 空间 $\mathcal{F}^s{}_{,2}(\mathbb{C}^n)$，在傅里叶变换下均保持不变。经典索博列夫空间$W^s{}_{,2}(\mathbb{R}^n)$ $s\geq 0$是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的另一类平移不变子空间，因此适合用于研究傅里叶乘子。因此，自然要研究这些空间在巴格曼变换下的像，记为 $\mathcal{F}^s{}_{,2\,10,}(\mathbb{C}^n)$，并研究与傅里叶乘子 T_m. 相对应的算子 S_φ 的有界性。由于 $W^s{}_{,2}(\mathbb{R}^n)$ 不像 $\mathcal{F}^s{}_{,2}(\mathbb{C}^n)$ 那样在傅里叶变换下保持不变，因此不能期望 $\mathcal{F}^s{}_{,2\,10,}(\mathbb{C}^n)$ 能用径向权函数来描述。不过，可以利用导数以其他方式对其进行描述。第 3 节证明了关于 S_φ 在这些空间上有界性的一些结果。

本文的安排如下。在第 2 节中，我们建立记号，并回顾有关巴格曼变换、Hermite、Gauss 和 Fock-Sobolev 空间的相关事实。在第 3 节中，我们证明关于算子 S_φ 的结果；而在第 4 节中，我们研究算子 S_K，它们对应于 L^2（$\mathbb{R}^n$）上的伪微分算子。

2. Preliminaries

2.1. Hermite 函数与巴格曼变换。将整函数 $g_x(w)=e^{-w^2+2xw}$ 作泰勒展开为幂级数，得到

$$e^{-w^2+2xw}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}H_k(x)\,w^k.$$

由于 $g_x(w)=e^{x^2}e^{-(x-w)^2}$，显然 $H_k(x)=\frac{d^k}{dx^k}g_x(0)$ 是一个次数为 k.的多项式。这些称为 Hermite 多项式。定义在 $\mathbb{R}^n$上的 Hermite 多项式 $H_\alpha(x)$ $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 由一维 Hermite 函数的乘积给出。归一化的 Hermite 函数随后定义为

$$\Phi_\alpha(x)=(\pi^{n/2}2^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}H_\alpha(x)\,e^{-\frac{1}{2}|x|^2}.$$

众所周知，这族 $\Phi_\alpha,\alpha\in\mathbb{N}^n$ 构成了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的正交归一基。定义$\zeta_\alpha(w)=(\pi^{n/2}2^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}w^\alpha$ 后，Hermite 函数的生成函数恒等式可写为

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\Phi_\alpha(x)\,\zeta_\alpha(w)=\pi^{-n/2}e^{\frac{1}{4}w^2}e^{-\frac{1}{2}(x-w)^2}.$$

我们利用上述恒等式定义巴格曼变换，并由此轻松推导出它的许多性质。关于我们所需的巴格曼变换性质，请参阅 Bargmann 的论文 [1]；另请参阅 Zhu 的著作 [19] 。关于 Hermite 函数的结果，请参阅塞格ő [13] 和专著 [14]。

对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 我们通过对右侧的核进行积分来定义 Bf，其中被积函数为 f：

$$Bf(w) = \pi^{-n/2} e^{\frac{1}{4}w^2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-\frac{1}{2}(x-w)^2} dx = \pi^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}w^2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, e^{x\cdot w} dx.$$

鉴于 上述恒等式，显然 $B\Phi_\alpha = \zeta_\alpha$，且我们有展开式 n

$$Bf(w) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (f, \Phi_\alpha)\, \zeta_\alpha(w).$$

若令 $d\nu(w) = c_n e^{-\frac{1}{2}|w|^2}$，则函数 ζ_α 在 $L^2(\mathbb{C}^n, d\nu)$ 中构成一个正交归一系。由 Hermite 展开的普朗歇尔定理可得

$$\int_{\mathbb{C}^n} |Bf(w)|^2\, d\nu(w) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |(f, \Phi_\alpha)^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx.$$

因此，对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，其巴格曼变换 Bf 是一个整函数，并且相对于 $d\nu.$ 平方可积。可以证明，在 C^n 上属于 $L^2(\mathbb{C}^n, d\nu)$ 的任意整函数 F，都可表示为 Bf，其中 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 唯一。因此，若将福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 定义为由整函数构成的 $L^2(\mathbb{C}^n, d\nu)$ 空间，则 B: $L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 是酉算子。 B 的逆由其伴随算子 $B^*.$ 给出

2.2. 高斯-Bargmann 变换。除了将 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 映射到 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 的巴格曼变换 B 之外，我们还考虑 Gauss-Bargmann 变换，它更适用于研究算子 $S_{\varphi}.$。设 $UF(z) = F(-iz)$，这是 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上的一个酉算子，并满足傅里叶变换的交织关系： $B^* \circ U \circ B = \mathcal{F}.$。设 $d\gamma(x) = e^{-|x|^2} dx$，并考虑定义在 $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$ 上的算子 G，

$$Gf(z) = e^{\frac{1}{4}z^2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix\cdot z}\, d\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-(x-\frac{i}{2}z)^2}\, dx.$$

注意， G 与 B 通过以下关系相关： $Gf(z) = (U \circ B)g(z)$，其中 $g(x) = f(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2}.$。我们可以根据 $B.$ 的性质推知 G 的性质。因此 G： $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) \to \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 是一个酉算子，它将 Hermite 多项式 H_α 映射为单项式 $z^\alpha.$。G 的反演公式为

$$G^*F(x) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w) e^{\frac{1}{4}\bar{w}^2} e^{-ix\cdot\bar{w}}\, d\nu(w).$$

为证明这一点，令 $F = Gf$并定义 $g(x) = f(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$使得 $F(z) = Bg(iz)$。考虑 g 的 Hermite 展开：

$$g(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (g, \Phi_\alpha)\, \Phi_\alpha(x).$$

由于 B将 Φ_α映射到 ζ_α，且 $(g, \Phi_\alpha) = (Bg, \zeta_\alpha)$，因此得到

$$g(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (Bg, \zeta_\alpha)\, \Phi_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (F, \zeta_\alpha)\, (-i)^{|\alpha|}\, \Phi_\alpha(x).$$

现在回顾一下，Hermite 多项式满足生成函数恒等式

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \Phi_\alpha(x)\, \zeta_\alpha(w) = \pi^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} e^{-\frac{1}{4}w^2 + x\cdot w}.$$

由此， g 的 Hermite 展开形式为

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \int_{\mathbb{C}^n} F(w)\, e^{\frac{1}{4}\bar{w}^2}\, e^{-ix\cdot\bar{w}}\, d\nu(w).$$

当 $g(x) = f(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ 这证明了 Gauss-Bargmann 变换的反演公式 .

我们记录 Gauss-Bargmann 变换的以下性质，这些性质可利用关系直接从定义验证

$$2\frac{\partial}{\partial z_j}e^{-(x-\frac{i}{2}z)^2} = -i\,\frac{\partial}{\partial x_j}e^{-(x-\frac{i}{2}z)^2}.$$

引理 2.1. 对任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$，有

(1) $(-\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}z_j)Gf(z) = -i\,G(x_j f)(z)$ (2) $2\frac{\partial}{\partial z_j}Gf(z) = i\,G(\frac{\partial}{\partial x_j}f)(z)$ (3) $(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}z_j)Gf(z) = -i\,G((-\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j)f)(z)$

2.3. Hermite、Gauss 和 Fock-Sobolev 空间。Hermite 算子的显式谱分解 $H = -\Delta + |x|^2$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上使我们能够定义分数次幂$H^s, s \geq 0$：

$$H^s f = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+n)^s\, P_k f, \quad P_k f = \sum_{|\alpha|=k}(f, \Phi_\alpha)\,\Phi_\alpha.$$

我们将 Hermite-Sobolev 空间 ${W^s_{,H}}^2(\mathbb{R}^n)$ $s \geq 0$ 定义为 $H^{s/2}$ 的定义域，并赋予其内积 $(f,g)_s = (H^{s/2}f, H^{s/2}g)$。当 $s = k$ 为非负整数时，有

$$W^{k,2}_H(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| + |\beta| \leq k\}.$$

这是由一个众所周知的事实得出的： $x^\alpha\partial^\beta H^{-(|\alpha|+|\beta|)/2}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界。 Hermite-Sobolev 空间在平移和傅里叶变换下保持不变。后一性质源于 Hermite 函数是傅里叶变换的特征函数这一事实： $\widehat{\Phi}_\alpha = (-i)^{|\alpha|}\,\Phi_\alpha$. Hermite-Sobolev 空间 ${W^s_{,H}}^2(\mathbb{R}^n)$ 是标准 Sobolev 空间 $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ 的子空间，因此根据 Sobolev 嵌入定理，当 $s > n/2.$ 时可得 ${W^s_{,H}}^2(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$。关于 Hermite-Sobolev 空间的更多内容，请参阅 [5]。

我们引入湮灭算子 $A_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j$，它将 Φ_α 变为 $\sqrt{2\alpha_j}\Phi_{\alpha-e_j}$，并定义 $A^\alpha = \Pi_{j=1}^n A_j^{\alpha_j}$. 。其形式伴随算子 $A_j^* = -\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j$ 是产生算子，它将 Φ_α 变为 $\sqrt{2}$（$\alpha_j + 1$）$\Phi_{\alpha+e_j}$. 因此，

$$W^{k,2}_H(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : A^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k\}.$$

这使我们能够将 Hermite-Sobolev 空间与 Gauss-Sobolev 空间对应起来

$$W^{k,2}_G(\mathbb{R}^n) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) : \partial^\alpha g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma), |\alpha| \leq k\}.$$

为此，考虑 $\frac{\partial}{\partial x_j}g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$ 的 Hermite（多项式）系数：

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)\,H_\alpha(x)\,d\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} A_j f(x)\,H_\alpha(x)\,e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\,dx$$

其中 $f(x) = g(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$. 由此可见，当且仅当 $A^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 时， $\partial^\alpha g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$，这就在这些空间之间建立了一一对应关系。同样的对应关系使我们能够为任意 $s \geq 0$ 定义 Gauss-Sobolev 空间，如下所示：

$$W_G^{s,2}(\mathbb{R}^n) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma) : g(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \in W_H^{s,2}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Fock-Sobolev 空间 $\mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 定义为 ${W^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 在 Bargmann 变换下的像。等价地，我们也可以将其定义为 ${W^s}_{,G}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 在 Gauss-Bargmann 变换下的像。由任一定义可知，$F \in \mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 当且仅当

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (2|\alpha| + n)^s \, |(F, \zeta_\alpha)|^2 < \infty.$$

在 [8] 中，作者已经证明 $F \in \mathcal{F}^{s,2}(\mathbb{C}^n)$ 当且仅当

$$\int_{\mathbb{C}^n} (1 + |z|^2)^s |F(z)|^2 \, d\nu < \infty.$$

由关系式 $2\frac{\partial}{\partial z_j} Gf(z) = i\, G(\frac{\partial}{\partial x_j} f)(z)$ 可得， $F \in \mathcal{F}^{k,2}(\mathbb{C}^n)$ 当且仅当$\partial^\alpha F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 对所有 $|\alpha| \leq k.$ 成立。我们还可以证明，这等价于对所有 $|\alpha| \leq k.$， $z^\alpha F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 成立

2.4. Hermite-Sobolev 空间上的傅里叶乘子。本小节汇总关于 ${W^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 上傅里叶乘子的一些信息。回顾一下，在 ${W^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 上，可测函数 m on$\mathbb{R}^n$ 被称为傅里叶乘子，当且仅当算子 T_m 在该空间上是有界的。我们用 ${MW^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 表示所有此类乘子的集合。由于 ${W^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 在傅里叶变换下保持不变，因此， $m \in {MW^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 m 是同一空间上的逐点乘子。事实上，这是 $\mathcal{F} \circ T_m \circ \mathcal{F}^* f = mf.$ 的直接推论。这一性质使我们能够获得关于 ${W^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 上傅里叶乘子的一些信息。

至少当 $s = k$ 为整数时，最好能够给出 ${MW^s}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 的刻画。我们注意到，对于 $|\alpha| \leq k$，算子 $f \to x^\alpha f$ 和 $f \to \partial^\alpha f$ 都是从 ${W^k}_{,H}{}^2 \to W_H^{k-|\alpha|/2}$. 有界的。这是因为算子 $x^\alpha H^{-|\alpha|/2}$ 和 $\partial^\alpha H^{-|\alpha|/2}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界。由等式

$$\partial_j(mf) = (\partial_j m)f + m\partial_j f$$

由此可推得 $m \in {MW^1}_{,H}{}^2$当且仅当 m有界，且 $(\partial_j m)H^{-1/2}$在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界。将此结果推广到更高阶空间，可得

引理 2.2. 对任意非负整数 k, $m \in {MW^k}_{,H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当算子 $(\partial^\alpha m)H^{-|\alpha|/2}$ 对所有 $|\alpha| \leq k.$ 都在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界

证明。对于任意 $|\mu| + |\alpha| \leq k$，我们有

$$x^\mu \, \partial^\alpha(mf) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_{\beta,\gamma} (\partial^\beta m) x^\mu \partial^\gamma f = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_{\beta,\gamma} (\partial^\beta m) H^{-|\beta|/2} H^{|\beta|/2} \big(x^\mu \partial^\gamma f\big)$$

由此立即可得充分性。对于必要性，我们对 $|\alpha|.$ 进行归纳。如上所述，该结果对于 $k=1.$ 成立。

$$c_{\alpha,0}\,(\partial^\alpha m)f=\partial^\alpha(mf)-\sum_{\beta+\gamma=\alpha,\gamma\neq 0}c_{\beta,\gamma}(\partial^\beta m)\partial^\gamma f$$

根据假设 $m\in MW^{k,\ {}_H{}^2}(\mathbb{R}^n)$、$\partial^\alpha$ 的有界性以及归纳假设，我们得到如下估计

$$\|(\partial^\alpha m)f\|_2\le C\,\|f\|_{(k)}=C\,\|H^{|\alpha|/2}f\|_{(k-|\alpha|)}\le C'\|f\|_2.$$

这证明了必要性部分。 □

3. Fourier Multipliers on Fock spaces

3.1. S_φ和 S_φ的有界性。设 S是福克空间上的有界线性算子。正如引言中所观察到的，借助 $K_S(z,\bar w)=Sg_{\bar w}(z)\ g_{\bar w}(z)=e^{\frac12 z\cdot\bar w}$，我们有

$$SF(z)=\int_{\mathbb{C}^n}F(w)\,K_S(z,\bar w)\,d\nu.$$

若 S 与 $\rho(a)\ a\in\mathbb{R}^n$可交换，则有

$$SF(z+a)e^{-\frac12 a\cdot z}=\int_{\mathbb{C}^n}F(w+a)\,e^{-\frac12 a\cdot w}\,K_S(z,\bar w)\,d\nu.$$

因此，核 K_S 满足关系

$$K_S(z+a,\bar w)e^{-\frac12 a\cdot z}=K_S(z,\bar w-a)e^{\frac12 a\cdot\bar w}.$$

对于核 $k_S(z,\bar w)=K_S(z,\bar w)e^{-\frac12 z\cdot\bar w}$，上述关系可写为 $k_S(z+a,w)=k_S(z,w-a)$，对所有 $z,$ $w\in\mathbb{C}^n,a\in\mathbb{R}^n.$均成立。这意味着 $k_S(z,w)=k_S(z-w,0)$，对所有 $z,w\in\mathbb{R}^n$均成立；对所有 $z,w\in\mathbb{C}^n.$也同样成立。因此，$K_S(z,\bar w)=\varphi(z-\bar w)e^{\frac12 z\cdot\bar w}$，其中 φ 是一个整函数，使得

$$SF(z)=\int_{\mathbb{C}^n}F(w)\,\varphi(z-\bar w)e^{\frac12 z\cdot\bar w}\,d\nu.$$

由于 $e^{\frac12 z\cdot\bar w}$是再生核，因此可得 $\varphi(z)=S1(z)$，从而 $\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$。

定理 1.1 的证明 我们首先在假设 S_φ有界的条件下，证明 φ 所声称的表示。由于转移算子 $T=B^*\circ S\circ B$与平移算子对易，我们有

$$T=T_m \qquad m\quad \mathbb{R}^n. \quad \varphi\ z-\bar w\ {}^{\frac12 z\cdot\bar w}=,\ \text{其中是一个}$$

$$K_S\ z\ \bar w\ =S_\varphi g_{\bar w}\ z\ , \qquad S_\varphi=B\circ T_m\circ B^* \quad g_{\bar w}\ z\ =e^{\frac12 z\cdot\bar w}.$$

有界函数。对于 As ( ) (,) ( )，我们将计算 在 ( ) 上的作用。由于巴格曼变换将 Hermite 函数 Φ_α 映射为单项式 $\zeta_\alpha(z)$，因此可知 $g_{\bar w}(z)=Bh_{\bar w}(z)$，其中

$$h_{\bar w}(x)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\Phi_\alpha(x)\,\zeta_\alpha(\bar w)=\pi^{-n/2}e^{-\frac12|x|^2}e^{-\frac14\bar w^2+x\cdot\bar w}.$$

我们还观察到，由于 Φ_α 是傅里叶变换的特征函数，其特征值为 $(-i)$，因此 $h_{\bar w}(\xi)$ $=h_{-i\bar w}(\xi)^{|\alpha|}.$于是我们有

$$B\circ T_m\circ B^*g_{\bar w}(z)=e^{\frac14 z^2}\int_{\mathbb{R}^n}m(\xi)e^{-\frac12|\xi|^2}e^{\frac14\bar w^2-i\xi\cdot\bar w}e^{-\frac12|\xi|^2}\,e^{i\xi\cdot z}\,d\xi.$$

我们可以将上式改写为 $e^{\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}\varphi(z-\bar{w})$，其中

$$\varphi(z)=\pi^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)e^{-(\xi-\frac{i}{2}z)^2}d\xi.$$

~这就证明了关于 S_φ. 有界性的陈述。为处理 S_φ，我们按如下方式进行。

假设 S_φ 对应于傅里叶乘子 m，使得 $B\circ T_m\circ B^*=S_{\varphi^.}$。将由 m 定义的乘法算子简记为 m 本身，我们注意到 $\mathcal{F}\circ T_m\circ\mathcal{F}^*=m$，因此 $B\circ m\circ B^*=B\circ\mathcal{F}\circ T_m\circ\mathcal{F}^*\circ B^{*.}$。由于 $B\circ\mathcal{F}=U\circ B$，上式给出

$$B\circ m\circ B^*=U\circ B\circ T_m\circ B^*\circ U^*=U\circ S_\varphi\circ U^*.$$

简单计算可得

$$U\circ S_\varphi\circ U^*F(z)=\int_{\mathbb{C}^n}F(w)\,e^{\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}\,U\varphi(z+w)\,d\nu(w).$$

~因此我们看到，算子 $S_{U\varphi}$ 在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$上有界，当且仅当 S_φ 有界；这恰好发生在

$$\varphi(z)=\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)e^{-(\xi-\frac{i}{2}z)^2}d\xi.$$

~将 φ替换为 $U^*\varphi$，可将其表述为： S_φ在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$上有界，当且仅当

$$\varphi(z)=\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)e^{-(\xi-\frac{1}{2}z)^2}d\xi.$$

为了完成定理 1.1 的证明，还需证明：对于任意非恒定

~ ~φ，算子 S_φ 和 S_φ 中至多有一个是有界的。由于如上所示， S_φ 的有界性等价于 $S_{U^*\varphi}$ 的有界性，因此我们只需证明下面的命题；该命题是 Hardy 定理 [11] 关于 $\mathbb{R}^n$. 上的傅里叶变换的一个直接推论。为方便读者，现将其回顾如下。

定理 3.1. 高斯函数 $e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$的常数倍是f 上满足以下估计的唯一可测函数 $\mathbb{R}^n$ ：

$$|f(x)|\le C\,e^{-\frac{1}{2}|x|^2},\ \ |\widehat{f}(\xi)|\le C\,e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}.$$

上述结果是傅里叶变换不确定性原理的一个实例。关于 Hardy 定理及其在各种其他情形下的推广，参见专著 [15]。

命题 3.2. 如果 $\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 不是恒定的，那么 S_φ 和 $S_{U^*\varphi}$ 不可能同时在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$上有界~。因此， S_φ 或 S_φ 必有一个无界。

证明。反设。若 $S_{U^*\varphi}$ 有界，则

$$U^*\varphi(z)=e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)e^{-|\xi|^2}e^{i\,z\cdot\xi}\,d\xi$$

其中 m 有界。这仅意味着

$$\varphi(z)=U^*\varphi(-iz)=Bf(z),\ f(x)=m(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2}.$$

由于 $\varphi = U^*(U\varphi)$，根据 S_φ的有界性，我们还可以得到

$$U\varphi(z) = Bg(z),\ g(x) = \tilde{m}(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$$

其中 $\tilde{m}$ 也有界。因此 $Bg = U\varphi = Bf$，从而 $g = f$，得出以下估计

$$|f(x)| \le Ce^{-\frac{1}{2}|x|^2},\ |\widehat{f}(\xi)| \le Ce^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}.$$

根据 Hardy 定理，我们得出 $f(x) = c\,e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$，这与我们假设 φ不是常数相矛盾。

□

注 3.3. 若令 $\mathcal{F}_0(\mathbb{C}^n)$ 为 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在高斯-Bargmann 变换下的像，则 S_φ 有界当且仅当 $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{C}^n)$。鉴于此，上述结果可视为作用于 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上的算子 U 的一个不确定性原理。对于非恒定的 $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$，$\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{C}^n)$ 和 $U^*\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{C}^n)$ 必有其一成立，但不能同时成立。

与 S_φ 相对应的函数 m 由以下公式给出

$$m(x) = G^*\varphi(x) = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi(w)e^{\frac{1}{4}\bar{w}^2}e^{-ix\cdot\bar{w}}\,d\nu(w).$$

与 S_φ. 相关的函数 m 也有类似的公式。对于 $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$，显然$m \in L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$。如果 m 有界，那么找出关于 φ 的条件将会很有意义。

注 3.4. m 的另一个公式可用 φ的 Taylor 系数表示:

$$m(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (\varphi, \zeta_\alpha)\,(-i)^{|\alpha|}\,\Phi_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{2^{|\alpha|}\alpha!}(\varphi, z^\alpha)H_\alpha(x)e^{-\frac{1}{2}|x|^2},$$

参见 Gauss-Bargmann 变换反演公式的证明。由此不易找出关于 φ 的系数的条件，使得 m 有界。然而，要使 m 有界，(φ, ζ_α) 必须在 α.的无穷多个取值下非零

定理 1.2 和定理 1.4 的证明：在定理 1.1 的证明中，我们已经注意到关系式 $B \circ m \circ B^* = B \circ E \circ m \circ E^* \circ B^* = U \circ S_\varphi \circ U^*$，由此得到 $G \circ m \circ G^* = S_\varphi$.我们将其改写为

$$G^*(S_\varphi F) = m\,G^*F = G^*\varphi\,G^*F.$$

据此，我们可以将算子 S_φ 表示为熟悉的傅里叶乘子形式:

$$S_\varphi F(z) = e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{\mathbb{R}^n} m(x)\,G^*F(x)e^{ix\cdot z}\,d\gamma(x).$$

同样，关系式 $U \circ S_{U^*\varphi} \circ U^* = S_\varphi$给出 $B^* \circ S_\varphi \circ B = m$，其中 m现在与 $U^*\varphi$相关联，也就是说 $Gm = U^*\varphi$或 $B(me^{-\frac{1}{2}|\cdot|^2}) = \varphi$.因此，我们可以将其写为

$$B^*(\widetilde{S}_\varphi F)(x) = m(x)\,B^*F(x) = e^{\frac{1}{2}|x|^2}\,B^*\varphi(x)\,B^*F(x).$$

这就得到了算子 S_φ所需的表示形式:

$$\widetilde{S}_\varphi F(z) = e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)\ B^*F(\xi)\,e^{z\cdot\xi}\,d\xi.$$

为了完成定理 1.4 的证明，我们需要证明，任何 S 与 $\rho(ib)$ $b \in \mathbb{R}^n$ 对易的，都具有某个 S_φ 的形式，其中 φ.。由于 $\mathcal{F} \circ \pi(ia) \circ \mathcal{F}^* = \pi(a)$，因此可得 S

~与 $\rho(ib)$ 对易，当且仅当 $S = U^* \circ S \circ S$ 与 $\rho(b)$ 对易，因此结论可由本小节开头给出的论证得到。

~3.2. S_φ 和 S_φ的平滑性。令我们使用记号 $\varphi * F = S_\varphi F$. 。对于 $\mathbb{R}^n$ 上的标准卷积，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g * f) = \frac{\partial g}{\partial x_j} * f = g * \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

上述卷积在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$上的对应结论如下。

引理 3.5。设$D_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2} z_j$, $D_j^* = -\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2} z_j$. 。那么对于 $\varphi, F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$，我们有

(1) $D_j^*(\varphi * F) = D_j^* \varphi * F = \varphi * D_j^* F$,
(2) $D_j(\varphi * F) = D_j \varphi * F + 2\, \varphi * \frac{\partial}{\partial w_j} F = 2(\frac{\partial}{\partial z_j}\varphi) * F(z) + \varphi * D_j F$.

证明。我们从

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(\varphi * F)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w) e^{\frac{1}{2} z \cdot \bar{w}} \big(\frac{1}{2} \bar{w}_j\, \varphi(z - \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial z_j} \varphi(z - \bar{w}) \big) d\nu(w).$$

将第一个积分改写为

$$- \int_{\mathbb{C}^n} F(w) e^{\frac{1}{2} z \cdot \bar{w}}\, \varphi(z - \bar{w})\, \frac{\partial}{\partial w_j} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j \bar{w}_j}\, dw$$

并进行分部积分，得到

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(\varphi * F) = \frac{\partial}{\partial z_j} \varphi * F + \varphi * \frac{\partial}{\partial w_j} F.$$

我们还可以证明如下关系

$$\frac{1}{2} z_j (\varphi * F)(z) = (\frac{1}{2} z_j\, \varphi) * F(z) + \varphi * \frac{\partial}{\partial w_j} F(z)$$

方法是从下式出发，并按上述步骤进行:

$$\frac{1}{2} z_j S_\varphi F(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w) e^{\frac{1}{2} z \cdot \bar{w}} \big(\frac{1}{2} (z_j - \bar{w}_j) \varphi(z - \bar{w}) + \frac{1}{2} \bar{w}_j\, \varphi(z - \bar{w}) \big) d\nu(w).$$

对积分进行分部积分

$$S(\varphi, \frac{1}{2} w_j F) = - \int_{\mathbb{C}^n} F(w) e^{\frac{1}{2} z \cdot \bar{w}}\, \varphi(z - \bar{w})\, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j \bar{w}_j}\, dw$$

我们还可以得到

$$\frac{1}{2} z_j (\varphi * F)(z) = (\frac{\partial}{\partial z_j} \varphi) * F(z) + \varphi * (\frac{1}{2} w_j F)(z).$$

结合这三个关系即可证明该引理。

□

上述引理所确立的卷积在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上关于导数的性质，对算子 S_φ.的平滑性有一些有趣的推论。令子空间 $\mathcal{F}^k{}_{,2\,10\,,}(\mathbb{C}^n)$ 定义如下:

$$\mathcal{F}_{1,0}^{k,2}(\mathbb{C}^n) = \{ F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n) : D^{*\alpha} F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n),\, |\alpha| \leq k \}.$$

我们以类似的方式利用算子 D_j. 定义 $\mathcal{F}^{k}_{,2\,0\,1\,,}(\mathbb{C}^n)$。由巴格曼变换的定义可知， $D_jBf(z) = B(\xi_j f)(z)$。根据巴格曼变换的等价定义，即

$$Bf(z) = e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}e^{i\xi\cdot z}d\xi,$$

我们还有 $D_j^*Bf(z) = B(\partial_j f)(z)$。因此， $\mathcal{F}^{k}_{,2\,1\,0\,,}(\mathbb{C}^n)$ 是标准 Sobolev 空间 $W^{k}_{,2}(\mathbb{R}^n)$ 在巴格曼变换下的像，而 $\mathcal{F}^{k}_{,2\,0\,1\,,}(\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathcal{F}W^{k}_{,2}(\mathbb{R}^n)$ 在巴格曼变换下的像，即 Sobolev 空间 $W^{k}_{,2}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶像。因此， $f \in W^{k}_{,2}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $\widehat{f} \in \mathcal{F}W^{k}_{,2}(\mathbb{R}^n)$, 进而 $F \in \mathcal{F}^{k}_{,2\,1\,0\,,}(\mathbb{C}^n)$ 当且仅当 $UF \in_{\mathcal{F}^{k}_{,2\,0\,1\,,}}(\mathbb{C}^n)$。由引理 3.1 可立即得到

命题 3.6。对于任意 $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{C}^n)$， 算子 S_φ 在 $\mathcal{F}^{k}_{,2\,1\,0\,,}(\mathbb{C}^n)$ 上有界。若假设对于所有 $|\alpha| \le k$， $D^{*\alpha}\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{C}^n)$， 则 S_φ: $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}^{k}_{,2\,1\,0\,,}(\mathbb{C}^n)$ 有界。在对 φ 作出相同假设时，算子 $U \circ S_\varphi \circ U^* = \widetilde{S}_{U\varphi}$: $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}^{k}_{,2\,0\,1\,,}(\mathbb{C}^n)$ 也有界。

注 3.7. 如果 m 是与 S_φ 相关联的乘子，那么根据引理 2.1，我们有 $D_j^*\varphi = -i\,G(x_j m)$，因此可以将上述结果表述如下：如果我们假设对于所有 $|\alpha| \le k$， $x^\alpha m(x)$ 都是有界的，那么 S_φ: $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}^{k}_{,\,2\,1\,0\,,}(\mathbb{C}^n)$ 是有界的。

命题 3.8. 假设对于所有 $|\alpha| \le k.$， $\partial^\alpha\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{C}^n)$。那么 S_φ 在 $\mathcal{F}^{k}_{,\,2\,1\,0\,,}(\mathbb{C}^n)$ 上是有界的。如果与 S_ϕ 相关联的乘子 m 对所有 $|\alpha| \le k$ 都满足条件 $\partial^\alpha m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，那么 S_φ 在 $\mathcal{F}^{k}_{,\,2\,1\,0\,,}(\mathbb{C}^n)$ 上是有界的。

证明。上述第一个陈述是以下关系的直接推论，而该关系由引理 3.1 的 (2) 得出:

$$D^\alpha(\varphi * F) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_{\beta,\gamma}\,\partial^\beta\varphi * D^\gamma F.$$

关于 $m = G^*\varphi$ 的条件可以利用以下内容转化为关于 φ 的条件

$$2\frac{\partial}{\partial z_j}Gm(z) = i\,G(\frac{\partial}{\partial x_j}m)(z)$$

这已由引理 2.1 证明。由此证明了第二个结论。

□

与空间 $\mathcal{F}^{k}_{,\,2\,1\,0\,,}(\mathbb{C}^n)$ 和 $\mathcal{F}^{k}_{,\,2\,0\,1\,,}(\mathbb{C}^n)$ 不同，空间 $\mathcal{F}^{s}_{,\,2}(\mathbb{C}^n)$ 在 U 的作用下是不变的，因此我们得到了定理 1.5 和 1.7 中陈述的结果。

定理 1.5 和 1.7 的证明：定理 1.5 可由以下事实推出： S_φ 在 $\mathcal{F}^{s}_{,\,2}(\mathbb{C}^n)$ 上有界，当且仅当 $T_m = B^* \circ S_\varphi \circ B$ 在 $W^{s}_{,\,H^2}(\mathbb{R}^n)$ 上有界。当 $s = k$ 是非负整数且 $\varphi \in \mathcal{F}^{k}_{,\,2\,0}(\mathbb{C}^n)$ 时，根据定义可得 $m = G^*\varphi \in L^\infty_k(\mathbb{R}^n)$，它在 $W^{k}_{,\,H^2}(\mathbb{R}^n)$ 上定义了一个乘子。

注 3.9. 如前所述 $\partial^\alpha\varphi = G(\partial^\alpha m)$。若能找到关于导数 $\partial^\alpha\varphi$ 的条件，使得 $m \in L^\infty_k(\mathbb{R}^n)$，将会很有意思。我们不知道该如何做到这一点。

4. Pseudo-differential operators on the Fock space

本节我们证明定理 1.11，并计算与一类径向符号 σ相关的核 K

4.1. 定理 1.11 的证明。我们证明，若 $K(z,w) = B\psi(z,w)$，则转移算子 $B\circ W(\sigma)\circ B^* = S_K$，其中 σ 由 (1.1) 给出。考虑 $B\circ W(\sigma)\circ B^*$ 作用于函数 $g_w(z) = e^{\frac{1}{2}z\cdot w} = Bh_w(z)$ 的结果。回顾 B 和 $W(\sigma)$ 的定义，可得:

$$B\circ W(\sigma)\circ B^* g_w(z) = e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^{2n}}\sigma(x,y)e^{i(x\cdot\xi+\frac{1}{2}x\cdot y)}h_w(\xi+y)dxdy\Big)e^{-\frac{1}{2}(\xi-z)^2}d\xi.$$

$h_w(x)$ 的显式公式以及变量代换 $\xi\to\xi-y/2$ 将上式化简为

$$e^{\frac{1}{4}(z^2+w^2)}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\sigma(x,y)e^{ix\cdot\xi}dx\Big)e^{-\frac{1}{2}(\xi+y/2-w)^2}e^{-\frac{1}{2}(\xi-y/2-z)^2}dyd\xi.$$

另一次变量代换 $u=\xi+y/2, v=\xi-y/2$ 将上述积分化为

$$e^{\frac{1}{4}(z^2+w^2)}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\mathcal{F}_1^{-1}\sigma((u+v)/2,u-v)e^{-\frac{1}{2}(u-w)^2}e^{-\frac{1}{2}(v-z)^2}dyd\xi.$$

这证明了 $B\circ W(\sigma)\circ B^* g_w(z) = B\psi(w,z)$，其中 $\psi(u,v) = \mathcal{F}_1^{-1}\sigma((u+v)/2,u-v)$。由于该算子由其在 g_w 上的作用唯一确定，故得到所需结果。

注记 4.1. 现在我们考察算子 $S_K = B\circ W(\sigma)\circ B^*$ 在 Fock-Sobolev 空间上的有界性，这等价于 $H^{s/2}\circ W(\sigma)\circ H^{-s/2}$ 在$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界性。算子 $H^{s/2}$ 是一个伪微分算子，其魏尔符号属于舒宾类 $\Gamma^s(\mathbb{R}^{2n})$。如果 $W(\widehat{a_s}) = H^{s/2}.$，我们称 a_s 为 $H^{s/2}$ 的魏尔符号。舒宾类 $\Gamma^s(\mathbb{R}^{2n})$ 定义为满足以下一致估计的所有 $a\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 的集合:

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta a(x,y)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|y|)^{s-|\alpha|-|\beta|},\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n.$$

已知 $H^{s/2}$ 的魏尔符号 a_s 属于 $\Gamma^s(\mathbb{R}^{2n})$，参见 [4]中的命题 2.3 和 [16]中的定理 2.1。假设 σ 满足：对于所有 α 和β，$\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\widehat{\sigma}$ 均有界，那么 $B\circ W(\sigma)\circ B^* = W(a)$，其中魏尔符号 $\widehat{a}$ 还满足 $|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\widehat{a}(x,y)|\le C_{\alpha,\ \beta}$.因此，根据卡尔德龙-瓦扬古特定理，我们可以得出结论: $B\circ W(\sigma)\circ B^*$在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上有界。关于伪微分算子的更多内容，可参阅 Nicola 和 Rodino 的著作 [12]。

4.2. 带径向符号的伪微分算子。本小节中关于拉盖尔展开和 Weyl 变换的所有结果，均参见 [14] 和 [15]。令 $L_k^{n-1}(t)$ 表示类型为 $(n-1)$ 的拉盖尔多项式，并定义

$$\varphi_k^{n-1}(z) = L_k^{n-1}(\frac{1}{2}|z|^2)e^{-\frac{1}{4}|z|^2}.$$

Then 已知，任意径向函数 $\sigma\in L^1(\mathbb{C}^n)$ 都有一个拉盖尔展开 n

$$\sigma(z) = (2\pi)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}R_k^{n-1}(\sigma)\,\varphi_k^{n-1}(z).$$

其中 $R_k^{n-1}(\sigma)$ 是 σ 的拉盖尔系数，定义为

$$R_k^{n-1}(\sigma) = \frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!} \int_{\mathbb{C}^n} \sigma(z)\varphi_k^{n-1}(z)\, dz.$$

此外，我们还知道 $W(\varphi_k^{n-1}) = (2\pi)^n P_k$，其中 P_k 是 Hermite 投影，将 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 投影到由 Φ_α 张成的空间上。$|\alpha| = k$. 因此，

$$W(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{n-1}(\sigma)\, P_k$$

由于 $|R_k^{n-1}(\sigma)| \le c\,\|\sigma\|_1$，它是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性算子；而这一结论可由以下事实推出：$|\varphi_k^{n-1}(z)| \le \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ 在较弱的假设下也有相同结论：σ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的径向博雷尔测度，且其系数 $R_k^{n-1}(\sigma)$ 一致有界。

当 σ 如上所述时，算子 $B \circ W(\sigma) \circ B^*$ 的核可用 σ. 显式计算。我们有

命题 4.2。设 σ 是一个径向符号，且 $W(\sigma)$ 有界。则 $B \circ W(\sigma) \circ B^* = S_K$，其中核由下式给出

$$K(z,w) = c_n\, e^{\frac{1}{2} z\cdot w} \int_{\mathbb{C}^n} \sigma(\zeta)\, \frac{J_{n-1}(|\zeta|\sqrt{z\cdot w})}{(|\zeta|\sqrt{z\cdot w})^{n-1}}\, e^{-\frac{1}{4}|\zeta|^2}\, d\zeta.$$

证明。与前面一样，$K(z,w) = (B \circ W(\sigma) \circ B^*) g_w(z) = (B \circ W(\sigma)) h_w(z)$。将 h_w 展开为 Hermite 函数，并结合 $W(\sigma)$ 的公式，可得

$$W(\sigma) h_w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{n-1}(\sigma) \Big(\sum_{|\alpha|=k} \Phi_\alpha(x)\, \zeta_\alpha(w) \Big).$$

应用算子 B 于函数 $W(\sigma)h_w$，并利用 $B\Phi_\alpha = \zeta_\alpha$ 这一事实，可得

$$K(z,w) = \pi^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{n-1}(\sigma) \Big(\sum_{|\alpha|=k} \frac{z^\alpha\, w^\alpha}{2^{|\alpha|}\alpha!} \Big) = \pi^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{n-1}(\sigma)\, \frac{(z\cdot w)^k}{2^k k!}.$$

回顾 $R_k^{n-1}(\sigma)$ 的定义，我们已证明

$$K(z,w) = c_n \int_{\mathbb{C}^n} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k^{n-1}(\frac{1}{2}|\zeta|^2)}{(k+n-1)!} \big(\frac{1}{2} z\cdot w\big)^k \Big) e^{-\frac{1}{4}|\zeta|^2} \sigma(\zeta)\, d\zeta.$$

利用以下由 $\delta > -1$ 型的拉盖尔多项式 $L_k^\delta(r)$ 满足的生成函数恒等式，即可完成证明：对于任意的 $r > 0, t \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k^\delta(r)}{\Gamma(k+\delta+1)!}\, t^k = e^t\, (\sqrt{rt})^{-\delta}\, J_\delta(2\sqrt{rt})$$

其中 $J_\delta(t)$ 是 δ 阶贝塞尔函数，参见 [13]。 □

注 4.3. 如果我们将 $\sigma(\zeta) = \sigma_0(|\zeta|)$ 写成这样，那么算子 $B \circ W(\sigma) \circ B^*$ 的核由 $K(z,w) = \mathcal{B}_{n-1}\sigma_0(\sqrt{z\cdot w})$ 给出，其中对于任意 $\delta \ge -1/2$ 和 $g \in L^2(\mathbb{R}^+, r^{2\delta+1}dr)$，

$$\mathcal{B}_\delta g(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau^2} \int_0^\infty g(r)\, e^{-\frac{1}{4}r^2}\, \frac{J_\delta(r\tau)}{(r\tau)^\delta}\, r^{2\delta+1} dr.$$

这些算子 $\mathcal{B}_\delta$ 被称为广义 Bargmann 变换，相关研究可参见 [9]。 $L^2(\mathbb{R}^+, r^{2\delta+1}dr)$ 在 $\mathcal{B}_\delta$ 下的像可以刻画为 $\mathbb{C}$ 上的偶整函数希尔伯特空间；这些函数关于权函数 $w_\delta(\tau)$ 平方可积，该权函数已有明确表达式，可用麦克唐纳函数 $K_{\delta\cdot}$ 表示

致谢

本研究是在作者于 2022 年 12 月至 2023 年 1 月访问布里斯班昆士兰大学期间完成的。作者谨向数学系致谢，感谢其热情接待，并感谢 Dietmar Oelz 教授的邀请。

References

[1] V. Bargmann，论解析函数的一个希尔伯特空间及其相关积分变换。第一部分。《纯粹与应用数学通讯》14 (1961)，187–214 页。[2] S. Bais 和 V. N. Dogga，福克空间上 $\mathcal{L}$-不变的径向奇异积分算子，《伪微分算子与应用》 (2023)[3] D. Bhimani、R. Manna、F. Nicola、S. Thangavelu 和 I. Trapasso，Hermite 半群的相空间分析及其在非线性整体适定性中的应用，《数学进展》392 (2021)[4] D. Bhimani、R. Manna、F. Nicola、S. Thangavelu 和 I. Trapasso，与分数阶调和振子相关的热方程，arXiv:2210.07691[5] B. Bongioanni 和 J. L. Torrea，与调和振子相关的 Sobolev 空间，《印度科学院院刊（数学科学）》116 卷第 3 期，337–360 页 (2003)。[6] G. Cao、J. Li、M. Shen、B. Wick 和 L. X. Yan，福克空间上卷积型奇异积分算子的有界性判据，《数学进展》363 (2020)，[7] G. Cao、L. He、J. Li 和 M. Shen，分数阶 Fock-Sobolev 空间上积分算子的有界性判据，《数学杂志》301 (2022)，3671–3693 页。[8] H. R. Cho 和 S. Park，分数阶 Fock-Sobolev 空间，《名古屋数学杂志》237 (2020)，79–97 页。[9] F. M. Cholewinski，广义 Fock 空间及其相关算子，《SIAM 数学分析杂志》15 (1984)，177–202 页。[10] G. B. Folland，《相空间中的调和分析》，《数学年刊研究》，第 122 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1989。[11] G. H. Hardy，关于傅里叶变换的一个定理，《伦敦数学会杂志》8 (1933)，227–231 页。[12] F. Nicola 和 L. Rodino，《欧几里得空间上的整体伪微分演算》，《伪微分算子：理论与应用》，第 4 卷，Birkhauser Verlag，巴塞尔，2010。[13] G. Szego，《正交多项式》，美国数学学会学术丛书第 23 卷，普罗维登斯，罗得岛州 (1967)。[14] S. Thangavelu，《Hermite 与 Laguerre 展开讲义》，数学札记第 42 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。[15] S. Thangavelu，《不确定性原理导论：李群上的 Hardy 定理》，前言由 Gerald B. Folland 撰写，《数学进展》第 217 卷，Birkhauser，波士顿，马萨诸塞州，2004[16] S. Thangavelu，关于 Hermite 算子的分数次幂的注记，arXiv:1801.08343 (2018)。[17] B. D. Wick 和 S. K. Wu，通过 Gauss-Sobolev 空间上的乘子研究 Fock-Sobolev 空间上的积分算子，《积分方程与算子理论》 (2022)，。[18] K. Zhu，福克空间上的奇异积分算子，《积分方程与算子理论》81 (2015)，451–454 页。[19] K. Zhu，《Fock 空间上的分析》，Springer，纽约，2012。

(S. Thangavelu) Department of Mathematics, Indian Institute of Science, 560 012 Banga-lore, India电子邮箱：veluma@iisc.ac.in