arXiv:2304.01095v1 [physics.flu-dyn] 3 Apr 2023

表面重力波中小颗粒的波平均运动：粒子形状对取向、漂移和弥散的影响

Nimish Pujara[1], *和 Jean-Luc Thiffeault[2], †[1]土木与环境工程系，威斯康星大学麦迪逊分校，美国威斯康星州麦迪逊，邮编*53706*[2]数学系，威斯康星大学麦迪逊分校，美国威斯康星州麦迪逊，邮编*53706*

自然环境中悬浮在水柱里的微塑料和浮游植物等粒子，常常受到表面重力波的作用。通过将这类各向异性颗粒建模为在波动环境中缓慢沉降（或上升）的小椭球体，我们考察粒子形状和浮力如何与背景波驱动流耦合，从而影响粒子取向、漂移和弥散。多尺度展开可将波致振荡与波平均粒子运动分离开来。利用粒子运动的波平均方程，我们证明，椭球形颗粒会产生波诱导的优先取向，并且长椭球和扁椭球具有不同的稳定解。这种优先取向使粒子的最长轴指向波传播方向，并向上对抗重力。最长轴向上指向的角度取决于粒子的长宽比。在这种取向下，粒子会向与波传播相反的方向漂移，从而削弱、甚至可能逆转其斯托克斯漂移。波诱导的稳定取向还会使沉降速度相对于随机（各向同性）取向有所降低。粒子云的弥散受取向分布控制。对于一同释放且具有随机（各向同性）取向的粒子云，其初始云团增长速率在所有方向上均呈弹道式。波的作用会抑制垂向弥散；但当斯托克斯漂移剪切作用于一个已在垂向扩展的粒子云时，会增强水平方向的弥散，使其进入超弹道状态。

I. 引言

表面重力波驱动的流动中粒子的运动，与沿海及海洋环境中非生物粒子（沉积物、海洋垃圾，包括油滴、宏塑料和微塑料）及生物粒子（浮游生物、有机聚集体）的输运有关。受其广泛应用的启发，近期关于这一主题的研究考察了波致球形粒子的漂移 [1–10], 、各向异性粒子的优先取向与输运 [11–16], ，以及活性粒子的行为，例如浮游微型游泳生物 [16–20]。

在这里，我们研究波中的颗粒输运，重点关注两个相互关联的因素：粒子的浮力和粒子形状。二者相互耦合，因为粒子取向会通过取向相关阻力影响输运。将形状和浮力的影响纳入考量的最简单方法，是在无惯性极限下将粒子建模为椭球体

* npujara@wisc.edu
† jeanluc@math.wisc.edu

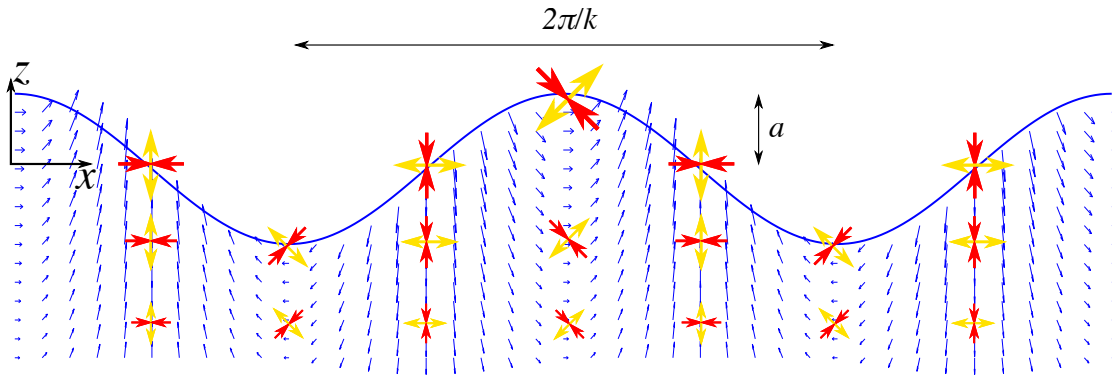


图 1：沿 x 正方向传播的小振幅表面重力波，其速度场由较小的蓝色箭头表示，速度梯度由较大的红色和黄色箭头表示。

对于密度与流体密度相差不大的小颗粒，这些椭球体会在水柱中下沉（或上浮）。许多应用都符合这些假设（例如，微塑料、浮游植物），因此采用这种方法是合理的。

我们研究浸没在小振幅行进波驱动的流动中的缓慢沉降（或上升）椭球形颗粒。我们首先利用多尺度展开推导波平均平移和旋转的公式（第 II 节），然后通过分析和数值求解波平均公式，讨论粒子取向与输运之间的相互作用（第 III 节）。在扩展并修正先前关于波致优先取向的结果后 [11, 12], ，我们发现，椭球体的波平均取向动力学在由其极角张成的相空间中最多有 6 个不动点，但其中只有一个稳定不动点。这个稳定不动点代表波诱导的粒子优先取向，正如先前发现的那样，它仅取决于粒子长宽比（而与波幅或频率无关）；然而，我们表明，扁椭球和长椭球形状对应的稳定不动点位于不同的解支上，因此粒子最长轴总是具有沿波传播方向、逆重力向上的分量。考察粒子形状对漂移的影响后，我们发现，粒子取向导致的漂移在水平方向上始终与波传播方向（及斯托克斯漂移）相反；与尺寸相同的球体或随机（各向同性）取向相比，垂直沉降总是减弱。最后，我们考察波对颗粒弥散的影响，这种影响由颗粒取向分布所控制。对于初始各向同性的取向分布，我们给出了粒子云在波开始改变粒子取向之前的弹道增长率的解析预测。随着波致重新取向效应不断累积，垂直弥散率逐渐减弱。然而，水平方向的弥散率会增大，因为斯托克斯漂移的剪切作用于垂直方向扩展的粒子云，从而导致一段超弹道弥散时期。最后，我们总结并讨论本研究结果的局限性及其拓展方向（第 IV 节）。

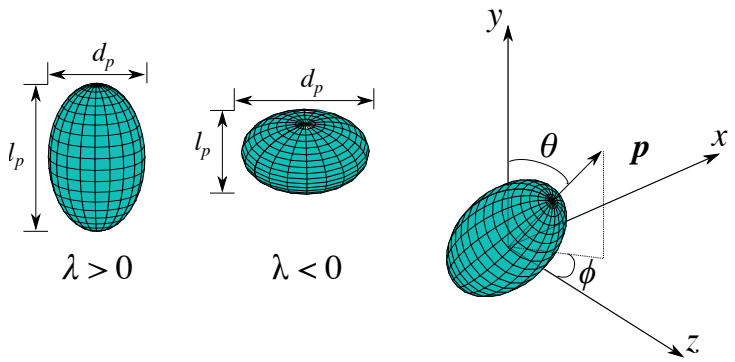


图 2：长宽比为 AR $= \ell_{\rm p}/d_{\rm p}$ 的椭球体，以及定义取向的角度 ϕ 和 θ。

II. 波平均粒子运动

我们考虑小振幅二维行进表面重力波，其描述为 $\eta = ka\cos(x-t)$，其中流体速度场为

$$u_x = \varepsilon_{\rm w}\, {\rm c}(z)\cos(x-t), \tag{1a}$$
$$u_z = \varepsilon_{\rm w}\, {\rm s}(z)\sin(x-t). \tag{1b}$$

其中

$$ {\rm c}(z) = \cosh(z+kh)/\cosh kh, \qquad {\rm s}(z) = \sinh(z+kh)/\cosh kh. \tag{2}$$

这里，a 为波幅，k 为波数，ω 为角频率。自由表面位置为 $z=\eta$，流体速度场为 $\boldsymbol{u} = [u_x, u_z]$。小振幅条件要求 $\varepsilon_{\rm w} = ka/\tanh kh \ll 1$，色散关系为 $\omega^2 = gk\tanh\, kh$。从速度梯度来看，流动为无旋流（$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{u} - (\nabla\boldsymbol{u})^T] \equiv 0$），应变率张量的分量（$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T]$）为

$$S_{xx} = -S_{zz} = -\varepsilon_{\rm w}\, {\rm c}(z)\sin\,(x-t), \tag{3a}$$
$$S_{xz} = \quad S_{zx} = \quad \varepsilon_{\rm w}\, {\rm s}(z)\cos\,(x-t). \tag{3b}$$

我们使用了无量纲变量 $t \to \omega t, \boldsymbol{x} \to k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}/(\omega/k)$。图 1 显示了波驱动流场中的速度场和速度梯度。

我们考虑由以下方程描述的小型、缓慢沉降（或上升）的椭球体的运动：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}; \quad \boldsymbol{w} = -v_{\rm s\perp}\boldsymbol{e}_z - (v_{\rm s\parallel} - v_{\rm s\perp})(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}, \tag{4a}$$
$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{p} + \lambda\big[\boldsymbol{S}\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\big], \tag{4b}$$

其中，粒子速度 $\boldsymbol{v}$ 取为局部流体速度 $\boldsymbol{u}$ 与沉降速度 $\boldsymbol{w}$之和；粒子旋转——其定义为沿粒子对称轴方向的单位向量$\boldsymbol{p}$ 的变化率——由杰弗里方程 [21]给出。粒子形状由 $\lambda \in [-1,1]$定义，并通过 $\lambda = ({\rm AR}^2-1)/({\rm AR}^2+1)$与粒子长宽比 AR 相关。在沉降速度矢量的表达式中，$v_{\rm s\parallel}$ 表示对称轴平行于重力时粒子在静止流体中的沉降速度，而 $v_{\rm s\perp}$ 表示对称轴垂直于重力时的相同量。这些方程已

采用与流体速度场相同的尺度进行了无量纲化。关于粒子模型的更多细节见附录 A。

采用极角 ϕ 和 θ，二者的定义范围均为 0 到 π （图 2），粒子取向矢量的各分量可写为 [16]

$$p_x = \sin\phi\,\sin\theta, \quad p_y = \cos\theta, \quad p_z = \cos\phi\,\sin\theta. \tag{5}$$

利用 (1)、(3) 和 (5)，可将粒子方程 (4) 重写为以下分量形式的常微分方程 [参见文献 12, 16]:

$$\dot{x} = \varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{c}(z)\cos(x-t) - (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta, \tag{6a}$$
$$\dot{y} = -(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\phi\cos\theta\sin\theta, \tag{6b}$$
$$\dot{z} = \varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{s}(z)\sin(x-t) - v_{\mathrm{s}\perp} - (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos^2\phi\sin^2\theta, \tag{6c}$$
$$\dot{\phi} = \lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\,[\mathrm{s}(z)\cos(x-t)\cos 2\phi - \mathrm{c}(z)\sin(x-t)\sin 2\phi], \tag{6d}$$
$$\dot{\theta} = \lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\,[\mathrm{s}(z)\cos(x-t)\sin 2\phi + \mathrm{c}(z)\sin(x-t)\cos 2\phi]\sin\theta\cos\theta. \tag{6e}$$

为推导波平均运动，我们对粒子位置和取向进行双时间展开，以分离快速运动（波致振荡）与慢速运动（波平均运动） [10, 16]:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \phi(t)\\ \theta(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}(T) + \epsilon\,\boldsymbol{x}_1(t,T;\epsilon) + \cdots\\ \Phi(T) + \epsilon\,\phi_1(t,T;\epsilon) + \cdots\\ \Theta(T) + \epsilon\,\theta_1(t,T;\epsilon) + \cdots\end{bmatrix}, \qquad T = \epsilon^2 t,$$

其中，ϵ 是一个小量，用作定阶参数。由于流体速度为$\boldsymbol{u} \sim O(\varepsilon_{\mathrm{w}})$，属于小量，因此在展开中将其重新标度为 $\varepsilon_{\mathrm{w}} \to \epsilon\,\varepsilon_{\mathrm{w}}$。对于粒子速度，我们研究的是缓慢沉降于流动中的小颗粒的动力学，因此将粒子沉降速度重新标度为比流体速度低一阶，即 $v_{\mathrm{s}} \to \epsilon^2 v_{\mathrm{s}}$。将展开式和标度代入 (6) 并收集各阶项，即可得到每一阶对应的运动方程。完整推导见附录 B。此处仅列出主要结果，即慢时间尺度上的波平均粒子运动:

$$\partial_T X = \varepsilon_{\mathrm{w}}^2\,\mathrm{C}(Z) - (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\Phi\sin\Phi\sin^2\Theta, \tag{7a}$$
$$\partial_T Y = -(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\Phi\sin\Theta\cos\Theta, \tag{7b}$$
$$\partial_T Z = -[v_{\mathrm{s}\perp} + (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos^2\Phi\sin^2\Theta], \tag{7c}$$
$$\partial_T \Phi = \lambda\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\,\mathrm{S}(Z)(\lambda + \cos 2\Phi), \tag{7d}$$
$$\partial_T \Theta = \lambda\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\,\mathrm{S}(Z)\sin 2\Phi\sin\Theta\cos\Theta. \tag{7e}$$

其中

$$\mathrm{C}(Z) = \frac{\cosh 2(Z+kh)}{2\cosh^2 kh}, \qquad \mathrm{S}(Z) = \frac{\sinh 2(Z+kh)}{2\cosh^2 kh}. \tag{8}$$

为了将波平均动力学 (7) 与完整动力学 (6) 直接比较，正确转换初始条件 [cf. 10, 16]，也很重要，详见附录 B。

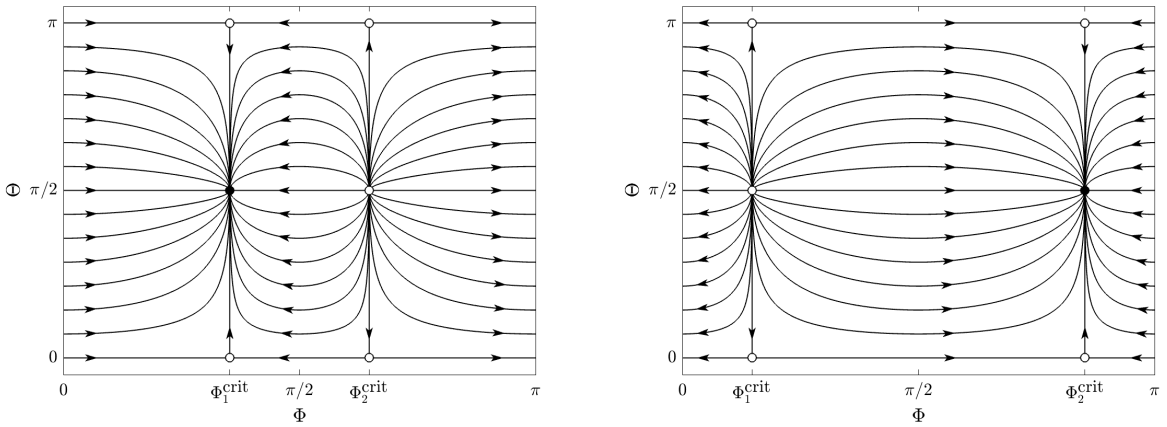


图3： Φ–Θ 相图，其中 (a) $\lambda = 0.6$ 和 (b) $\lambda = -0.6$。

III. 粒子运动分析

A. 取向

$\partial_T \Phi$ 方程 (7d) 表明， Φ 动力学中存在满足$\lambda + \cos 2\Phi = 0$的不动点，它们仅取决于粒子形状，与所有其他变量无关 [另见 12, 16]。对应于这两个不动点的临界角为

$$\Phi_1^{\mathrm{crit}} = \tfrac{1}{2}\arccos(-\lambda) \in [0, \pi/2], \qquad \Phi_2^{\mathrm{crit}} = \pi - \Phi_1^{\mathrm{crit}} \in [\pi/2, \pi]. \tag{9}$$

将 (7) 中的 $\partial_T \Phi$ 与 $\partial_T \Theta$ 取比，可以从平移动力学中分离出三维取向动力学：

$$\frac{d\Phi}{d\Theta} = \frac{2(\lambda + \cos 2\Phi)}{\sin 2\Phi \sin 2\Theta}. \tag{10}$$

这表明，取向动力学与粒子是否相对于流动运动以及如何运动无关（例如，下沉、游动或上升），也与除粒子形状之外的所有变量无关，即使考虑面外旋转时也是如此。此前已有研究报告了波中的椭球形微型游泳者的这一方程 [16], ，并同时给出了以下解：

$$\sin\Theta = \left(1 + \cot^2\Theta(0)\,\frac{|\lambda + \cos 2\Phi|}{|\lambda + \cos 2\Phi(0)|}\right)^{-1/2} \tag{11}$$

对于初始条件 $\Phi(0)$ 和 $\Theta(0)$。图3展示了与该解对应的相图。我们观察到存在不动点 $(\Phi, \Theta) = (\Phi_1^{\mathrm{crit}}, 0)$、$(\Phi_1^{\mathrm{crit}}, \pi/2)$、$(\Phi_1^{\mathrm{crit}}, \pi)$ 和 $(\Phi, \Theta) = (\Phi_2^{\mathrm{crit}}, 0)$、$(\Phi_2^{\mathrm{crit}}, \pi/2)$、$(\Phi_2^{\mathrm{crit}}, \pi)$，但其中只有一个是稳定的。对于长椭球颗粒 ($\lambda > 0$)，稳定不动点为 $(\Phi, \Theta) = (\Phi_1^{\mathrm{crit}}, \pi/2)$；而对于扁椭球颗粒 ($\lambda < 0$)，稳定不动点为 $(\Phi, \Theta) = (\Phi_2^{\mathrm{crit}}, \pi/2)$。

通过对不动点进行形式化的稳定性分析，可以证明这一结论对所有形状（$-1 \le \lambda \le 1$）均成立。在不动点附近，将 Φ 和 Θ 表示为小扰动

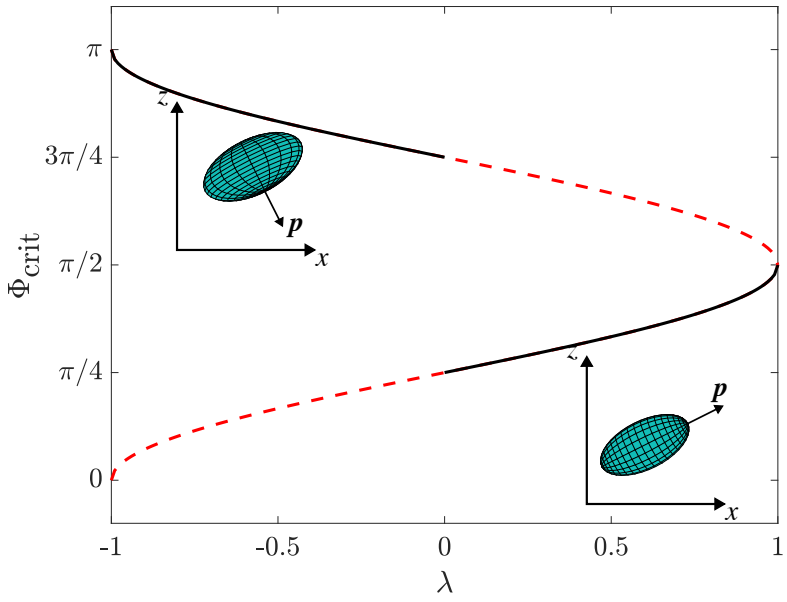


图 4：由方程（9）给出的临界角 Φ^{crit} 。黑色实线表示稳定区域，红色虚线表示不稳定区域。插图显示了 $\lambda = \pm 0.6$ 的稳定取向。

as

$$\Phi = \Phi^{\mathrm{crit}} + \varphi; \qquad \Theta = \tfrac{1}{2}\pi + \vartheta,$$

我们得到线性化系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad A = \varepsilon_{\mathrm{w}}^2\, \mathrm{S}(Z)\, \lambda \begin{bmatrix} -2\sin 2\Phi^{\mathrm{crit}} & 0 \\ 0 & -\sin 2\Phi^{\mathrm{crit}} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

为简化起见，在稳定性分析中，我们假设 Z 为常数，这相当于考虑中性浮力粒子。 A 的迹和行列式为

$$\mathrm{Tr}\, A = -3\lambda\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\, \mathrm{S}(Z) \sin 2\Phi^{\mathrm{crit}}; \quad \det A = 2\lambda^2 \varepsilon_{\mathrm{w}}^4\, \mathrm{S}^2(Z) \sin^2 2\Phi^{\mathrm{crit}}.$$

由此可确认，对于所有非球形形状，$\det A > 0$ 且 $(\mathrm{Tr}A)^2 - 4\det A > 0$，因此不动点要么是稳定结点，要么是不稳定结点。考察 $\Phi^{\mathrm{crit}} \in \{\Phi_1^{\mathrm{crit}}, \Phi_2^{\mathrm{crit}}\}$ 时 $\mathrm{Tr}A$ 的符号可知，$(\Phi = \Phi_1^{\mathrm{crit}}, \Theta = \pi/2)$ 在 $\lambda > 0$ 时为稳定结点，在 $\lambda < 0$ 时为不稳定结点。反之，$(\Phi = \Phi_2^{\mathrm{crit}}, \Theta = \pi/2)$ 在$\lambda > 0$ 时为不稳定结点，在 $\lambda < 0$ 时为稳定结点。这些发现与图 3 中的相图一致。

由于存在一个带有 $\Theta = \pi/2$ 的全局吸引不动点，我们可以得出结论：所有形状的粒子最终都会到达这个不动点，因此其对称轴会在流动平面内对齐。图 4 展示了临界角 Φ_i^{crit}随粒子形状 λ 的变化，针对的是 x–z 平面内的取向 $\boldsymbol{p}$ ；稳定区域以黑色标示。此前的研究使用波分辨方程[11, 12], 分析了优先取向，而此处采用的波平均表述大大简化了问题，因为

优先取向变成了不动点，而非极限环。此外，我们的分析与此前关于长椭球颗粒的研究结果一致（即 稳定取向为$\Phi = \Phi_1^{\mathrm{crit}}$， $\lambda > 0$时的$\Theta = \pi/2$ ），但我们发现扁椭球颗粒的稳定取向有所不同（即 稳定取向为 $\Phi = \Phi_2^{\mathrm{crit}} = \pi - \Phi_1^{\mathrm{crit}}$， $\lambda < 0$时的$\Theta = \pi/2$ ）。

当 Φ 趋向于其波平均运动中的稳定不动点时，未平均的解 ϕ 包含一个振荡分量。我们可以利用 $O(\epsilon^1)$ 解预测这些振荡的主阶振幅和相位滞后。具体而言，我们预期 $\phi = \Phi + A_\phi \cos(X - t + L_\phi) + O(\epsilon^2)$，其中 A_ϕ 是振荡振幅， L_ϕ 是相对于波的相位滞后。由式 (B3)，我们得到

$$A_\phi = \pm \frac{\epsilon_{\mathrm{w}}}{\cosh kh} \lambda \sqrt{\sinh^2(Z + kh) + \sin^2 2\Phi}, \tag{13a}$$

$$L_\phi = \arctan\left[-\frac{\tanh(Z + kh)}{\tan 2\Phi} \right]. \tag{13b}$$

对于波平均垂直位置随时间变化的粒子（例如因下沉、上升、游动等原因），这些表达式仍然成立，因为这些动力学已包含在 $Z(T)$ 的值中。

图 5 显示，解 $\phi \approx \Phi + A_\phi \cos(X - t + L_\phi)$ 能够准确追踪数值计算得到的 ϕ 演化，而 Φ 的解则趋向于其稳定不动点。由式 (13) 还可以看出，波幅越大、非球形度越高，且粒子越靠近水面，角振荡的振幅就越大。对于波平均垂直位置保持不变的被动中性浮力颗粒，当 Φ 到达其稳定不动点时， A_ϕ 和 L_ϕ 变为常数。事实上，在深水中（ kh较大），粒子靠近水面（ Z较小），上述表达式可大幅简化为

$$A_\phi = \pm \lambda k a,$$

$$L_\phi = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\Phi, & 0 < \Phi < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} + 2\Phi, & \frac{\pi}{2} < \Phi < \pi. \end{cases}$$

B. 漂移

根据 (7)，我们定义水平和垂直漂移速度

$$v_X = \partial_T X = u_{\mathrm{SD}} - \tfrac{1}{2}(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp}) \sin 2\Phi \sin^2 \Theta, \tag{14a}$$

$$v_Z = \partial_T Z = -[v_{\mathrm{s}\perp} + (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp}) \cos^2 \Phi], \tag{14b}$$

其中，斯托克斯漂移 $u_{\mathrm{SD}} = \varepsilon_{\mathrm{w}}^2 \mathsf{C}(Z)$ 仅是波的函数，而第二项仅取决于粒子在波中的运动方式。将粒子的沉降速度 $(v_{\mathrm{s}\parallel}, v_{\mathrm{s}\perp})$ 和稳定取向角 $(\Phi_{\mathrm{stable}}^{\mathrm{crit}}, \Theta_{\mathrm{stable}}^{\mathrm{crit}})$ 代入 (14)，即可得到其波致漂移。

考察水平分量可知，粒子各向异性总会使（14a）右侧第二项为负值，这意味着波诱导的粒子漂移会比斯托克斯漂移小，甚至可能方向相反。对于所有粒子，$\sin^2 \Theta_{\mathrm{stable}}^{\mathrm{crit}} = 1$，$(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp}) > 0$，且 $\sin 2\Phi_{\mathrm{stable}}^{\mathrm{crit}} > 0$

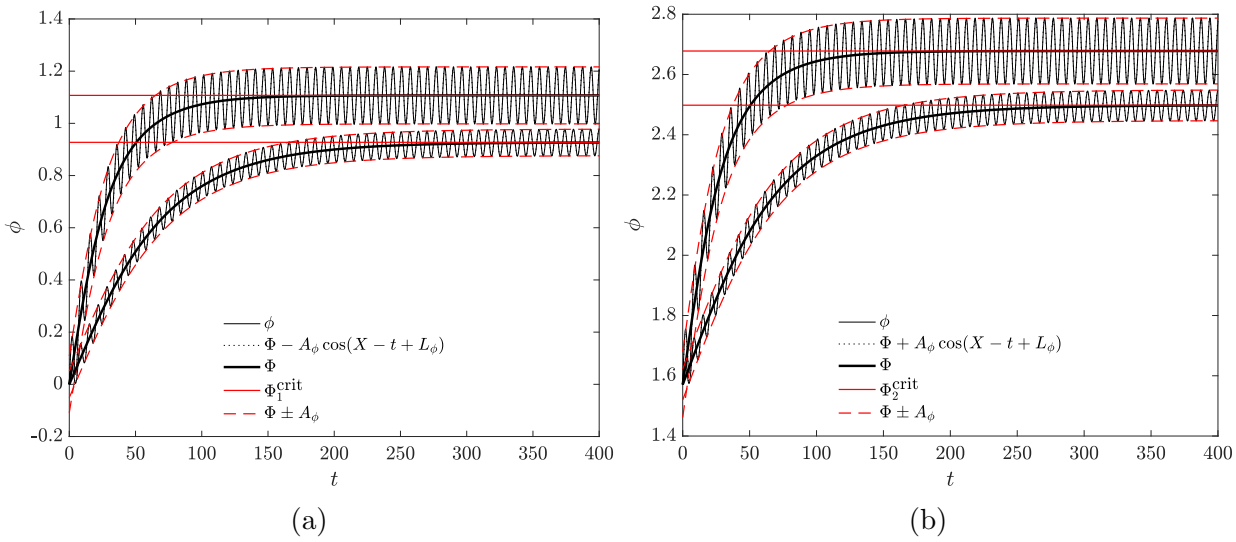


图 5： ϕ 随 $Z = -0.10$、 $ka = 0.2$和 $kh = 40$ 的演化：(a) 长扁形（上方曲线对应 $\lambda = 0.6$， 下方曲线对应 $\lambda = 0.28$ ）和 (b) 扁球形（上方曲线对应$\lambda = -0.6$， 下方曲线对应 $\lambda = -0.28$ ）。 ϕ 和 Φ 的曲线由数值解得到， A_ϕ 和 L_ϕ 由式 (13) 得到， $\Phi^{\rm crit}$s 由式 (9) 得到。使用初始条件修正 (B6) 以直接比较 $\phi(t)$和 $\Phi(t)$

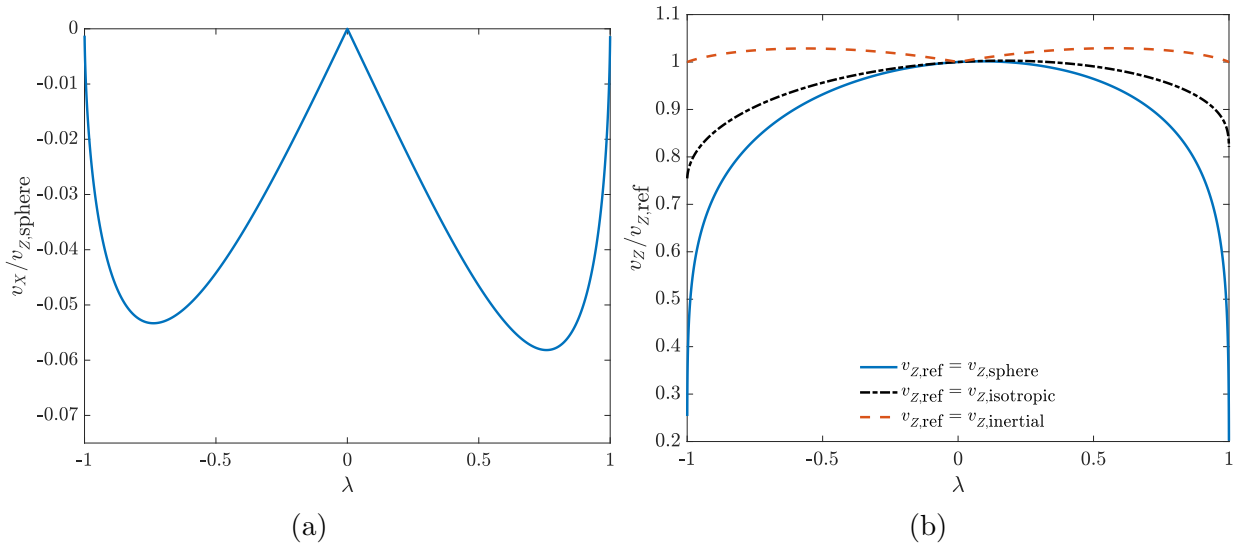


图 6：粒子形状和波致取向对水平与垂直漂移速度的影响。

对于长椭球颗粒，$(v_{s\parallel} - v_{s\perp}) < 0$， 且 $\sin 2\Phi^{\rm crit}_{\rm stable} < 0$；对于扁椭球颗粒。图 6a 中将（ 14a）右侧第二项除以等体积球体的沉降速度 $v_{Z,\ \rm sphere}$ (A7)，从而单独考察粒子形状对水平漂移的影响。中度各向异性形状的水平漂移速度降幅最大，最多可达到其沉降速度的 5%；如果粒子

与斯托克斯漂移相比，沉降速度相当高。粒子沉至波致速度场的影响范围以下后，若不受扰动，将继续沿负x方向漂移。

对于垂直漂移分量，粒子各向异性的影响可通过将波致沉降速度与以下三个不同极限情况进行比较来量化：(1) 等体积球体的沉降 $v_{Z,\ \mathrm{sphere}}$ (A7)；(2) 同一粒子随机（各向同性）取向时的沉降 $v_{Z,\ \mathrm{isotropic}} = (2v_{\mathrm{s}\perp} + v_{\mathrm{s}\parallel})/3$ 其中 Φ 在 $[0, \pi]$ 中均匀分布，且 $\cos\Theta$ 在 $[-1, 1]$中均匀分布；以及 (3) 同一粒子在使沉降速度最小的粒子惯性力矩所导致的取向下的沉降 $v_{Z,\ \mathrm{inertial}} = \min(v_{\mathrm{s}\perp}, v_{\mathrm{s}\parallel})$。极限情况 (1) 体现给定体积下粒子形状和取向的影响，而极限情况 (2) 和 (3) 则体现给定形状和体积下粒子取向的影响。图 6b 展示了这些比较。我们发现，采用随机（各向同性）取向或等体积球体，会大幅高估波中椭球体的沉降速度；而采用椭球体处于惯性取向时的沉降速度，误差则很小。

C. 弥散

粒子的漂移速度 (7a)–(7c) 是 Z、Φ 和 Θ 的函数。因此，对于形状和尺寸相同、但初始垂直位置和/或初始取向不同的粒子，其轨迹会逐渐分离。这里，我们关注由初始取向差异导致的粒子弥散。

研究取向效应导致的粒子弥散时，一个有用的极限情形是：给定形状的粒子具有随机（各向同性）取向，并在静止流体中沉降。在这种情况下，可将水平和垂直漂移的方差计算为 v_X 和 v_Z 的中心二阶矩，其中 Φ 在 $[0, \pi]$ 上均匀分布，$\cos\Theta$ 在 $[-1, 1]$ 上均匀分布。由此得到方差

$$\mathrm{var}(v_X)_{\mathrm{isotropic}} = \tfrac{1}{15}(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{var}(X)_{\mathrm{isotropic}} = \tfrac{1}{15}(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})^2 t^2, \tag{15a}$$

$$\mathrm{var}(v_Z)_{\mathrm{isotropic}} = \tfrac{4}{45}(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{var}(Z)_{\mathrm{isotropic}} = \tfrac{4}{45}(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})^2 t^2. \tag{15b}$$

方程 (15) 表明，随机取向导致的粒子弥散处于弹道区间，此时粒子云尺寸随 $\sim t$ 增长（与扩散区间不同，在扩散区间内粒子云尺寸将随 $\sim t^{1/2}$ 增长）。方程还表明，粒子云在垂直方向上的增长速度将快于水平方向。利用随机（各向同性）取向下的粒子平均沉降速度 ($v_{Z,\ \mathrm{isotropic}} = (2v_{\mathrm{s}\perp} + v_{\mathrm{s}\parallel})/3$)，我们可以将时间换算为距初始位置的距离 $t = -(Z - Z_0)/v_{Z,\ \mathrm{isotropic}}$，并求得粒子云方差随深度的变化：

$$\mathrm{var}(X)_{\mathrm{isotropic}} = \tfrac{9}{15}\left[\frac{v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp}}{2v_{\mathrm{s}\perp} + v_{\mathrm{s}\parallel}}(Z - Z_0)\right]^2; \quad \mathrm{var}(Z)_{\mathrm{isotropic}} = \tfrac{4}{5}\left[\frac{v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp}}{2v_{\mathrm{s}\perp} + v_{\mathrm{s}\parallel}}(Z - Z_0)\right]^2. \tag{16}$$

由于云团大小可用粒子位置的标准差来表征，因此预计云团大小会随着深度增加；云团每垂直移动单位距离时，其增长量为 $\sim \left|(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})/v_{Z,\ \mathrm{isotropic}}\right|$。图 7 展示了这一函数，它仅取决于粒子形状。我们观察到，各向异性粒子形状越明显，弥散率越高，这是由于阻力各向异性增强所致。我们还发现，高度细长的形状

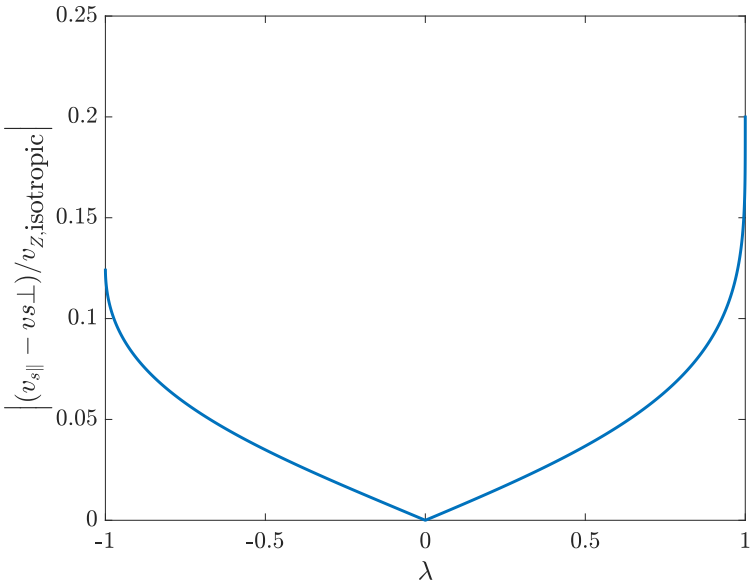


图 7：对于开始时（并始终保持）随机（各向同性）取向的不同形状，粒子云增长率随单位沉降（或上升）垂直距离的标度关系。粒子云尺寸的实际增长率将是图示量的某个倍数。

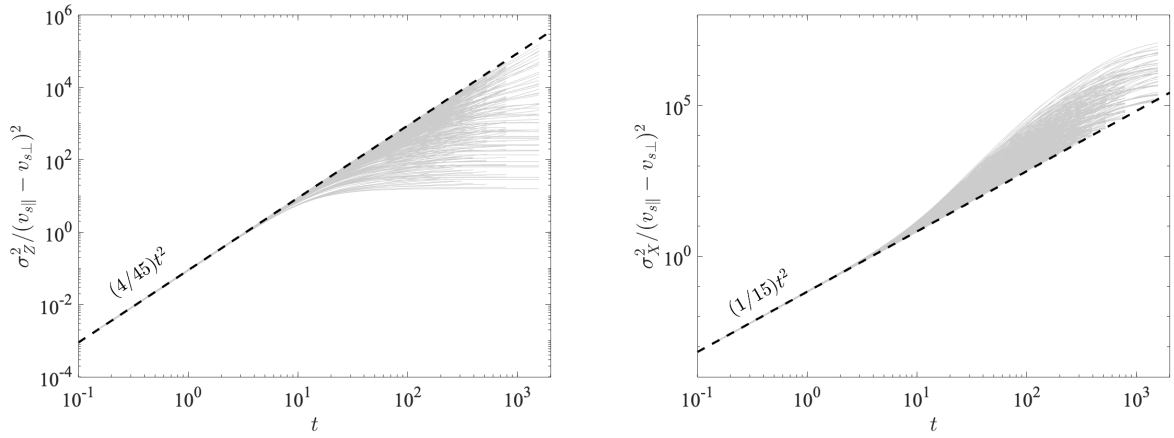
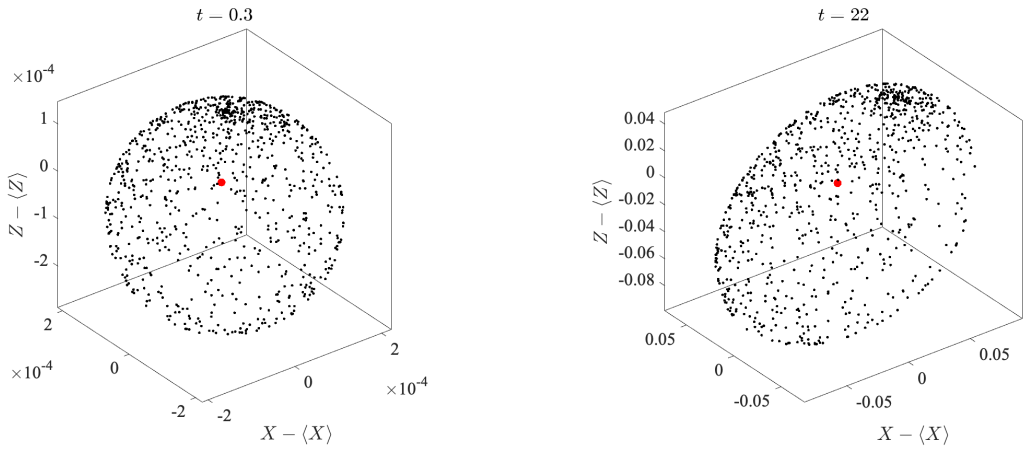


图 8：颗粒弥散（以颗粒位置方差量化）随时间的变化：（a）垂向弥散；（b）沿波传播方向的水平弥散。细灰线表示涵盖 $\varepsilon_{\mathrm{w}} \in [0.1, 0.3]$、 $\lambda \in [-0.99, 0.99]$ 和$v_{Z,\mathrm{isotropic}} \in [0.001, 0.01]$ 的数值模拟。粗虚线表示公式（15）中的初始弥散率。

（纤维）每单位垂直下降距离的弥散率高于高度扁平的形状（圆盘）。

为了解粒子形状如何影响弥散，我们分析了在水面同时释放的一群具有特定形状和尺寸、且取向随机（各向同性）的粒子。图8展示了初始位置为 $X = Y = Z = 0$ 的粒子的弥散情况



(a) (b)

图 9：在颗粒弥散模拟中不同时间的粒子云，其中$\varepsilon_{\mathrm{w}}=0.3$、 $\lambda=0.6$和$v_{Z,\mathrm{isotropic}}=0.05$：(a) 由于各向同性取向分布，初始粒子云逐渐扩展；(b) 由于斯托克斯漂移剪切，沿波浪方向的颗粒弥散增强。

且取向呈各向同性分布。这些模拟涵盖 $\varepsilon_{\mathrm{w}}\in[0.1,0.3]$、 $\lambda\in[-0.99,0.99]$ 和 $v_{Z,\mathrm{isotropic}}\in[0.001,0.01]$。粒子云最初以式（15）和式（16）预测的速率弥散，但有两个因素会改变弥散率：（1）随着粒子取向分布逐渐趋向波诱导的优先取向，粒子漂移速度开始趋于一致，从而降低两个方向上的弥散率；（2）随着粒子云在垂向上扩展，斯托克斯漂移的垂向变化开始使粒子云发生水平剪切，从而提高其沿波浪传播方向的弥散率。图9展示了不同时刻的粒子云快照，以说明这一现象。垂向和水平方向的弥散最初均为弹道式（粒子位置方差 $\sim t^2$），但垂向弥散随后转为亚弹道式，并持续减弱，直到粒子落到波浪运动影响范围之外；与此同时，初始垂向弥散使水平弥散暂时进入超弹道区间，之后又减弱并恢复到中等增长率。超弹道区间值得关注，因为它或许可以解释水面附近极高的水平扩展速率 [22]。请注意，对于球形粒子，不会观察到图9所示的行为；具有相似初始构型的球体不会发生弥散，因为它们的漂移速度仅取决于初始波平均垂直位置。

虽然我们已经量化了从不同取向开始运动的特定形状粒子的弥散，但粒子至少还可以通过另外两种机制发生弥散：(1) 由于粒子漂移取决于粒子的形状和大小，我们可以预期，同时释放的不同形状和大小的粒子会发生弥散；(2) 由于斯托克斯漂移对初始波平均垂直位置非常敏感，即使初始条件只有很小的变化（$O(\varepsilon_{\mathrm{w}}^2)$），也会导致粒子云发生水平弥散 [参见文献 10] 的图 5。本文不探讨这些不同机制的相对重要性，将其留待未来研究。

IV. 结论

我们考察了小振幅行进波流场中小型椭球形颗粒的运动。通过多尺度展开，我们将波平均运动从粒子位置和取向的波致振荡中分离出来。对波平均运动的分析表明，对于任意给定的粒子长宽比，都存在一种由波诱导的优先粒子取向，且这种取向与波参数无关。通过完整的三维分析，我们扩展并修正了先前关于扁椭球和长椭球颗粒在波浪中如何取向排列的结果 [11, 12]；具体而言，我们发现取向动力学中存在 6 个不动点，其中只有 1 个稳定，而且扁椭球和长椭球颗粒的这一稳定不动点分别位于不同的解支上。由此形成的稳定取向会诱导粒子沿波传播的反方向发生水平漂移，与斯托克斯漂移方向相反，且其沉降速度低于随机（各向同性）取向时的沉降速度。波平均粒子运动会因粒子取向的差异而产生粒子弥散，而粒子取向又决定了粒子漂移。对于在静水中释放、初始取向呈各向同性分布的粒子点云，粒子弥散起初遵循弹道区间，其系数取决于粒子的形状、大小和密度，如式 (15) 所示。波会通过使所有粒子取向排列一致来减小垂向弥散。波也会增加水平弥散，使粒子云暂时呈现超弹道水平增长；但这主要是由于斯托克斯漂移剪切作用于粒子云的垂直范围，而非粒子形状、大小或密度的直接影响。这种超弹道区间的存在或许可以解释为何在野外 [22] 和实验室 [15] 测量中，微塑料等各向异性颗粒会被波广泛扩散。这些结果也支持了先前提出的观点[11] ：粒子云的水平尺度由沉降和取向排列共同控制；沉降较快的粒子没有足够时间受到斯托克斯漂移剪切的弥散，而沉降较慢的粒子在达到波诱导的优先取向后则会停止弥散。不过，我们的分析澄清了粒子形状的影响主要在于决定初始弥散率（15），之后波浪作用的影响才会变得重要。

考虑到该模型的局限性及未来的扩展方向，我们指出，粒子模型 (4) 在小惯性极限下有效，而流动模型 (1)–(3) 在小振幅极限下有效。虽然小波幅假设被认为限制不大，但对于微塑料和浮游生物等应用，预计粒子和流体惯性会开始影响粒子运动 [例如，参见 23–25，其中提供了惯性效应的实验依据]。粒子惯性以斯托克斯数为量度，通常较小，尤其是在波周期较长的野外条件下，预计不会显著改变我们的结果。粒子周围的流体惯性则更可能产生重要影响。对此，我们已经证明，假设粒子以其惯性取向（所有取向中的最低沉降速度）沉降，在计算不同粒子形状的粒子漂移时只会造成较小误差。最后，本文模型完全是确定性的，因此粒子运动始终是其初始条件的函数。未来的研究将考察噪声（例如湍流）对粒子动力学的影响，以了解粒子取向、漂移和弥散会受到怎样的影响。

致谢

NP 感谢美国国家科学基金会（CBET-2211704 和 OCE-2048676）的资助。

---

[1] I. Eames, 《水波下方颗粒的沉降》, 《物理海洋学杂志》**38**, 2846（2008）。[2] F. Santamaria、G. Boffetta、M. M. Afonso、A. Mazzino、M. Onorato 和 D. Pugliese, 《水波输运惯性颗粒的斯托克斯漂移》, 《欧洲物理快报》**102**, 14003（2013）。[3] M. Bakhoday-Paskyabi, 《无旋水波下方的粒子运动》, 《海洋动力学》**65**, 1063（2015）。[4] M. Bakhoday-Paskyabi, 《表面重力波下的湍流-颗粒相互作用》, 《海洋动力学》**66**, 1429（2016）。[5] T. S. v. d. Bremer、C. Whittaker、R. Calvert、A. Raby 和 P. H. Taylor, 《深水表面重力波群下方颗粒轨迹的实验研究》, 《流体力学杂志》**879**, 168（2019）。[6] R. Calvert、C. Whittaker、A. Raby、P. H. Taylor、A. G. L. Borthwick 和 T. S. van den Bremer, 《有限水深下单向表面重力波包中波致平均流与波面降落的实验室研究》, 《物理评论：流体》**4**, 114801（2019）。[7] M. H. DiBenedetto, 《非破碎波对浮性颗粒分布的影响》, 《海洋科学前沿》**7**, 1（2020）。[8] J. J. Webber 和 H. E. Huppert, 《随深度变化的渗透率条件下珊瑚礁中的斯托克斯漂移》, 《皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》**378**, 20190531（2020）。[9] R. Calvert、M. McAllister、C. Whittaker、A. Raby、A. Borthwick 和 T. van den Bremer, 《漂浮海洋垃圾波致漂移增加的一种机制》, 《流体力学杂志》**915**, A73（2021）。[10] M. H. DiBenedetto、L. K. Clark 和 N. Pujara, 《表面波中惯性颗粒沉降与弥散的增强》, 《流体力学杂志》**936**, A38（2022）。[11] M. H. DiBenedetto、N. T. Ouellette 和 J. R. Koseff, 《波下各向异性颗粒的输运》, 《流体力学杂志》**837**, 320（2018）。[12] M. H. DiBenedetto 和 N. T. Ouellette, 《波状流中椭球形颗粒的优先取向》, 《流体力学杂志》**856**, 850（2018）。[13] M. H. DiBenedetto、J. R. Koseff 和 N. T. Ouellette, 《表面重力波下非球形颗粒的取向动力学》, 《物理评论：流体》**4**, 034301（2019）。[14] L. K. Clark、M. H. DiBenedetto、N. T. Ouellette 和 J. R. Koseff, 《波状流中惯性非球形颗粒的沉降》, 《物理评论：流体》**5**, 124301（2020）。[15] L. K. Clark、M. H. DiBenedetto、N. T. Ouellette 和 J. R. Koseff, 《波和水流对有限尺寸非球形颗粒的弥散作用》, 《流体力学杂志》**954**, A3（2023）。[16] K. Ma、N. Pujara 和 J.-L. Thiffeault, 《伸向水面：表面重力波中的椭球形微型游泳者》, 《物理评论：流体》**7**, 014310（2022）。[17] M. A. R. Koehl、J. A. Strother、M. A. Reidenbach、J. R. Koseff 和 M. G. Hadfield, 《湍流波驱动流中幼体向珊瑚礁输运的个体模型：对溶解态定居诱导物的行为响应》, 《海洋生态学进展丛书》**335**, 1（2007）。

[18] M. A. R. Koehl 和 M. A. Reidenbach, 《环境水流中微观生物的游动》, 《流体实验》**43**, 755（2007）。[19] H. L. Fuchs 和 G. P. Gerbi, 《浮游生物经历的湍流与波浪产生的流体动力信号的海景尺度变化》, 《海洋学进展》**141**，109（2016）。[20] F. M. Ventrella、G. B. Boffetta、M. Cencini、F. De Lillo、N. Pujara 和 J.-L. Thiffeault, 《剪切表面波中的微型游泳体捕获》, 预印本（2023）。[21] G. B. Jeffery, 《黏性流体中椭球颗粒的运动》, 《伦敦皇家学会会刊：A辑》**102**，161（1922）。[22] E. van Sebille、S. Aliani、K. L. Law、N. Maximenko、J. M. Alsina、A. Bagaev、M. Bergmann、B. Chapron、I. Chubarenko、A. C´ozar、P. Delandmeter、M. Egger、B. Fox-Kemper、S. P. Garaba、L. Goddijn-Murphy、B. D. Hardesty、M. J. Hoffman、A. Isobe、C. E. Jongedijk、M. L. A. Kaandorp、L. Khatmullina、A. A. Koelmans、T. Kukulka、C. Laufk¨otter、L. Lebre- ton、D. Lobelle、C. Maes、V. Martinez-Vicente、M. A. Morales Maqueda、M. Poulain-Zarcos、E. Rodr´ıguez、P. G. Ryan、A. L. Shanks、W. J. Shim、G. Suaria、M. Thiel、T. S. van den Bremer 和 D. Wichmann, 《漂浮海洋垃圾输运的物理海洋学》, 《环境研究快报》**15**, 023003（2020）。[23] L. Bergougnoux、G. Bouchet、D. Lopez 和 ´E. Guazzelli, 《低斯托克斯数下固体球形颗粒在胞状流场中的沉降运动》, 《流体物理学》**26**，093302（2014）。[24] D. Lopez 和 ´E. Guazzelli, 《涡流中纤维沉降的惯性效应》, 《物理评论：流体》**2**，24（2017）。[25] S. Agarwal、F. K. Chan、B. Rallabandi、M. Gazzola 和 S. Hilgenfeldt, 《微流控中一种未被认识到的流动曲率诱导惯性力》, 《美国国家科学院院刊》**118**，e2103822118（2021）。[26] J. Happel 和 H. Brenner，低雷诺数流体动力学：颗粒介质的特别应用（Martinus Nijhoff 出版社，1983）。

附录 A：粒子运动

在小惯性极限下（小型椭球体相对于背景流体速度缓慢运动，并相对于背景速度梯度缓慢旋转），颗粒运动方程为

$$0 = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} - (\rho_\mathrm{p} - \rho)\frac{\pi}{6}\, d_\mathrm{p}^2 \ell_\mathrm{p} g\, \boldsymbol{e}_z\,, \tag{A1a}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{p} + \lambda\big[\boldsymbol{S}\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\big]. \tag{A1b}$$

在平动方程 (A1a) 中，阻力与浮力相平衡。该方程涉及滑移速度 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$，即颗粒速度 $\boldsymbol{v}$ 与流体速度 $\boldsymbol{u}$ 之差；还涉及斯托克斯阻力张量 $\boldsymbol{K}$、颗粒直径 d_p、颗粒长度 ℓ_p、颗粒密度 ρ_p、流体密度 ρ 和重力加速度 g，其中 $\boldsymbol{e}_z$ 为指向与重力相反方向的单位向量。椭球体的转动方程 (A1b) 由 Jeffery [21] 推导，其中 $\boldsymbol{p}$ 是沿颗粒对称轴方向的单位向量，而 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 分别为流体旋转率张量和应变率张量。

在静止流体中，(A1a) 给出沉降速度矢量

$$\boldsymbol{w} = -(\rho_\mathrm{p} - \rho)\frac{\pi}{6} d_\mathrm{p}^2 \ell_\mathrm{p} g \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_z \tag{A2}$$

其中 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{K'} \boldsymbol{R}$ ， $\boldsymbol{R}$ 是将实验室坐标系转换到颗粒坐标系的旋转矩阵， $\boldsymbol{K'}$ 是颗粒坐标系中的阻力张量。对于椭球体， $\boldsymbol{K'}$ 是一个对角矩阵，由平行于（$K'_{\parallel}$）和垂直于（$K'_{\perp}$）颗粒对称轴的阻力系数组成。利用 $\boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{K'}^{-1} \boldsymbol{R}$，可以证明

$$\boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{e}_z = {K'_{\perp}}^{-1} \boldsymbol{e}_z + ({K'_{\parallel}}^{-1} - {K'_{\perp}}^{-1})(\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{p})\boldsymbol{p} \,. \tag{A3}$$

将 (A3) 代入 (A2)，得到椭球体的沉降速度矢量

$$\boldsymbol{w} = -v_{\mathrm{s}\perp} \boldsymbol{e}_z - (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})(\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{p})\boldsymbol{p} \tag{A4}$$

其中， $v_{\mathrm{s}\perp}$ 表示颗粒对称轴垂直于重力方向时的沉降速度， $v_{\mathrm{s}\parallel}$ 表示对称轴平行于重力方向时的沉降速度。沉降速度由一个完全沿重力方向的分量和一个沿对称轴方向的分量组成，而后者又可分解为平行和垂直于重力方向的分量。

颗粒坐标系中的阻力系数具有如下形式： $K'_{\perp}$， $K'_{\parallel}$ $=3\pi\rho\nu d_{\mathrm{p}} f$(AR)，其中形状函数 f (AR) 因长椭球和扁椭球颗粒而异，也因运动方向平行或垂直于颗粒对称轴而异。采用先前发表的形状函数 [第 5 章-11, 26], ，可得以下沉降速度表达式：

长椭球 $(\mathrm{AR} > 1)$**：**

$$v_{\mathrm{s}\parallel} = \frac{(\rho_{\mathrm{p}} - \rho) d_{\mathrm{p}} \ell_{\mathrm{p}} g}{18\rho\nu} \frac{3}{8} \left[-\frac{2\mathrm{AR}}{\mathrm{AR}^2 - 1} + \frac{2\mathrm{AR}^2 - 1}{(\mathrm{AR}^2 - 1)^{3/2}} \ln\left(\frac{\mathrm{AR} + \sqrt{\mathrm{AR}^2 - 1}}{\mathrm{AR} - \sqrt{\mathrm{AR}^2 - 1}} \right) \right], \tag{A5a}$$

$$v_{\mathrm{s}\perp} = \frac{(\rho_{\mathrm{p}} - \rho) d_{\mathrm{p}} \ell_{\mathrm{p}} g}{18\rho\nu} \frac{3}{8} \left[\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AR}^2 - 1} + \frac{2\mathrm{AR}^2 - 3}{(\mathrm{AR}^2 - 1)^{3/2}} \ln\Big(\mathrm{AR} + \sqrt{\mathrm{AR}^2 - 1} \Big) \right]. \tag{A5b}$$

扁椭球 $(\mathrm{AR} < 1)$**：**

$$v_{\mathrm{s}\parallel} = \frac{(\rho_{\mathrm{p}} - \rho) d_{\mathrm{p}} \ell_{\mathrm{p}} g}{18\rho\nu} \frac{3}{8} \left[\frac{2\mathrm{AR}}{1 - \mathrm{AR}^2} + \frac{2(1 - 2\mathrm{AR}^2)}{(1 - \mathrm{AR}^2)^{3/2}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \mathrm{AR}^2}}{\mathrm{AR}} \right) \right], \tag{A6a}$$

$$v_{\mathrm{s}\perp} = \frac{(\rho_{\mathrm{p}} - \rho) d_{\mathrm{p}} \ell_{\mathrm{p}} g}{18\rho\nu} \frac{3}{8} \left[-\frac{\mathrm{AR}}{1 - \mathrm{AR}^2} - \frac{2\mathrm{AR}^2 - 3}{(1 - \mathrm{AR}^2)^{3/2}} \sin^{-1}\Big(\sqrt{1 - \mathrm{AR}^2} \Big) \right]. \tag{A6b}$$

等体积球体的沉降速度为

$$v_{\mathrm{s,sphere}} = \frac{(\rho_{\mathrm{p}} - \rho)(V_{\mathrm{p}}/(\pi/6))^{2/3} g}{18\rho\nu} = \frac{(\rho_{\mathrm{p}} - \rho) d_{\mathrm{p}} \ell_{\mathrm{p}} g}{18\rho\nu} \mathrm{AR}^{-1/3} \tag{A7}$$

其中， V_{p} $=(\pi/6) d_{\mathrm{p}}^2 \ell_{\mathrm{p}}$ 为颗粒体积。

在论文正文中使用时，表达式 (A5)–(A7) 通过除以 (ω/k) 转换为无量纲形式。

附录 B：多尺度展开

粒子运动的常微分方程 (6) 为

$$\dot{x} = \varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{c}(z)\cos(x-t) - (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta, \tag{B1a}$$

$$\dot{y} = -(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\phi\cos\theta\sin\theta, \tag{B1b}$$

$$\dot{z} = \varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{s}(z)\sin(x-t) - v_{\mathrm{s}\perp} - (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos^2\phi\sin^2\theta, \tag{B1c}$$

$$\dot{\phi} = \lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\,[\mathrm{s}(z)\cos(x-t)\cos 2\phi - \mathrm{c}(z)\sin(x-t)\sin 2\phi], \tag{B1d}$$

$$\dot{\theta} = \lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\,[\mathrm{s}(z)\cos(x-t)\sin 2\phi + \mathrm{c}(z)\sin(x-t)\cos 2\phi]\sin\theta\cos\theta \tag{B1e}$$

其中回顾一下，$\mathrm{c}(z)$ 和 $\mathrm{s}(z)$ 已在式 (2) 中定义。我们对这些方程进行多尺度展开，其中 t 是波致振荡发生的快时间，$T = \epsilon^2 t$ 是波平均运动发生的慢时间。这里，ϵ 是一个充当定阶参数的小量。流体速度按 $\varepsilon_{\mathrm{w}} \to \epsilon\,\varepsilon_{\mathrm{w}}$ 重新缩放，粒子沉降速度按 $v_{\mathrm{s}} \to \epsilon^2 v_{\mathrm{s}}$ 重新缩放。将展开式和缩放代入式 (B1)，得到

$$\partial_t x + \epsilon^2\partial_T x = \epsilon\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{c}(z)\cos(x-t) - \epsilon^2(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta, \tag{B2a}$$

$$\partial_t y + \epsilon^2\partial_T y = -\epsilon^2(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\phi\cos\theta\sin\theta, \tag{B2b}$$

$$\partial_t z + \epsilon^2\partial_T z = \epsilon\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{s}(z)\sin(x-t) - \epsilon^2[v_{\mathrm{s}\perp} + (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos^2\phi\sin^2\theta], \tag{B2c}$$

$$\partial_t\phi + \epsilon^2\partial_T\phi = \lambda\,\epsilon\varepsilon_{\mathrm{w}}\,[\mathrm{s}(z)\cos(x-t)\cos 2\phi - \mathrm{c}(z)\sin(x-t)\sin 2\phi], \tag{B2d}$$

$$\partial_t\theta + \epsilon^2\partial_T\theta = \lambda\,\epsilon\varepsilon_{\mathrm{w}}\,[\mathrm{s}(z)\cos(x-t)\sin 2\phi + \mathrm{c}(z)\sin(x-t)\cos 2\phi]\sin\theta\cos\theta. \tag{B2e}$$

在 ϵ^0 阶，$\partial_t x_0 = \partial_t y_0 = \partial_t z_0 = \partial_t\phi_0 = \partial_t\theta_0 = 0$，这表明主阶解仅是慢时间尺度的函数：$x_0 = X(T)$、$y_0 = Y(T)$、$z_0 = Z(T)$、$\phi_0 = \Phi(T)$ 和 $\theta_0 = \Theta(T)$。

在 ϵ^1 阶，

$$\begin{aligned}
&\partial_t x_1 = \varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{c}(Z)\cos(X-t),\\
&\partial_t y_1 = 0,\\
&\partial_t z_1 = \varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{s}(Z)\sin(X-t),\\
&\partial_t\phi_1 = \lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\,[\mathrm{s}(Z)\cos(X-t)\cos 2\Phi - \mathrm{c}(Z)\sin(X-t)\sin 2\Phi],\\
&\partial_t\theta_1 = \tfrac{1}{2}\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\sin 2\Theta\,[\mathrm{s}(Z)\cos(X-t)\sin 2\Phi + \mathrm{c}(Z)\sin(X-t)\cos 2\Phi].
\end{aligned}$$

我们根据波周期平均 $((1/2\pi)\int_0^{2\pi} dt)$ 必须为零这一要求进行积分；由此得到一阶解，它们是在快时间尺度上的主导阶振荡运动：

$$x_1 = -\varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{c}(Z)\sin(X-t), \tag{B3a}$$

$$y_1 = 0, \tag{B3b}$$

$$z_1 = \varepsilon_{\mathrm{w}}\,\mathrm{s}(Z)\cos(X-t), \tag{B3c}$$

$$\phi_1 = -\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}[\mathrm{s}(Z)\sin(X-t)\cos 2\Phi + \mathrm{c}(Z)\cos(X-t)\sin 2\Phi], \tag{B3d}$$

$$\theta_1 = \tfrac{1}{2}\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}[\mathrm{c}(Z)\cos(X-t)\cos 2\Phi - \mathrm{s}(Z)\sin(X-t)\sin 2\Phi]\sin 2\Theta. \tag{B3e}$$

在 ϵ^2 阶，

$$\partial_t x_2 + \partial_T X = \varepsilon_{\mathrm{w}}\big[\mathrm{s}(Z)\cos(X-t)\,z_1 - \mathrm{c}(Z)\sin(X-t)\,x_1\big]$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp}) \sin\Phi\cos\Phi\sin^2\Theta,\\
\partial_t y_2 + \partial_T Y &= -(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp}) \cos\Phi\cos\Theta\sin\Theta,\\
\partial_t z_2 + \partial_T Z &= \varepsilon_{\mathrm{w}}\big[\mathrm{s}(Z)\cos(X-t)\,x_1 + \mathrm{c}(Z)\sin(X-t)\,z_1\big]\\
&\quad - [v_{\mathrm{s}\perp} + (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos^2\Phi\sin^2\Theta],\\
\partial_t \phi_2 + \partial_T \Phi &= \lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\Big[\mathrm{s}(Z)\big[-2\sin 2\Phi\cos(X-t)\,\phi_1\\
&\qquad - \sin(X-t)(\sin 2\Phi\, z_1 + \cos 2\Phi\, x_1)\big]\\
&\qquad + \mathrm{c}(Z)\big[-2\cos 2\Phi\sin(X-t)\,\phi_1\\
&\qquad + \cos(X-t)(\cos 2\Phi z_1 - \sin 2\Phi\, x_1)\big]\Big],\\
\partial_t \theta_2 + \partial_T \Theta &= \tfrac{1}{2}\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{w}}\Big[\mathrm{s}(Z)\big[2\cos(X-t)(\cos 2\Theta\sin 2\Phi\,\theta_1 + \sin 2\Theta\cos 2\Phi\,\phi_1)\\
&\qquad - \sin 2\Theta\sin(X-t)(\sin 2\Phi\, x_1 - \cos 2\Phi\, z_1)\big]\\
&\qquad + \mathrm{c}(Z)\big[2\sin(X-t)(\sin 2\Theta\sin 2\Phi\,\phi_1 - \cos 2\Theta\cos 2\Phi\,\theta_1)\\
&\qquad + \sin 2\Theta\cos(X-t)(\cos 2\Phi\, x_1 + \sin 2\Phi\, z_1)\big]\Big].
\end{aligned}
$$

将 (B3) 代入上述表达式，并通过波平均消除快速振荡，可得到慢时间尺度上的波平均粒子运动 (7)：

$$\partial_T X = \varepsilon_{\mathrm{w}}^2\,\mathrm{C}(Z) - (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\Phi\sin\Phi\sin^2\Theta, \tag{B4a}$$
$$\partial_T Y = -(v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos\Phi\sin\Theta\cos\Theta, \tag{B4b}$$
$$\partial_T Z = -[v_{\mathrm{s}\perp} + (v_{\mathrm{s}\parallel} - v_{\mathrm{s}\perp})\cos^2\Phi\sin^2\Theta], \tag{B4c}$$
$$\partial_T \Phi = \lambda\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\,\mathrm{S}(Z)(\lambda + \cos 2\Phi), \tag{B4d}$$
$$\partial_T \Theta = \lambda\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\,\mathrm{S}(Z)\sin 2\Phi\sin\Theta\cos\Theta, \tag{B4e}$$

其中，函数 C(Z) 和 S(Z) 已在（8）中定义。

为求得二阶解，我们从 ϵ^2 方程中减去 (B4)，得到

$$
\begin{aligned}
\partial_t x_2 &= -\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\frac{\cos 2(X-t)}{2\cosh^2 kh},\\
\partial_t y_2 &= 0,\\
\partial_t z_2 &= 0,\\
\partial_t \phi_2 &= -\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\mathrm{S}(Z)\lambda^2\cos 2(X-t)\cos 4\Phi + \lambda^2\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\mathrm{C}(Z)\sin 2(X-t)\sin 4\Phi\\
&\quad + \varepsilon_{\mathrm{w}}^2\frac{\sin 2(X-t)}{2\cosh^2 kh}\sin 2\Phi,\\
\partial_t \theta_2 &= \frac{1}{16}\lambda\frac{\varepsilon_{\mathrm{w}}^2}{\cosh^2 kh}\Big[\lambda\sin 2(X-t)\sin 4\Theta\,(1 + \cos 4\Theta\cosh 2(Z+kh))\\
&\quad + 4\sin 2(X-t)\sin 2\Theta\,(\lambda - \cos 2\Phi - 4\cos 4\Phi\cosh 2(Z+kh))\Big]\\
&\quad + \varepsilon_{\mathrm{w}}^2\frac{\sin 2(X-t)}{2\cosh^2 kh}\sin 2\Phi + \tfrac{1}{8}\lambda^2\varepsilon_{\mathrm{w}}^2\,\mathrm{C}(Z)\sin 2(X-t)\sin 4\Theta.
\end{aligned}
$$

积分　结合波周期平均必须为零的要求，得到　s

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{w}}^2 \frac{\sin 2(X-t)}{2\cosh^2 kh}, \tag{B5a}$$

$$y_2 = 0, \tag{B5b}$$

$$z_2 = 0, \tag{B5c}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 = \tfrac{1}{2}\lambda \frac{\varepsilon_{\mathrm{w}}^2}{2\cosh^2 kh}\Bigg[& \cos 2(X-t)\big[\lambda \sin 4\Phi \cosh 2(Z+kh) + \sin 2\Phi\big] \\ & + \lambda \cos 4\Phi \sinh 2(Z+kh) \sin 2(X-t)\Bigg],\end{aligned} \tag{B5d}$$

$$\begin{aligned}\theta_2 = \frac{1}{16}\lambda \frac{\varepsilon_{\mathrm{w}}^2}{2\cosh^2 kh}\Bigg[& 2\sin 2\Theta \cos 2(X-t)\big[\lambda(\cos 2\Theta + 2) - 2\cos 2\Phi\big] \\ & + \lambda(4\sin 2\Theta - \sin(4\Theta))\times \\ & \big[\sin 4\Phi \sinh 2(Z+kh)\sin 2(X-t) - \cos 4\Phi \cosh 2(Z+kh)\cos 2(X-t)\big]\Bigg].\end{aligned} \tag{B5e}$$

对于完整动力学的一组给定初始条件，可以通过以下步骤推导出波平均动力学中的等效初始条件：首先写出在 $t = 0$（例如 $x(0) = X(0) + \epsilon x_1(0) + \epsilon^2 x_2(0) + ...$）处的展开式，然后代入波平均初始条件的展开式（例如 $X(0) = X_0(0) + \epsilon X_1(0) + \epsilon^2 X_2(0) + ...$），最后收集相同阶数的项，以找出波平均初始条件展开式中的各项（例如，$X_1(0)$、$X_2(0)$）与完整系统初始条件之间的关系。对每个变量执行上述操作，可得到以下将完整系统初始条件投影到波平均系统中的结果（在 $O(\epsilon^2)$ 阶精度下）：

$$X = x + \varepsilon_{\mathrm{w}}\, \mathrm{c}(z)\sin x + \frac{3}{4}\varepsilon_{\mathrm{w}}^2 \frac{\sin 2x}{\cosh^2 kh}, \tag{B6a}$$

$$Y = y, \tag{B6b}$$

$$Z = z - \varepsilon_{\mathrm{w}}\, \mathrm{s}(z)\cos x + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{w}}^2 \frac{\sinh(2(z+kh))}{\cosh^2 kh}, \tag{B6c}$$

$$\begin{aligned}\Phi = \phi + \lambda \frac{\varepsilon_{\mathrm{w}}}{\cosh kh}\big[\cos 2\phi \sin x \sinh(z+kh) + \sin 2\phi \cos x \cosh(z+kh)\big] \\ - \frac{1}{2}\lambda \frac{\varepsilon_{\mathrm{w}}^2}{2\cosh^2 kh}\Bigg[& 4\cosh^2(z+kh)\big(\sin 2\phi \sin^2 x - \lambda \sin 4\phi \cos^2 x\big) \\ & - \lambda \cos 4\phi \sin 2x \sinh(2(z+kh)) + \lambda \sin 4\phi(\cosh(2(z+kh)) + \cos 2x - 1) \\ & + \sin 2\phi\big(4\cos^2 x \sinh^2(z+kh) + \cos 2x\big)\Bigg],\end{aligned} \tag{B6d}$$

$$\begin{aligned}\Theta = \theta - \tfrac{1}{2}\lambda \frac{\varepsilon_{\mathrm{w}}}{\cosh kh}\sin 2\theta\big[\cos 2\phi \cos x \cosh(z+kh) - \sin 2\phi \sin x \sinh(z+kh)\big] \\ + \frac{1}{32}\lambda \frac{\varepsilon_{\mathrm{w}}^2}{\cosh^2 kh}\Bigg[& \lambda \sin 4\phi \sin 2x \sinh(2(z+kh))(4\sin 2\theta - \sin 4\theta) \\ & + 8\sinh^2(z+kh)\big(\lambda \sin 4\theta \sin^2 2\phi \sin^2 x + 2\sin 2\theta \cos 2\phi\big(2\lambda \cos 2\phi \sin^2 x + \cos^2 x\big)\big) \\ & + 8\cosh^2(z+kh)\big(4\lambda \sin 2\theta \sin^2 2\phi \cos^2 x + \lambda \sin 4\theta \cos^2 2\phi \cos^2 x + 2\sin 2\theta \cos 2\phi \sin^2 x\big)\end{aligned}$$

$+\lambda(4\sin 2\theta - \sin 4\theta)\cos 4\phi\cos 2x\cosh(2(z+kh)) - 2\sin 2\theta\cos 2x(\lambda(\cos 2\theta + 2) - 2\cos 2\phi)\Big]$, (B6e)

其中隐含了初始条件（即，$X = X(0)$、$x = x(0)$、$z = z(0)$ 等）